

تبدیل‌های هندسی و کاربردها



عکس: محمدرضا دومیری گانجی

تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم‌نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به‌کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیرالملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.

تبدیل‌های هندسی

در زندگی روزمره و بسیاری از پدیده‌های اطرافمان نظیر طراحی پارچه، نقش فرش، کاشی‌کاری، گچ‌بری و... شکل‌های مختلف، طبق الگویی خاص تکرار می‌شود. در این فصل وضعیت‌های مختلفی را که هر شکل مشخص در اثر حرکت مجموعه نقاط در صفحه پیدا می‌کند، مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

این حرکت‌ها می‌تواند دارای ویژگی‌های خاص قابل تعریف باشد؛ حرکاتی که سال‌های قبل با نمونه‌هایی از آن آشنا شده‌اید و با توجه به نوع این ویژگی‌ها، آنها را انتقال، بازتاب (تقارن محوری) یا دوران نامیده‌اید. انتقال، بازتاب و دوران را تبدیل‌های هندسی می‌نامیم.

تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب می‌تواند **موقعیت**^۱ (جایگاه شکل در صفحه) یا **اندازه**^۲ شکل را تغییر دهد.
تبدیل یافته یک شکل را، **تصویر** آن می‌نامیم.

در سال‌های گذشته با مفاهیم بازتاب، انتقال و دوران تا حدودی آشنا شدید. در این فعالیت، این تبدیل‌ها و برخی ویژگی‌های آنها را به‌طور شهودی مرور و یادآوری خواهیم کرد.

فعالیت

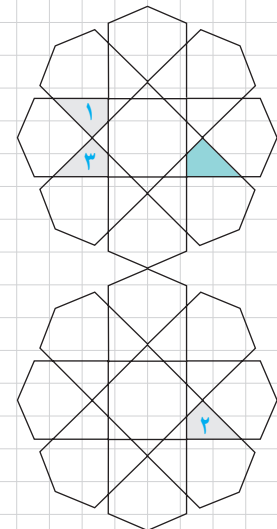
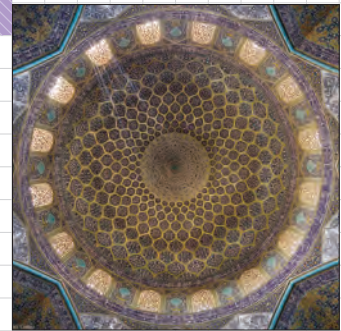
۱- به تصویر روبه‌رو دقت کنید.

اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافته چهارضلعی رنگ شده بدانیم:

الف) کدام چهارضلعی، انتقال یافته چهارضلعی رنگ شده است؟

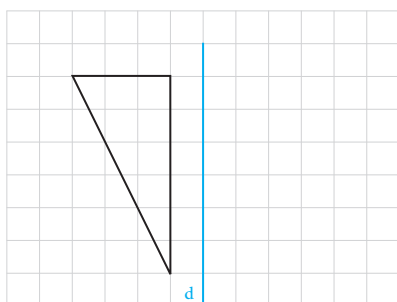
ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ شده است؟

پ) کدام شکل، دوران یافته شکل رنگ شده است؟



۱ - Position

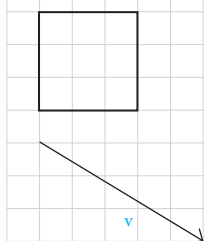
۲ - Size



۲- الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.
 توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟
 اندازه‌ها را چطور؟

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟
 ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

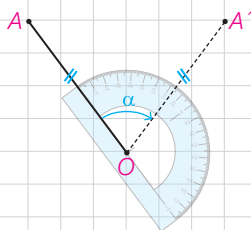


۳- الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید).

در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟
 اندازه‌ها را چطور؟

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟
 ت) آیا با انجام این تبدیل اندازه زاویه‌ها ثابت می‌ماند؟



۴- در سال‌های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α ، کافی است هر نقطه از شکل، مثل نقطه A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره‌خطی به اندازه OA جدا کنیم تا نقطه A' به دست آید.

می‌خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O ، 90° درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B را دوران داده‌ایم.

الف) به همین ترتیب تصویر نقطه C را پیدا، و شکل را کامل کنید.

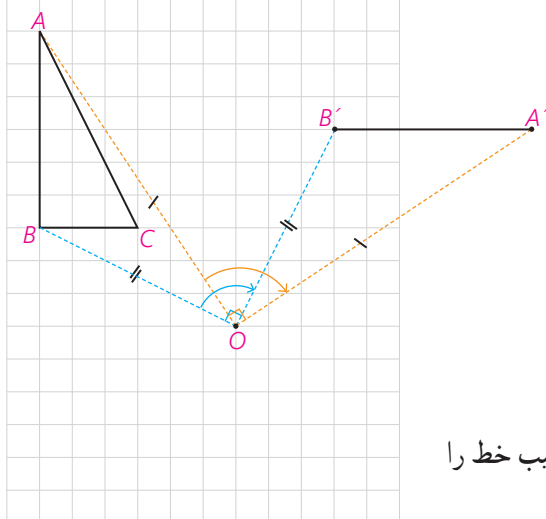
ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟
 اندازه‌ها را چطور؟

پ) آیا در این تبدیل، همواره شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط

تصویر آن برابر است؟

ت) آیا می‌توانید زاویه دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را

حفظ کند؟



به طور شهودی می‌توان دید که بازتاب، انتقال و دوران، می‌توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه پاره‌خطها و زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهند.

در ادامه این فصل با تبدیلی آشنا خواهید شد که در آن اندازه زاویه‌ها حفظ می‌شود ولی برخلاف سه تبدیل صفحه قبل، اندازه پاره‌خطها می‌تواند تغییر کند. این تبدیل را **تجانس** می‌نامیم. حال که به طور شهودی، برخی ویژگی‌های تبدیلی‌های مختلف را مرور کردیم در ادامه با دقت بیشتری به تعریف تبدیل، معرفی، ویژگی‌ها و کاربردهای آن خواهیم پرداخت.

تعریف: تبدیل T در صفحه P، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از همان صفحه نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطه A' از صفحه P، تصویر دقیقاً یک نقطه A از همان صفحه است. اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می‌نویسیم:

$$T: P \rightarrow P$$

$$T(A) = A'$$

پیش از این به طور شهودی دریافتیم که بازتاب، انتقال و دوران طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند؛ یعنی اندازه پاره‌خطی مثل AB در شکل اولیه با اندازه پاره خط A'B' در تصویر آن برابر است. این ویژگی را اصطلاحاً **طولپایی** یا **ایزومتري** می‌نامیم.

تعریف: تبدیلی‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، **تبدیلات طولپا** (ایزومتري) نامیده می‌شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ ، آن‌گاه داریم: $AB = A'B'$

پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که در تبدیلی‌هایی که مرور شد، اندازه زاویه حفظ می‌شود. در این فعالیت برای تبدیلات طولپا این ادعا را اثبات می‌کنیم و در ادامه طولپا بودن بازتاب، انتقال و دوران را به طور دقیق‌تر مورد بررسی قرار خواهیم داد.

