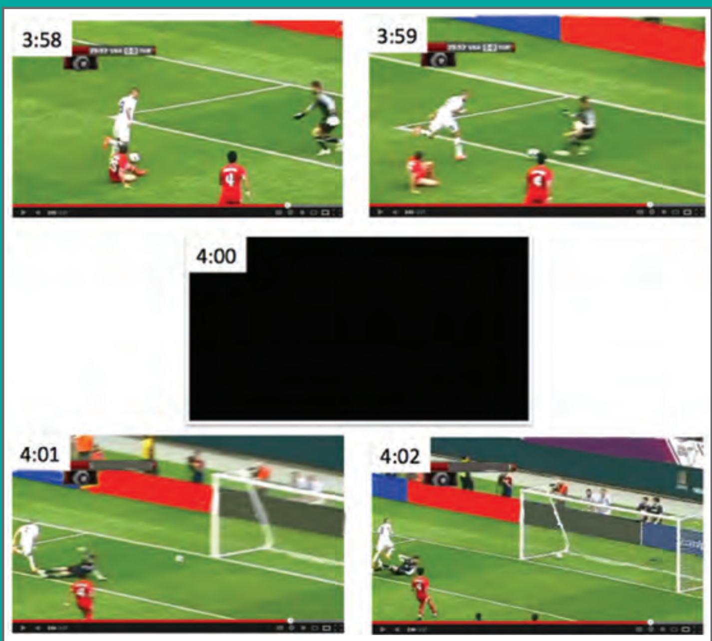
پودمان دوم

درک مفهوم حد



در هنگام پخش مسابقه فوتبال، برای لحظه‌ای تصویر صفحه نمایش تلویزیون قطع می‌شود. چگونه می‌توان حدس زد در این لحظه توپ کجا ست ؟

۱ــ حد تابع‌ها

امروز دبیر دربارهٔ اصابت موشک به یکی از هواپیماهای جنگی که در ارتفاع بالا در حال پرواز بود، صحبت کرد. این سؤال برای سعید مطرح شد که ما چگونه می‌توانیم ارتفاع هواپیما را در لحظهٔ اصابت موشک به‌دست آوریم؟

حمید گفت: من شنیده‌ام که هواپیماها دارای حداقل یک جعبهٔ سیاه هستند که تمام اطلاعات پرواز در آن ضبط می‌شود. اگر جعبهٔ سیاه هواپیما پیدا شود، حتماً ارتفاع هواپیما در لحظهٔ اصابت موشک در آن ذخیره شده است.

دبیر گفت: بله، ممکن است که اطلاعات کلی پرواز در جعبهٔ سیاه ذخیره شود؛ ولی در لحظهٔ اصابت موشک، جعبهٔ سیاه هم از کار می‌افتد و نمی‌تواند ارتفاع هواپیما را دقیقاً در همان لحظه نشان دهد.

حمید گفت: ولی ارتفاع هواپیما در لحظات قبل از اصابت موشک در جعبهٔ سیاه وجود دارد. شاید به کمک آنها بتوان ارتفاع هواپیما را در همان لحظهٔ خاص به‌دست آورد.

دبیر گفت: شما چه راه‌حلی به نظرتان می‌رسد؟

سعید گفت: اگر در لحظات قبل از اصابت موشک، ارتفاع هواپیما ثابت باشد، کافی است ارتفاع هواپیما را در آن لحظه‌ها، از جعبهٔ سیاه به‌دست آوریم.

دبیر گفت: ما اطلاعی از ثابت بودن ارتفاع هواپیما نداریم و ممکن است هواپیما برای فرار از موشک در آن لحظه‌ها، ارتفاع خود را سریعاً تغییر داده باشد.

حمید گفت: فکر می‌کنم اگر در زمان‌های خیلی نزدیک به لحظهٔ اصابت موشک، ارتفاع هواپیما را به‌دست آوریم، این مقدارها می‌توانند تقریب‌های خوبی از ارتفاع هواپیما در لحظهٔ اصابت موشک باشند.

دبیر گفت: پیشنهاد خوبی است. با این روش ما می‌توانیم تقریب‌های خوبی از ارتفاع هواپیما در آن لحظه به‌دست آوریم، اما ارتفاع دقیق هواپیما را هنوز نیافته‌ایم.

حمید گفت: فرض کنیم ارتفاع هواپیما را در زمان‌های نزدیک به لحظهٔ اصابت بدانیم، آیا می‌توان تشخیص داد که این مقادیر تقریبی به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

دبیر گفت: سؤال خوبی است. برای پاسخ به آن بهتر است فعالیت صفحه بعد را انجام دهیم.

