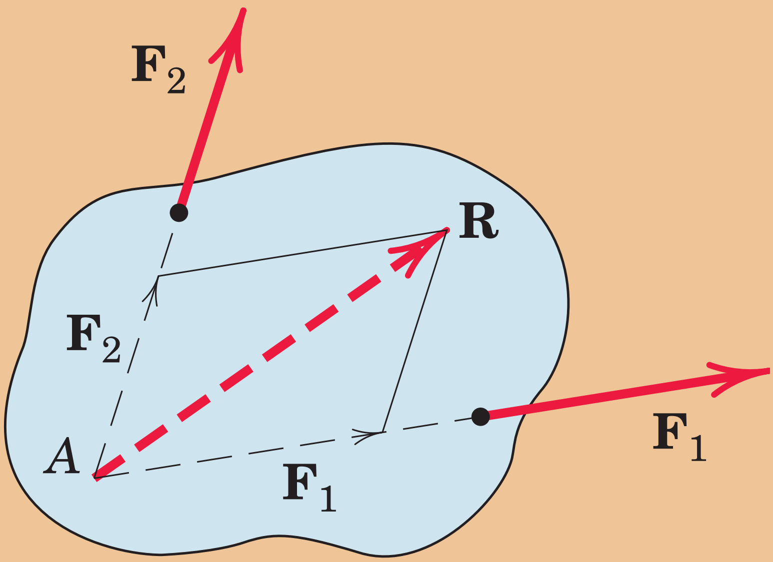
پودمان ۱

تحلیل مکانیک بُرداری



واحد یادگیری ۱

کاربرد جمع بُردارها

۱ـ۱ــ تعریف علم مکانیک

علم مکانیک علمی است که شرایط سکون و حرکت اجسام تحت تأثیر نیرو را بررسی می‌کند.

حوزه‌های علم مکانیک
- ۱- مکانیک اجسام صلب
  - استاتیک: اجسام صلب ساکن را مورد بررسی قرار می‌دهد.
  - دینامیک: اجسام صلب متحرک را مورد بررسی قرار می‌دهد.
- ۲- مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر (مقاومت مصالح)
- ۳- مکانیک سیالات (مایعات و گازها)

در این کتاب از حوزه‌های فوق، با مکانیک اجسام صلب ساکن (استاتیک) آشنا می‌شویم.

بیشتر بدانیم

محمد کرجی از نوابغ مهندسی ایران در بیش از هزار سال پیش بوده است.
کرجی در کتاب «استخراج آب‌های زیرزمینی» به‌وضوح از کرویّت زمین و قوهٔ جاذبه و قوانین تعادل و حرکت، که برخی از آن‌ها چندین قرن بعد توسط دانشمندان اروپایی مطرح شد سخن می‌گوید.

۱ـ۲ــ مفاهیم اصلی در علم مکانیک

مفاهیم اصلی و مورد استفاده در علم مکانیک و معرفی یکاهای اندازه‌گیری آن‌ها در سامانهٔ بین‌المللی یکاها (**SI**) به شرح زیر می‌باشد.

۱- فضا (**Space**):

ناحیه هندسی است که رویدادهای فیزیکی در آن رخ می‌دهد. موقعیت هر نقطه در فضا را مکان می‌نامیم که نسبت به یک نقطهٔ مرجع تعیین می‌شود و واحد اندازه‌گیری آن در سامانهٔ **SI**، متر (**m**) می‌باشد.

۲- زمان (**Time**):

فاصلهٔ بین وقوع دو رویداد فیزیکی زمان نام دارد و واحد اندازه‌گیری آن ثانیه (**s**) می‌باشد.

۳- جرم (**Mass**):

هر چیزی که فضا را اشغال نماید ماده نام دارد و جسم ماده‌ای است که به‌وسیلهٔ یک سطح بسته محدود شده است. مقدار مادهٔ تشکیل دهندهٔ هر جسم را جرم آن جسم می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن کیلوگرم (**kg**) است.

۴- نیرو (**Force**):

تأثیر یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن نیوتن (**N**) است.
این تأثیر می‌تواند تغییر در حرکت، تغییر شکل و یا چرخش اجسام باشد.

۱ـ ۳ ـ فرضیات

در علم مکانیک به منظور ساده‌تر شدن حل مسائل، فرضیاتی به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

۱ـ جسم صلب (Rigid Body):

جسمی است که در اثر اِعمال نیرو تغییر شکل ندهد.

۲ـ نقطه مادی (Particle):

جسمی است که از ابعاد آن صرف‌نظر می‌شود؛ به عنوان مثال می‌توان کره زمین را در فضا به صورت یک نقطه مادی در نظر گرفت.

۱ـ ۴ ـ قوانین نیوتن

مکانیک اجسام صلب بر اساس قوانین نیوتن به‌شرح زیر استوار است:

۱ـ قانون اول نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر باشد:

- اگر جسم ساکن باشد تا ابد ساکن باقی می‌ماند.
- اگر در حال حرکت باشد به حرکت یکنواخت و مستقیم‌الخط خود ادامه می‌دهد.

۲ـ قانون دوم نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر نباشد، آن جسم شتابی متناسب با مجموع نیروها و در راستای آن می‌گیرد. قانون دوم نیوتن با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$F = m.a \qquad (۱)$$

در این رابطه:

F مجموع نیروهای وارد بر جسم برحسب **N**

m جرم جسم برحسب **kg**

a شتاب ایجاد شده در جسم برحسب $\frac{m}{s^2}$ می‌باشد.

یک مورد خاص و بسیار مهم این قانون وزن اجسام است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف وزن (Weight):

وزن نیرویی است که از طرف زمین به اجسام وارد می‌شود و با رابطه (۲) بیان می‌گردد که شباهت زیادی با رابطهٔ (۱) دارد.

$$w = m.g \qquad (۲)$$

w : وزن جسم برحسب نیوتن

m : جرم جسم برحسب **kg**

g : شتاب جاذبه زمین معادل ($g = ۹/۸۱ \sim ۱۰\frac{m}{s^2}$) می‌باشد.

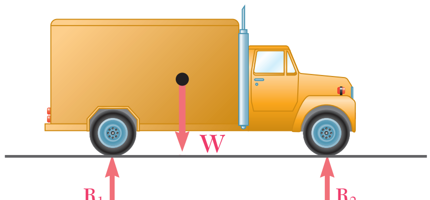
تذکر:

واحد دیگر وزن، کیلوگرم‌نیرو (**kgf**) می‌باشد که معادل ۱۰ نیوتن است یعنی:

$$۱kgf \sim ۱۰N$$

۳- قانون سوم نیوتن:

هر عملی را عکس‌العملی است مساوی با آن و در جهت خلاف آن. (شکل ۱)



شکل ۱ ▲

نکته

در این کتاب از سامانه بین‌المللی واحدهای اندازه‌گیری (SI) استفاده می‌کنیم که در اکثر کشورها نیز پذیرفته شده است.

پیشوندهای واحدهای اندازه‌گیری:

منظور از پیشوند، یک مقدار عددی است که با حروف الفبای یونانی تعریف شده (مطابق جدول ۱) و قبل از واحدهای اندازه‌گیری قرار می‌گیرد.

نکته

مزیت استفاده از پیشوندها این‌است‌که از نوشتن اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک اجتناب می‌شود. به عنوان مثال می‌توان N ۲۴۷۵۰۰ را به صورت ۲۴۷/۵ kN و یا ۰/۰۰۰۵۴۶ m را به شکل ۵/۴۶ mm نوشت.

نکته

- بین پیشوند و واحد اندازه‌گیری مورد نظر از هیچ علامتی استفاده نمی‌شود اما بین دو واحد اندازه‌گیری مختلف هر علامتی نظیر × و / می‌تواند وجود داشته باشد به طور مثال:

N.m یعنی نیوتن‌متر و **nm** یعنی نانومتر که معادل (10^{-9} **m**) می‌باشد.

مثال: **MN** $7/5 \times 10^{-5}$ چند نیوتن است؟

$$7/5 \times 10^{-5} \times 10^{6} = 75 \quad N$$

جدول (۱) پیشوندهای آحاد اندازه‌گیری

شکل توانی	مقدار عددی	علامت اختصاری	نام پیشوند
10^{-12}	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱	**p**	پیکو
10^{-9}	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱	**n**	نانو
10^{-6}	۰/۰۰۰۰۰۱	**µ**	میکرو
10^{-3}	۰/۰۰۱	**m**	میلی
10^{3}	۱,۰۰۰	**K**	کیلو
10^{6}	۱,۰۰۰,۰۰۰	**M**	مگا
10^{9}	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	**G**	گیگا
10^{12}	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	**T**	ترا

۱ – ۵ – کمیت‌های فیزیکی

به‌طور کلی کمیت‌های فیزیکی به دو دستهٔ اصلی و فرعی تقسیم‌بندی می‌شوند.

کمیت‌هـای اصلـی: بـه کمیت‌هایـی گفته می‌شـود کـه مسـتقل‌اند و در ایـن پودمـان عبارت‌اند از طـول (L)، جـرم (M) و زمان (T).

کمیت‌هـای فرعـی: بـه کمیت‌هایـی گفته می‌شـود که وابسـته بـه کمیت‌هـای اصلی هسـتند و از آنهـا ناشـی می‌شـوند. مانند نیرو، گشـتاور نیرو، سـرعت، کار، انـرژی و ...

در یک تقسیم‌بندی دیگر کمیت‌های فیزیکی به دو دستهٔ اسکالر و برداری تقسیم می‌شوند.

کمیت‌هـای عـددی یا اسـکالر: کمیت‌هایی هسـتند که فقـط دارای انـدازه یا مقـدار می‌باشـند؛ مانند طـول، جرم، زمـان، کار و انرژی.

کمیت‌هـای بـرداری: کمیت‌هایـی هسـتند کـه عـلاوه بـر مقـدار دارای جهـت و راسـتا نیـز می‌باشـند. مانـند: بردارهـای نیـرو، گشـتاور، سـرعت، شـتاب و جابه‌جایـی.

دیمانسیون

بـه رابطـهٔ کمیت‌هـای اصلـی و فرعی دیمانسـیون یا معادلـهٔ ابعـادی گفته می‌شـود. در این معادلـه کمیت‌های فرعـی بر حسـب دیمانسـیون کمیت‌هـای اصلی تعریـف می‌گردند.

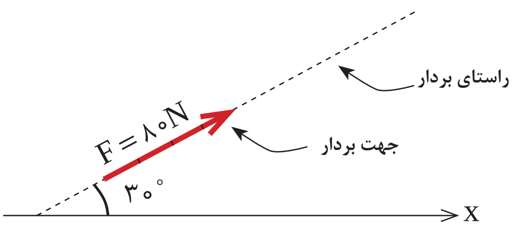
دیمانسیون طول را به L و دیمانسیون جرم را با M و دیمانسیون زمان را با T نشان می‌دهند.

به‌طـور مثـال دیمانسـیون نیـرو کـه یـک کمیت فرعی اسـت را بـا توجه بـه قانـون دوم نیوتن یعنـی $F=ma$ به صـورت $F = MLT^{-2}$ نمایـش می‌دهند.

۱ – ۶ – بردارها (Vector)

هـر بـردار به صورت یـک پیکان بـا طولی متناسـب با مقدار آن ترسـیم می‌شـود

بـه عنـوان مثـال در شـکل (۲)، بـردار نیـروی ($\vec{F}$) با مقـدار N ۸۰ و بـا زاویه 30° نسـبت بـه محور **x** و در جهت و راسـتای نشـان داده شـده ترسـیم شده است.



شکل ۲ ▲

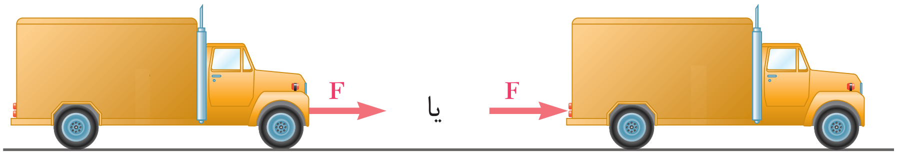
نکته

زاویه امتداد هر بردار، با یک امتداد مبنا که معمولاً امتدادهای **x** یا **y** است، مشخص می‌شود.

۱ – ۷ – انواع بردارها

۱– بردار لغزان

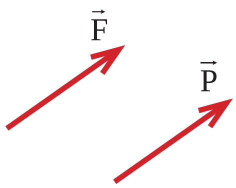
برداری است که اگر در راستای خود جابه‌جا شود، اثر آن بر جسم تغییر ننماید. همانند نیروی **F** در شکل (۳)



شکل ۳ ▲

۲– بردار ثابت

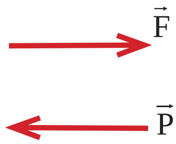
برداری است که مکان معینی را در فضا اشغال می‌کند و نمی‌توان آن‌را جابه‌جا نمود. یعنی با جابه‌جا کردن آن، اثر آن بر جسم تغییر می‌نماید. مثلاً ضربه‌ای که به سر انسان وارد می‌شود با ضربه‌ای که با همان مقدار و همان جهت به پای او وارد می‌آید متفاوت است.



شکل ۴ ▲

۳– بردارهای هم‌سنگ

دو بردار مساوی، موازی و هم‌جهت را بردارهای هم‌سنگ می‌نامیم. در شکل (۴) بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{P}$ هم سنگ اند.