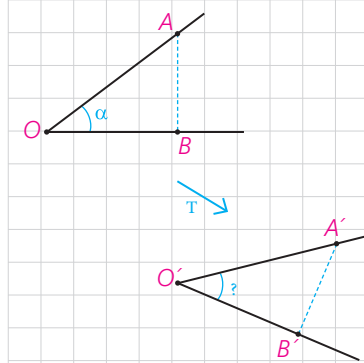
فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می‌کند. فرض کنید T تبدیلی طولپاست. و داریم:

$$T(A) = A'$$

$$T(B) = B'$$

$$T(O) = O'$$



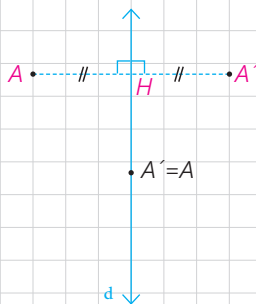
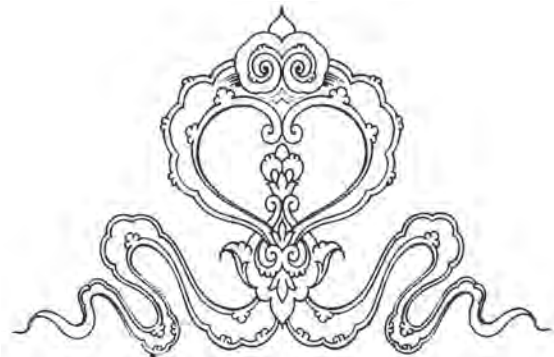
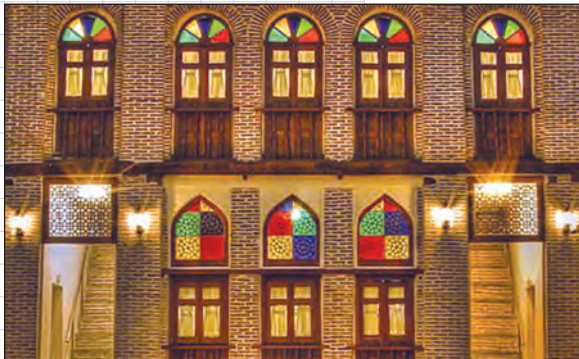
دلیل همنهشتی دو مثلث OAB و $O'A'B'$ را بنویسید و از آنجا برابری زاویه‌های AOB و $A'O'B'$ را نتیجه بگیرید.
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

قضیه: در هر تبدیل طولی، تبدیل‌یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است.

در تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب، می‌توان ثابت کرد که تبدیل‌یافته هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل‌یافته یک خط، کافی است تبدیل‌یافته دو نقطه دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم. این مطلب برای یک پاره‌خط هم صادق است. کافی است تبدیل‌یافته دو نقطه ابتدا و انتهای پاره‌خط را به دست آوریم و به هم وصل کنیم^۱.

حال با استدلال دقیق‌تری بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را بررسی خواهیم کرد.

بازتاب



همان‌طور که پیش از این اشاره شد برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید.

در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم:
 $S(A) = A'$

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره AA' خواهد بود.
خط d ، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می‌شود.

۱- اثبات این مطلب که تبدیل یافته یک خط (یک پاره‌خط)، یک خط (یک پاره‌خط) است، جزء اهداف درسی این کتاب نیست و برای نشان دادن این مطلب، استناد به همین کادر کافی است.

اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.

تعریف: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، **نقطه ثابت تبدیل** می‌نامند.

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

فعالیت

می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیلی طولپا است. حالت‌های مختلف یک پاره خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازه پاره خط با اندازه تصویر آن برابر است.

الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است. بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم.

چهارضلعی $ABA'B'$ چه چهارضلعی است؟ چرا؟

طول پاره خط‌های AB و $A'B'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد.

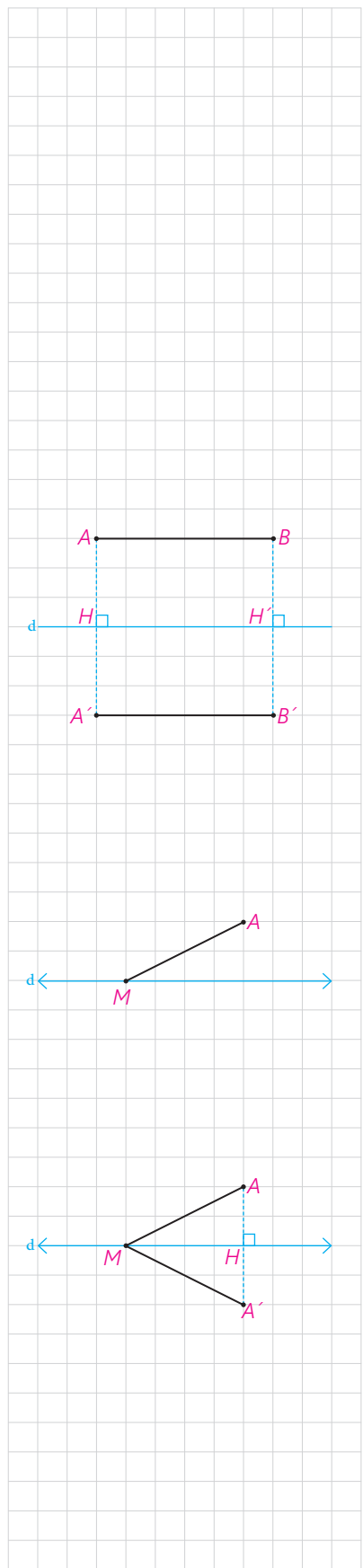
(اگر هر دو نقطه ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)

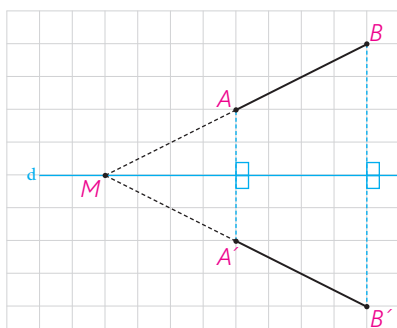
بازتاب A نسبت به خط d ، نقطه A' و بازتاب M ، خود M است.

به عبارتی: $S(M) = M$ و $S(A) = A'$

آیا می‌توانید به کمک هم نهستی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA = MA'$ ارائه کنید؟

آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره خط کمک بگیرید.)

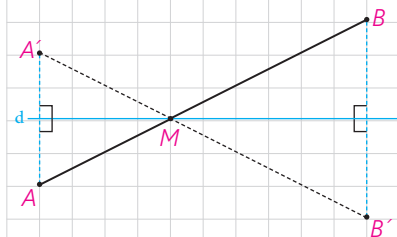




(پ) در حالتی که پاره خط AB با خط بازتاب d ، نه موازی و نه متقاطع باشد، پاره خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطه M قطع کند. نقطه B' بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا، و پاره خط MB' را رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط MB' واقع می‌شود؛ چرا؟

حال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = MB - \dots\dots \\ A'B' = \dots\dots - \dots\dots \\ MA = \dots\dots \text{ و } MB = \dots\dots \text{ با توجه به قسمت ب} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots = \dots\dots$$



(ت) در حالتی که پاره خط AB خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را نقطه A' می‌نامیم. پاره خط MA' را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟

حال داریم:

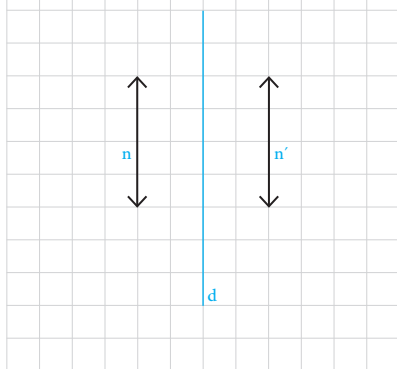
$$\left. \begin{array}{l} AB = AM + \dots\dots \\ A'B' = \dots\dots + \dots\dots \\ AM = \dots\dots \text{ و } MB = \dots\dots \text{ با توجه به قسمت ب} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots = \dots\dots$$

تذکر: حالتی که پاره خط AB بر خط بازتاب عمود است، به‌عنوان تمرین به شما واگذار شده است.

