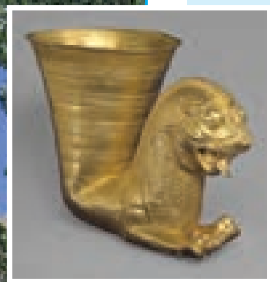
فصل

۵ توابع نمایی و لگاریتمی

سنگ نوشته‌های گنج‌نامه (همدان) نوشتارهایی از دوران هخامنشی بر دل صخره‌های الوند (قدمت حدوداً ۲۵۰۰ سال)



ریتون طلایی هگمتانه (کشف شده در همدان) شاهکار هنر فلزکاری عصر هخامنشیان (قدمت بیش از ۲۵۰۰ سال)

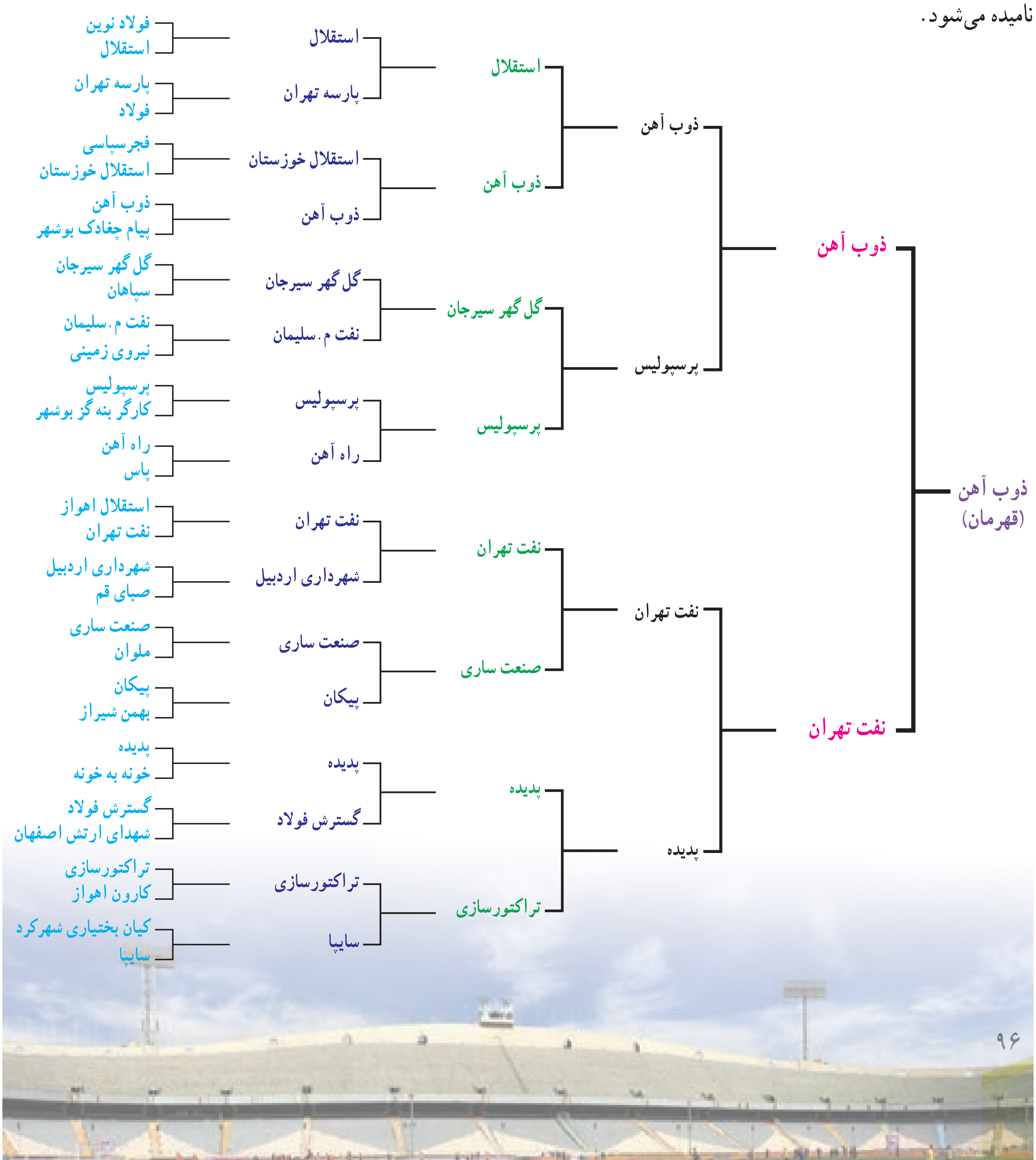
آیا تا به حال اندیشیده‌اید که باستان‌شناسان چگونه طول عمر یک اثر باستانی را تخمین می‌زنند؟
با استفاده از روش سال‌یابی کربن ۱۴، می‌توان عمر یک اثر باستانی را محاسبه کرد. در این روش، تعیین قدمت اثر، با یک تابع لگاریتمی مدل‌سازی می‌شود.

درس اوّل

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

فعالیت

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴-۹۳ با شرکت ۳۲ تیم ودر پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می‌بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحلهٔ بعدی می‌رود وتیم بازنده حذف می‌شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.



۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ....

۲ در مرحلهٔ قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ....

۳ تعداد تیم‌ها در هرمرحله با تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟ ....

۴ چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟ ....

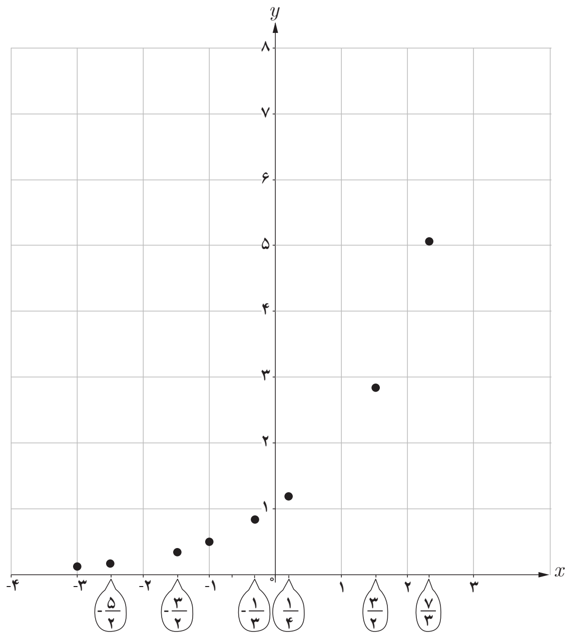
۵ باتوجه به الگوی ارائه شده درشکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند تاست؟ ....

۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ ....

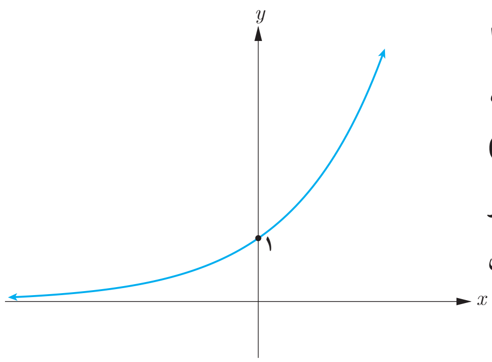
فعالیت

جدول زیر را کامل و نقاط به‌دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

x	-۴	-۳	$-\frac{۵}{۲}$	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۷}{۳}$	۳
۲^x	....	۰/۱۲	۰/۱۸	....	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۹	...	۱/۱۹	...	۲/۸۳	....	۵/۰۴	....



دیدیم که برای هر عدد گویای a، مقداری برای ۲^a به‌دست می‌آید و نقطهٔ $(a, ۲^a)$ را می‌توان در دستگاه مختصات نشان داد. این موضوع برای اعداد گنگ نیز برقرار است، یعنی برای هر عدد گنگ مانند b نیز مقداری برای ۲^b خواهیم داشت و مختصات $(b, ۲^b)$ نیز نقطه‌ای را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهد. اگر برای تمام اعداد حقیقی r، مقادیر ۲^r را به‌دست آوریم و نقاط $(r, ۲^r)$ را در دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار مقابل به‌دست خواهد آمد.