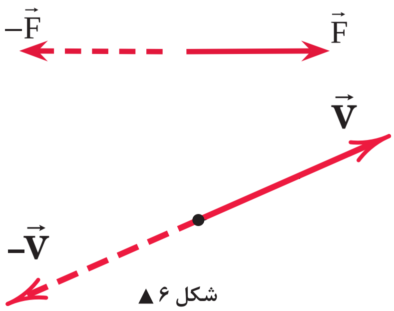
شکل ۵ ▲

۴– بردارهای زوج

دو بردار مساوی، موازی و مختلف‌الجهت را بردارهای زوج می‌نامیم. در شکل (۵) بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{P}$ زوج‌اند.

۵– بردارهای مخالف

دو بردار مساوی، هم‌راستا و مختلف‌الجهت را بردارهای مخالف گویند. (شکل ۶)

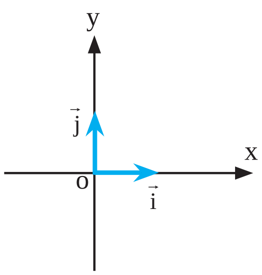


شکل ۶ ▲

۶– بردار یکه (واحد)

برداری که مقدار (اندازه) آن برابر واحد است را بردار یکه یا واحد می‌نامیم.

بردار واحد روی محور **x** ها را با $\vec{i}$ و روی محور **y** ها را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهند. شکل (۷)

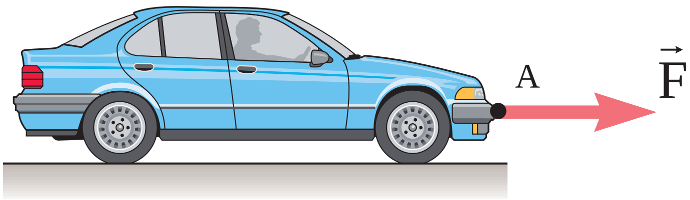


شکل ۷ ▲

۷- بردار نیرو

برداری است که علاوه بر مقدار، جهت و راستا دارای نقطه اثر نیز می‌باشد. در شکل (۸) نقطه **A**، نقطه‌اثر بردار نیروی $\vec{F}$ می‌باشد.

و واحد اندازه‌گیری نیرو، نیوتن (**N**) است و مطابق قانون دوم نیوتن به صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۸ ▲

تعریف نیوتن با استفاده از قانون دوم نیوتن

یک نیوتن مقدار نیرویی است که اگر به جرم یک کیلوگرم وارد شود، در آن شتابی معادل یک متر بر مجذور ثانیه و در جهت اِعمال نیرو ایجاد نماید.

$$F = m.a$$

$$۱N = ۱kg \times ۱\frac{m}{s^{۲}}$$

۱ – ۸ – جمع و تفریق بردارها

عملیات جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی (اسکالر) متفاوت است. یعنی نمی‌توان مقادیر عددی دو یا چند بردار، به‌غیر از بردارهای هم‌راستا، و موازی را با یکدیگر جمع و یا تفریق نمود. در این کتاب برای نشان دادن یک بردار مانند $\vec{V}$ از علامت (⟶) در بالای آن استفاده می‌شود و برای نشان دادن مقدار (اندازه) آن بردار علامت (⟶) بالای آن برداشته می‌شود.

بردار V : $\vec{V}$

اندازه یا مقدار بردار V : V

۱–۸–۱– روش‌های جمع و تفریق بردارها

جمع و تفریق بردارها به دو روش ۱- ترسیمی ۲- محاسباتی انجام می‌شود.

۱-۸-۱-۱- روش ترسیمی

در این روش با استفاده از وسایل ترسیم و مقیاس مناسب جمع و تفریق بردارها انجام می‌شود. روش‌های ترسیمی جمع و تفریق بردارها شامل سه روش زیر می‌باشد:

الف) روش مثلث

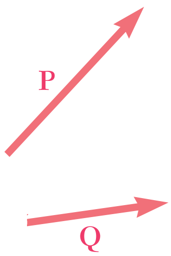
ب) روش متوازی‌الاضلاع

ج) روش چندضلعی

لازم به ذکر است که روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع برای مجموع یا تفاضل دو بردار و روش چندضلعی برای مجموع یا تفاضل بیش از دو بردار مناسب می‌باشند.

الف) روش مثلث

دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مطابق شکل (۹) مفروض است.



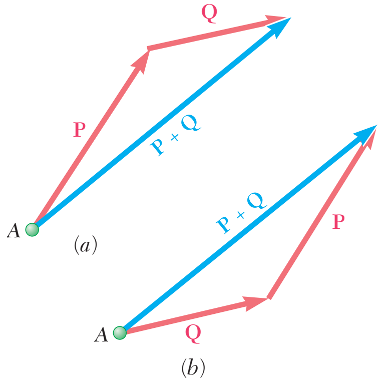
شکل ۹ ▲

برای به‌دست آوردن مجموع آن‌ها یعنی $\vec{P}+\vec{Q}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) از نقطه دلخواه مانند **A** هم‌سنگ یکی از بردارها ترسیم می‌شود

۲) از انتهای بردار اول هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود

۳) برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم وصل می‌شود مجموع دو بردار خواهد بود که مقدار آن به‌وسیلهٔ خط‌کش مقیاس اندازه‌گیری می‌شود: شکل (۱۰)

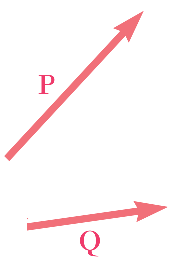


شکل ۱۰ ▲

$$\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q} \qquad (۳)$$

ب) روش متوازی‌الاضلاع

دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مطابق شکل (۱۱) مفروض است و مجموع آن‌ها یعنی $\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}$ مدنظر می‌باشد. طبق قانون متوازی‌الاضلاع به شرح زیر عمل می‌نمائیم: شکل (۱۲)



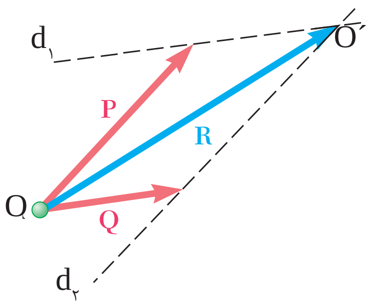
شکل ۱۱ ▲

۱) از نقطه دلخواه مانند **O** هم‌سنگ بردارهای $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ را ترسیم می‌نمائیم

۲) از انتهای بردار $\vec{P}$ به موازات بردار $\vec{Q}$ خطی ترسیم می‌شود (خط $\mathbf{d_1}$)

۳) از انتهای بردار $\vec{Q}$ به موازات بردار $\vec{P}$ خطی ترسیم می‌شود (خط $\mathbf{d_2}$) تا خط $\mathbf{d_1}$ را در نقطه **O´** قطع نماید.

۴) برداری که از **O** به **O'** ترسیم می‌شود همان مجموع دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ یعنی $\vec{R}$ خواهد بود که مقدار آن با رابطهٔ (۴) محاسبه می‌شود:

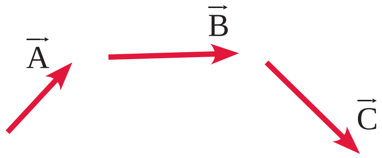


شکل ۱۲ ▲

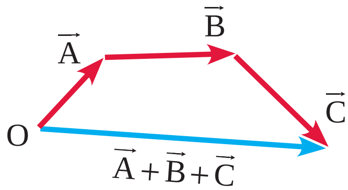
$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos O$$
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos O} \qquad (۴)$$

ج) روش چندضلعی

در این روش به منظور ترسیم مجموع چند بردار مانند شکل (۱۳) از یک نقطه دلخواه مانند **O** هم‌سنگ بردار اول را رسم می‌کنیم و از انتهای بردار رسم شده هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود. این روند تا ترسیم تمامی بردارها ادامه می‌یابد؛ برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر رسم می‌شود، مجموع بردارها خواهد بود. شکل (۱۴)



شکل ۱۳ ▲



شکل ۱۴ ▲

نکته

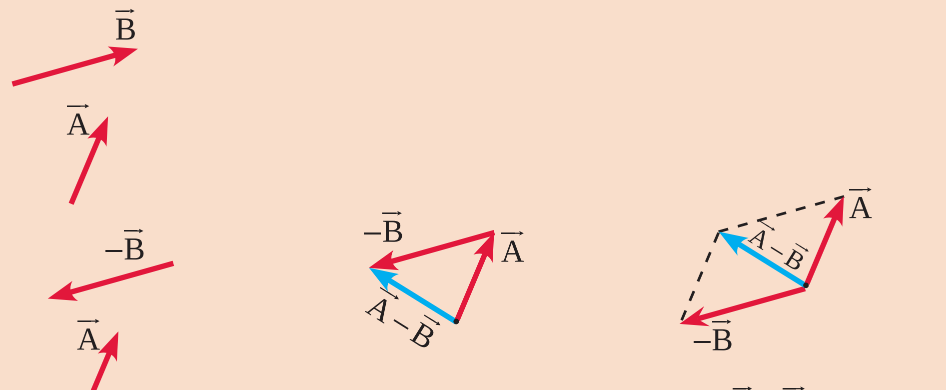
• هر گاه انتهای آخرین بردار بر ابتدای بردار اول منطبق گردد (یک چندضلعی بسته تشکیل شود)، مجموع بردارها صفر خواهد بود.

• در حالتی که بردارها موازی یا هم‌راستا باشند، برای جمع و تفریق آن‌ها کافی‌است با در نظر گرفتن جهت بردارها، آن‌ها را روی یک محور ترسیم نمود.

نکته

عملیات تفریق دو یا چند بردار به روش‌های فوق با استفاده از تعریف بردار مخالف مطابق شکل (۱۵) امکان‌پذیر است. یعنی:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad (۵)$$



تفاضل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به روش مثلث

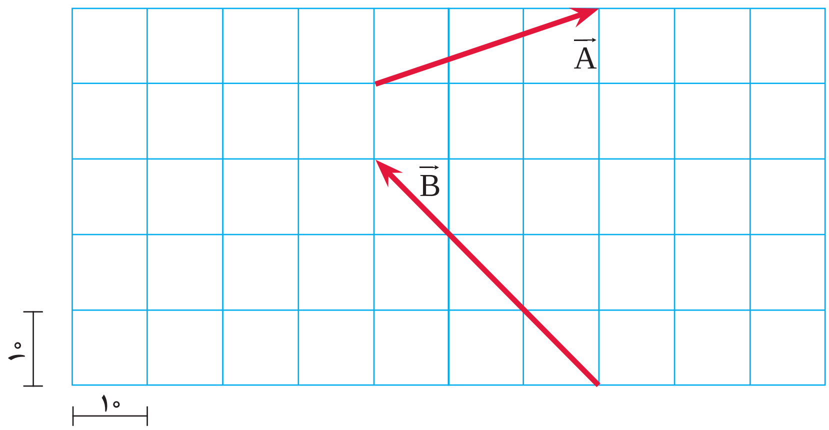
تفاضل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به روش متوازی‌الاضلاع

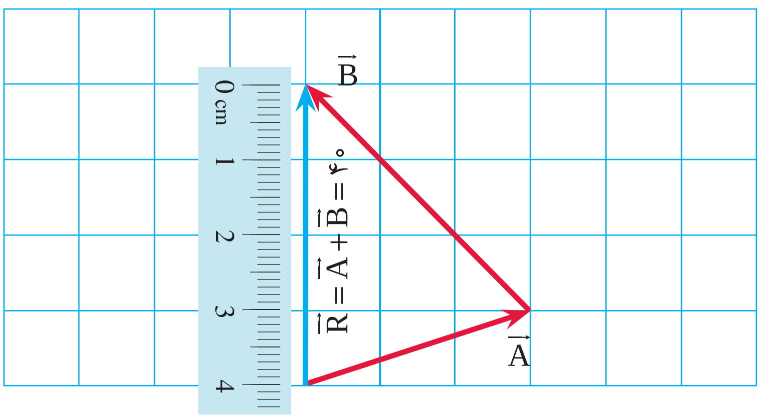
شکل ۱۵ ▲

در این حالت چناچه بخواهیم به روش محاسباتی عمل نمائیم کافیست که بردارهای موجود را دوبه‌دو با هم جمع یا تفریق نموده و حاصل هر دو بردار را با بردار بعد، جمع یا تفریق کرده و این روند را تا آخرین بردار ادامه داد.

