

فصل ۵

بردار و مختصات



مقدمه
نحوه
۱۱

ستاب حرکت هر جسم در هر لحظه، همواره در جهت بردار برآیند نیروهای وارد بر آن است؛ برای مثال وقتی یک موشک شلیک می‌شود، نیروهای وارد بر آن عبارت اند از، نیروی وزن، نیروی پیشان، نیروی مقاوم هوا در راستای حرکت موشک (بسار) و نیروی برآر (عمود بر راستای حرکت) بهطوری که برآیند این نیروها باعث حرکت موشک می‌شود.

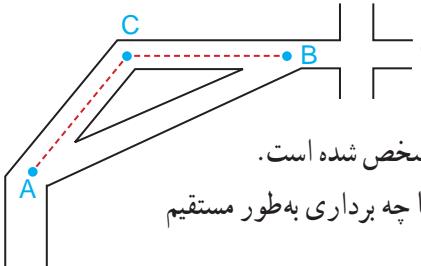
جمع بردارها

فعالیت



۵

۱- شخصی در نقطه A استاده است.



مسیر حرکت او برای رسیدن به نقطه B در شکل مشخص شده است.

این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به طور مستقیم به نقطه B می‌رسد؟ آن را رسم کنید.

۲- روباتی فقط به صورت افقی یا عمودی حرکت می‌کند.



این روبات اکنون روی نقطه A است. با فرمان [۴ ۲] ابتدا

واحد به سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می‌کند. نقطه جدید را B نام‌گذاری کنید.

روبات ما با فرمان [۳ ۲] از B به نقطه C می‌رسد.

با چه فرمانی به طور مستقیم از نقطه A به C می‌رسد؟

۳- نقطه A ابتدا با بردار انتقال a به نقطه B و سپس با بردار انتقال b به نقطه C منتقل شده است. نقطه A با چه برداری به طور مستقیم به نقطه C منتقل می‌شود؟

نام آن را بردار c بگذارید. آیا می‌توانیم بگوییم بردار c کارِ دو بردار انتقال a و b را انجام می‌دهد؟

به بردار c بردار **برایند** یا **حاصل جمع** می‌گویند.

۴- مختصات بردارهای a، b و c را بنویسید. آیا بردار c با جمع دو بردار a و b برابر است؟ به ابتدا و انتهای بردارهای a و b توجه کنید. برداری که از ابتدای a به انتهای b رسم می‌شود (بردار c) برابر است با.....

در فعالیت ۲ مشاهده کردید که نتیجه جمع دو بردار a و b، بردار c است؛ بنابراین، می‌توان یک

تساوی برداری به صورت $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ را نوشت.

با توجه به تساوی $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ می‌توان مختصات بردار c را از **تساوی مختصاتی** زیر به دست

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+t \end{bmatrix}$$

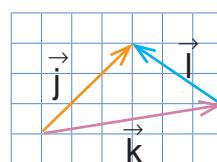
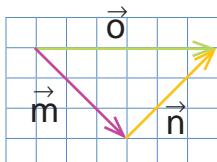
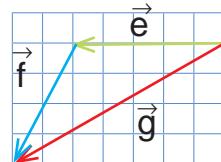
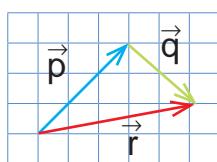
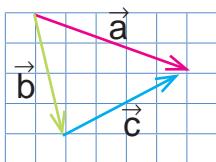
آورد:

کار در کلاس

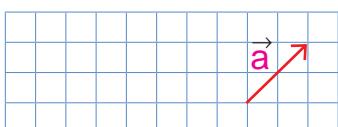


در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد برای رسم حاصل جمع یا برايند این دو بردار می‌توانیم برداری از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کنیم.

ابدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل جمع دو بردار دیگر است؛ سپس برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



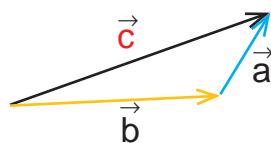
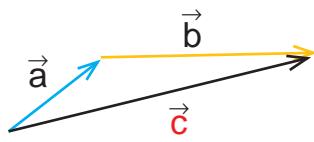
فعالیت ۵



- چهار بردار مساوی بردار a رسم کنید و مختصات همه بردارها را بنویسید.



- با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان از نقطه‌های شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل جمع بردارهای a و b را رسم کنیم. راه حل‌های این دو دانش آموز را توضیح دهید.



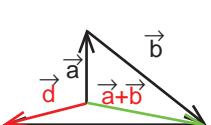
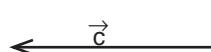
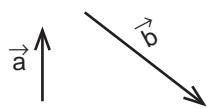
امیر

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

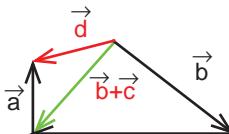
رضاء

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

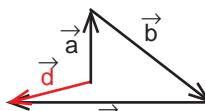
۳- داش آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار، راه حل های زیر را ارائه کرده اند. هر کدام را توضیح دهید.



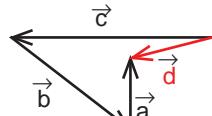
سعید



محمد

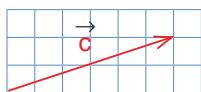
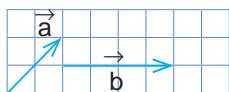


حمید



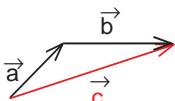
رضا

۴- راه حل های داش آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار a و b را مشاهده و مقایسه کنید.

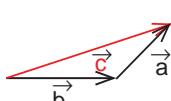


$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

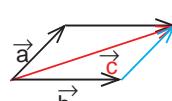
سمانه



فاطمه



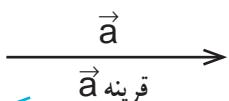
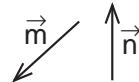
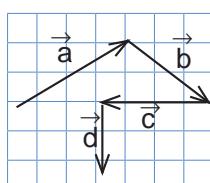
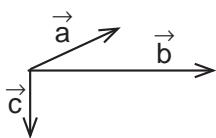
زهرا



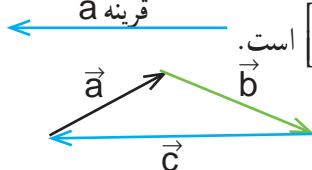
مریم



۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



۲- جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است.

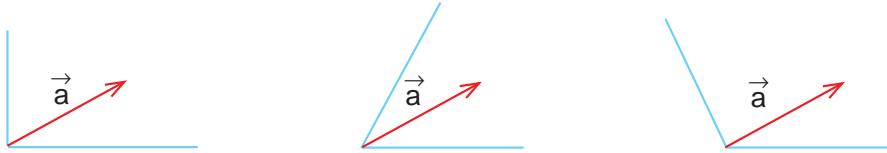


بردار صفر را به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ نشان می دهیم و مختصات آن است.

حاصل جمع بردارهای a, b و c چیست؟ چرا؟

فعالیت ۵

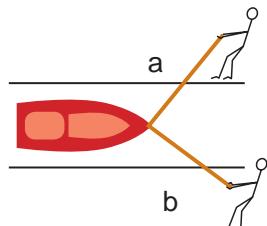
۱- دو بردار در راستاهای آبی رنگ رسم کنید که جمع آنها بردار a باشد. به این کار تجزیه بردار می‌گویند. چند پاسخ مختلف می‌توان به دست آورد؟ چرا؟



۲- مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، بنویسید.
پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر بنویسید. فکر می‌کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟

$$\boxed{\quad} + \boxed{\quad} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

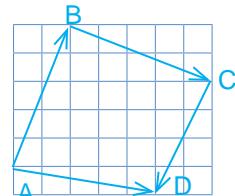
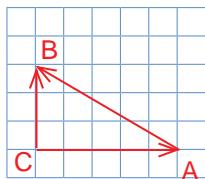
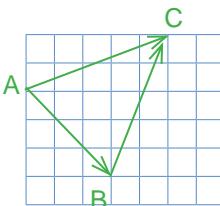
تمرین