توان‌های حقیقی

در کتاب سال دهم، به ازای هر عدد حقیقی مثبت a $(a\neq 1)$ و عدد گویای $\frac{m}{n}$، مقدار $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف کردیم و ویژگی‌های مقدماتی آن را به‌دست آوردیم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است؛ یعنی اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم :

الف) $a^0=1$ — ب) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ — پ) $a^x.a^y=a^{x+y}$ — ت) $(a^x)^y=a^{xy}$

ث) $(ab)^x=a^x.b^x$ — ج) $(\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$ — چ) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

کار در کلاس

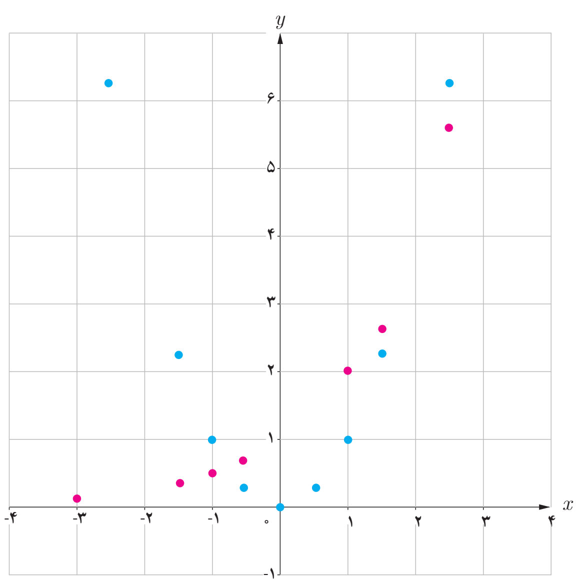
۱ جدول‌های زیر را تکمیل کنید. (مقادیر به‌صورت تقریبی نوشته شده است.)

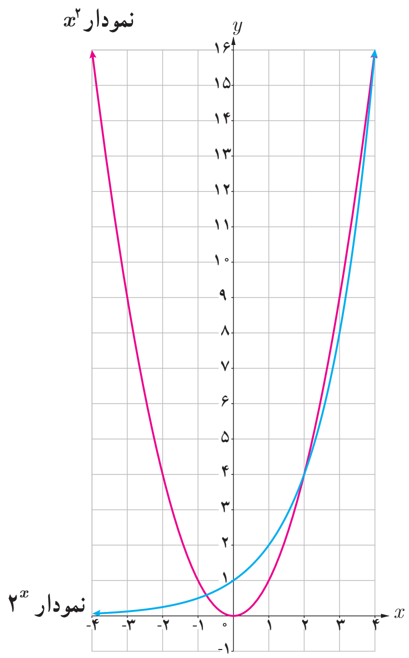
x	$-\frac{5}{2}$	....	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	$\frac{5}{2}$
$y=x^2$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	....	۶/۲۵

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	$\frac{5}{2}$
$y=2^x$	۰/۱۲	....	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	....	....	۲	۲/۸۳	....	۵/۶۶

۲ حال، این دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^2 با هم مساوی‌اند؟

۳ در x^2، متغیر در .... و عدد ثابت در .... است؛ ولی در 2^x، .... در توان و .... درپایه است.



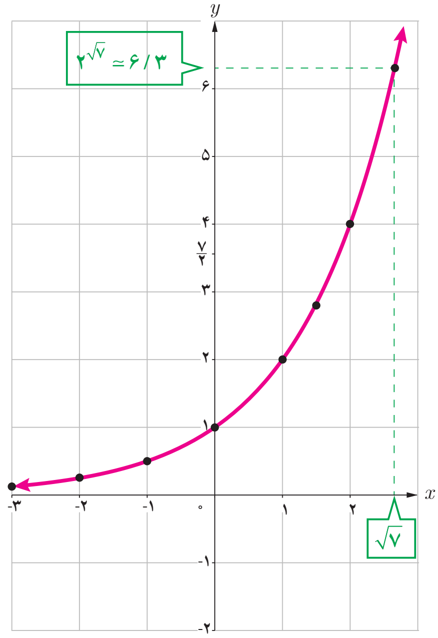


هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>0$ ، $a\neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال : توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ و $y=3^x$ و $y=(\frac{1}{2})^x$ و $y=(\frac{1}{4})^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.

فعالیت

درشکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y=2^x$ رسم شده است.



۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟ ....

۲ دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

....

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟ ....

۴ عدد $\sqrt{2}$ را روی محور xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $2^{\sqrt{2}}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید. ....

۵ عدد $\frac{7}{2}$ روی محور yها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری که $2^a\simeq\frac{7}{2}$. ....

۶ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

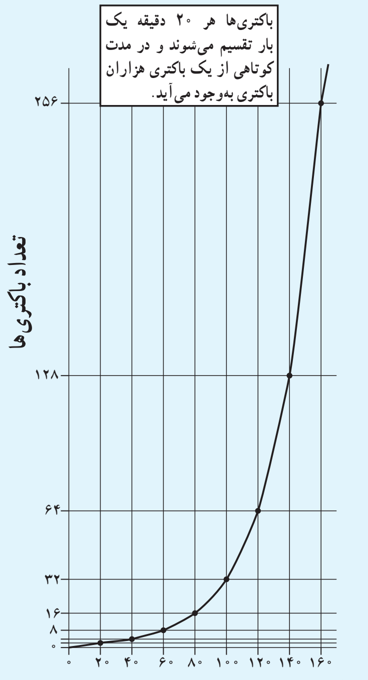
$2^{\sqrt{5}}$ ، $2^{\frac{3}{2}}$ ، $2^{\frac{5}{2}}$ ، $2^{0/3}$ ، 2^{5} ، $2^{-0/4}$ ، 2^{-1}

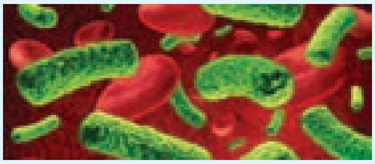
....

۷ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین 2^x و 2^y برقرار است؟ ....

خواندنی

بیشتر باکتری‌ها در فاصلهٔ ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و قادر به تولیدمثل می‌شوند. در شرایط محیطی مساعد، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود. ۲۰ دقیقه بعد، از آن دو باکتری، چهار باکتری به‌وجود می‌آید و به همین ترتیب تعداد باکتری‌ها به ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ و ... می‌رسد. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها تا ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری به وزن ۲۰۰۰ تن به‌وجود خواهد آمد! باکتری‌ها از طریق تولید سم یا تخریب سلول‌های بدن، باعث بیماری می‌شوند و به بدن آسیب می‌رسانند.




باکتری سل

خواندنی

در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه $\boxed{x^y}$ (یا y^x) وجود دارد که با استفاده از آن می‌توانید مقادیر اعداد توان‌دار را به دست آورید. برای مثال جهت محاسبهٔ $۲^۵$، ابتدا عدد ۲ را وارد می‌کنید؛ سپس دکمهٔ $\boxed{x^y}$ و بعد عدد ۵ و سپس دکمهٔ تساوی را فشار می‌دهید که عدد ۳۲ ظاهر می‌شود.
اگر عدد توان، طبیعی نبود، آن را داخل پرانتز قرار می‌دهیم. تذکر: دربرخی از ماشین حساب‌ها به‌جای دکمهٔ x^y، نمادی به صورت $\boxed{\wedge}$ وجود دارد که همان کار را انجام می‌دهد.
برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید. (تا یک رقم اعشار)

$\boxed{۲} \to \boxed{x^y} \to \boxed{(} \to \boxed{۲} \to \boxed{\sqrt{}} \to \boxed{)} \to \boxed{=} \to \boxed{۲/۶}$