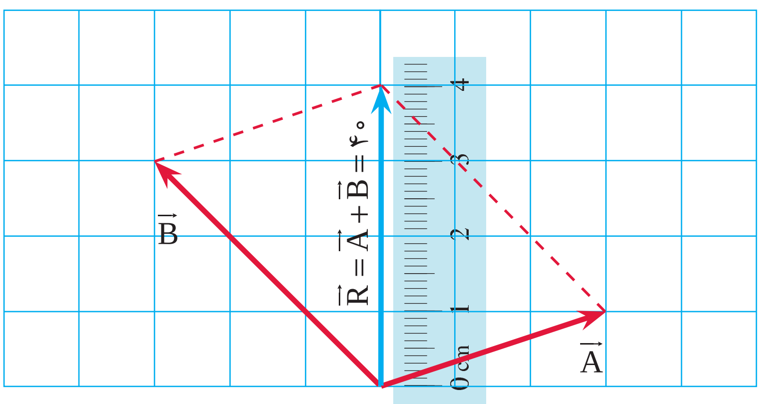
مثال ۱

در شکل زیر حاصل بردارهای $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ را محاسبه نمایید.
(ابعاد شبکه برابر ۱۰ واحد است)

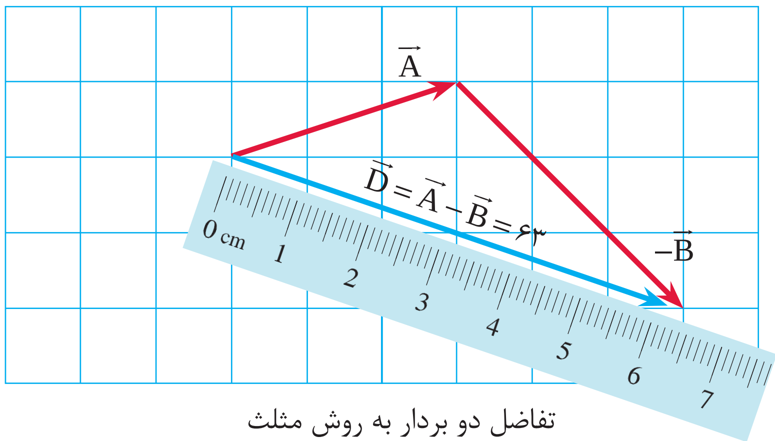




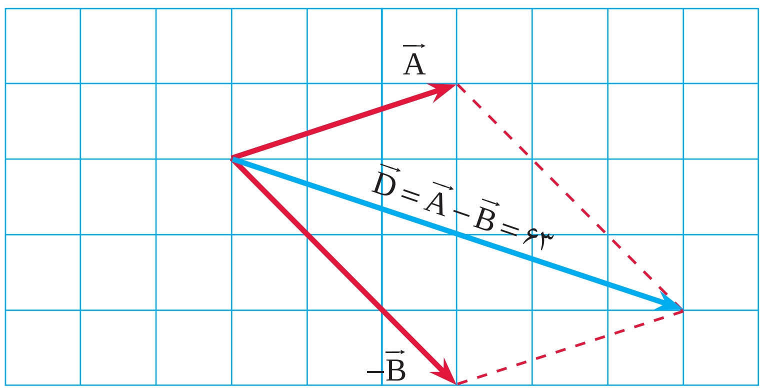
مجموع دو بردار به روش مثلث



مجموع دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع



تفاضل دو بردار به روش مثلث



تفاضل دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع

۱ــ۹ــ تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌های آن به روش ترسیمی

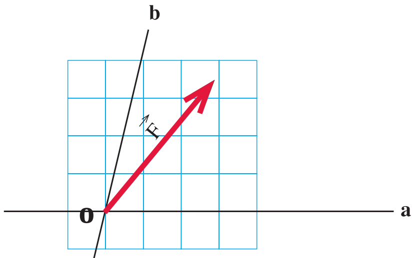
همان‌گونه که در قسمت قبل دیدیم دو بردار با امتداد و مقادیر مشخص را می‌توان با استفاده از روش‌های مثلث یا متوازی‌الاضلاع با یکدیگر جمع نمود و مجموع آن‌ها را به‌دست آورد؛ که این بردارِ مجموع را برآیند دو بردار اولیه نیز می‌نامند. حال چنانچه دو امتداد دلخواه در صفحه داشته باشیم و برداری به نام $\vec{F}$ نیز داده شده باشد می‌توان آن را بر روی دو امتداد مورد نظر به شرح ذیل تجزیه نمود که عکس عمل جمع دو بردار می‌باشد. (شکل‌های ۱۵ و ۱۶)

۱) از انتهای بردار $\vec{F}$ دو خط به موازات محورهای **a** و **b** ترسیم نموده (خطوط **'a** و **'b**) تا آن‌ها را در نقاط $\mathbf{O}_1$ و $\mathbf{O}_2$ قطع نماید.

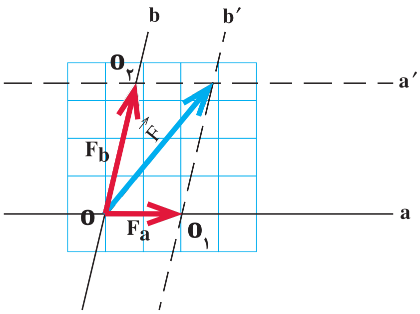
۲) بردار $\overline{OO_1}$ مؤلفهٔ $\vec{F}$ روی امتداد **a** خواهد بود که با $\vec{F}_a$ نشان داده می‌شود.

۳) بـردار $\overrightarrow{OO_۲}$ مؤلفـهٔ $\vec{F}$ روی امتـداد **b** خواهـد بود که بـا نماد $\vec{F_b}$ نشـان داده می‌شـود.

روش فـوق، روش کلـی بـرای تجزیـهٔ یـک بـردار اسـت. حالـت خاصـی از آن تجزیـهٔ یـک بـردار روی دو محـور متعامـد (عمـود بـر هم) اسـت کـه کاربـرد زیـادی در حل مسـائل ایسـتایی دارد.



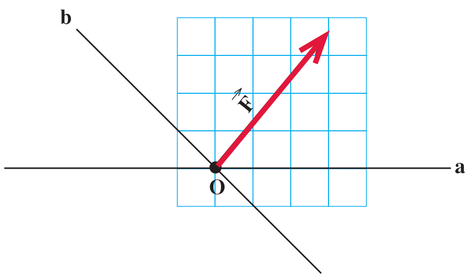
شکل ۱۵ ▲



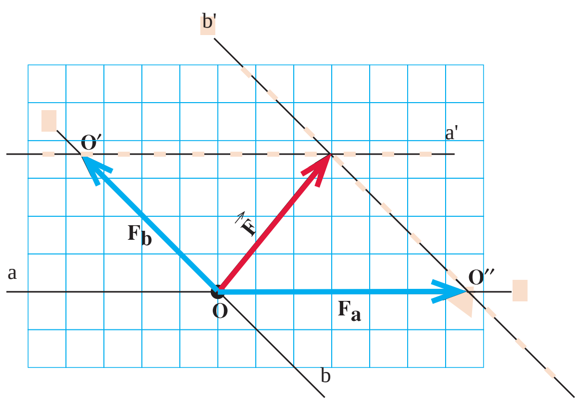
شکل ۱۶ ▲

مثال ۲

در شکل زیر بردار F را روی امتدادهای a و b تجزیه کنید.

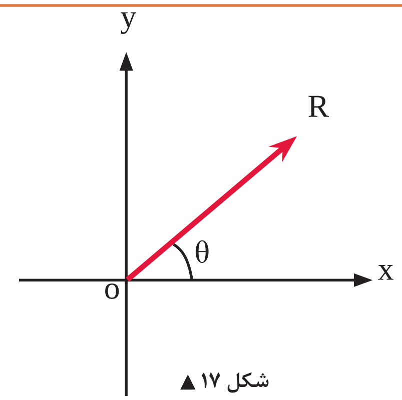


حل:



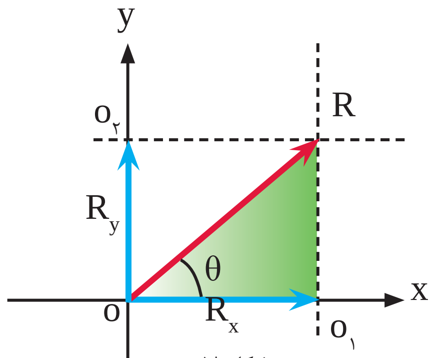
۱ – ۱۰ – تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌های متعامد آن در دستگاه مختصات دکارتی به روش ترسیمی و محاسباتی

مطابـق شـکل (۱۷) بـردار $\vec{R}$ بـا زاویـه θ نسـبت بـه محـور **x** مفـروض اسـت. می‌خواهیـم آن را روی محورهـای متعامـد **x** و **y** تجزیـه نمائیـم. چنانچـه مطابـق مراحـل سـه‌گانه در بخـش (۱-۹) عمل کنیم، بـه شـکل (۱۸) خواهیـم رسـید.



شکل ۱۷ ▲

انـدازه یـا مقـدار مؤلفه‌هـای $\mathbf{R_x}$ و $\mathbf{R_y}$ بـا اسـتفاده از روابـط مثلثاتـی در مثلـث رنـگ شـدهٔ شـکل (۱۸) به شـکل زیـر محاسـبه می‌شـوند:



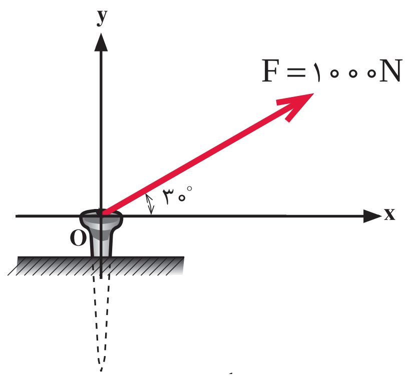
شکل ۱۸ ▲

$$\cos\theta = \frac{R_x}{R} \Rightarrow \boxed{R_x = R.\cos\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{R_y}{R} \Rightarrow \boxed{R_y = R.\sin\theta} \qquad (۶)$$

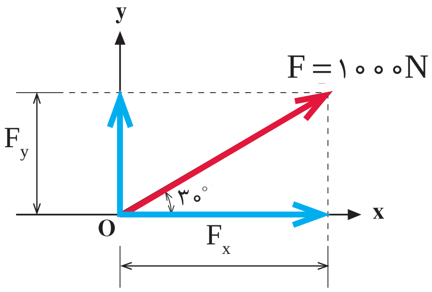
مثال ۳

نیـروی **F** مطابـق شـکل بـر میخـی وارد می‌شـود. مطلوب‌اسـت تجزیـه ایـن نیـرو روی محورهای **x** و **y** و محاسـبه مقادیـر مؤلفه‌هـا.



حل:

نیروی **F** را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه می‌کنیم.



$$F_x = F\cos\theta = ۱۰۰۰ \times \cos ۳۰^\circ \Rightarrow \boxed{F_x = ۸۶۶/۰۲\ \text{N}}$$

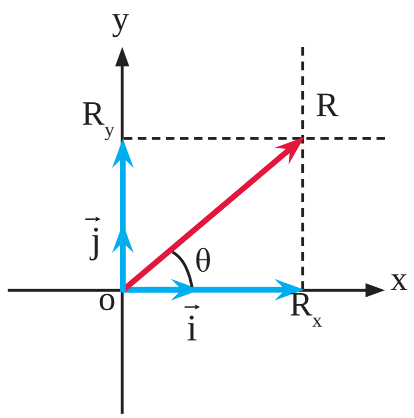
$$F_y = F\sin\theta = ۱۰۰۰ \times \sin ۳۰^\circ \Rightarrow \boxed{F_y = ۵۰۰\ \text{N}}$$

۱ــ۱۱ــ نمایش برداری یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی

در دستگاه مختصات دکارتی محورهای **ox** و **oy** بر یکدیگر عمود بوده و بردارهای واحد (یکه) روی آن‌ها به ترتیب با $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نمایش داده می‌شوند و برداری مانند بردار $\vec{R}$ مطابق شکل (۱۹) در این دستگاه با رابطهٔ (۵) تعریف می‌شود:

$$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j} \qquad (۷)$$

که در رابطهٔ فوق $\mathbf{R_x}$ مؤلفهٔ $\vec{R}$ روی محور **x** و $\mathbf{R_y}$ مؤلفهٔ $\vec{R}$ روی محور **y** می‌باشد.



شکل ۱۹ ▲

مثال ۴

فرم برداری بردار **F** در شکل (مثال ۳) را بنویسید.

حل:

فرم برداری بردار $\vec{F}$ به صورت $\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}$ می‌باشد.

با توجه به نتایج مثال ۳ داریم:

$$F_x=۸۶۶/۰۲N$$
$$F_y=۵۰۰N$$

بنابراین:

$$\boxed{\vec{F}=۸۶۶/۰۲\vec{i}+۵۰۰\vec{j}}$$

۱ــ۱۲ــ تعیین اندازه و زاویهٔ امتداد یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن

همان‌طور که یک بردار را می‌توان به دو مؤلفه روی امتدادهای مختلف تجزیه کرد می‌توان به کمک مؤلفه‌های یک بردار، اندازهٔ بردار و زاویهٔ آن‌را به کمک رابطهٔ فیثاغورث و نسبت‌های مثلثاتی تعیین کرد.
هر گاه برداری مانند $\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}$ داشته باشیم، می‌توان اندازه **R** و زاویهٔ امتداد آن‌را با امتداد **x** به صورت زیر تعیین نمود:

مقدار (اندازه) بردار **R**

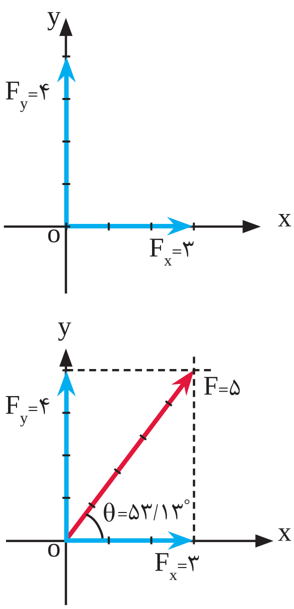
$$R=\sqrt{R_x^{۲}+R_y^{۲}} \qquad (۸)$$

زاویه بردار **R** نسبت به محور **x** ها

$$\theta=\tan^{-۱}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| \qquad (۹)$$

مثال ۵

بردار $\vec{F}=(۳\,\vec{i}+۴\,\vec{j})$ را ترسیم نموده، مقدار و زاویهٔ امتداد آن‌را با محور x ها به‌دست آورید.