نتیجه این مراحل را می‌توان در قالب این قضیه بیان کرد:

قضیه: در هر بازتاب، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

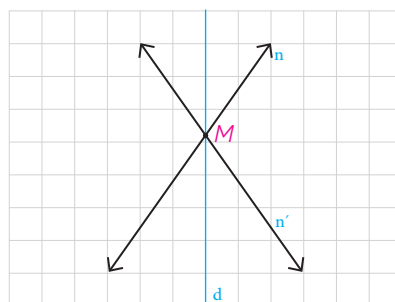
به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که بازتاب، تبدیلی طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$



فعالیت

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می‌کند. مسئله را برای سه حالت کلی در نظر می‌گیریم: وقتی خط داده شده با خط بازتاب موازی باشد، وقتی عمود باشد و وقتی نه عمود باشد و نه موازی. الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n' می‌نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟ آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند؟

ب) اگر خط n بر خط بازتاب d عمود باشد، تصویر آن تحت بازتاب چگونه خواهد بود؟
 آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند؟
 پ) اگر خط n با خط بازتاب d عمود و موازی نباشد، خط‌های n و n' در نقطه‌ای مثل M متقاطع می‌شوند؛ پس n و n' موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را بنابراین؛



در حالت کلی، بازتاب شیب خط را

دیدیم که طولیها اندازه زاویه را هم حفظ می‌کنند. بنابراین به‌طور کلی هر چندضلعی و تصویر آن تحت تأثیر یک طولیها از جمله بازتاب با هم هم‌نهشت هستند.

کاردکلاس

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :

الف) وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به خط d ، کدام نقطه است؟ چرا؟

ب) قرینه قرینه هر نقطه چیست؟

در واقع : $S(S(A)) = S(\dots) = \dots$ و به زبان ساده‌تر $(A')' = \dots$

پ) در هر بازتاب تبدیل یافته یک مثلث، یک است که با مثلث اولیه است.

ت) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافته تمام نقاط روی خط، است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب است.

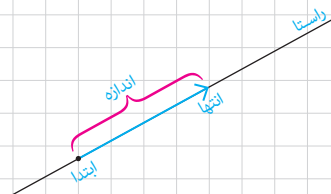
در ادامه به کمک ویژگی‌های انتقال و دوران ثابت می‌کنیم که این دو تبدیل نیز طولیها هستند.

انتقال

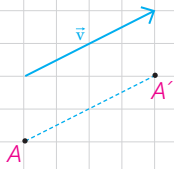
یادآوری



- ۱- در شکل مقابل یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.
- ۲- دو بردار، که هم‌اندازه، هم راستا و هم‌جهت باشند، دو بردار برابر هستند.



در سال‌های گذشته دیدید که برای انتقال دادن یک شکل، کافی است تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم؛ یعنی اگر نقطه A' تصویر نقطه A باشد، آن‌گاه $\vec{AA'} = \vec{v}$

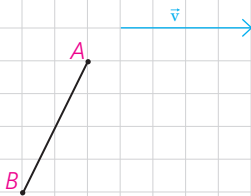


تعریف: انتقال T تحت بردار \vec{v} ، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\vec{AA'} = \vec{v}$

فعالیت

۱- می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولی است.

الف) اگر پاره خط AB با بردار \vec{v} موازی نباشد، تبدیل یافته AB را با بردار \vec{v} رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید: $AB = A'B'$.
راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

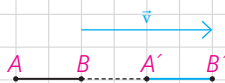


ب) اگر پاره خط AB با بردار \vec{v} موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید: $AB = A'B'$.
(۱)



$$\left. \begin{array}{l} AB = AA' + \dots \\ A'B' = \dots + \dots \\ AA' = \dots \text{ طبق تعریف انتقال} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots = \dots$$

(۲)



$$\left. \begin{array}{l} AB = AA' - \dots \\ A'B' = \dots - \dots \\ AA' = \dots \text{ طبق تعریف انتقال} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots = \dots$$

تذکر: در حالتی که طول بردار v با پاره خط AB برابر است به کمک هر یک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

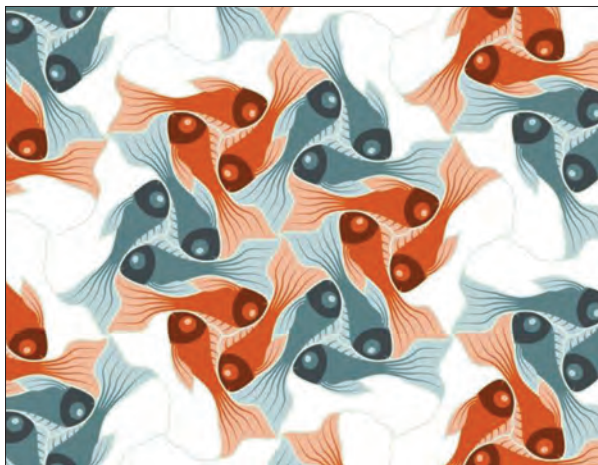
بنابراین:

قضیه: در هر انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولی است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

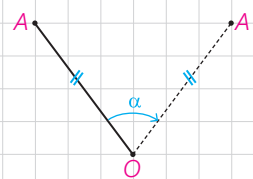
۲- در هر یک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

دوران



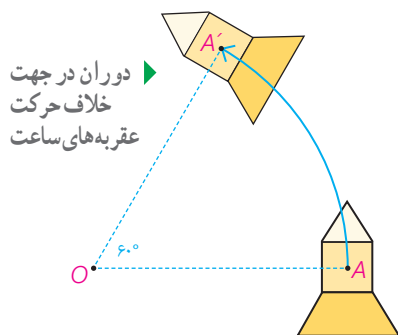
دیدیم که برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α ، هر نقطه از شکل، مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می‌کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم کرده، و روی ضلع دیگر این زاویه، پاره خطی به اندازه OA جدا می‌کنیم تا A' به دست آید.