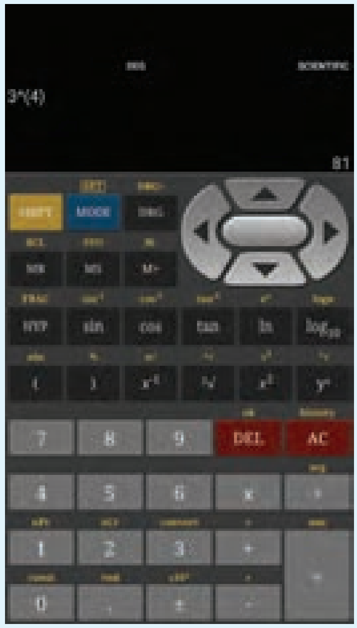
۱) $۲^{\sqrt{۲}}$

۲) $۲^{\sqrt{۸}}$

۳) $۲^{۰/۱}$

۴) $۲^{-۰/۵}$

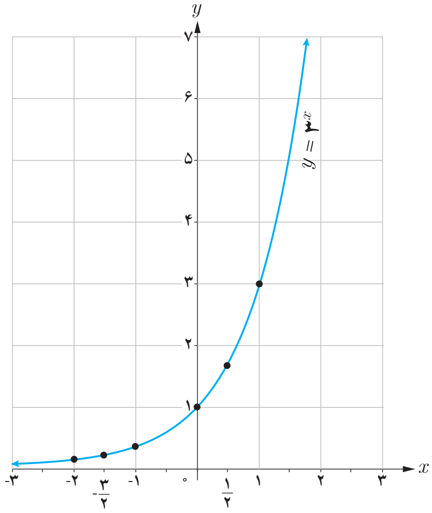
۵) $۲^{(۱+\sqrt{۳})}$



کار در کلاس

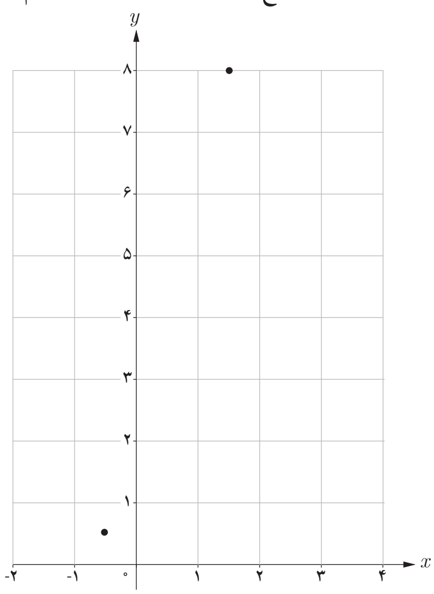
نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.

x	$y=۳^x$
-۲	۰/۱۱
$-\frac{۳}{۲}$	۰/۱۹
-۱	۰/۳۳
۰	۱
$\frac{۱}{۲}$	۱/۷۳
۱	۳



۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۴^x$ را رسم کنید.

x	$y=۴^x$
.....	$\frac{۱}{۴}$
$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۰	.....
$\frac{۱}{۲}$	.....
$\frac{۳}{۲}$	۸



۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید. ....

۳ با استفاده از نمودار، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $۳^{\frac{۷}{۳}} \bigcirc ۳^{۲/۵}$ ب) $۴^{\sqrt{۵}} \bigcirc ۴^{\sqrt{۷}}$

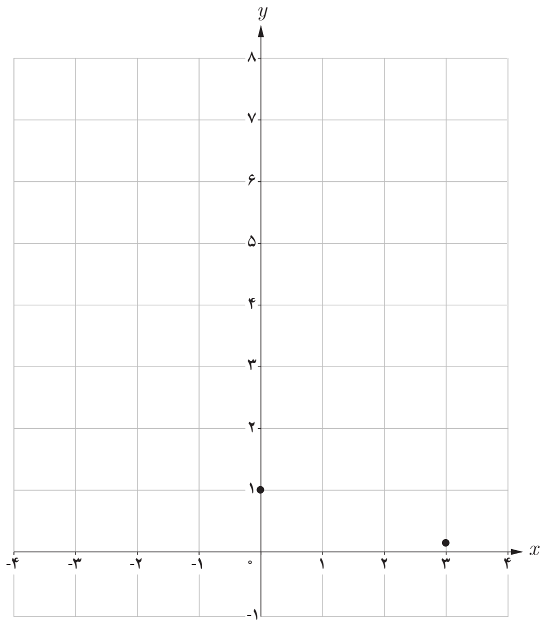
۴ اگر $x<y$، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $۳^y \bigcirc ۳^x$ ب) $۴^y \bigcirc ۴^x$

فعالیت

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-3	-2	......	0	1	......	3
$y=(\frac{1}{2})^x$	......	......	$\sqrt{2}$	1	......	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه‌ای است؟

....

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

....

۴ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟چرا؟

....

....

۵ با استفاده از نمودار فوق، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

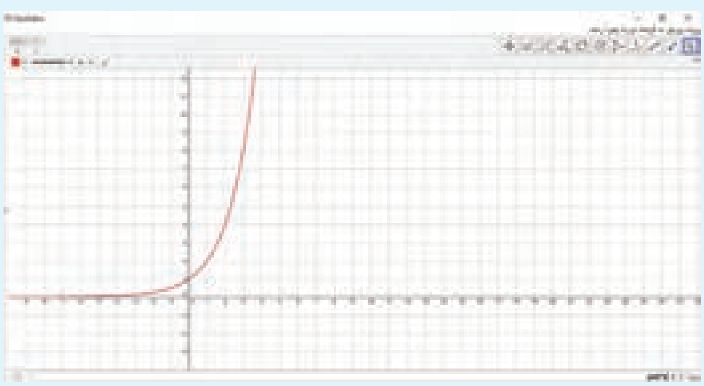
الف) $(\frac{1}{2})^{0/5}$ ◯ $(\frac{1}{2})^{1/5}$ ب) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}}$ ◯ $(\frac{1}{2})^{4}$ پ) $(\frac{1}{2})^{4}$ ◯ $(\frac{1}{2})^{3}$

۶ با استفاده از نمودار، اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{2})^y$ و $(\frac{1}{2})^x$ وجود دارد؟ ....

خواندنی

با استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا (GeoGebra) می‌توانید نمودارهای توابع نمایی را به راحتی رسم کنید. برای این کار در نوار دستور،ضابطهٔ تابع را حروف‌چینی کرده وکلید Enter را بزنید. در پنجرهٔ گرافیکی، نمودار مطلوب نمایش داده می‌شود.

در تصویر مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=2^x$ در محیط این نرم‌افزار نمایش داده شده است.



خواندنی

یک داروی بیماری آسم که به صورت قرص ۱۰۰ میلی‌گرمی موجود است، برای یک بیمار تجویز شده است. اگر او این قرص را مصرف کند و بدانیم در زمان مصرف دارو هیچ میزانی از آن در بدن وی موجود نیست، در این صورت می‌توان پیش‌بینی کرد که بعد از گذشت t دقیقه، در مجموع از این دارو به میزان A میلی‌گرم، در جریان خون او وجود خواهد داشت که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

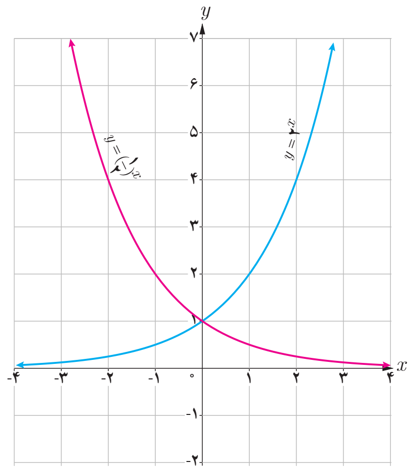
$$A=۱۰۰\left[۱-(۰/۹)^t\right]$$

سرو کهن ابرکوه (یزد) با عمر تقریبی ۴۰۰۰ سال

کار در کلاس

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟ ....



۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=۲^x$ به تابع با ضابطهٔ .... $=y$ یا همان .... $=y$ دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟ ....

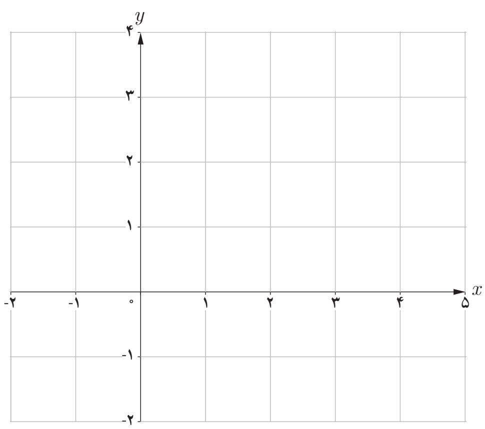
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه‌اند، مثال بزنید. ....

....

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ ($a>۰$ و $a\neq۱$) نسبت به محور yها قرینه‌اند.