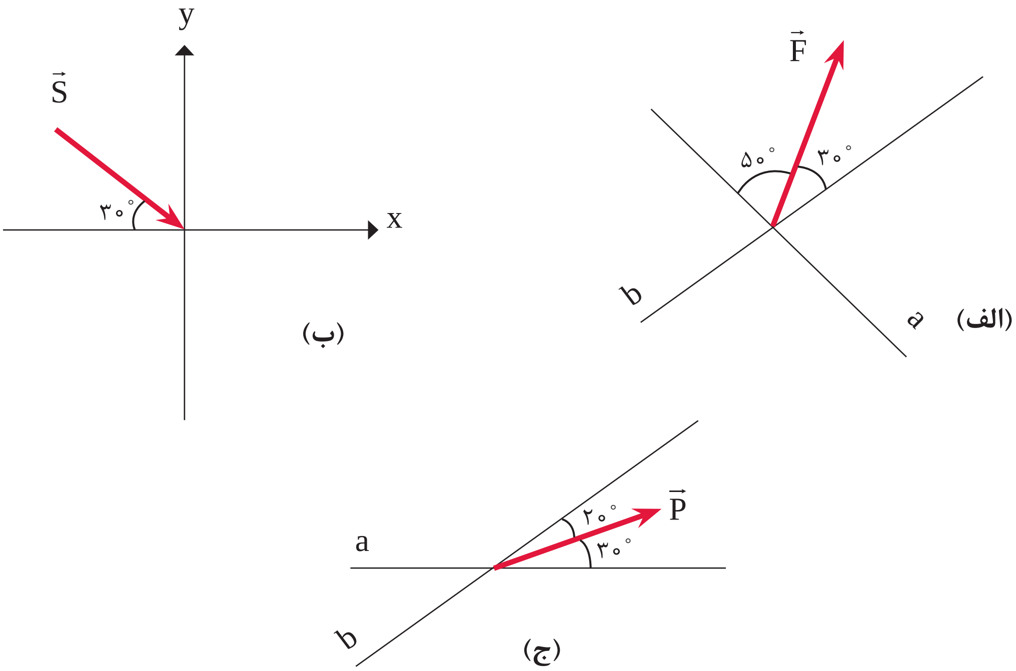


$$F=\sqrt{F_x^{۲}+F_y^{۲}} \Rightarrow F=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}} \Rightarrow \boxed{F=۵}$$

$$\theta=\tan^{-۱}\left|\frac{F_y}{F_x}\right| \Rightarrow \theta=\tan^{-۱}\left|\frac{۴}{۳}\right| \Rightarrow \boxed{\theta=۵۳/۱۳^{\circ}}$$

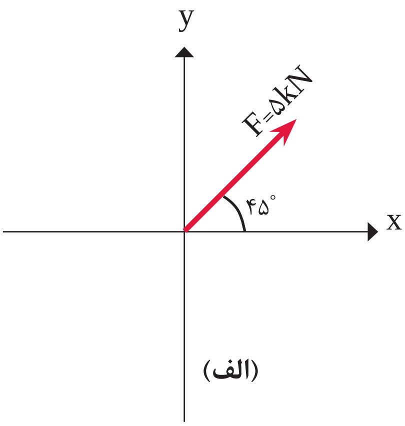
فعالیت کلاسی ۱

بردارهای زیر را به روش ترسیمی روی محورهای داده شده تجزیه نمایید.

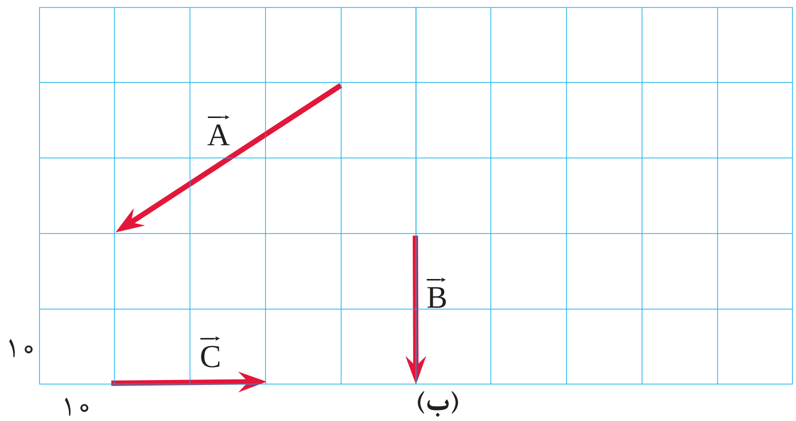


فعالیت کلاسی ۲

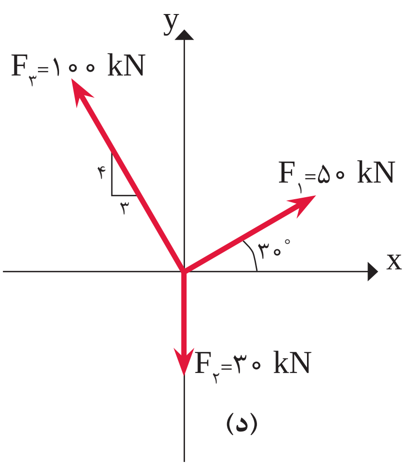
بردارهای زیر را به مؤلفه‌های متعامد آن تجزیه نمائید و فرم برداری آن‌ها را بنویسید.



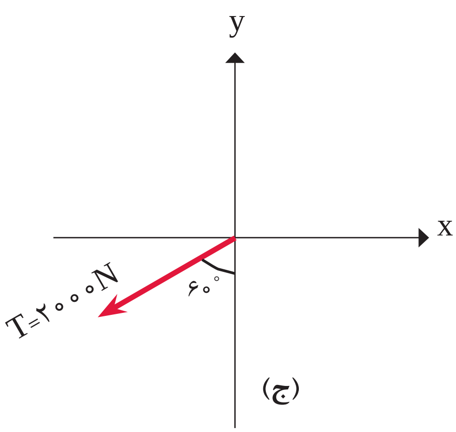
(الف)



(ب)



(د)



(ج)

فعالیت کلاسی ۳

بردارهای زیر را ترسیم نموده و اندازه و زاویهٔ امتداد هر یک را نسبت به محورهای x و y تعیین کنید.

الف) $\vec{F} = -۴\vec{i} + ۳\vec{j}$

ب) $\vec{P} = -۵\vec{i}$

ج) $\vec{T} = ۳/۵\vec{j}$

د) $\vec{Q} = -۳\vec{i} - ۳\vec{j}$

فعالیت کلاسی ۴

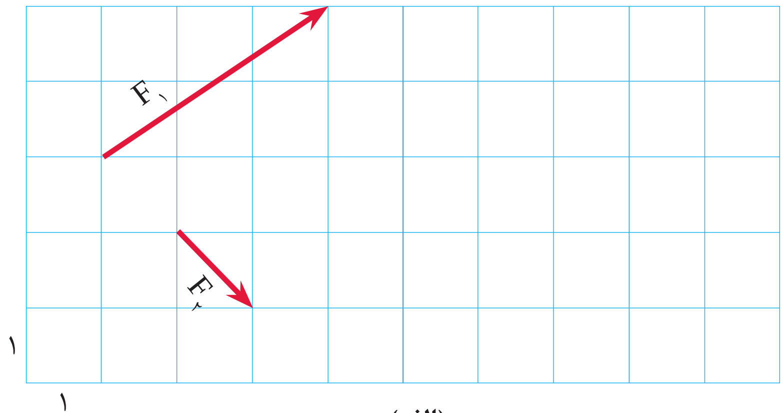
در شکل‌های زیر مطلوب است:

الف) فرم برداری هر بردار.

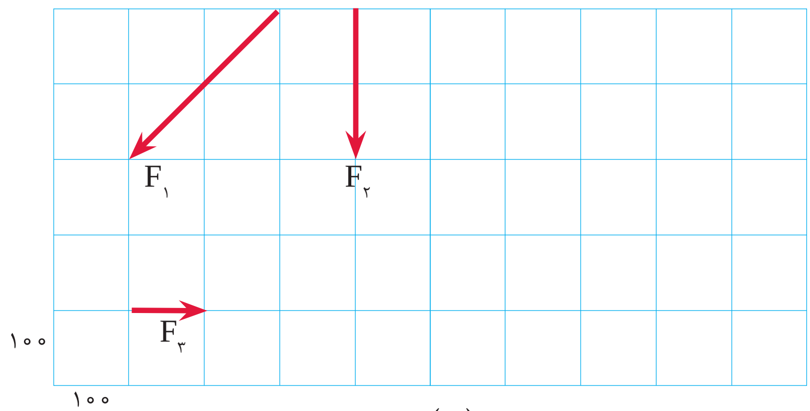
ب) اندازه هر یک را به صورت ترسیمی (با خط‌کش) به‌دست آورید.

ج) اندازه هر یک را به صورت محاسباتی به‌دست آورید.

د) اندازه‌های محاسباتی و ترسیمی هر بردار را با هم مقایسه کنید.



(الف)



(ب)

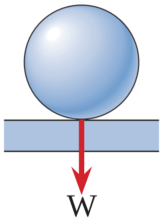
۱ـ۱۳ــ نیرو

نیرو کمیتی است برداری که می‌تواند باعث تغییر در حرکت، تغییرِ شکل و یا چرخش در اجسام گردد.

۱ـ۱۴ــ انواع نیرو

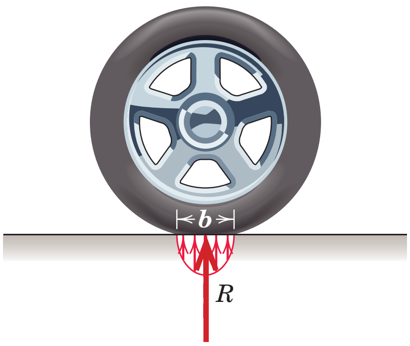
۱ ـ ۱۴ ـ ۱ ـ نیروهای خارجی

نیروهایی هستند که از محیط اطراف و در خارج از وجود جسم به آن وارد می‌شوند. مکانیک اجسام صُلب (استاتیک) فقط به نیروهای خارجی توجه دارد؛ مانند: وزن گوی در شکل (۲۰) که به کف وارد می‌شود.



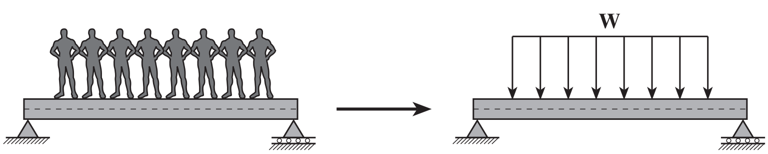
شکل ۲۰ ▲

الف) نیروهای متمرکز: اگر نیرو به طول کوچک و قابل اغماضی از جسم وارد گردد آن‌را نیروی متمرکز می‌نامند. شکل (۲۱)



شکل ۲۱ ▲

ب) نیروهای گسترده: اگر نیرو در طول قابل‌توجهی از جسم پخش گردد آن‌را نیروی گسترده گویند. شکل (۲۲)



شکل ۲۲ ▲

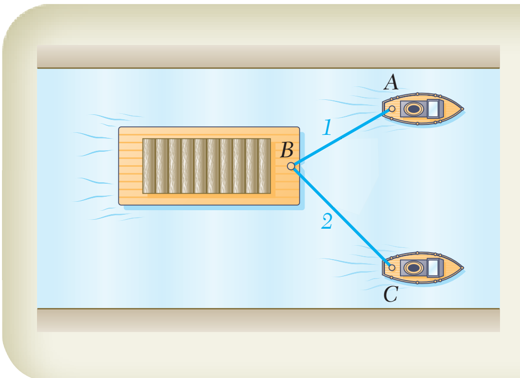
۱ـ۱۴ـ۲ــ نیروهای داخلی

نیروهایی هستند که در داخل جسم و بین ذرات تشکیل‌دهندهٔ آن ایجاد می‌شوند؛ مانند نیرویی که شخص هنگام اجرای بارفیکس در دستان خود احساس می‌کند؛ در مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر (مقاومت مصالح) به نیروهای داخلی توجه می‌شود.

۱–۱۵– برآیند سامانه‌های نیرویی وارد بر نقطه مادی به روش محاسباتی

منظـور از برآینـد دو یـا چنـد نیرو عبارت‌اسـت از جمـع بـرداری آن نیروها، به‌طوری‌کـه بردار برآینـد به‌تنهایی اثـر همهٔ نیروهای وارد به جسم را دارا باشـد.

بـه عنـوان مثـال در شـکل (۲۳) شـناور B در مسـیری بـه حرکـت در می‌آید کـه در واقـع امتداد بـردار برآیند دو نیـروی وارده از طـرف قایق‌هـای A و C خواهـد بـود. ایـن بـدان معناسـت کـه می‌تـوان به جـای دو نیروی مذکـور نیـروی برآینـد آن‌هـا را در امتداد مسـیر حرکت شـناور قـرار داده و آن‌را به حرکـت درآورد.