- ۱- دو نفر در کتار رودخانه با دو طناب، قایقی را در خلاف جهت آب می‌کشند. (الف) قایق به کدام سمت حرکت می‌کند؟
ب) اگر نیروی a بیشتر باشد، قایق به کدام طرف متمایل می‌شود؟



۲- در هر شکل یکی از بردارها، حاصل جمع بردارهای دیگر است. برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



۳- در هر تساوی، x و y را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در بردار



۱- در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده

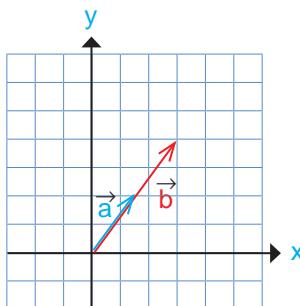
رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کند،
بردار حرکت جدید را رسم کنید.



$$\vec{a} \quad \vec{b}$$

۲- دو نفر سعی می کنند جعبه روبه رو را بکشند
و به جای دیگری ببرند. نیروی که نفر اول وارد می کند با
بردار \vec{a} و نیروی نفر دوم با بردار \vec{b} نمایش داده شده است.
با توجه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول
است؟ چرا؟

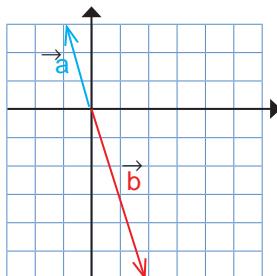
۳- در فعالیت های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازه آن،
چه نکاتی را رعایت کردید؟



۴- در هر شکل، مختصات بردارهای \vec{a} و \vec{b} را بنویسید.
رابطه دو بردار \vec{a} و \vec{b} را با یک تساوی برداری و یک تساوی
مختصاتی نشان دهید.

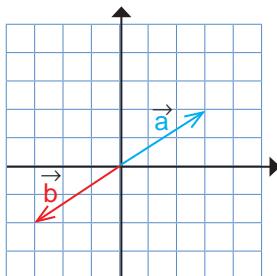
$$\vec{b} = 2\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$[\] = 2 \times [\]$$



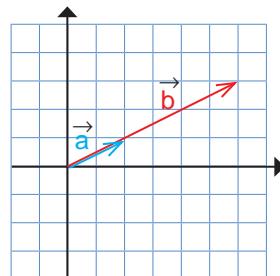
$$\vec{b} = -2\vec{a}$$

$$[\] = -2[\]$$



$$\vec{b} =$$

$$[\] = [\]$$



$$\vec{b} =$$

$$[\] = [\]$$

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.

بنابراین، می‌توانیم بنویسیم :

$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = -\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{b} = (-1)\vec{a}$$

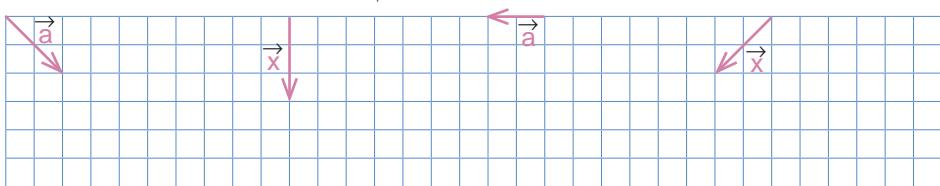
اگر بردار \vec{b} قرینه بردار \vec{a} باشد، می‌نویسیم :

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = -\vec{a} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

کار در کلاس



با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



$$\vec{b} = 3\vec{a}$$

$$\vec{y} = -2\vec{x}$$

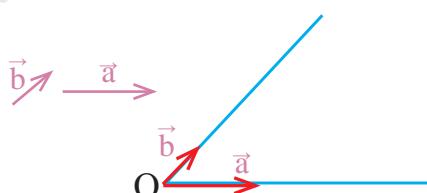
$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\vec{y} = -\frac{3}{2}\vec{x}$$

فعالیت ۵

۱- بردارهای \vec{a} و \vec{b} مفروض اند.