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را رسم کنید.



فعالیت

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

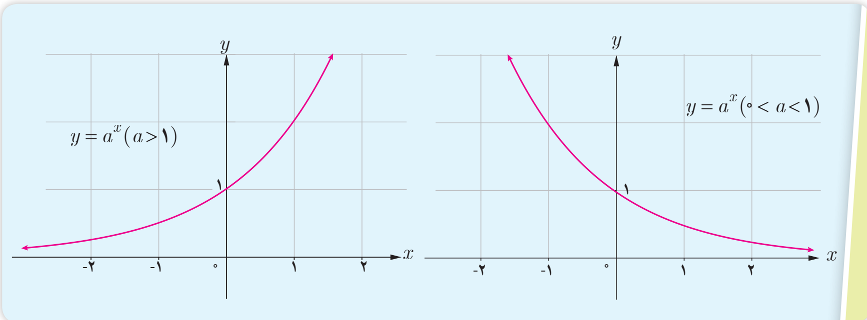
۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($a>۱$) مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن .... است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($۰<a<۱$) .... و برد آن بازهٔ $(۰\ ,+\infty)$ است.

۳ نمودار توابع فوق محور yها را درنقطهٔ .... قطع می‌کند و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

۴ این دو تابع، یک به یک .... زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در ....نقطه قطع می‌کند.

نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادلهٔ نمایی می‌نامند.
برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم.
اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$ و برعکس.

مثال : معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳}=۸۱ \to ۳^{۲x-۳}=۳^۴ \to ۲x-۳=۴ \to x=\frac{۷}{۲}$

ب) $۴^{۲x-۱}=۸^{x+۱} \to (۲^۲)^{۲x-۱}=(۲^۳)^{x+۱} \to ۴x-۲=۳x+۳ \to x=۵$

پ) $۵^{۳n-۱}=۱۲۵^{۲n+۱} \to ۵^{۳n-۱}=۵^{۶n+۳} \to ۳n-۱=۶n+۳ \to n=-\frac{۴}{۳}$

تمرین

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

پ) $y=(0/1)^x$ ب) $y=x^3$ الف) $y=2x^2-3x+1$

ج) $y=\sqrt{x-1}$ ث) $y-3x=2$ ت) $y=(\frac{3}{2})^x$

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3^x$ قرار دارند؟

ج) $(-1,\frac{1}{3})$ ث) $(1,3)$ ت) $(\sqrt{3},\frac{1}{3})$ پ) $(0,1)$ ب) $(3,1)$ الف) $(1,0)$

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y=10^x$ با محور yها، نقطهٔ $(0,10)$است.

پ) دامنهٔ توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ و $y=x^2$ مساوی‌اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y=6^x$ با محور xها، نقطهٔ $(6,0)$ است.

۴ الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{1}{2})^{\sqrt{5}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

۵ فرض کنیم $f(x)=3^x$ ، $g(x)=(\frac{1}{16})^x$ و $h(x)=10^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

پ) $h(-2)$ ب) $g(-1)$ الف) $f(3)$

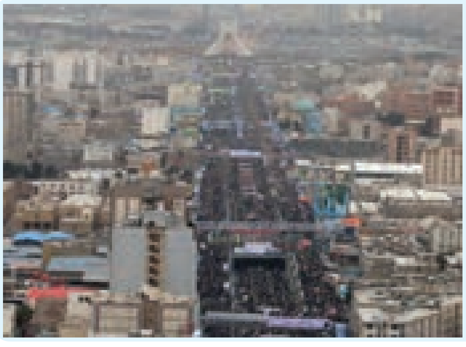
۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

پ) $4^{3x+2}=\frac{1}{64^3}$ ب) $9^{3y-3}=27^{y+1}$ الف) $2^{3n-2}=\frac{1}{32^2}$

ث) $(\frac{3}{5})^{x+1}=\frac{25}{9}$ ت) $9^x=3^{x^2-4x}$

خواندنی

جمعیت جهان در طول قرن گذشته به سرعت رشد کرده است. در نتیجه تقاضای افزاینده‌ای برای منابع جهان ایجاد شده است. در بیشتر مواقع، از توابع و معادلات نمایی برای مدل‌سازی رشدهای سریع استفاده می‌شود. جمعیت جهان که با P نشان داده می‌شود، در سال ۱۹۶۰ برابر با ۳ میلیارد نفر و در سال ۲۰۰۸ برابر با ۶/۷ میلیارد نفر بوده است. این رشد جمعیت را می‌توان با رابطهٔ $P(x)=3(1/017)^{x-1960}$ که در آن x نشان‌دهندهٔ سال است، نمایش داد. به کمک این رابطه می‌توان سالی را که در آن جمعیت جهان برابر با ۸ میلیارد نفر خواهد شد ، تخمین زد.



درس دوم

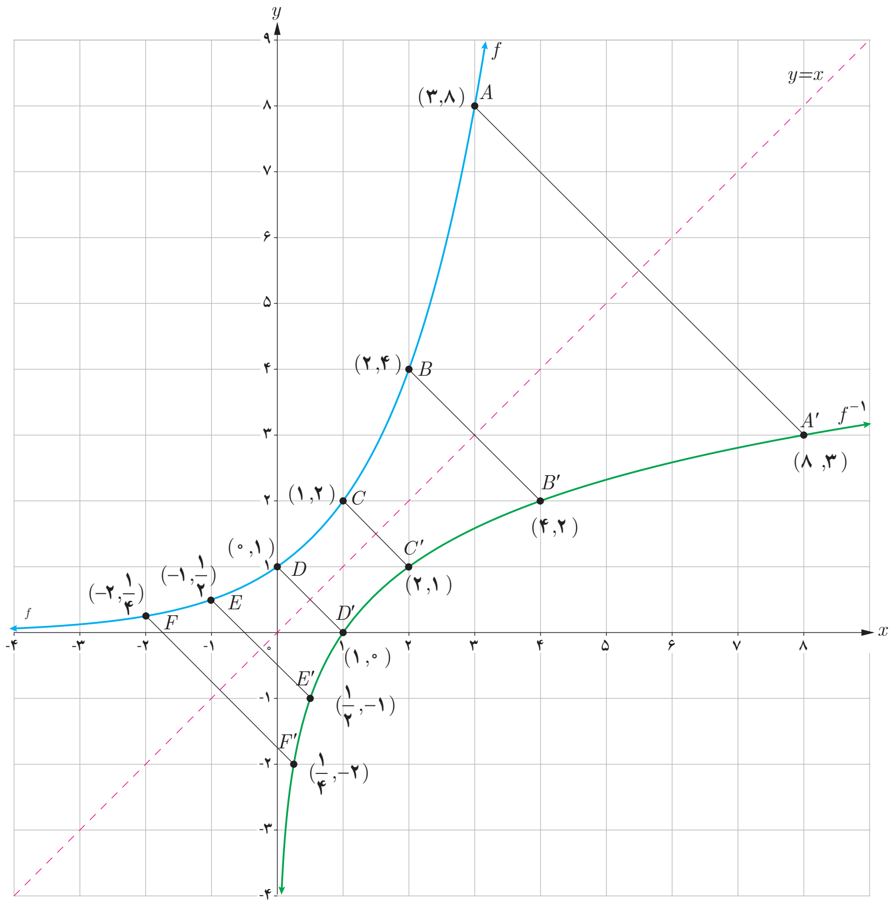
تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، جمعیت‌شناسی، مهندسی و... مشهود است.

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=۲^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.



خواندنی

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان‌نپر (۱۶۱۷ـ۱۵۵۰)، ریاضی‌دان اسکاتلندی در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

در فیزیک، مفهومی به‌نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می‌کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایهٔ ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مبنا. تراز شدت صوت را با β نشان می‌دهند و یکای آن را به افتخار بل فیزیک‌دان امریکایی مخترع تلفن، بل (B) و دسی‌بل (dB) نام‌گذاری کرده‌اند. هر بل برابر ده دسی‌بل است. (I_0 شدت صوت مبناست که برابر آستانهٔ شنوایی گوش سالم است.)