بدین ترتیب :

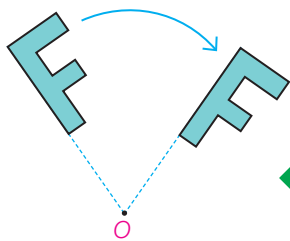


تعریف: دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم:

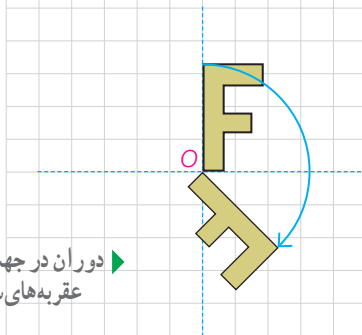
$$OA = OA' \text{ و } \widehat{AOA'} = \alpha$$



دوران در جهت
خلاف حرکت
عقربه‌های ساعت

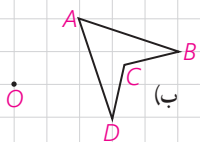
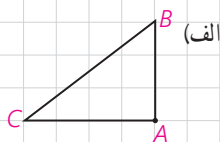
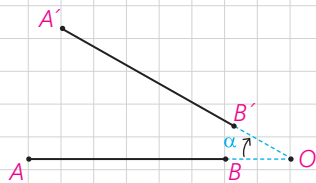
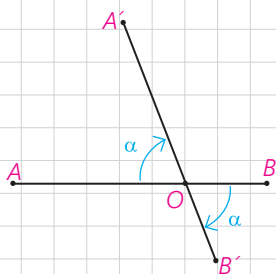
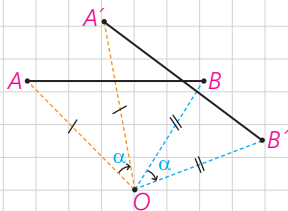
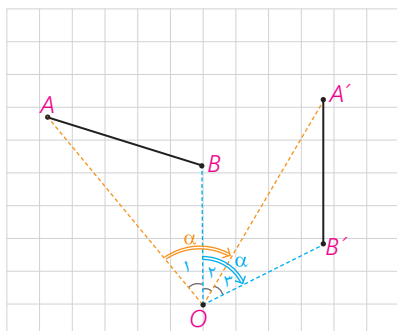


دوران در جهت حرکت
عقربه‌های ساعت



فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیلی طولیاست.
برای دوران دادن هر پاره خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A' و B' حاصل شود و پاره خط $A'B'$ را رسم کنیم.



مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم :

(الف) مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه \widehat{AOB} بیشتر باشد.

با توجه به شکل $O_1 + \dots = O_2 + \dots = \alpha$

پس می‌توان مدعی شد که $\dots = \dots$

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و OA'B' نشان دهید AB و A'B' هم اندازه‌اند.

(ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره خط AB واقع نباشد ولی زاویه دوران از زاویه \widehat{AOB} کمتر باشد، باز هم تساوی $AB = A'B'$ برقرار است.

تذکر: در حالتی که \widehat{AOB} با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.

(پ) اگر نقطه O روی پاره خط AB باشد :

$$AB = AO + \dots$$

$$A'B' = \dots + \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AO + \dots \\ A'B' = \dots + \dots \\ AO = \dots \text{ و } OB = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \dots = \dots$$

(ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطه O روی امتداد پاره خط AB باشد، حکم

برقرار است.

بنابراین :

قضیه: در هر دوران، اندازه هر پاره خط و تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیلی طولی است و برای هر دو نقطه A

و B از صفحه P که $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

کاردکلاس

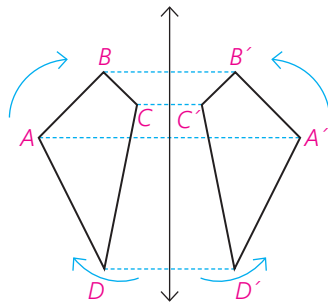
دوران یافته هر شکل را رسم کنید.

(الف) دوران به مرکز A و با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

(ب) دوران به مرکز O و با زاویه 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت

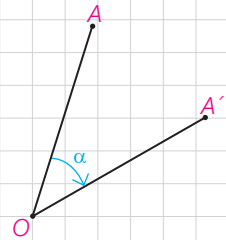
۱- در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، $A'B'$ هم اندازه‌اند.

۲- در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی محدب $ABCD$ تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B ، C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟

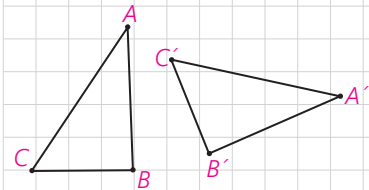


۳- به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) در شکل مقابل نقطه A' دوران یافته نقطه A در دوران به مرکز O و زاویه α است. نشان دهید عمود منصف AA' از نقطه O می‌گذرد.



ب) اگر بدانیم $A'B'C'$ دوران یافته ABC است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟

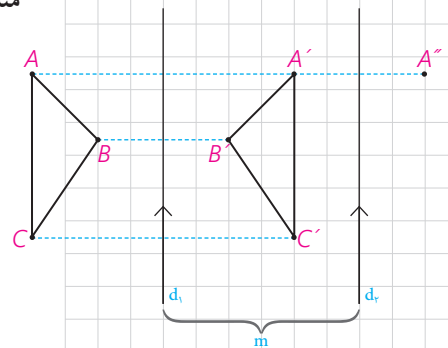


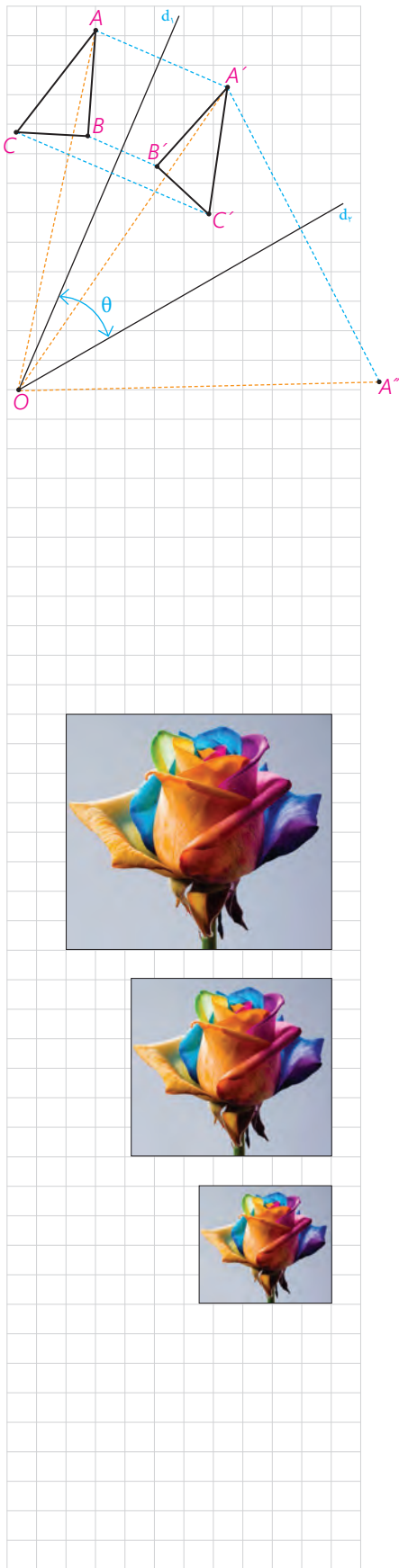
۴- در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA'' = 2m$

ب) اندازه BB'' و CC'' چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟





۵- در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = 2\theta$

ب) اندازه $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶- نقطه A به فاصله $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب

نسبت به خط d ، نقطه A' می‌نامیم. نقطه A را حول نقطه A' به اندازه 120° درجه دوران می‌دهیم تا نقطه A'' حاصل شود. طول پاره خط AA'' را محاسبه کنید.