بردار $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ را رسم کنید.



از نقطه دلخواه O بردارهای $2\vec{a}$ و $3\vec{b}$ را رسم کنید؛ سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.

۲- بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

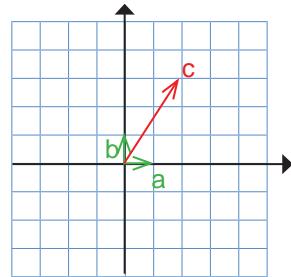
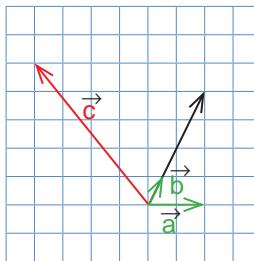
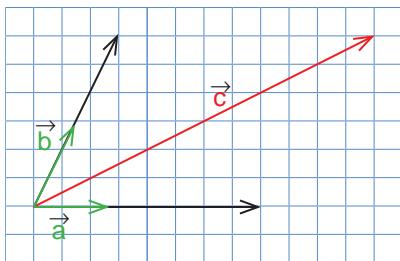
$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{a} + (-3\vec{b})$$

$$\vec{x} \quad \vec{y} \quad \vec{z} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$$

کار در کلاس

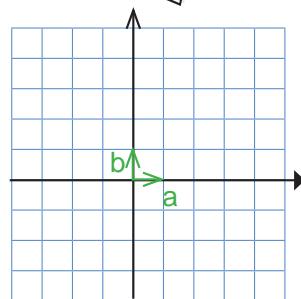
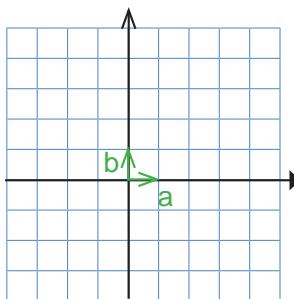
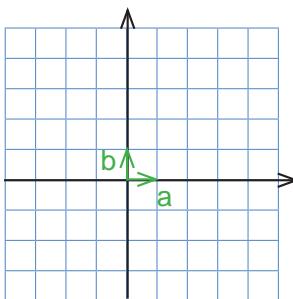


در هر شکل، بردار c را برحسب بردارهای a و b بنویسید.



تمرین

۱- با توجه به بردارهای a و b ، بردارهای c و d را رسم کنید.



$$\vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{d} = (-2)\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -4\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -\vec{a} + 5\vec{b}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-1)\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$(-4)\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

۳- معادله‌های مختصات زیر را حل کنید.

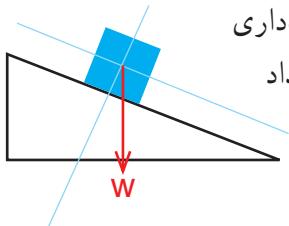
$$4x = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$-3x = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

۴- در شکل رو به رو، نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم شده تجزیه کنید.



۵- با توجه به بردارهای a و b ، مختصات بردار c را به دست آورید.

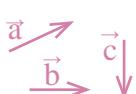
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$$

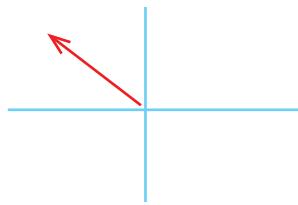
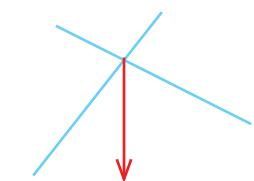
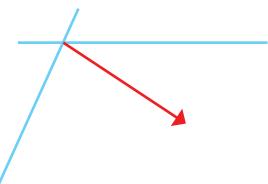
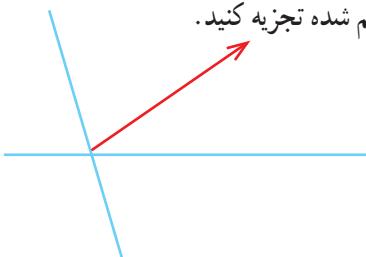
۶- با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$

۷- بردارهای داده شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.