$\beta=\log_{I_0} I$

صدا	تراز شدت صوت dB
شدت صوت مبنا	۰
نفس کشیدن	۱۰
برگ درختان در نسیم	۲۰
صحبت کردن از فاصلهٔ یک متری	۴۰
همهمه در فروشگاه	۶۰
سر و صدای خودروها در خیابان شلوغ	۷۰
آستانهٔ دردناکی (برای بسامد ۱۰۰۰ Hz)	۱۲۰
مسلسل	۱۳۰
غرش هواپیمای جت در حین بلند شدن	۱۴۰
راکت فضایی، در موقع بلند شدن	۱۷۰

۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به‌دست آورید.

....

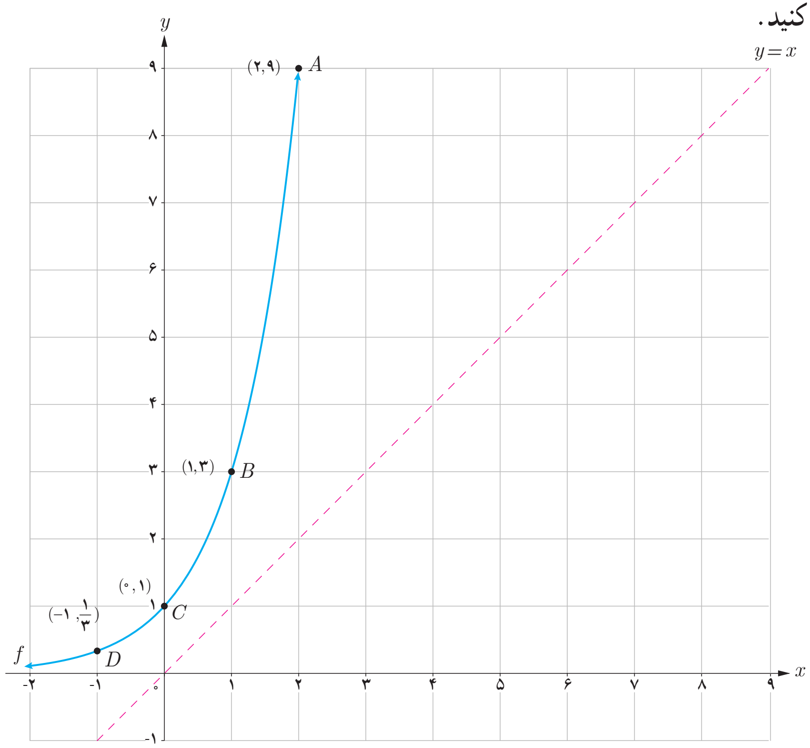
۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(-۲) = \frac{۱}{۴}$	$f(-۱) =$	$f(۰) =$	$f(۲) =$ ....
$f^{-۱}(\frac{۱}{۴}) =$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۲}) =$	$f^{-۱}(۱) =$	$f^{-۱}(۴) =$ ....

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.



۲ با توجه به نقاط f و $f^{-۱}$ در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(-۲) = \frac{۱}{۹}$	$f(۰) =$	$f(۱) =$	$f($.....$) = ۹$
$f^{-۱}(\frac{۱}{۹}) =$	$f^{-۱}(۱) =$	$f^{-۱}($.....$) = ۱$	$f^{-۱}(۹) =$ ....

۳ دامنه و برد دو تابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورید. ....

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x) = \log_۳ x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتمِ x در مبنای ۳ می‌نامیم.

به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

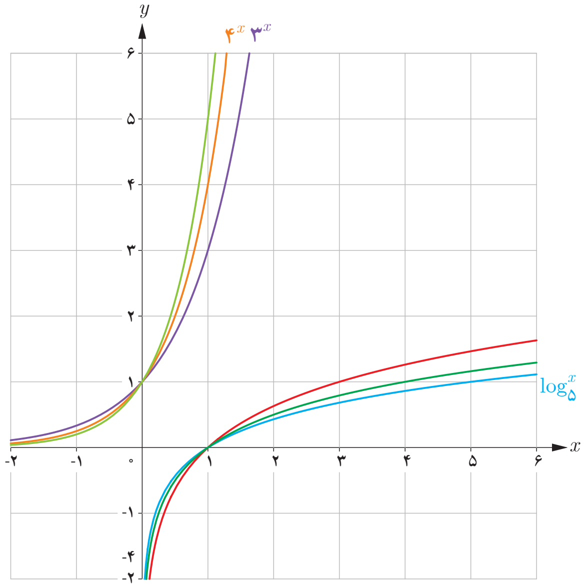
۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید. ....

وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = a^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a $(a \neq 1)$ داریم:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

کار در کلاس

در شکل مقابل، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطهٔ آنها نوشته شده، ضابطهٔ وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

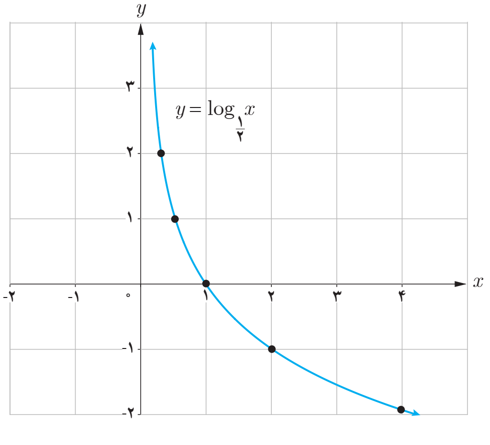


کار در کلاس

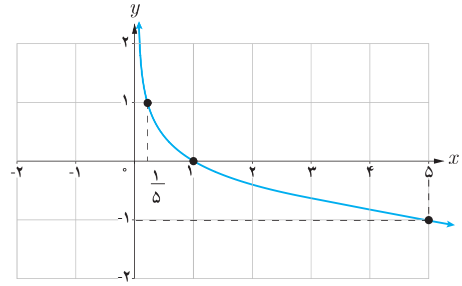
نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ ....

ب) $\log_{0/5}(1/5)$ ....

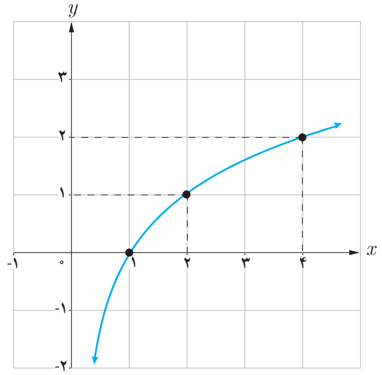


نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.



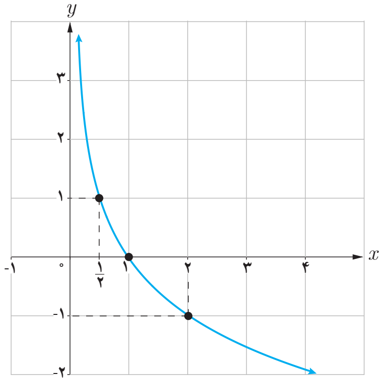
(۳)

....



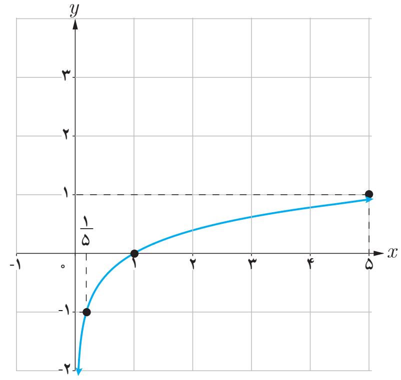
(۲)

....



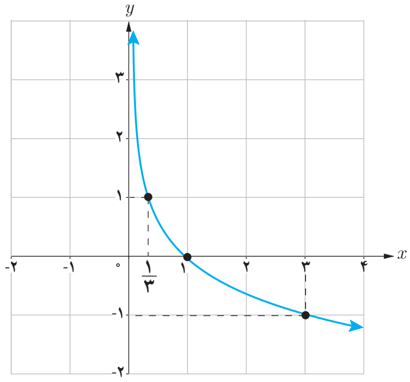
(۱)

....



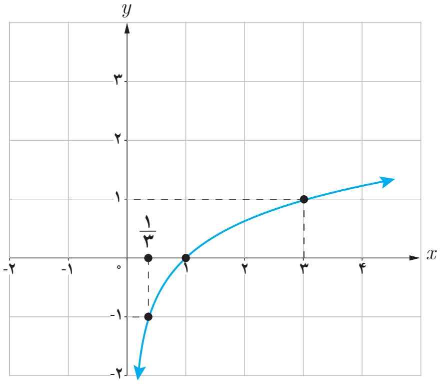
(۶)

....