فعالیت ۱

فرض کنید تابع h با قانون $h(t)=\dfrac{t^{۲}-۴t-۶۰}{۲t-۲۰}$، ارتفاع هواپیمایی را در بازهٔ زمانی $[۵,۱۰)$ مشخص کند. t را برحسب دقیقه و $h(t)$ را بر حسب کیلومتر درنظر بگیرید.

۱ ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۸$ چقدر است؟

....

۲ آیا در لحظهٔ $t=۱۰$ می‌توان از طریق تابع h، ارتفاع هواپیما را به‌دست آورد؟ چرا؟

....

۳ آیا در زمان‌های قبل از $t=۱۰$ می‌توان از طریق تابع h، ارتفاع هواپیما را به‌دست آورد؟

....

۴ با کامل کردن جدول، ارتفاع هواپیما را در زمان‌های نزدیک به $t=۱۰$ به‌دست آورید.

....

t	۵	۹	۹/۵	۹/۹	۹/۹۵	۹/۹۹	۹/۹۹۹	$\rightarrow$	۱۰
$h(t)$	۵/۵	۷/۵	۷/۷۵	۷/۹۵	۷/۹۷۵	...	...	$\rightarrow$	?

۵ آیا می‌توانید حدس بزنید که با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

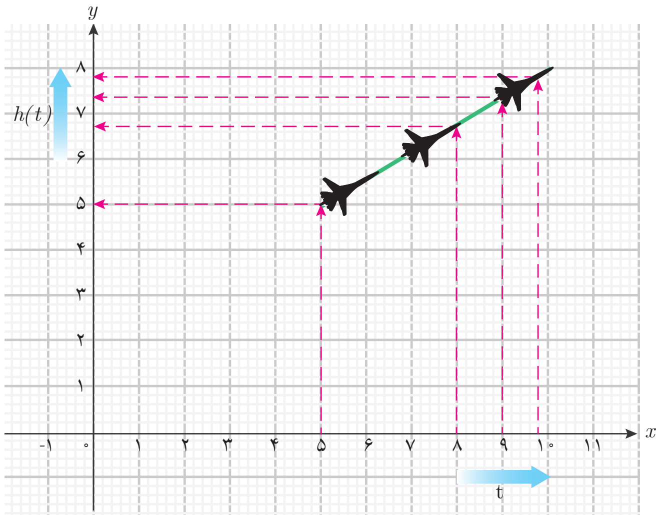
....

۶ آیا اکنون می‌توانید بگویید ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۱۰$ چقدر بوده است؟

....

در فعالیت (۱) تابع h، ارتفاع یک هواپیما را در بازهٔ زمانی $[۵,۱۰)$ نشان می‌دهد. هدف از این فعالیت، یافتن ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۱۰$ بود. این ارتفاع را با L نشان می‌دهیم. از آنجا که ۱۰ در دامنهٔ این تابع نیست، نمی‌توانیم مستقیماً L را از طریق قانون تابع h به‌دست آوریم؛ اما ارتفاع هواپیما برای زمان‌های قبل از $t=۱۰$ را می‌توان مشخص کرد. با توجه به پیوستگی حرکت هواپیما، می‌دانیم در

زمان‌های بسیار نزدیک به $t=۱۰$، ارتفاع هواپیما نزدیک به L است؛ پس کافی است ارتفاع هواپیما را برای زمان‌های بسیار نزدیک به $t=۱۰$ محاسبه کنیم و تشخیص دهیم این مقادیر به چه عددی نزدیک می‌شوند. با تشکیل جدول مقادیر تابع در نزدیکی‌های $t=۱۰$ مشاهده می‌کنیم که با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به ۸ نزدیک می‌شوند. این مطلب در نمودار تابع نیز به‌خوبی دیده می‌شود.



همان‌طور که در نمودار دیده می‌شود، با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به ۸ نزدیک می‌شوند. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۱۰$ برابر ۸ کیلومتر یا به عبارت دیگر $L=۸$ است. توجه داشته باشید که عدد ۸ را نمی‌توانستیم با محاسبهٔ مقدار تابع h در $t=۱۰$ به‌دست آوریم. زیرا ۱۰ در دامنهٔ این تابع نیست، بلکه با نزدیک کردن مقادیر t به ۱۰ و مشاهدهٔ نزدیک شدن مقادیر $h(t)$ به ۸ ، این مقدار را به‌دست آورده‌ایم. این عمل را یافتن **حدگیری** و عدد ۸ را **حد** تابع h در $t=۱۰$ می‌گویند.

