

درس ۲ احتمال غیر هم‌شانس



نتایج بسیاری از آزمایش‌ها و اتفاق‌هایی که در آینده رخ می‌دهند، از قبل مشخص نیست، ولی می‌توان شانس یا احتمال وقوع آنها را از قبل تعیین کرد؛ مثلاً در پرتاب یک تاس سالم، شانس مشاهده هر کدام از اعداد با یکدیگر برابر است، ولی در مسابقه‌های گروهی، شانس قهرمانی

تیم‌ها، لزوماً با یکدیگر برابر نیست. قبل از برگزاری جام جهانی ۲۰۱۴ فوتبال، شانس قهرمانی تیم‌ها به صورت زیر مشخص شده بود:

تیم	برزیل	آرژانتین	آلمان	اسپانیا	بلژیک	فرانسه	کلمبیا	هلند	بقیه تیم‌ها
احتمال قهرمانی	۰/۲۵	۰/۱۸۱	۰/۱۶۶	۰/۱۲۵	۰/۰۶۶	۰/۰۴۷	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۷۹

و جالب این است که چهار تیم راه یافته به مرحله نیمه نهایی، از هشت تیم نخست جدول فوق بودند. دنیای پیرامون ما سرشار از پیشامدهای غیرهم‌شانس است. به نظر شما احتمال بارش باران و آفتابی بودن هوا در تمام روزهای سال با یکدیگر برابر است؟

فعالیت



یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی‌مانده عدد ۳ مشاهده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم،

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

$$S = \{ \dots, \dots, \dots \}$$

۲ با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این تاس قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به دست آورید.

$$A = \{1\} \Rightarrow P(A) = \frac{\dots}{\dots}$$

آیا می‌توانید از رابطه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟ چرا؟
 هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را **یک پیشامد ساده** می‌گوییم. در پیشامدهای ساده، معمولاً به جای، $P(\{a\})$ می‌نویسیم $P(a)$.

۳ مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجوهی از تاس که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده است، احتمال وقوع پیشامدهای ساده $B = \{2\}$ و $C = \{3\}$ را به دست آورید.

$$P(2) = \frac{\dots}{\dots}, \quad P(3) = \frac{\dots}{\dots}$$

۴ آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A ، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید

۵ به کمک نتایج قسمت‌های قبل، مجموع تمام پیشامدهای ساده را به دست آورید.

$$P(1) + P(2) + P(3) = \dots + \dots + \dots = \dots$$

۶ اگر $D = \{1, 2\}$ پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در پرتاب تاس باشد، $P(D)$ را به دست آورید. این مقدار را با $P(1) + P(2)$ مقایسه کنید.

همان‌طور که در فعالیت بالا مشاهده می‌کنید، در فضای نمونه‌ای S ، احتمال وقوع پیشامدهای ساده با یکدیگر برابر نیستند.

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با **احتمال غیرهم‌شانس** می‌گوییم.

در احتمال غیرهم‌شانس نیز مانند احتمال هم‌شانس که در سال‌های گذشته خوانده‌ایم، خواص زیر برقرارند:

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad 1$$

$$P(S) = 1 \quad 2$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad 3$$

با استفاده از خاصیت (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه زیر را بگیریم:

$$P(S) = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_n) = 1$$

مثال: در یک مسابقه چهارجانبه فوتبال، تیم‌های a ، b ، c و d حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم‌های a ، b ، c و d به ترتیب $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ باشد، احتمال قهرمانی تیم‌های a ، b ، c و d چقدر است؟

یکدیگر برابر باشند، ولی احتمال قهرمانی تیم d ، دو برابر هر یک از تیم‌های دیگر باشد، احتمال قهرمانی هر یک از تیم‌ها را به دست می‌آوریم.

فرض کنید احتمال قهرمانی تیم a ، x باشد، یعنی $P(a) = x$. از آنجایی که شانس قهرمانی تیم‌های a ، b و c برابرند، پس $P(b) = P(c) = x$ از سوی دیگر احتمال قهرمانی تیم d ، دو برابر تیم‌های دیگر است، پس $P(d) = 2P(a) = 2x$. با توجه به اینکه فضای نمونه‌ای در این مسئله $S = \{a, b, c, d\}$ است. بنابراین

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$$

با جای گذاری احتمال‌های بالا بر حسب x ، به تساوی $x + x + x + 2x = 1$ می‌رسیم. پس $5x = 1$ و در نتیجه $x = \frac{1}{5}$. بنابراین، احتمال قهرمانی هر یک از تیم‌ها عبارت است از: $P(a) = P(b) = P(c) = \frac{1}{5}$ و $P(d) = \frac{2}{5}$.

کار در کلاس

۱ در یک آزمایش تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x, y\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{x, z\}) = \frac{1}{3}$ ، احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را به دست آورید.

حل:

با توجه به اینکه x ، y و z همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند. بنابراین $P(x) + P(y) + P(z) = 1$. همچنین با توجه به فرض $P(\{x, y\}) = \frac{2}{3}$ ، پس $P(x) + P(y) = \frac{2}{3}$ ، بنابراین با توجه به تساوی بالا، $P(z) = \frac{1}{3}$. از سوی دیگر، $P(\{x, z\}) = \frac{1}{3}$ ، پس $P(x) + P(z) = \frac{1}{3}$. از قرارداد $P(z) = \frac{1}{3}$ در این تساوی $P(x) = \frac{0}{3}$ به دست می‌آید. اکنون این مقدار را در تساوی $P(x) + P(y) = \frac{2}{3}$ قرار دهید و مقدار $P(y)$ را به دست آورید: $P(y) = \frac{2}{3}$.

۲ یک تاس به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را به دست آورید.

در این سؤال، $P(a) = 3P(b)$ که در آن a یک عدد زوج و b یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. بنابراین $P(۱) = P(۳) = \dots$ و همچنین $P(۲) = P(۴) = \dots$ (چرا؟) حال اگر $P(۱) = x$ ، سپس $P(۲) = 3x$. از رابطه زیر استفاده کرده و با جای گذاری احتمال پیشامدهای ساده بر حسب x ، مقدار x را به دست آورید.

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + 3x + \dots + \dots + \dots + \dots = 1$$

$$\Rightarrow x = \dots$$

اکنون با محاسبه $P(2)$ و $P(3)$ می‌توانید $P(\{2, 3\})$ را تعیین کنید.

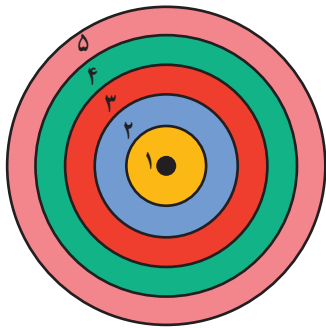
$$P(\{2, 3\}) = \dots + \dots = \dots$$

۱ در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

۳ اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c, d\}$ ، و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C)$ را به دست آورید.

۴ در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.



۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است^۱، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول، x باشد.

اگر احتمال اصابت به ناحیه k ، m ، $(2k-1)x$ باشد:

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا

اصابت به دو ناحیه دوم یا پنجم؟

۱- مرز مشترک بین دو ناحیه را جزء ناحیه کوچک‌تر محسوب کنید.