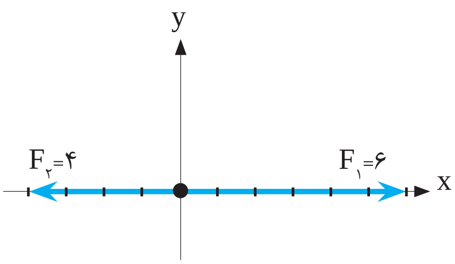
شکل ۲۳ ▲

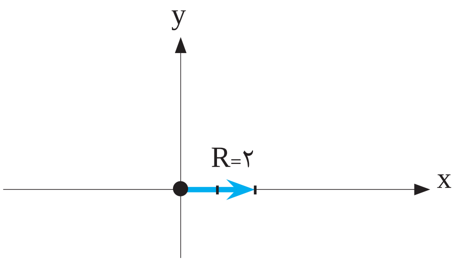
۱–۱۵–۱– برآیند نیروهای هم‌راستا و موازی

برای محاسبه برآیند نیروهای هم‌راستا کافی است مقادیر آن‌ها را با یکدیگر جمع جبری نماییم.

مثال ۶

دو نیـروی $\vec{F}_1 = 6\vec{i}$ و $\vec{F}_2 = -4\vec{i}$ را روی محورهـای مختصـات ترسـیم نمـوده و برآیند آن‌ها را محاسـبه و ترسـیم نمایید.



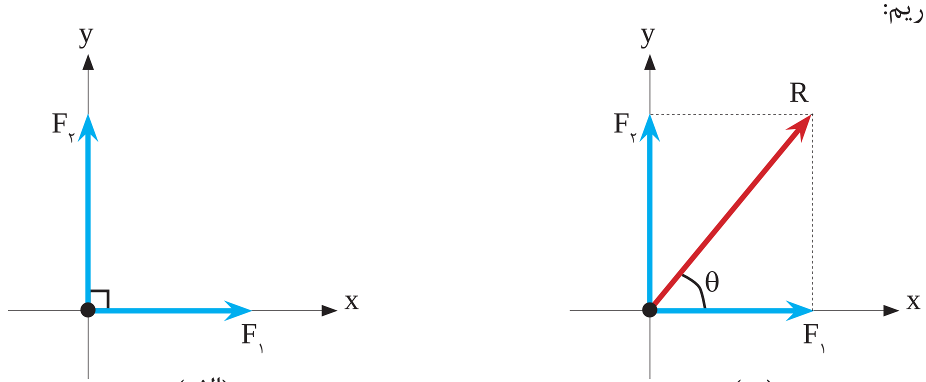


$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R} = 6\vec{i} - 4\vec{i} \Rightarrow \vec{R} = 2\vec{i}$$

۱–۱۵–۲– برآیند دو نیروی متعامد

بـرای محاسـبه مقـدار برآینـد دو نیـروی متعامد مطابق شـکل (۲۴–الف) با اسـتفاده از رابطه فیثاغورث و شـکل (۲۴–ب) داریم:



شکل ۲۴ ▲

$$R^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲ \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲}} \qquad (۱۰)$$

و برای محاسبه زاویه برآیند با $F_۱$ می‌توان از رابطه تانژانت استفاده نمود:

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{F_۲}{F_۱}\right)} \qquad (۱۱)$$

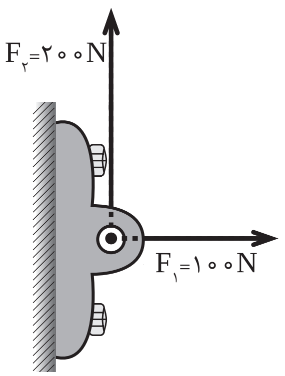
مثال ۷

در شکل زیر مطلوب است:

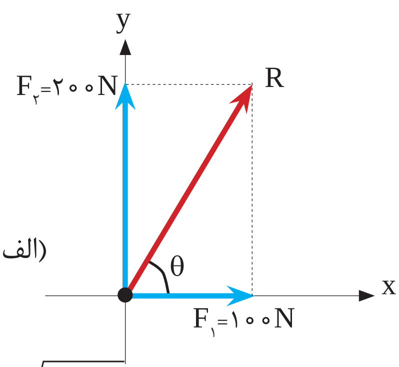
الف) ترسیم برآیند (**R**)

ب) تعیین مقدار برآیند

ج) تعیین زاویه برآیند با افق یا امتداد $F_۱$



الف)



ب) $R = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲} = \sqrt{۱۰۰^۲ + ۲۰۰^۲} = \sqrt{۵۰۰۰۰} \Rightarrow R = ۲۲۳/۶۱ \ \ N$

ج) $\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{F_۲}{F_۱}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{۲۰۰}{۱۰۰}\right) \Rightarrow \theta = ۶۳/۴۳^\circ$

۱–۱۵–۳– برآیند دو نیروی غیرمتعامد

در این سیستم شرط لازم بسته شدن سه‌ضلعی نیروهاست، اما تفاوتی که این حالت با حالت متعامد دارد غیرمشخص بودن سه‌ضلعی (مثلث) نیروهاست. به همین دلیل استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع برای حل ترسیمی و استفاده از قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها برای حل مثلثاتی کارآمد خواهد بود.

قانون کسینوس‌ها در مثلث

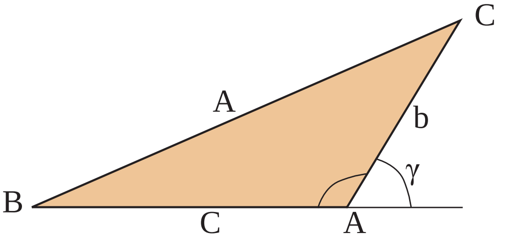
علائم:

a ؛ ضلع روبروی زاویهٔ A یا برآیند اضلاع دیگر،

c و b ؛ اضلاع مجاور زاویهٔ A،

A ؛ زاویهٔ داخلی مثلث نیروها،

γ ؛ زاویهٔ خارجی مثلث نیروها یا زاویهٔ بین ضلع b و امتداد ضلع c.



شکل ۲۵ ▲

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A$$

$$b^{۲} = a^{۲} + c^{۲} - ۲ac\cos B$$

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos C$$

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} + ۲bc\cos \gamma$$

قانون سینوس‌ها در مثلث

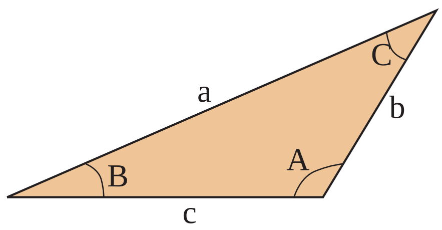
علائم:

A و B و C ؛ زوایای داخلی مثلث نیروها،

a ؛ ضلع مقابل زاویهٔ A،

b ؛ ضلع مقابل زاویهٔ B،

c ؛ ضلع مقابل زاویهٔ C.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

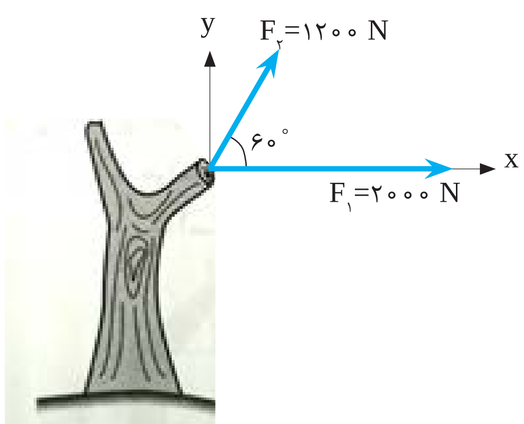
شکل ۲۶ ▲

مثال ۸

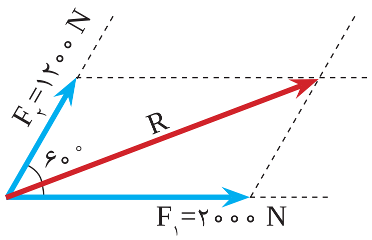
دو نیروی غیر متعامد بر تنهٔ درختی مطابق شکل وارد می‌شوند. مطلوب است:

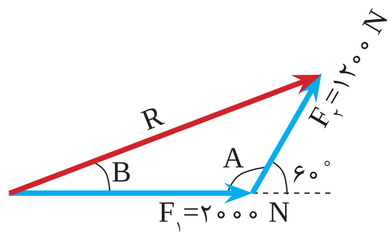
الف) محاسبهٔ مقدار برآیند.

ب) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با افق.



حـل: ابتـدا بـا اسـتفاده از قانـون متوازی‌الاضـلاع مقـدار و جهـت برآینـد را بـه صـورت ترسـیمی تعییـن می‌کنیـم و سـپس بـا اسـتفاده از قانـون کسـینوس‌ها و یـا سـینوس‌ها مقـدار دقیـق برآینـد و زاویـهٔ آن‌را با افـق محاسـبه می‌کنیـم.





الف- با استفاده از قانون کسینوس‌ها داریم:

$$A = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

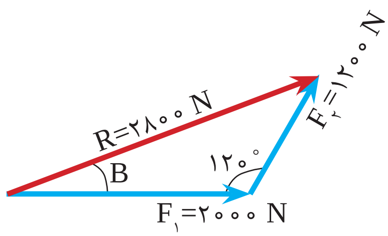
$$R^۲ = ۲۰۰۰^۲ + ۱۲۰۰^۲ - ۲\times ۲۰۰۰\times ۱۲۰۰\times \cos ۱۲۰ = ۷۸۴۰۰۰۰$$

$$R = \sqrt{۷۸۴۰۰۰۰} = ۲۸۰۰ \text{ N}$$

ب- با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{۲۸۰۰}{\sin ۱۲۰} = \frac{۱۲۰۰}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{۱۲۰۰}{۲۸۰۰}\times \sin ۱۲۰$$

$$\sin B = ۰/۳۷۱ \Rightarrow B = \sin^{-۱}(۰/۳۷۱) = ۲۱/۷۸۷^\circ$$



زاویهٔ برآیند با $F_۱$ یا افق $B = \sin^{-۱}(۰/۳۷۱) = ۲۱/۷۸۷^\circ$

مثال ۹

دو نیـرو مطابـق شـکل توسـط دو کابـل بـر یـک سـنگ معدنـی وارد می‌شـود. مطلوب‌است:

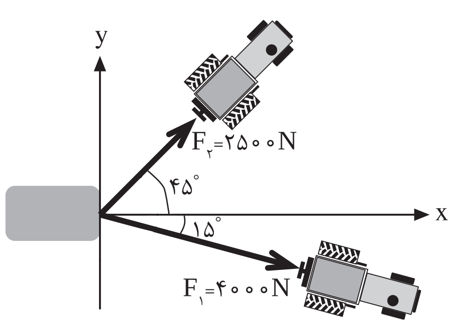
الف) نمایش برداری برآیند

ب) نمایش ترسیمی بردار برآیند

ج) محاسبهٔ اندازهٔ بردار برآیند

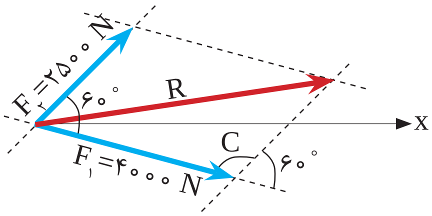
د) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با افق

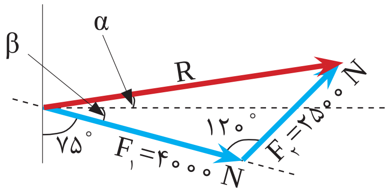
ه) ترسیم مسیر جابه‌جایی سنگ



حل:

الف) با استفاده از قانون کسینوس‌ها داریم:



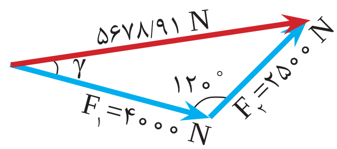


$C=۱۸۰-۶۰=۱۲۰^\circ$

$R^۲=۴۰۰۰^۲+۲۵۰۰^۲-۲\times ۴۰۰۰\times ۲۵۰۰\times \cos ۱۲۰=۳۲۲۲۵۰۰۰۰$

$R=۵۶۷۸/۹۱\ \mathrm{N}$

ب) با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم:

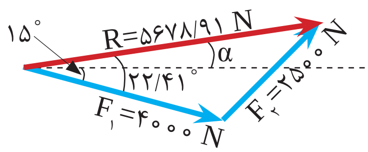


$$\frac{۵۶۷۸/۹۱}{\sin ۱۲۰}=\frac{۲۵۰۰}{\sin\gamma}$$

$$\Rightarrow \sin\gamma=\frac{۲۵۰۰}{۵۶۷۸/۹۱}\times \sin ۱۲۰=۰/۳۸۱$$

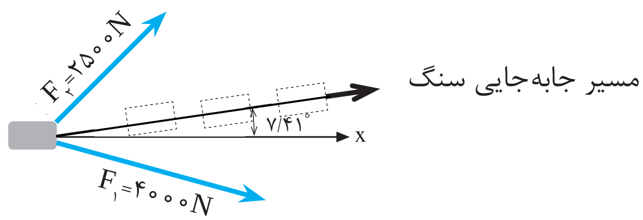
زاویهٔ نیروی F_1 با برآیند $\gamma=۲۲/۴۱۱^\circ$

زاویهٔ برآیند با افق به طریق زیر به‌دست می‌آید.