۷- نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = 16$ و نقطه O

روی خط l و $OA = 10$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است؟

تجانس

در شکل‌های مشابه دیدید که طول پاره‌خط‌ها الزاماً با هم یکسان نیستند؛ اما با یک نسبت، اندازه همه پاره‌خط‌ها بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شوند. ساده‌ترین تبدیل از این نوع را تجانس می‌نامیم. در تجانس ابعاد شکل با نسبت $k \neq 0$ ، آن را نسبت تجانس (مقیاس) می‌نامیم، بزرگ یا کوچک می‌شود.

تعریف دقیق‌تر تجانس بدین شکل است:

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M'

را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوئیم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه O ، M ، و M' روی یک خط راست باشند.

ب) $OM' = |k| \cdot OM$

- اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

مثال: $OM' = 2 \cdot OM$ $k = 2$

مثال: $OM' = \frac{1}{2} \cdot OM$ $k = \frac{1}{2}$

- اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

مثال: $OM' = 2 \cdot OM$ $k = -2$

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k ، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM ، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM' = k \cdot OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطه M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطه O بین نقاط M و M' باشد و $OM' = |k| \cdot OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k و نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

فعالیت

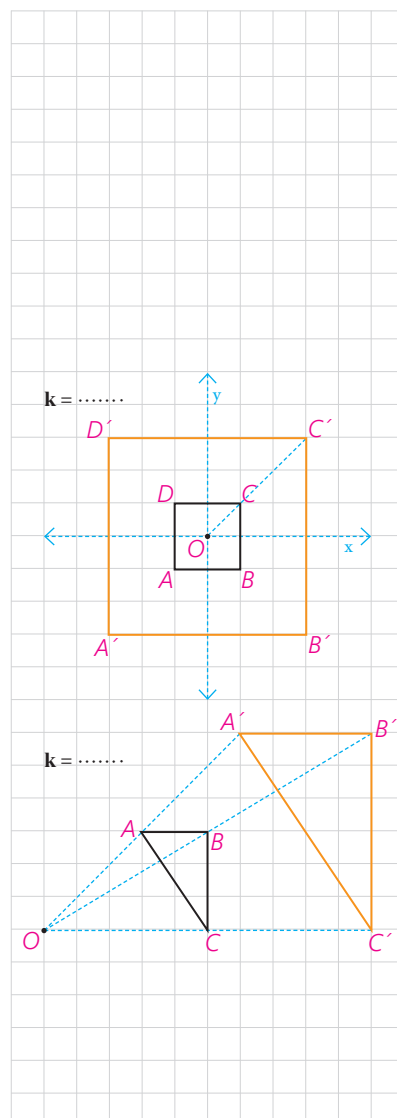
۱- این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.
الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

ب) آیا تجانس طولیاست؟ چرا؟

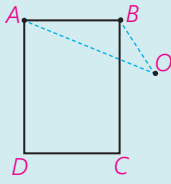
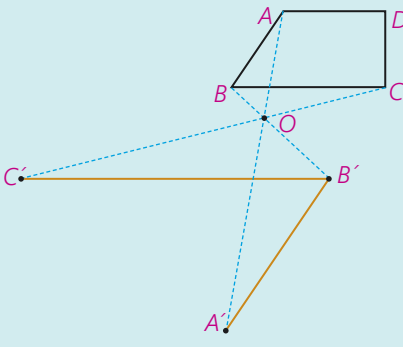
پ) در این شکل‌ها، طول هر پاره‌خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌توان رسید؟

ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

۲- در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به عبارتی: $k > 1$.
حال مسئله را برای مقادیر مختلف k بررسی می‌کنیم.
الف) در هر حالت مراحل باقی‌مانده را کامل کنید.



k	$k = 1$	$0 < k < 1$	$-1 < k < 0$
مثال	$k = 1$	$k = \frac{1}{4}$	$k = -\frac{1}{3}$

k	$k = -1$	$k < -1$
مثال		$k = -2$
		

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید:

مساحت شکل حفظ می شود.	جهت شکل حفظ می شود.	شیب خط حفظ می شود.	اندازه زاویه حفظ می شود.	طولپاست			
				×	$k > 1$	$k > 0$	تجانس
					$k = 1$		
					$0 < k < 1$		
		✓			$-1 < k < 0$	$k < 0$	
					$k = -1$		
					$k < -1$		

پ) شرط اینکه تجانس طولپا باشد، این است که

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می کند، یعنی خطوط AA' ، BB' و ... نسبت به هم چه وضعی دارند؟

ث) اگر $\triangle A'B'C'$ مجانس $\triangle ABC$ باشد، مرکز تجانس را چگونه می توان پیدا کرد؟

در تجانس به مرکز O و نسبت k:
 اگر $k > 0$ تجانس را، تجانس مستقیم می‌نامیم.
 اگر $k < 0$ تجانس را تجانس معکوس می‌نامیم.
 اگر $|k| < 1$ تصویر شکل می‌شود و آن را انقباض می‌نامیم.
 اگر تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را انبساط می‌نامیم.

حال که به طور شهودی با تجانس و چگونگی عملکرد آن روی شکل‌های هندسی آشنا شدید با استدلال دقیق‌تری ثابت خواهیم کرد که تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط و اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور، تجانس D ، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم؛ دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) نقطه O روی خط AB است.

حل: در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B، روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.

ب) نقطه O غیر واقع بر خط AB است.

حل: در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم:

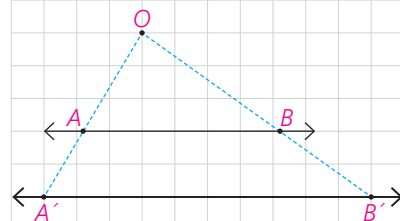
$$\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = \dots \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \dots = \dots$$

$$\Rightarrow AB \parallel A'B' \quad (\text{چرا؟})$$

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین:

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

تذکر: حالتی که $k < 0$ به عنوان تمرین به شما واگذار شده است.



فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.
 تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه \widehat{ABC} را در نظر می‌گیریم.
 مجانس این زاویه، یعنی زاویه $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می‌کنیم.
 به کمک قضیه قبل و شکل داده شده، ثابت کنید: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

نتیجه این فعالیت را در قالب قضیه زیر مطرح می‌کنیم:

قضیه: تجانس، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

تذکر: اثبات در حالتی که $k < 0$ به‌عنوان تمرین به شما واگذار شده است.

کاردرکلاس

۱- الف) فرض کنید پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد؛ نشان دهید: $\frac{A'B'}{AB} = |k|$ (نقطه O را خارج AB در نظر بگیرید).

ب) اگر n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ مجانس $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو ضلعی با هم متشابه‌اند.

۲- با توجه به ویژگی‌های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

فعالیت

پیش از این دیدیم که اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A) = A' = A$ ؛ این نقاط را نقاط نامیدیم. اما برخی از تبدیل‌ها، هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند؛ چنین تبدیل‌هایی را تبدیل همانی می‌نامیم.

تعریف: تبدیل T را **تبدیل همانی** گوییم، هر گاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$.

معمولاً تبدیل‌های همانی را با I نمایش می‌دهند؛ پس $I(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A ، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

ب) آیا تبدیل همانی طولیاست؟

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱- انتقال غیر همانی :

۲- دوران غیر همانی :

۳- تجانس غیر همانی :

کاردکلاس

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

طول پاره خط را حفظ می‌کند.	اندازه زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.