(۵)

....



(۴)

....

فعالیت

با توجه به مطالبی که تا به‌حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

۱) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(a>1)$، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن .... است.

۲) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(0<a<1)$، بازه .... و برد آن .... است.

۳) نمودار توابع فوق، محور xها را در نقطهٔ .... قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

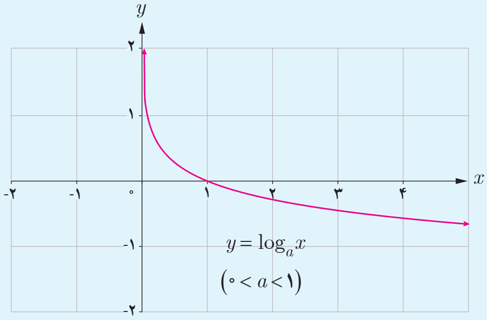
۴) این دو تابع، یک‌به‌یک .... زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در .... نقطه قطع می‌کند.

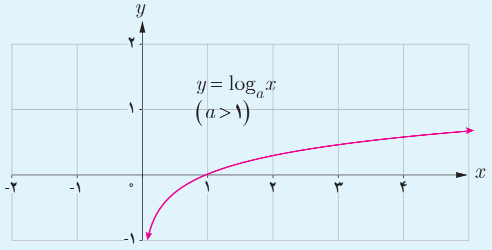
۵) وارون تابع نمایی، تابع .... است و وارون تابع لگاریتمی، تابع .... است.

اگر a عدد حقیقی مثبت $(a \neq 1)$ باشد، داریم: $a^0 = 1$، بنابراین همواره:

$$\log_a 1 = 0$$

نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.

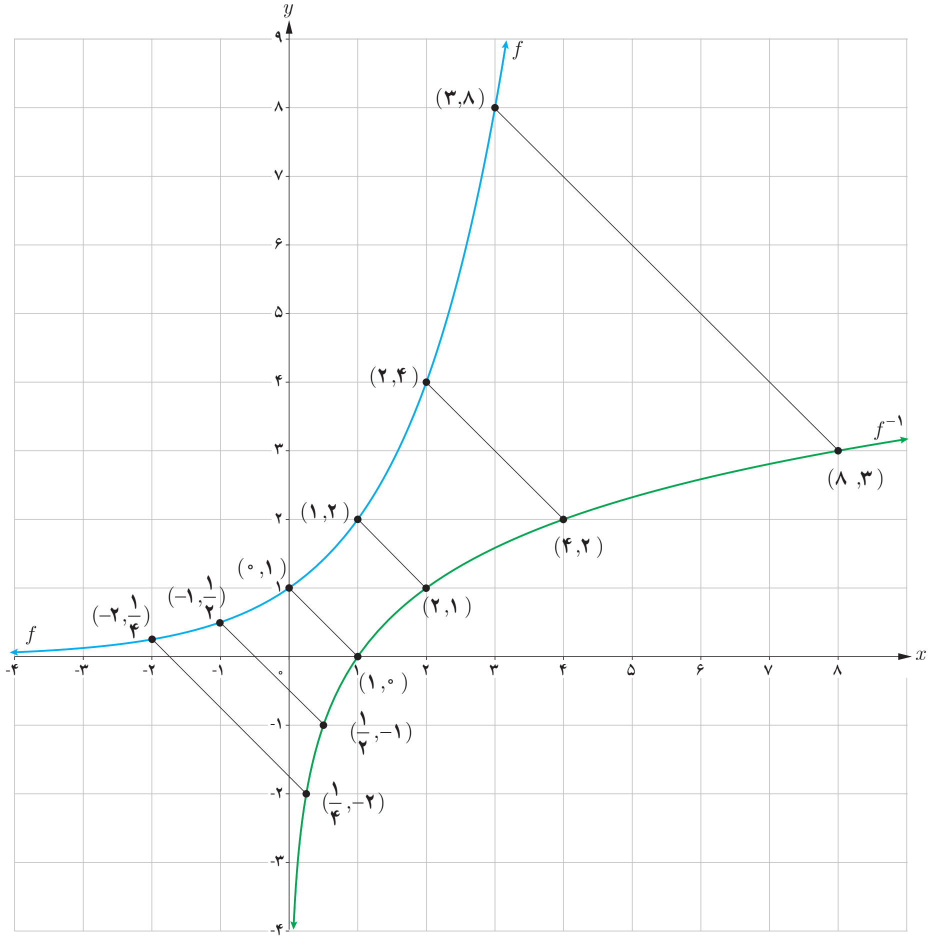




لگاریتم یک عدد

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=2^x$ و $f^{-1}(x)=\log_2 x$ را در نظر بگیرید.



با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمایی	$۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$	$۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$	$۲^{۰}=۱$	....	$۲^{۲}=۴$	....
لگاریتمی	$\log_{۲}\frac{۱}{۴}=-۲$	$\log_{۲}\frac{۱}{۲}=$	....	$\log_{۲}۲=۱$	....	$\log_{۲}۸=$ ......

به‌طور کلی اگر $a^{y}=x$ آن‌گاه $\log_{a}x=y$ و به عکس. $(x>۰\ ,\ a\neq ۱\ ,\ a>۰)$

$$b^{a}=c \Leftrightarrow \log_{b}c=a \qquad (c>۰\ ,\ b>۰\ ,\ b\neq ۱)$$

کار در کلاس

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$۱۰^{۳}=۱۰۰۰ \to \log_{۱۰}۱۰۰۰=۳$	$\log_{۸}۱=۰ \to ۸^{۰}=۱$
$۹^{\frac{۱}{۲}}=۳ \to \log_{۹}۳=$	$\log_{۲}(\frac{۱}{۱۶})=-۴ \to ۲^{-۴}=$ ......
$۴^{۳}=۶۴ \to \log_{۴}۶۴=$	$\log_{۵}۱۲۵=۳ \to ۵^{۳}=$ ......
$۲^{۵}=۳۲ \to$ ...... = ...	$\log_{\frac{۱}{۳}}۲۷=-۳ \to$ ...... = ...
$۲^{-۳}=$ ...... $\to$ ...... = ...	$\log_{\frac{۱}{۵}}۱۲۵=$ ...... $\to$ ...... = ...
$۳^{-۴}=$ ...... $\to$ ...... = ...	$\log_{\frac{۱}{۲}}۱۶=$ ...... $\to$ ...... = ...

دریاچه تار (دماوند)

تذکر

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{۱۰} a$ می‌نویسیم $\log a$.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت $(a\neq ۱)$ باشد، همواره داریم :

$$\log_a ۱ = ۰ \quad \text{و} \quad \log_a a = ۱ \quad \text{و} \quad \log_a (\frac{۱}{a}) = -۱$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c\neq ۱)$ داریم :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات : فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$، پس طبق تعریف $a=\cdots\cdots$ و $b=\cdots\cdots$، از این‌رو $ab=c^m . c^n=\cdots\cdots$ بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم : $\log_c ab = \cdots\cdots$ و در نتیجه :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال : فرض کنید $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقدار $\log ۶$ را حساب کنید.

$$\log ۶ = \log(۳\times ۲) = \log ۳ + \log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۳ = ۰/۷۸$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$\log_a b^n = n\log_a b$$

اثبات :

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b\cdots b}^{n \text{ بار}} = \underbrace{\log_a b + \cdots + \log_a b}_{n \text{ بار}} = n\log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c\neq ۱)$ داریم :

$$\log_c (\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات : فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$. بنابراین :

$$a = bd \to \log_c a = \log_c b + \log_c d \to \log_c d = \log_c a - \cdots\cdots\cdots$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \cdots\cdots\cdots\cdots - \log_c b$$

مثال : اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$، مقدار $\log ۵$ را محاسبه کنید.

$$\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲ \simeq ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر(جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به‌صورت $a = ۱۵۵۰۰(۵ - \log_{۱۰}^{p})$ است، که در آن a ارتفاع برحسب متر و p نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قلهٔ دماوند به ارتفاع ۵۶۱۰ متر محاسبه کنید.