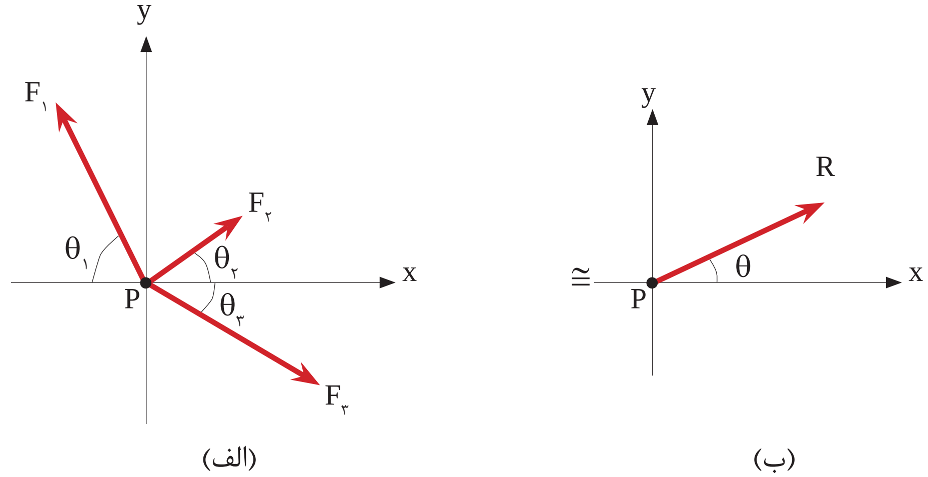
زاویهٔ برآیند با افق $\alpha=۲۲/۴۱۱-۱۵=۷/۴۱^\circ$

ج)



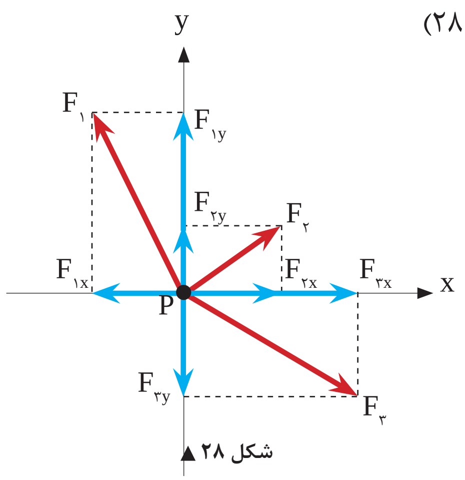
۱–۱۵–۴– محاسبهٔ برآیند سامانهٔ چندنیرویی وارد به نقطهٔ مادی

هر گاه بر یک نقطهٔ مادی مانند P مطابق شکل (۲۷- الف) نیروهای F_1 و F_2 و F_3 وارد شود، به‌کمک تجزیه به‌شرح زیر می‌توان اندازهٔ برآیند این نیروها (R) و راستای برآیند با محور x یعنی (θ) را تعیین نمود. شکل (۲۷- ب)



شکل ۲۷ ▲

گام اول: تجزیه هر یک از نیروها روی محورهای **x** و **y**؛ (شکل ۲۸)



شکل ۲۸ ▲

گام دوم: نمایش برداری تمامی نیروها بر حسب بردارهای یکهٔ $\vec{i}$ و $\vec{j}$؛

گام سوم: محاسبهٔ جمع جبری نیروهای هم‌راستا روی محورهای **x** و **y**

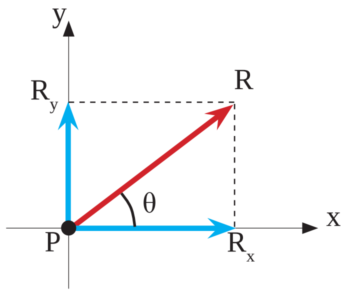
$$R_x = \sum F_x \quad , \quad R_y = \sum F_y \qquad (۱۲)$$

ΣF_x: مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور **x** $\left(\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}\right)$

ΣF_y: مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور **y** $\left(\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}\right)$

گام چهارم: نمایش برداری بردار برآیند (R) مطابق رابطهٔ (۱۱)

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \qquad (۱۳)$$



شکل ۲۹ ▲

گام پنجم: نمایش ترسیمی بردار برآیند مطابق شکل (۲۹)

گام ششم: محاسبهٔ اندازه (مقدار) برآیند با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث

$$R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲} \qquad (۱۴)$$

گام هفتم: محاسبهٔ زاویه برآیند با امتداد محور **x** ها (θ)
با استفاده از رابطهٔ تانژانت و با توجه به شکل ترسیم شده در گام پنجم

$$\theta = \tan^{-۱}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| \qquad (۱۵)$$

مثال ۱۰

دو نیرو مطابق شکل توسط دو کابل بر یک سنگ معدنی وارد می‌شود. مطلوب‌است:

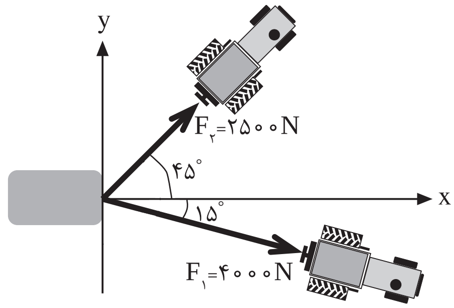
الف) نمایش برداری برآیند

ب) نمایش ترسیمی بردار برآیند

ج) محاسبهٔ اندازهٔ بردار برآیند

د) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با افق

ه) ترسیم مسیر جابه‌جایی سنگ

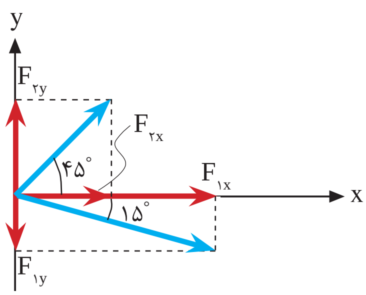


حل:

الف)

گام اول:

– تجزیهٔ نیروها با توجه به اندازه و زاویهٔ هر نیرو



مؤلفه‌های $F_۱$

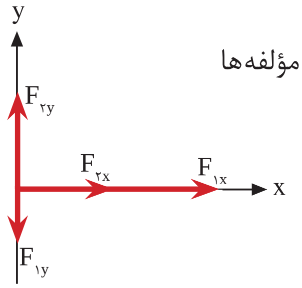
$$\begin{cases} F_{۱x} = F_۱ \cos\theta_۱ = ۴۰۰۰ \times \cos ۱۵^\circ \Rightarrow F_{۱x} = ۳۸۶۳/۷۰ \ \text{N} \\ F_{۱y} = F_۱ \sin\theta_۱ = ۴۰۰۰ \times \sin ۱۵^\circ \Rightarrow F_{۱y} = ۱۰۳۵/۲۸ \ \text{N} \end{cases}$$

مؤلفه‌های $F_۲$

$$\begin{cases} F_{۲x} = F_۲ \cos\theta_۲ = ۲۵۰۰ \times \cos ۴۵^\circ \Rightarrow F_{۲x} = ۱۷۶۷/۷۷ \ \text{N} \\ F_{۲y} = F_۲ \sin\theta_۲ = ۲۵۰۰ \times \sin ۴۵^\circ \Rightarrow F_{۲y} = ۱۷۶۷/۷۷ \ \text{N} \end{cases}$$

گام دوم:

- فرم برداری هر بردار با توجه به شکل مقابل و جهت هر یک از مؤلفه‌ها



$$\vec{F}_{۱} = ۳۸۶۳/۷۰\ \vec{i} - ۱۰۳۵/۲۸\ \vec{j}$$

$$\vec{F}_{۲} = ۱۷۶۷/۷۷\ \vec{i} + ۱۷۶۷/۷۷\ \vec{j}$$

گام سوم:

- تعیین مجموع نیروهای هم‌راستا با محورهای **x** و **y** (ΣF_x و ΣF_y)

$$R_x = \Sigma F_x = ۱۷۶۷/۷۷ + ۳۸۶۳/۷۰ \Rightarrow R_x = ۵۶۳۱/۴۷\ \text{N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = ۱۷۶۷/۷۷ - ۱۰۳۵/۲۸ \Rightarrow R_y = ۷۳۲/۴۹\ \text{N}$$

گام چهارم:

- نمایش برداری بردار برآیند

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

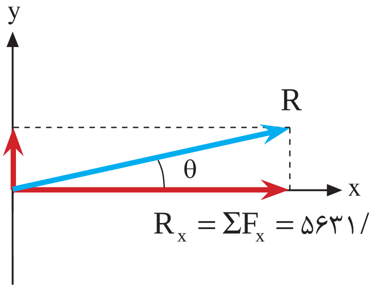
$$\boxed{\vec{R} = ۵۶۳۱/۴۷\ \vec{i} + ۷۳۲/۴۹\ \vec{j}}$$

ب)

گام پنجم:

- نمایش ترسیمی بردار برآیند با توجه به فرم برداری بردار برآیند و روش متوازی‌الاضلاع

$$R_y = \Sigma F_y = ۷۳۲/۴۹\ \text{N}$$



$$R_x = \Sigma F_x = ۵۶۳۱/۷۰\ \text{N}$$

ج)

گام ششم:

- محاسبهٔ اندازهٔ برآیند به کمک رابطهٔ (۳-۷)

$$R = \sqrt{R_x^{۲} + R_y^{۲}} \Rightarrow R = \sqrt{۵۶۳۱/۴۷^{۲} + ۷۳۲/۴۹^{۲}}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = ۵۶۷۸/۹۱\ \text{N}}$$

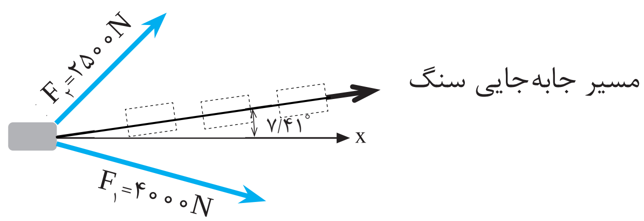
د)

گام هفتم:

- محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با محور **x** ها به کمک رابطهٔ (۳-۸)

$$\theta = \tan^{-۱}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| \Rightarrow \theta = \tan^{-۱}\left|\frac{۷۳۲/۴۹}{۵۶۳۱/۷۰}\right| \Rightarrow \boxed{\theta = ۷/۴۱^{\circ}}$$

ه) مسیر جابه‌جایی سنگ در راستای بردار برآیند مطابق شکل زیر خواهد بود.



مثال ۱۱

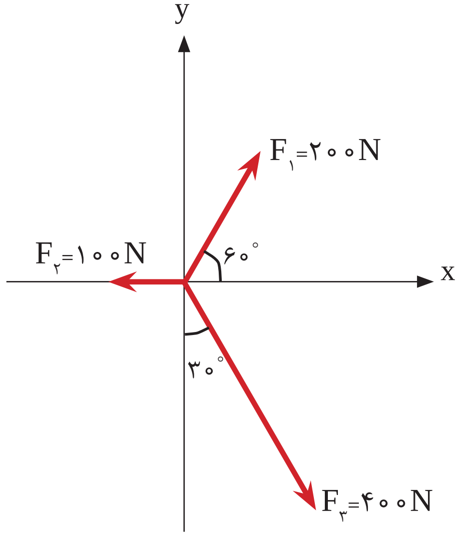
در شکل روبه‌رو مطلوب‌است:

الف – محاسبهٔ مقدار برآیند نیروها

ب – محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با افق

ج – ترسیم بردار برآیند

د – نمایش برداری بردار برآیند



حل:

الف) تجزیهٔ هر یک از نیروها با توجه به روابط $F_x=F\cos\theta$, $F_y=F\sin\theta$ و زاویهٔ هر نیرو با محور **x**ها:

$$\vec{F}_۱=۲۰۰\ \cos۶۰^\circ\vec{i}+۲۰۰\ \sin۶۰^\circ\vec{j}=۱۰۰\ \vec{i}+۱۷۳/۲\ \vec{j}$$

$$\vec{F}_۲=-۱۰۰\ \vec{i}$$

$$\vec{F}_۳=۴۰۰\ \cos۶۰^\circ\vec{i}-۴۰۰\ \sin۶۰^\circ\vec{j}=۲۰۰\ \vec{i}-۳۴۶/۴\ \vec{j}$$

$$R_x=\Sigma F_x=F_{۱x}+F_{۲x}+F_{۳x}$$

$$R_x=\Sigma F_x=۱۰۰-۱۰۰+۲۰۰\Rightarrow R_x=۲۰۰\ N$$

$$R_y=\Sigma F_y=F_{۱y}+F_{۲y}+F_{۳y}$$

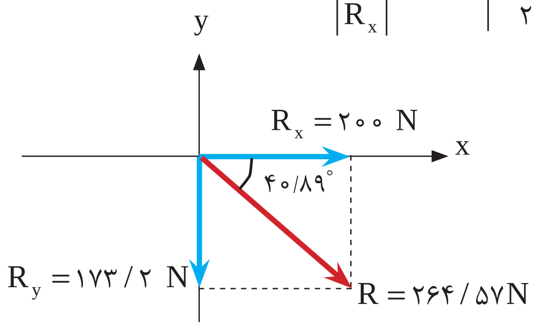
$$R_y=\Sigma F_y=۱۷۳/۲+۰-۳۴۶/۴\Rightarrow R_y=-۱۷۳/۲\ N$$

$$R=\sqrt{R_x^{۲}+R_y^{۲}}=\sqrt{۲۰۰^{۲}+(-۱۷۳/۲)^{۲}}\Rightarrow \boxed{R=۲۶۴/۵۷\ N}$$