تمرین

۱- در تجانسی با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB در نظر بگیرید) نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

۲- دایره $C(O,R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید.

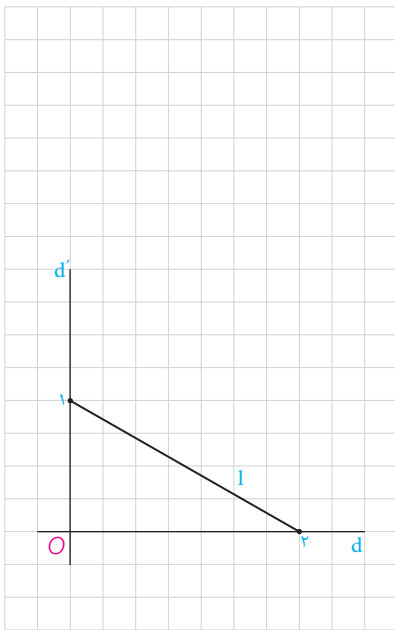
(راهنمایی: تصویر مرکز و یک نقطه دلخواه از دایره را تحت تجانس پیدا کنید.)

الف) $k=2$

ب) $k=-2$

پ) $k=\frac{1}{2}$

۳- یک مربع را در تجانس با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محلی تلاقی قطرهای تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.



۴- در شکل روبه‌رو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و d' چقدر است؟



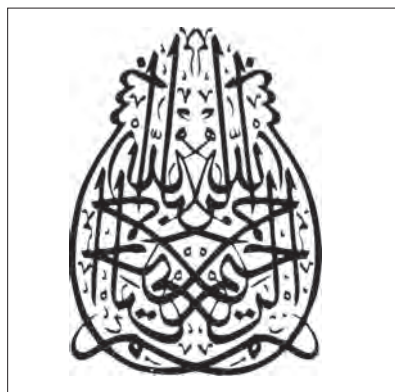
تصاویر زیر، نمونه‌هایی از نقاشی‌های دانش‌آموزان است که استفاده از بازتاب در آن نقشی عمده دارد.



کاربرد تبدیل‌ها

تبدیل‌های هندسی شامل بازتاب، انتقال، دوران و تجانس به طور مستقیم و غیر مستقیم در زندگی واقعی کاربرد دارد؛ برای مثال در سال‌های گذشته با کاربرد برخی تبدیل‌ها در کاشی‌کاری آشنا شدید. آیا می‌توانید با تأمل در محیط اطراف خود به نمونه‌هایی اشاره کنید که تبدیل‌های هندسی در آن به کار رفته‌اند؟

به این تصاویر دقت کنید. کدام یک از تبدیل‌های هندسی بر زیبایی خوشنویسی‌های زیر افزوده است؟



■ کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

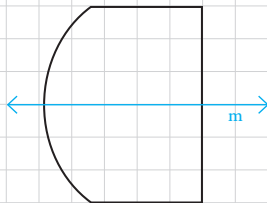
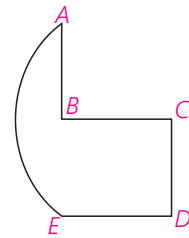
بازتاب علاوه بر شاخه‌های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی‌های بازتاب همان ویژگی‌های آینه تخت است. کاربردهای دیگری از بازتاب را در ادامه خواهیم دید.



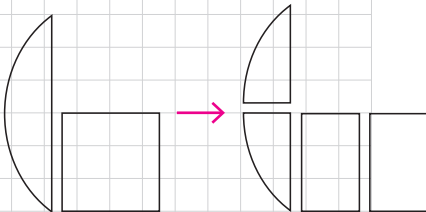
دریاچه‌ای در قلعه سنبلان | استان اردبیل



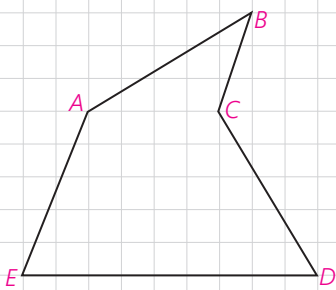
۱- می‌خواهیم کیک به شکل زیر را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع BCDE و کمان AE از یک دایره تشکیل شده است به طوری که A و B و E روی یک خط هستند.



اگر نمای بالای کیک به شکل روبه‌رو بود، تقسیم آن کار ساده‌ای بود؛ چرا که می‌توانستیم از روی خط بازتاب m کیک را برش بزنیم و آن را به دو نیمه مساوی تقسیم کنیم.



این شکل، راه ساده‌ای برای برش زدن کیک و تقسیم آن به دو سهم برابر ارائه می‌کند. توضیح دهید که بازتاب به حل این مسئله چه کمکی کرده است.



۲- یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی معروف است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را تغییر دهیم.

برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم. حال می‌خواهیم با ثابت نگه داشتن محیط و ثابت نگه داشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازه حصار کشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.

به کمک این تصویر توضیح دهید که این عمل را چگونه می‌توان انجام داد.

چرا محیط چندضلعی $ABCDE$ با محیط چندضلعی $ABC'DE$ یکی است؟

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

الف) هرون، ریاضی‌دانی است که به او دایرةالمعارف ریاضی و فیزیک لقب داده‌اند. او که در فاصله زمانی 25° تا 15° سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می‌کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد. او با این مسئله روبه‌رو شده بود که:

«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبه مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»

مسئله، پیدا کردن نقطه M روی خط d است به گونه‌ای که $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن باشد.

هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A' نامید. خط فرضی $A'B$ خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و $AM+MB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

با هم دلیل ادعای هرون را بررسی می‌کنیم:

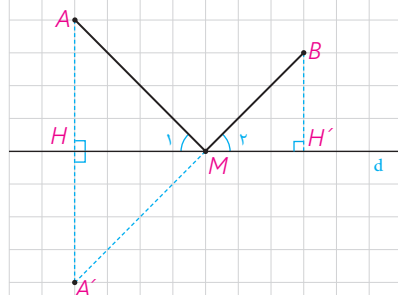
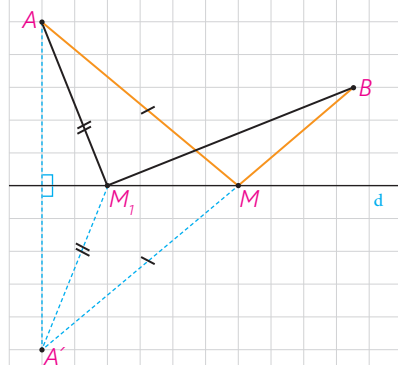
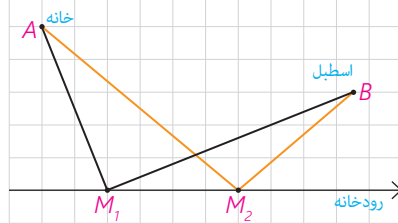
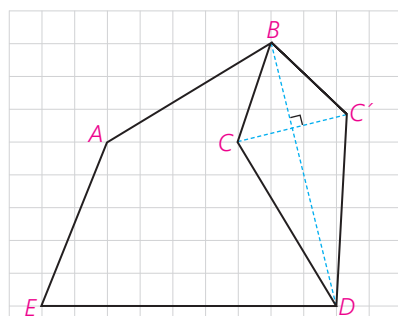
۱- برای هر نقطه دلخواه دیگری نظیر M_1 داریم $M_1A = M_1A'$ (و به همین ترتیب $AM = A'M$)؛ چرا؟

۲- در مثلث $A'M_1B$ داریم $A'M_1 + M_1B > A'B$ ؛ چرا؟

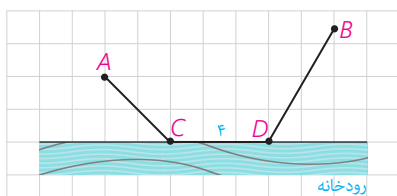
از تساوی $A'B = A'M + MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.