کار در کلاس

اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log ۱۲ = \log(۳\times ۴) = \log ۳ + \log ۲^{۲} = \log ۳ + ۲\log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۶ = ۱/۰۸$

۲) $\log ۰/۷۵ =$ ....

۳) $\log \sqrt{۵} =$ ....

۴) $\log \frac{۲۵}{۱۸} =$ ....

۵) $\log \sqrt[۳]{۶} =$ ....

۶) $\log \frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۵}} =$ ....

معادلات لگاریتمی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئلهٔ واقعی به‌دست می‌آید. مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی‌اند:

$\log_{۴} x + ۱ = ۳ \quad , \quad \log_{۳} x = \log_{۳} ۷ \quad , \quad \log_{۵} x + \log_{۵}(x-۱) = \log_{۵} ۱۲$

منظور از حل معادلهٔ لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

به‌طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت $(a\neq ۱)$، باشد آن‌گاه با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y \ \ (x, y>۰)$ می‌توان نتیجه گرفت $x=y$ و به عکس، اگر $x=y \ \ (x\,,\, y>۰)$ آن‌گاه $\log_a x = \log_a y$.

فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۳} x = ۲ \rightarrow x = ۳^{۲} = ۹$

۲) $\log_{۵}(x+۶) = \log_{۵}(۲x-۳) \rightarrow x+۶ = ۲x-۳ \rightarrow x = ۹$

که $x = ۹$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۳) $\log_{۵}(x+۶) + \log_{۵}(x+۲) = ۱ \rightarrow \log_{۵}\left[(x+۶)(x+۲)\right] = ۱$

$\rightarrow (x+۶)(x+۲) = ۵ \rightarrow x^{۲}+۸x+۱۲ = ۵$

$\rightarrow x^{۲}+۸x+۷ = ۰ \rightarrow (x+۷)(x+۱) = ۰ \rightarrow x=-۷$ یا $x = -۱$

توجه کنید که $x = -۷$ قابل قبول نیست؛ از این‌رو تنها جواب $x = -۱$ قابل قبول است که در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

خواندنی

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است:

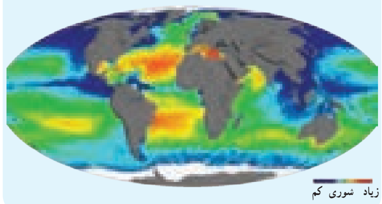
«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است».

خواندنی

شوری آب اقیانوس‌ها با عرض جغرافیایی (فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر می‌کند. در مناطق استوایی میزان شوری آب در سطح اقیانوس‌ها به دلیل تبخیر سریع آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک‌تر می‌شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث می‌شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع مربوط عبارت است از:

$S(x) = ۳۱/۵ + ۱/۱\log(x+۱)$

که در این رابطه x نشان‌دهندهٔ عمق به متر و $S(x)$ نشان‌دهندهٔ مقدار گرم نمک موجود در هرکیلوگرم آب اقیانوس است.



۴ $\log_{۴}(x+۲)=\log_{۴}۸ \rightarrow x+۲=۸ \rightarrow x=\cdots$

۵ $۳\log_{۲}x=-\log_{۲}۲۷ \rightarrow \log_{۲}x^{۳}=$ .... $\rightarrow$ ....

۶ $\log(x+۱)-\log(x-۳)=۳ \rightarrow \log\dfrac{x+۱}{x-۳}=۳ \rightarrow$ ....

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_{۵}x=۳$ ....

۲ $\log_{۲}(۲x+۱)=۳$ ....

۳ $\log_{۲}(x+۱)+\log_{۲}(x+۴)=۲$ ....

۴ $\log_{۳}۲۴۳=۲x+۱$ ....

۵ $\log_{۳}(x-۱)=۴$ ....

۶ $\log(۲x)-\log(x-۳)=۱$ ....

۷ $۲\log_{۴}(x-۱)=۳$ ....

تمرین

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_{c}abd=\log_{c}a+\log_{c}b+\log_{c}d$ (a و b و c و d اعدادحقیقی مثبت‌اند و $c\neq۱$)

ب) $\log_{b}a=\dfrac{\log_{c}a}{\log_{c}b}$ (a و b و c اعدادحقیقی مثبت‌اند و $c\neq۱$ و b)

پ) $a^{\log_{a}b}=b$ (a و b اعدادحقیقی مثبت‌اند و $a\neq۱$)

ت) $\log_{b}a\times\log_{a}b=۱$

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{۷} \sqrt[۵]{۴۹}$

ب) $\log_{۳} ۲۷^{\frac{۱}{۲}}$

پ) $-\log_{۵} ۱۲۵$

ت) $۳\log_{۱۰} \sqrt{۱۰۰۰}$

۳ اگر $f(x) = ۳ - ۲\log_{۴}(\frac{x}{۲} - ۵)$ ، مقدار $f(۴۲)$ را به‌دست آورید.

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_{a}x$ از نقطهٔ $(۲, ۲)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_{a}x$ از نقطهٔ $(-۴, \frac{۱}{۲})$ عبور کند، مقدار a چند است؟

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{۱}{۳}} x$ را رسم کنید.

۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_{a} x$ ، آنگاه $a^{x} = y$.

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{a} x$ $(۰ < a < ۱)$ از نقطهٔ $(۱, ۰)$ عبور می‌کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

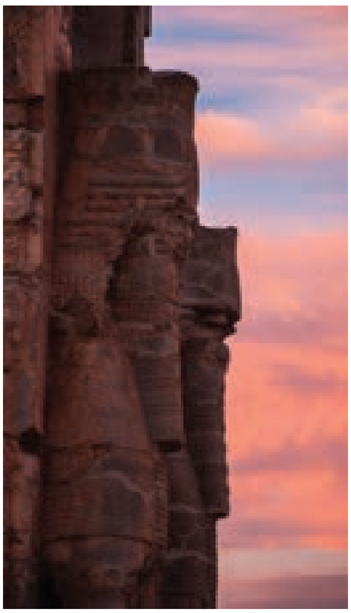
۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۳}(p^{۲} - ۲) = \log_{۳} p$

ب) $\log_{۵}(x+۱) + \log_{۵}(x-۱) = ۱$

پ) $۳\log_{۴} a - \log_{۴} ۵ = \log_{۴} ۲۵$

ت) $\log_{\frac{۱}{۱۰}} (x^{۲} - ۲۱) = -۲$



تخت‌جمشید (فارس)

درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

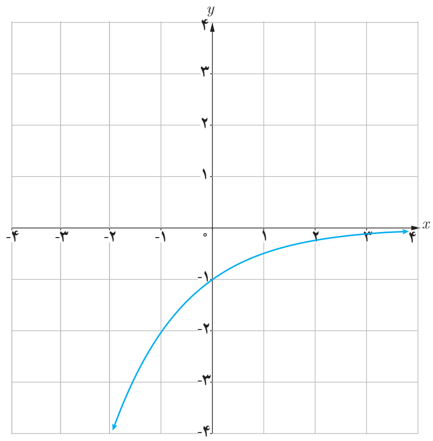
با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

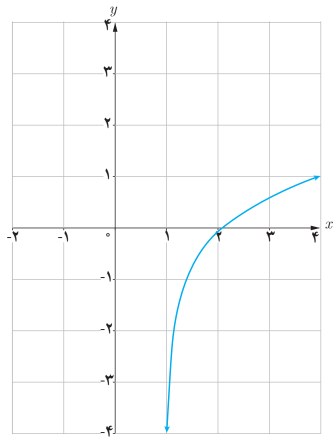
نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

پ) $h(x)=-(\frac{1}{2})^x$ ب) $l(x)=2+\log_3 x$ الف) $k(x)=-\log_2 x$

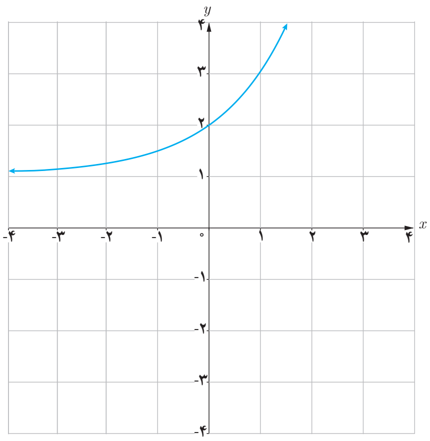
ج) $f(x)=2^x+1$ ث) $j(x)=3^{(x-1)}$ ت) $g(x)=\log_3(x-1)$