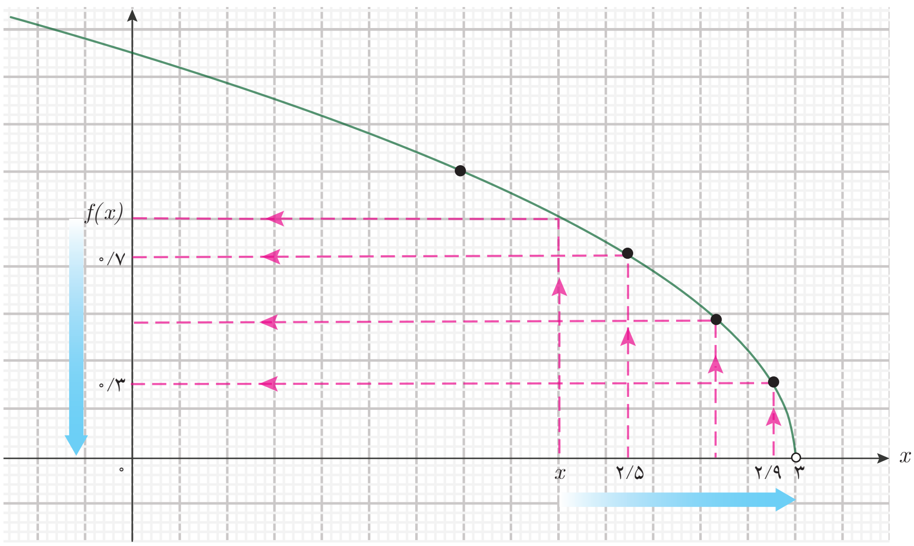
مثال ۱

تابع f را با دامنهٔ $(-\infty,۳)$ و قانون $f(x)=\dfrac{۳-x}{\sqrt{۳-x}}$ در نظر بگیرید. با نزدیک شدن متغیر تابع در دامنهٔ تابع به نقطهٔ $x=۳$، مقادیر تابع به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

برای پاسخ به این سؤال، جدول مقادیر تابع را به‌ازای xهای نزدیک به ۳ (در دامنهٔ f) محاسبه می‌کنیم.

x	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	۲/۹۹۹۹۹	$\to$ ۳
$f(x)$	۰/۷۰۷	۰/۳۱۶	۰/۱۰۰	۰/۰۳۱	۰/۰۱۰	۰/۰۰۳	$\to$?

این جدول نشان می‌دهد که با نزدیک شدن مقادیر x به ۳، مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شوند. از طریق نمودار تابع نیز می‌توان همین نتیجه را به‌دست آورد. نمودار f را به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم.



به ازای هر مقدار x، می‌توان مقدار $f(x)$ را روی محور عرض‌ها از نمودار تابع به‌دست آورد. در شکل بالا، با نزدیک شدن مقادیر x (در دامنهٔ f) روی محور طول‌ها به ۳ مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شوند. همان‌طور که نمودار نشان می‌دهد از طریق تغییر مقادیر تابع در جهت فلش‌ها می‌توان تشخیص داد که با نزدیک شدن x به ۳ روی محور طول‌ها، مقادیر $f(x)$ روی محور عرض‌ها به صفر نزدیک می‌شوند.

مثال ۲

تابع g را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ و قانون $g(x)=\dfrac{x^۲-x-۲}{x-۲}$ در نظر بگیرید. اگر مقادیر x را در دامنهٔ g به ۲ نزدیک کنیم، مقادیر $g(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

دامنهٔ این تابع به صورت $(-\infty,۲) \cup (۲,+\infty)$ است. برای محاسبهٔ مقادیر $g(x)$ به ازای xهای

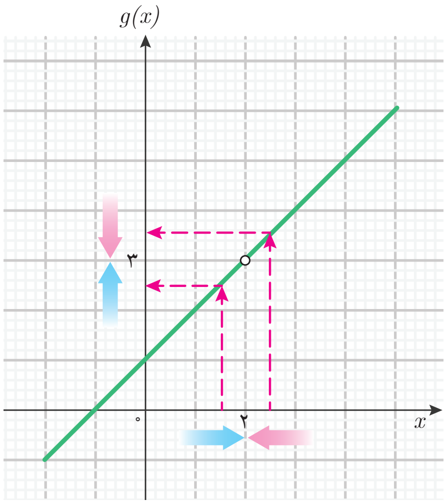
نزدیک ۲ در دامنه، می‌توان هم مقادیر بزرگ‌تر از ۲ و هم مقادیر کوچک‌تر از ۲ را برای x انتخاب کرد. بنابراین برای این تابع، جدولی به شکل زیر تشکیل می‌دهیم.

x	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	$\rightarrow$ ۲ $\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱
$g(x)$	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	$\rightarrow$ ۳ $\leftarrow$	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱

این جدول نشان می‌دهد که با نزدیک شدن مقادیر x به ۲ (از دو طرف) مقادیر $g(x)$ به ۳ نزدیک می‌شوند. در اینجا نیز می‌گویند حد تابع g در نقطهٔ $x=$ ۲ برابر ۳ است.