سؤال: در روش هرون نقطه A' طرف دیگر رودخانه قرار دارد. اگر در عمل به دنبال یافتن کوتاه‌ترین مسیر مورد نظر باشیم و امکان رفتن به طرف دیگر رودخانه نباشد، چگونه نقطه M را می‌توان پیدا کرد؟

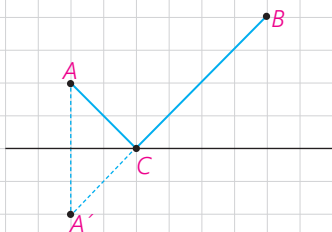
(راهنمایی: از تشابه دو مثلث AHM و $BH'M$ کمک بگیرید و توجه داشته باشید که اندازه‌های AH و BH' دو مقدار معلوم هستند).



۱- جایی سرپوشیده برای نگهداری چهارپایان به ویژه اسب



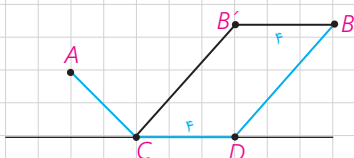
ب) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟



حل: مسئله را در چند مرحله حل می کنیم.

۱- اگر جاده ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر $CD=0$ ، این مسئله به کدام یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده اید؟

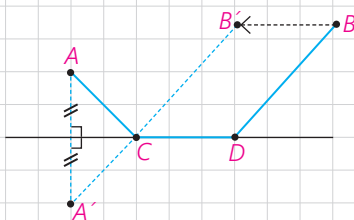
۲- با توجه به شرایط مسئله، مسیر مورد نظر، باید مسیری به شکل مسیر ACDB باشد؛ اما:



(چرا؟) طول مسیر $ACB'B =$ طول مسیر ACDB

۴ + طول مسیر $ACB' =$ طول مسیر ACDB بنابراین:

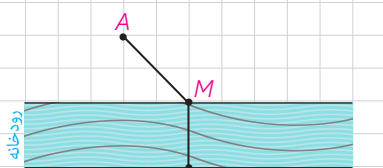
۳- پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر ممکن به شکل ACDB مسیر را به گونه ای انتخاب کنیم که طول ACB' کوتاه ترین طول ممکن باشد.



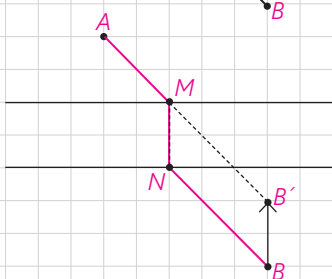
۴- به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه رو توضیح دهید که رسم کوتاه ترین مسیر ACDB چگونه است.

کاردکلاس

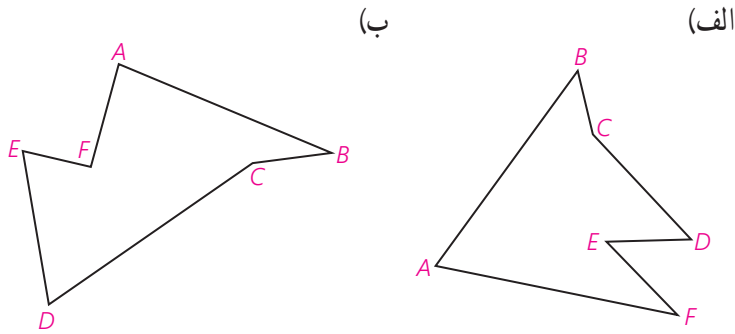
اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟



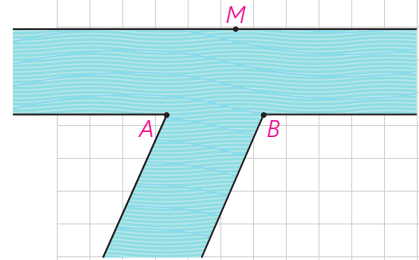
راهنمایی: به کمک فعالیت قبل و با توجه به تصویر داده شده، طریقه رسم مسیر AMNB را شرح دهید و مشخص کنید چرا این مسیر، کوتاه ترین مسیر ممکن است.



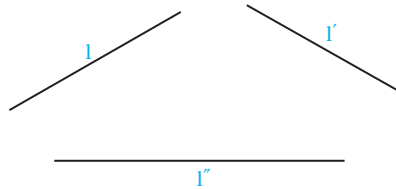
۱- دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟



۲- می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که فایده‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

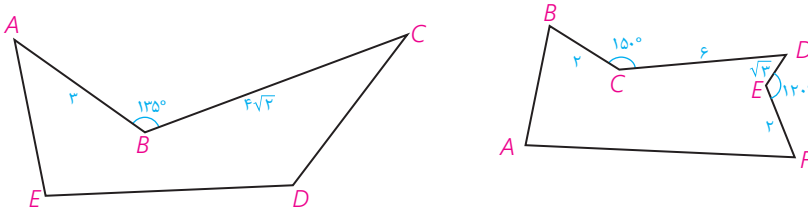


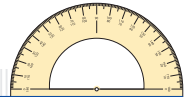
۳- سه خط دو به دو ناموازی 1 و 1' و 1'' در صفحه مفروض‌اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی 1 و 1'، و موازی 1'' باشد.



۴- فرض کنید G محل برخورد میان‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{1}{3}$ باشد. الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟ ب) مساحت مثلث A'B'C' چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۵- زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند مساحتش را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید.

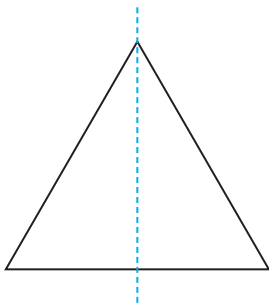




تبدیل‌های تقارنی یک شکل هندسی



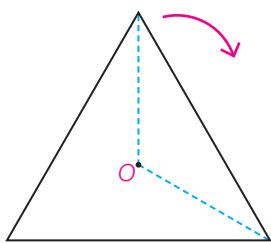
در بسیاری از مناظر طبیعی، گیاهان و جانوران، ساختار اتم‌ها، معماری، هنرهای مختلف دستی و نیز شکل‌های هندسی می‌توان نوعی نظم و تعادل مشاهده کرد. در این بخش تبدیل‌هایی را مرور می‌کنیم که یک شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. چنین تبدیل‌هایی را تبدیل‌های تقارنی آن شکل می‌نامیم. فعالیت صفحه بعد برای روشن‌تر شدن این موضوع، طراحی شده است.