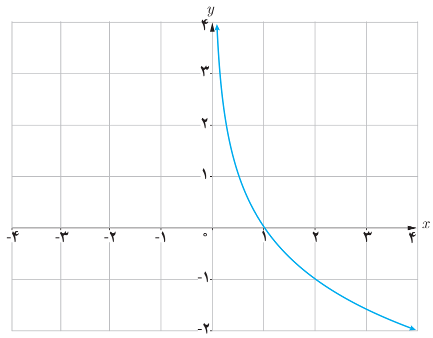
(۳)



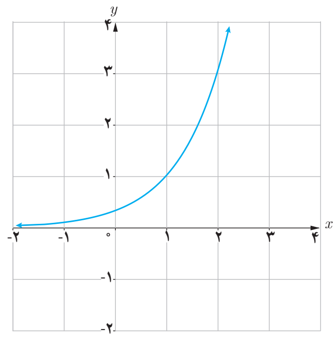
(۲)



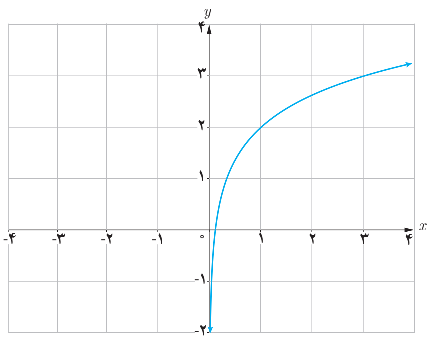
(۱)



(۶)



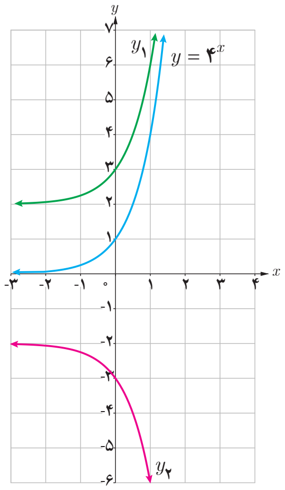
(۵)

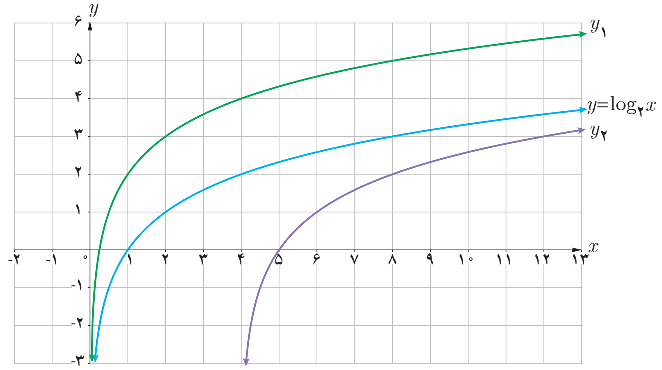


(۴)

کار در کلاس

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.





کار در کلاس

کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_۳ (x-۱)$

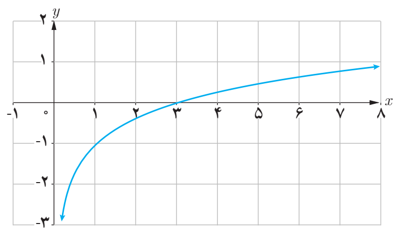
۲) $y = ۳^x + ۱$

۳) $y = ۱ - ۳^x$

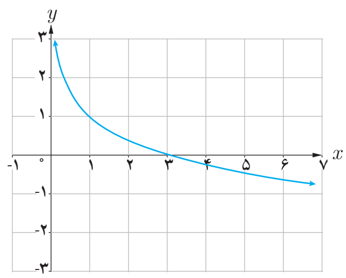
۴) $y = \log_۳ x - ۱$

۵) $y = ۱ - \log_۳ x$

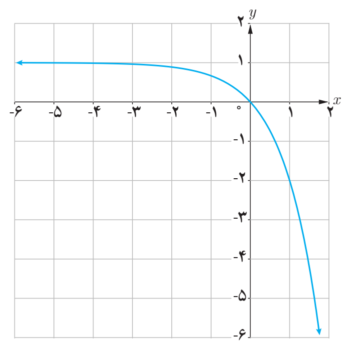
۶) $y = ۳^{(x-۲)}$



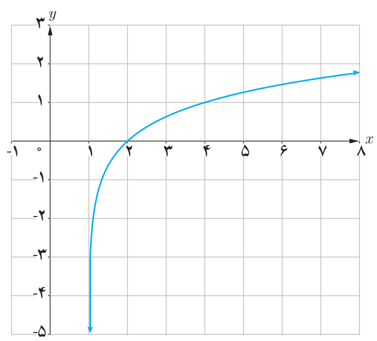
(الف)



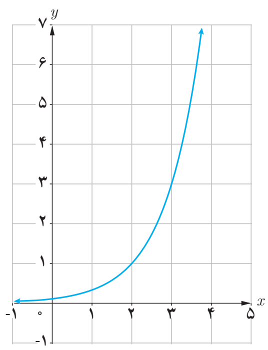
(ب)



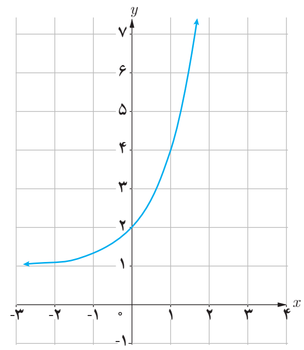
(پ)



(ت)



(ث)

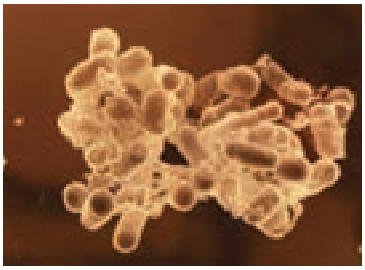


(ج)

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی :

در حالت کلی یک تابع به‌صورت $h(x)=ka^x$ $(a\neq ۱, a>۰)$ رفتار نمایی دارد که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می‌شود.


توده باکتری اشریشیاکلی

مثال : اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به‌طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به‌طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به‌صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می‌شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازهٔ هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$p(t)=۱۰۰\times ۲^{۲t} \qquad (۰\leq t\leq ۱۶)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری‌ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با :

$$p(۳)=۱۰۰\times ۲^۶=۶۴۰۰$$

تابع لگاریتمی :

ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله برابر E در واحد اِرگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$$

انرژی یک زلزلهٔ ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن مادهٔ انفجاری TNT است.

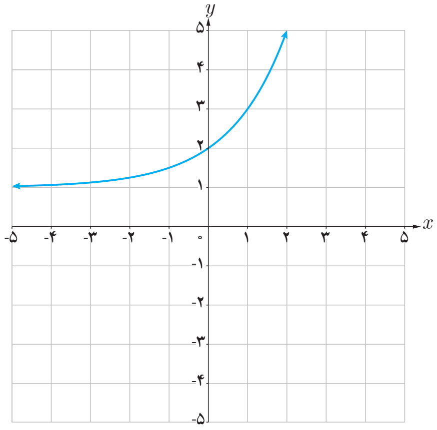
مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M\rightarrow$$
$$\log E=۱۱/۸+۱/۵\ (۶/۶)$$
$$\rightarrow \log E=۲۱/۷ \rightarrow E=۱۰^{۲۱/۷}\ Erg$$

کار در کلاس

زلزلهٔ ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار ــ منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقهٔ بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

تمرین



۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به‌دست آورید.

۲ فرض می‌کنیم $g(x)=4^x+2$. الف) $g(-1)$ را به‌دست آورید. ب) اگر $g(x)=66$، مقدار x چقدر است؟

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=4^x-1$ را در بازهٔ $[-2, 2]$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=-2^x+1$

ب) $y=-\log_2(x-1)$

پ) $y=2^{|x|}$

ت) $y=\frac{|x|}{x}\log x$