فعالیت



۱- برای اندازه‌گیری هر یک از مقدارهای زیر از چه واحدی استفاده می‌کنیم؟



زمان :



زاویه :



دما :



جرم :

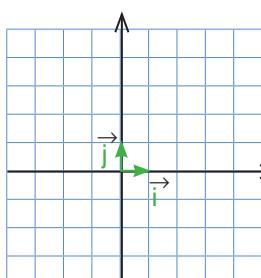


طول :

۲- در محور زیر، واحد را نشان داده‌ایم. عددهای ۲ و ۱- را روی محور مشخص کنید.



۳- همان‌طور که ملاحظه کردید برای اندازه‌گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم. برای نمایش بردار نیز به واحد نیازمندیم. این واحد باید از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه مختصات با دو محور نمایش داده می‌شود به واحد روی هر دو محور نیاز داریم. در شکل رویه‌رو، **بردارهای واحد** روی هر دو محور مشخص شده‌اند.



- مختصات بردارهای واحد را بنویسید.

- بردار $\vec{j} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ را رسم کنید.

- مختصات بردار a را بنویسید.

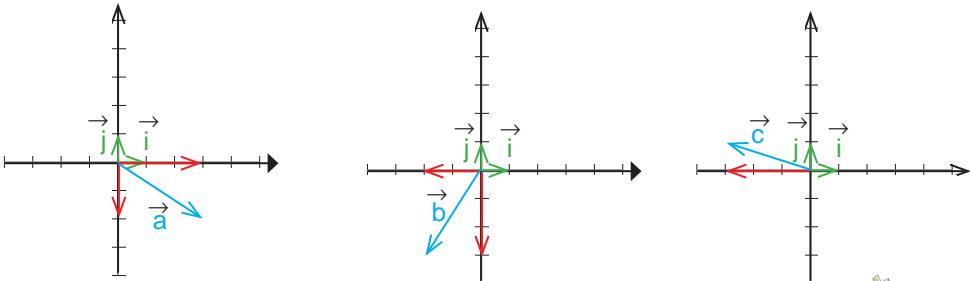
- مختصات بردار a را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 4 \begin{bmatrix} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

کار در کلاس



در هر قسمت، بردار داده شده را بر حسب \vec{i} و \vec{j} و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.



فعالیت



۱- طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} =$$

$$2\vec{i} - 3\vec{j} =$$

$$3\vec{i} =$$

۲- دو داشنآموز، معادله برداری زیر را حل کرده‌اند. مراحل را هم مقایسه کنید.

راه حل حمید

$$\vec{2i} + \vec{j} + \vec{2x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{i} + \vec{j} + \vec{2x} = -5\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{2x} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{2x} = -8\vec{i}$$

$$\vec{x} = -4\vec{i}$$

راه حل سعید

$$3\vec{i} + \vec{j} + \vec{2x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{2x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{2x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{2x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳- معادله‌های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

$$\vec{2i} - \vec{j} + \vec{3x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \vec{2x} = \vec{i} - \vec{j}$$

کار در کلاس



اگر $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای x و y را به دست آورید.

$$\vec{x} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{y} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$$

تمرین

۱- طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} -5 \\ \circ \end{bmatrix} =$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = -2\vec{j}$$

۲- دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.

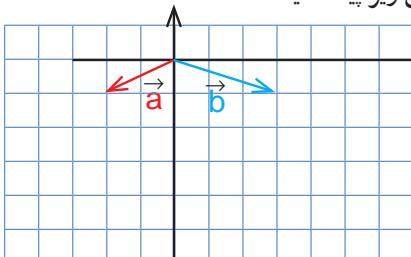
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۳- با توجه به شکل زیر، مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید.