ب)

$$\theta=\tan^{-۱}\left|\frac{R_y}{R_x}\right|=\tan^{-۱}\left|\frac{-۱۷۳/۲}{۲۰۰}\right|\Rightarrow\boxed{\theta=۴۰/۸۹^\circ}$$

ج)



د)

$$\vec{R}=۲۰۰\ \vec{i}-۱۷۳/۲\ \vec{j}$$

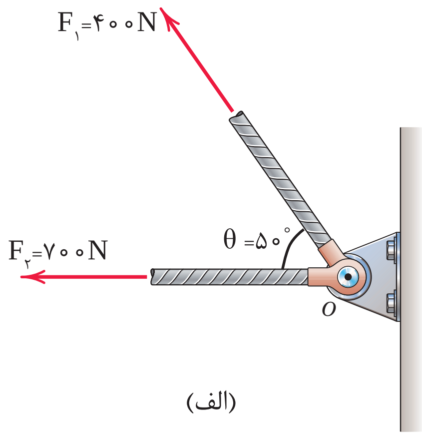
فعالیت کلاسی ۵

در شکل‌های زیر مطلوب‌است:

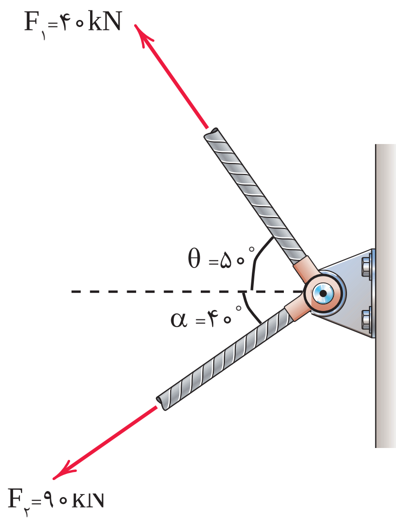
الف) محاسبهٔ مقدار برآیند دو نیرو

ب) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با F_1

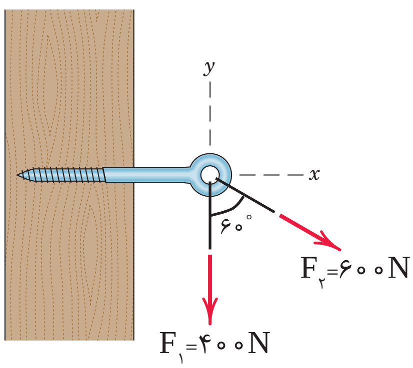
ج) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با امتداد افق



(الف)



(ب)

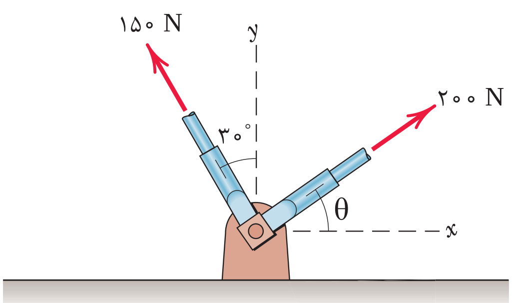


(ج)

فعالیت کلاسی ۶

در شکل زیر مقدار زاویه θ را چنان تعیین نمایید که برآیند دو نیرو بر محور **y** ها منطبق گردد. سپس در این حالت مقدار برآیند را محاسبه کنید.

(راهنمایی: از روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد استفاده شود).



فعالیت کلاسی ۷

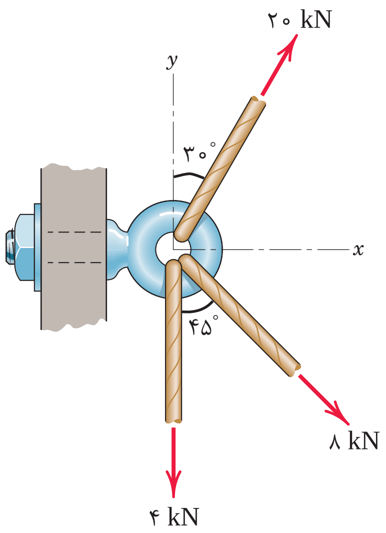
در شکل روبه‌رو مطلوب‌است:

الف) محاسبهٔ مقدار برآیند نیروها

ب) محاسبهٔ زاویهٔ برآیند با افق

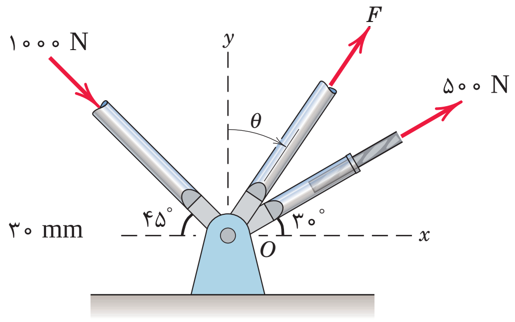
ج) ترسیم بردار برآیند

د) نمایش برداری بردار برآیند



فعالیت کلاسی ۸

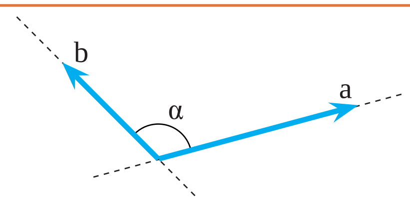
۴- در شکل زیر نیروی F و زاویه θ را طوری تعیین نمایید که برآیند نیروها روی محور افق و مقدار آن برابر N ۱۵۰۰ در جهت مثبت باشد.



واحد یادگیری ۲ کاربرد ضرب بُردارها

۲-۱- ضرب بردارها

ضرب بردارها: ضرب نقطه‌ای (داخلی) — ضرب برداری (خارجی)



شکل ۱ ▲

ضرب داخلـی یا ضرب نقطـه‌ای: در شـکل مقابل دو بـردار a و b بـا زاویـهٔ بین α خواهیم داشـت:

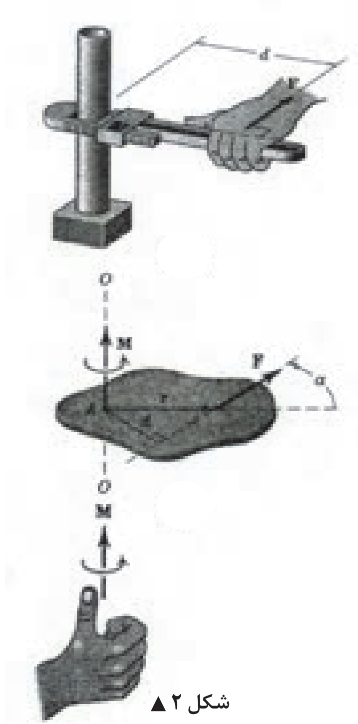
$$a.b = |a| \times |b| \times \cos\ \alpha$$

منظور از $|a|$ مقدار بردار $\vec{a}$ می‌باشد.
حاصلضرب داخلی دو بردار، یک عدد می‌باشد.

ضرب خارجی یا ضرب برداری: $\vec{a} \times \vec{b}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |a| \times |b| \times \sin\ \alpha$$

حاصلضـرب بـرداری دو بـردار، برداری اسـت که عمود بـر صفحـهٔ گذرنده از دو بردار بـوده و جهت آن مطابق قانون دسـت راسـت تعریف می‌شـود. (شکل ۲)



شکل ۲ ▲

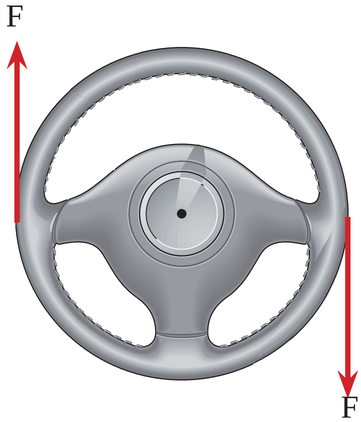
نکته

در ضرب داخلی یا نقطه‌ای خاصیت جابه‌جایی وجود دارد. یعنی: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

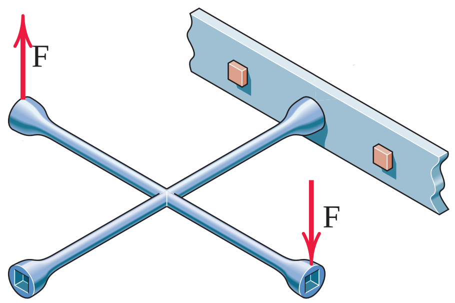
اما در ضرب خارجی یا برداری دو بردار، خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد. یعنی: $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

۲-۲- گشتاور، لنگر (مُمان)

یکی از اثرات نیرو بر اجسام تمایل به ایجاد چرخش در آن‌ها می‌باشد که به این پدیده گشتاور گفته می‌شود.
مطابق شکل‌های (۳) و (۴) نیرو باعث چرخش در اجسام می‌گردد.



شکل ۳ ▲



شکل ۴ ▲

۲-۲-۱- گشتاور نیرو

در شکل ۵-a گشتاور نیروی F که باعث چرخش میله می‌گردد، حاصلضرب برداری دو بردار $\vec{r}$ (بردار مکان یا موقعیت) و بردار نیروی F می‌باشد. (شکل ۵-b). یعنی:

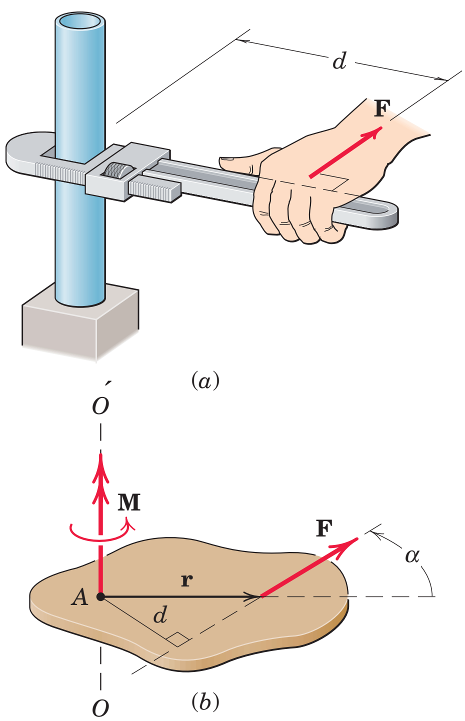
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

مطابق تعریف

$$|M| = |F|.|r|.\sin\alpha$$

$$M = F.d$$

در این رابطه F مقدار نیرو، d کوتاه‌ترین فاصله F تا نقطه‌ای که میله حول آن به چرخش درمی‌آید (فاصله عمود بر امتداد نیرو تا نقطهٔ O) می‌باشد.
در این پودمان به دلیل بررسی نیروها در صفحه، گشتاور حول نقطه در نظر گرفته می‌شود لذا امتداد آن عمود بر صفحه و جهت چرخش آن در جهت عقربه‌های ساعت ⟶ و یا خلاف عقربه‌های ساعت ⟵ خواهد بود.



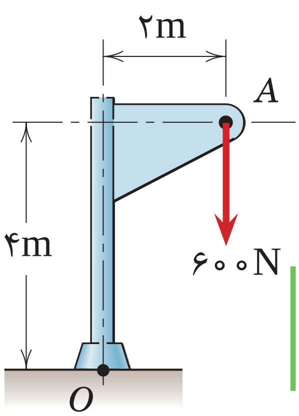
شکل ۵ ▲

نکته

قرارداد: در این پودمان جهت چرخش عقربه‌های ساعت مثبت فرض می‌شود.

مثال ۱

گشتاور نیروی F حول نقطهٔ O را محاسبه و جهت چرخش آن‌را بنویسید.



حل:

$F = 600\,N$

$d = 2\,m$

$M_o = F.d \Rightarrow M_o = 600 \times 2 \Rightarrow M_o = 1200\ N.m$ ساعت‌گرد

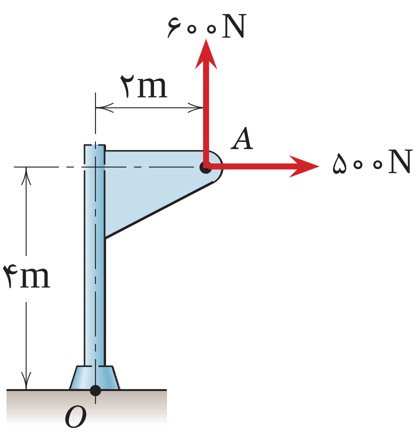
۲ـ۳ـ گشتاور چند نیرو

اگر به یک جسم چند نیرو اِعمال شود گشتاور آن‌ها نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع جبری گشتاور هر نیرو نسبت به آن نقطه یعنی:

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} F_i d_i = F_1 d_1 + F_2 d_2 + \ldots + F_n d_n$$

مثال ۲

در شکل زیر گشتاور نیروهای نشان داده شده را حول نقطهٔ O محاسبه کنید و جهت آن‌را بنویسید.