مثلاً متساوی‌الاضلاعی را در نظر بگیرید :

- (الف) بازتاب این مثلث نسبت به خط داده شده چگونه است؟.....
- (ب) آیا تحت این بازتاب تصویر هر نقطه از شکل لزوماً خود آن نقطه است؟.....
- (پ) آیا تحت این بازتاب، تصویر هر نقطه از شکل، روی خود شکل است؟.....
- (ت) آیا خط بازتاب دیگری برای این مثلث سراغ دارید؟.....
- این مثلث چند خط بازتاب دارد؟.....

(ث) آیا غیر از بازتاب، تبدیل دیگری سراغ دارید که هر نقطه از شکل را به نقطه‌ای از همان شکل ببرد؟.....



برای مثال آیا با مرکز O (نقطه همرسی نیمسازها) می‌توانید دوران‌هایی معرفی کنید که شکل را بر خودش منطبق کند؟.....
اگر $0 < \alpha \leq 36^\circ$ زاویه دوران باشد، چند دوران به مرکز O و زاویه α می‌توانید مشخص کنید؟.....

تعریف: اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل **تقارن بازتابی (خطی)** دارد و اگر آن شکل تحت دورانی با زاویه $0 < \alpha \leq 36^\circ$ بر خودش منطبق شود، گوییم **تقارن دورانی (چرخشی)** دارد.

همان‌گونه که در این فعالیت دیدید در مثلث متساوی‌الاضلاع، سه بازتاب و سه دوران متفاوت می‌توان معرفی کرد که نقاط این مثلث را به نقاطی از همین مثلث نظیر کند.

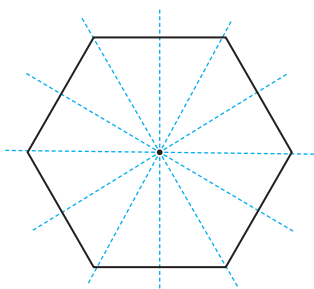
به عبارتی، تحت این تبدیل‌ها تصویر این مثلث بر خودش منطبق می‌شود؛ چنین تبدیل‌هایی را تبدیل‌های تقارنی این مثلث می‌نامیم. در اینجا برای شناسایی تبدیل‌های تقارنی یک شکل، شکل را تنها در یک جهت (خلاف یا موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم؛ با این تعریف، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای ۶ تبدیل تقارنی است. دقت کنید که دوران 36° ، تبدیل انتقال با بردار صفر و تبدیل تجانس با نسبت تجانس $k=1$ ، علاوه بر اینکه هر شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند هر نقطه از شکل را نیز به خود آن نقطه نظیر می‌کنند. که پیش از این، آنها را «تبدیل‌های همانی» نامیدیم. بنابراین تمام تبدیل‌های همانی فقط یک تبدیل تقارنی به شمار می‌رود.

تعریف: تبدیل طولیای T را **تبدیل تقارنی** شکل F می‌نامیم به شرط اینکه تبدیل‌یافته شکل F، تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود؛ یعنی داشته باشیم: $T(F) = F$

تعریف: تقارن دورانی با زاویه 180° را **تقارن مرکزی** نیز می‌نامند. در این حالت مرکز دوران را **مرکز تقارن** شکل می‌گویند.

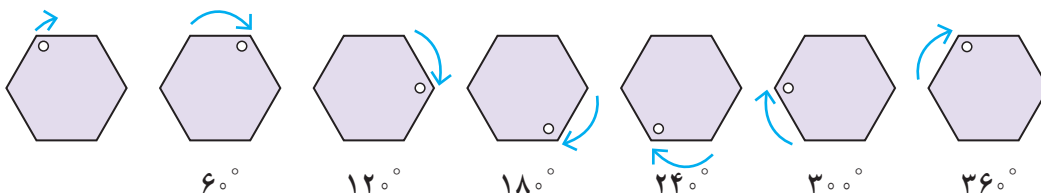
مثال

شش ضلعی منتظم، ۶ تقارن بازتابی و ۶ تقارن دورانی دارد.



تقارن‌های بازتابی:


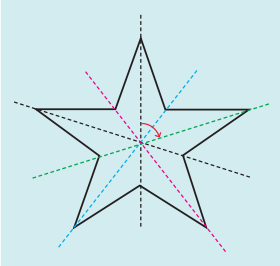
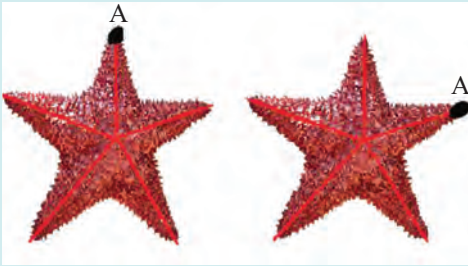
تقارن‌های دورانی:



همان طور که اشاره شد تقارن دورانی با زاویه 36° ، انتقال با بردار صفر و تجانس با نسبت تجانس $k=1$ تبدیل های همانی هستند.

تبدیل های همانی را تقارن همانی نیز می نامند؛ با این تعریف، هر شکلی دارای تقارن همانی است.

شکل های زیر را به عنوان تصویر دو بعدی در نظر بگیرید و جدول را کامل کنید :







		
تعداد کل تقارن ها	تعداد تقارن های بازتابی	تقارن های دورانی
.....	72° ،

تعداد تبدیل های تقارنی را در هر شکل مشخص کنید.

الف) پاره خط ب) خط پ) دایره

مسئله برای علاقه مندان

۱- الف) با تکمیل جدول زیر تعداد تبدیل های تقارنی n ضلعی منتظم را مشخص کنید.

n ضلعی منتظم	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$...	n
								
تعداد تقارن های بازتابی								
تعداد تقارن های دورانی								
تعداد کل تبدیل های تقارنی								
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟								

ب) n ضلعی منتظم در چه صورتی مرکز تقارن دارد؟

پ) الگویی برای پیدا کردن زاویه های دوران در تقارن های دورانی یک n ضلعی منتظم ارائه کنید.

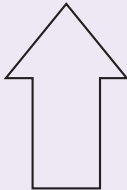


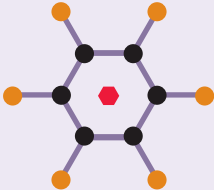
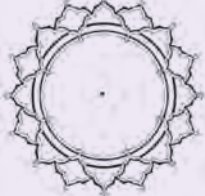
۲- تقارن‌های خطی و دورانی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مثلث متساوی‌الساقین و دوزنقه متساوی‌الساقین را مشخص کنید و در جدولی بنویسید.
کدام یک از این شکل‌های هندسی، مرکز تقارن دارند؟

۳- الف) شکلی رسم کنید که خط بازتاب داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد (یعنی تقارن خطی داشته باشد، اما تقارن دورانی غیرهمانی نداشته باشد).

ب) شکلی رسم کنید که مرکز تقارن داشته باشد، ولی خط بازتاب نداشته باشد (یعنی تقارن دورانی غیرهمانی داشته باشد، اما تقارن خطی نداشته باشد).

۴- نشان دهید اگر شکلی دو خط بازتاب عمود بر هم داشته باشد، محل تلاقی این دو خط، مرکز تقارن شکل است (در واقع هر شکل که دارای دو تقارن بازتابی باشد که دو خط بازتاب آن بر هم عمود باشند، دارای تقارن دورانی است).

۵- جدول زیر را کامل کنید.

شکل					
تقارن بازتابی					
تقارن دورانی					
تعداد تبدیل‌های تقارنی					