الف) رسم شکل و نوشتن مختصات \vec{c} از روی شکل

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ب) پیدا کردن مختصات \vec{a} و \vec{b} و قرار دادن آنها در
تساوی زیر.

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های هر روش را بیان کنید.

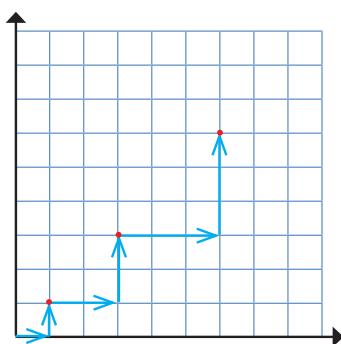
کدام روش برای رایانه‌ای شدن مناسب‌تر است؟ چرا؟

۴- با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

طول	+	-	+	-
عرض	+	+	-	-
شکل تقریبی				

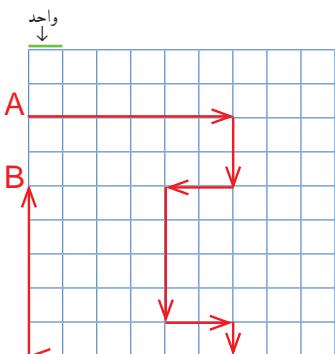
۵- اگر $\vec{j} = \vec{a} - \vec{b}$ باشد، بردار x را از معادله زیر پیدا کنید.

$$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b}$$



۶- یک روبات برنامه‌ریزی شده به صورت زیر از مبدأ مختصات حرکت می‌کند.
با مشاهده سه حرکت اول این روبات، الگویی برای حرکت آن کشف کنید و توضیح دهید. روبات پس از حرکت پنجم به کدام نقطه می‌رسد؟

۷- حمیده با خود فکر می‌کرد که اگر چند بردار با هم جمع شوند، بردار حاصل جمع از همه آنها بزرگ‌تر است. آیا او درست فکر کرده است؟ با کشیدن شکل توضیح دهید.



۸- در صفحه شطرنجی زیر، یک خودرو با نقطه A مشخص شده است. این خودرو مسیری را طی کرده است تا به نقطه B برسد؛ در کل به اندازه چند واحد حرکت کرده است؟

خودرو از نقطه A به B در راستای عمودی چند واحد جابه‌جا شده است؟

مرور فصل ٥

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود آنها را توصیف کنید و برای هریک مثالی بزنید.

- جمع (پرایند) بردارها
 - تجزیه بردار
 - ضرب عدد در بردار
 - پردازهای واحد مختصات

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه‌ای از درس را بنویسید.

- پیدا کردن جمع دو بردار
 - نوشتن جمع برداری و جمع مختصاتی
 - رسم بردارهای ترکیبی که شامل حاصل جمع مضرب های دو بردارند.
 - پیدا کردن مختصات بردارهای ترکیبی
 - نوشتن مختصات بردار با بردارهای واحد مختصات
 - تجزیه یک بردار روی دو امتداد
 - نمایش بردارهای واحد مختصات به صورت مختصاتی
 - حل کردن معادله های شامل بردار

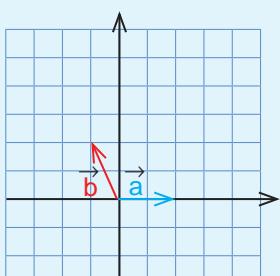
کاربرد

موضوعات این فصل در درس‌های علوم (فیزیک – مکانیک) شما کاربرد زیادی دارد؛ ضمن آینکه در شاخه‌ای از ریاضیات به نام «جبر خطی و فضای برداری» نیز مطرح می‌شود و به کمک آن می‌توانید مسائل مختلف ریاضی و فیزیک را حل کنید.

تمرین‌های ترکیبی

- ۱- با توجه به بردارهای a و b ، c ، بردار $d = 2a - b + 3c$ را رسم کنید.

۲- اگر $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار $x = \vec{i} - j$ را پیدا کنید.



$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

۳- با توجه به شکا، مختصات پرداز، اسدا کند.

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$$