حل:

$F_1 = 500\,N$

$d_1 = 4\,m$

$F_2 = 600\,N$

$d_2 = 2\,m$

$M_o = F_1 d_1 + F_2 d_2$

$M_o = 500 \times 4 - 600 \times 2$

$\boxed{M_o = +800\ N.m}$ ساعت‌گرد

۲–۴– قضیه وارینون

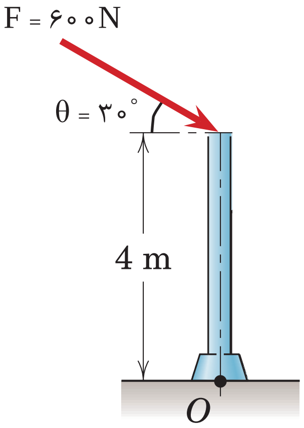
گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطهٔ معین برابر است با مجموع گشتاورهای آن‌ها حول همان نقطه و یا گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول همان نقطه. کاربرد این قضیه در مثال (۳) نشان داده شده است.

مثال ۳

گشتاور نیروی F را در شکل زیر به دو روش حساب کنید:

الف) با استفاده از تعریف گشتاور

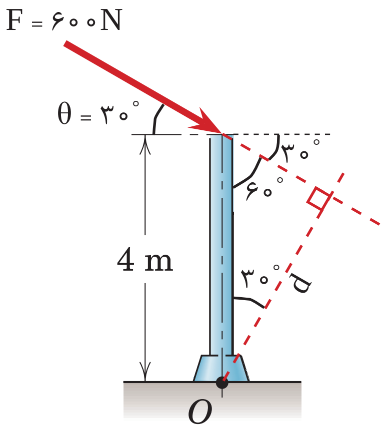
ب) به کمک قضیه وارینون



حل:

الف) با استفاده از تعریف:

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه بازوی لنگر یعنی (d) را محاسبه می‌نمائیم؛ داریم:



$$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{d}{۴} \Rightarrow d = ۴ \times \cos ۳۰^\circ \Rightarrow d = ۳/۴۶ \ \text{m}$$

$$M_o = F.d \Rightarrow M_o = ۶۰۰ \times ۳/۴۶۴ \Rightarrow \boxed{M_o = ۲۰۷۸/۴ \ \text{N.m}}$$

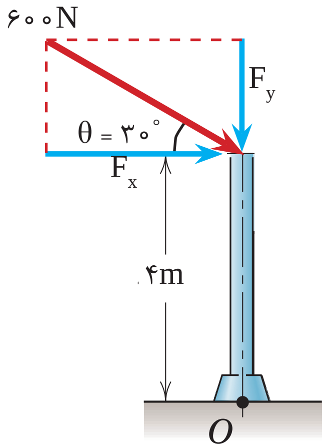
ب) با استفاده از قضیهٔ وارینون

در این روش ابتدا نیروی F را به دو مؤلفهٔ متعامد تجزیه نموده و گشتاور آن‌ها را نسبت به نقطهٔ O محاسبه و با یکدیگر جمع می‌نمائیم.

$$F_x = F.\cos\theta \Rightarrow F_x = ۶۰۰ \times \cos ۳۰^\circ \Rightarrow F_x = ۵۱۹/۶۱ \ \text{N}$$

$$F_y = F.\sin\theta \Rightarrow F_y = ۶۰۰ \times \sin ۳۰^\circ \Rightarrow F_y = ۳۰۰ \ \text{N}$$

با توجه به شکل بازوی لنگر Fx برابر ۴ متر و چون امتداد مؤلفهٔ Fy از نقطهٔ O می‌گذرد، بازوی لنگر آن صفر است.
بنابراین خواهیم داشت:



$$M_o = \sum_{i=۱}^{n} F_i d_i \Rightarrow M_o = F_۱ d_۱ + F_۲ d_۲$$

$$M_o = F_x \times ۴ + F_y \times ۰ = ۵۱۹/۶۱ \times ۴$$

$$\boxed{M_o = ۲۰۷۸/۴۴ \ \text{N.m}}$$

نکته

هرگاه امتداد یک نیرو از یک نقطه بگذرد گشتاور آن نیرو نسبت به آن نقطه صفر است.

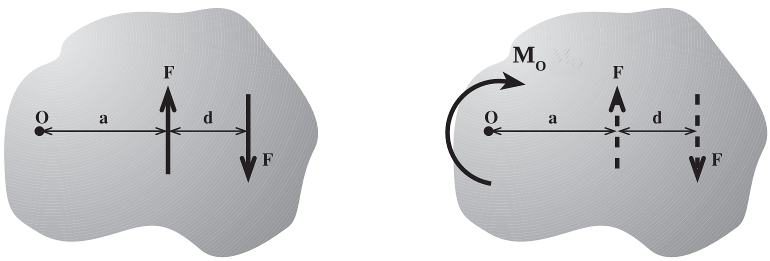
۲-۵- زوج‌نیرو

به دو نیروی مساوی - موازی و مختلف‌الجهت زوج‌نیرو گفته می‌شود.

۲-۵-۱- خصوصیات زوج نیرو

۱- برآیند زوج‌نیرو صفر است؛
۲- در اجسام ایجاد گشتاور (چرخش) می‌نماید؛
۳- گشتاور زوج‌نیرو نسبت به هر نقطه دلخواه مقداری است ثابت و برابر است با حاصل‌ضرب مقدار یک نیرو در فاصلهٔ بین آن‌ها. (شکل ۶)

$$M = F.d$$



شکل ۶ ▲

تحقیق کنید

چگونه می‌توان به‌کمک گشتاورگیری نسبت به یک نقطهٔ دلخواه مانند O در شکل (۶) خصوصیت سوم زوج‌نیرو را اثبات کرد.

مثال ۴

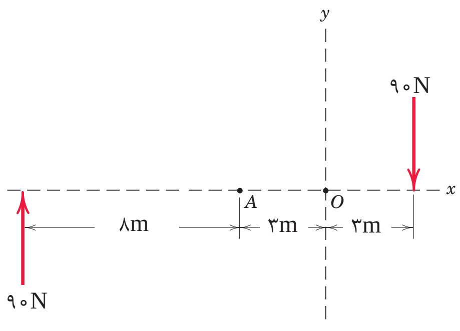
در شکل روبه‌رو مطلوب‌است محاسبهٔ گشتاور دو نیروی ۹۰ نیوتنی:

الف) حول نقطهٔ A

ب) حول نقطهٔ O

ج) با استفاده از خاصیت زوج‌نیرو

حل:



الف) $M_A = 90 \times 8 + 90 \times 6 = 1260 \ \text{N.m}$

ب) $M_O = 90 \times 11 + 90 \times 3 = 1260 \ \text{N.m}$

ج) $M = F.d = 90 \times 14 = 1260 \ \text{N.m}$

نکته

جمع بندی نکات پودمان ۱ (تحلیل مکانیک برداری):

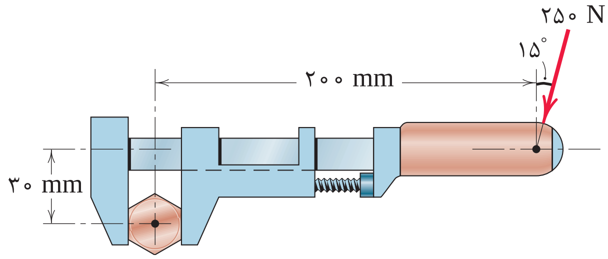
- نیرو کمیتی است برداری که باعث حرکت، تغییر شکل و یا چرخش اجسام می‌گردد.
- انواع نیرو عبارتند از: نیروهای خارجی، نیروهای داخلی.
- منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت‌است از نیرویی که به تنهایی اثر همهٔ نیروها را در خود داشته باشد.
- برای تعیین برآیند چند نیرو از روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد استفاده می‌شود و مقدار برآیند از رابطهٔ $R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$

و زاویهٔ برآیند با محور x ها از رابطهٔ $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right|$ به‌دست می‌آید.

- گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور عبارت‌است از حاصل‌ضرب نیرو (F) در کوتاه‌ترین فاصلهٔ نیرو تا آن محور (d). و از رابطهٔ $M \quad F.d$ به‌دست می‌آید.
- قضیه وارینون: گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطهٔ معین برابر است با مجموع گشتاورهای آن‌ها حول همان نقطه.
- به دو نیروی مساوی، موازی و مختلف‌الجهت زوج‌نیرو گفته می‌شود.
- گشتاور زوج نیرو برابر است با حاصل‌ضرب یکی از نیروها در فاصلهٔ بین آن‌ها.

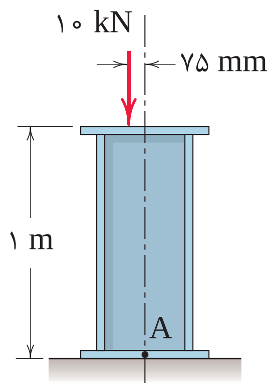
فعالیت کلاسی ۱

در شکل روبه‌رو گشتاور نیروی ۲۵۰ نیوتنی را حول مرکز پیچ محاسبه نموده و جهت گشتاور را تعیین نمائید.

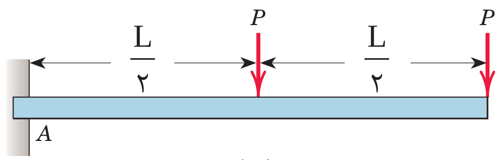


فعالیت کلاسی ۲

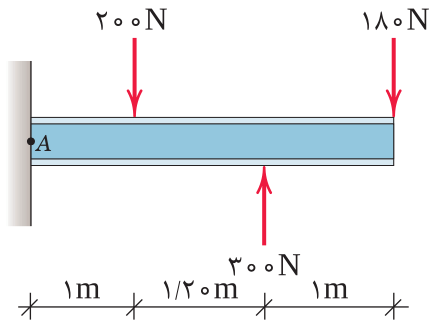
در شکل‌های زیر گشتاور نیرو را حول نقطه A محاسبه نمائید.



(الف)



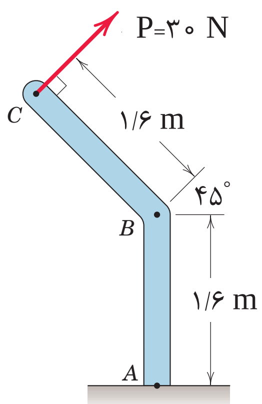
(ب)



(ج)

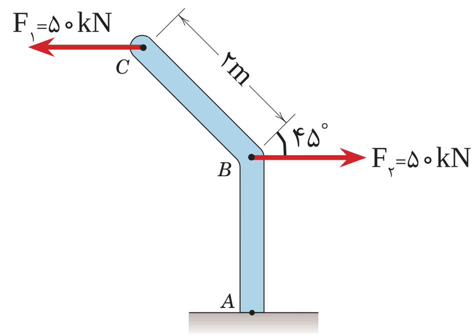
فعالیت کلاسی ۳

گشتاور نیروی P حول نقطهٔ A و B را به‌دست آورید.

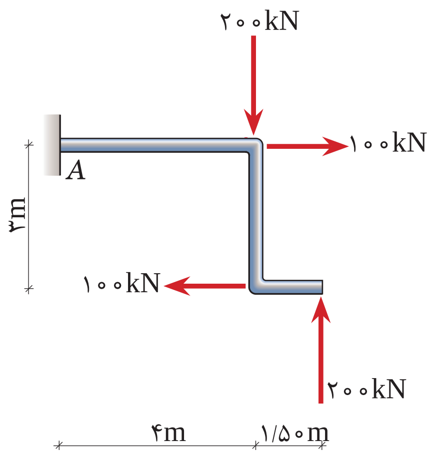


فعالیت کلاسی ۴

در شکل‌های زیر مطلوب‌است محاسبهٔ M_A.



(الف)



(ب)

ارزشیابی

ارزشیابی در این درس براساس شایستگی است. برای هر پودمان یک نمره مستمر (از ۵ نمره) و یک نمره شایستگی پودمان (نمرات ۱، ۲ یا ۳) با توجه به استانداردهای عملکرد جداول ذیل برای هر هنرجو ثبت می گردد. امکان جبران پودمان های در طول سال تحصیلی برای هنرجویان و بر اساس برنامه ریزی هنرستان وجود دارد.

الگوی ارزشیابی پودمان تحلیل مکانیک برداری				
تکالیف عملکردی (شایستگی‌ها)	**استاندارد عملکرد**	**نتایج**	**استاندارد (شاخص‌ها، داوری، نمره‌دهی)**	**نمره**
کاربرد جمع بردارها	برآیند و گشتاور دو یا چند نیرو را به کمک ماشین‌حساب و روابط هندسی و مثلثاتی به‌دست آورد.	بالاتر از حد انتظار	تجزیه بردارها روی محورهای مختلف به روش ترسیمی و محاسباتی، محاسبه برآیند سیستم‌های چندنیرویی و محاسبه گشتاور نیروها	۳
کاربرد ضرب بردارها		در حد انتظار (کسب شایستگی)	محاسبه جمع و ضرب بردارها به کمک روابط هندسی و مثلثاتی	۲
		پایین‌تر از انتظار (عدم احراز شایستگی)	نمایش جمع و ضرب بردارها به صورت ترسیمی	۱
نمره مستمر از ۵				
نمره شایستگی پودمان از ۳				
نمره پودمان از ۲۰				