در این مثال نیز می‌توان به کمک نمودار تابع g، حد آن را در نقطهٔ $x=$ ۲ به‌دست آورد. نمودار این تابع به شکل مقابل است.

نمودار نشان می‌دهد که با نزدیک شدن x روی محور طول‌ها به ۲ (از دو طرف) مقادیر $g(x)$ روی محور عرض‌ها به ۳ نزدیک می‌شوند.



پس از توضیحات بالا دربارهٔ حد تابع‌ها، برای حمید سؤالی پیش آمد.

گفتگو

حمید پرسید: آیا می‌توان حد هر تابعی را در هر نقطه‌ای به‌دست آورد؟

دبیر گفت: برای یافتن حد یک تابع در یک نقطه، باید بتوانیم مقادیر تابع را در نزدیکی‌های آن نقطه حساب کنیم. اگر نتوانیم این کار را انجام دهیم، حد تابع در آن نقطه معنایی ندارد و قابل تعریف نیست.

حمید پرسید: چگونه تشخیص دهیم حد یک تابع در یک نقطه قابل تعریف نیست؟

دبیر گفت: اگر بخواهیم مقادیر تابع را در نزدیکی‌های یک نقطه محاسبه کنیم، لازم است دامنهٔ تابع، شامل نقاط نزدیک به آن نقطه باشد. این به معنای آن است که باید بتوانیم از داخل دامنهٔ تابع به آن نقطه نزدیک شویم.

سعید گفت: بنابراین، اگر درست متوجه شده باشم، حد یک تابع در هر نقطه‌ای قابل تعریف نیست. مثلاً برای یک نقطه مانند a باید تشخیص دهیم که آیا از داخل دامنهٔ تابع، می‌توان به a نزدیک شد یا خیر؟

حمید پرسید: برای مثال اگر دامنهٔ یک تابع بازهٔ $(۰,+\infty)$ باشد، از داخل آن به چه نقاطی می‌توان نزدیک شد و به چه نقاطی نمی‌توان نزدیک شد؟

سعید گفت: به نظر من در این بازه به هر عدد مثبت می‌توان از دو طرف (مقادیر کوچک‌تر و بزرگ‌تر از آن عدد) نزدیک شد، ولی در این بازه، به هیچ عدد منفی نمی‌توان نزدیک شد. در مورد صفر، فقط از سمت راست (مقادیر بزرگ‌تر از صفر) می‌توانیم به آن نزدیک شویم.

دبیر گفت: بله، نظر شما درست است. بنابراین، برای تابعی که دامنهٔ آن بازهٔ $(\circ,+\infty)$ است، حد آن در همه اعداد مثبت و صفر قابل تعریف است، ولی در اعداد منفی حد آن تابع قابل تعریف نیست.

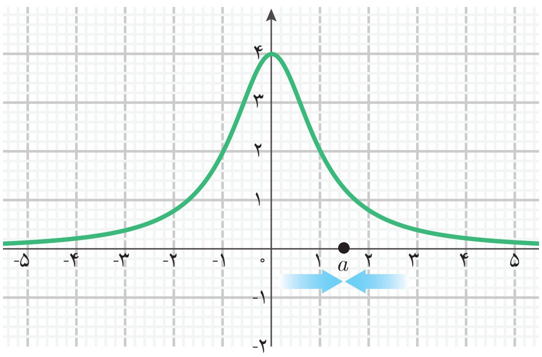
حمید گفت: ولی من منظور از نزدیک شدن به یک نقطه را درست متوجه نشدم. چه اندازه از نزدیک شدن کافی است؟ فاصله از نقطه چقدر باید کوچک باشد؟ آیا مثلاً نزدیک شدن به اندازهٔ ۰/۰۰۱ یا ۰/۰۰۰۱ یا ۰/۰۰۰۰۱ یا یک عدد کوچک‌تر دیگر، کافی است؟

دبیر گفت: نه، منظور از نزدیک شدن، آن نیست که به اندازهٔ عدد خاصی نزدیک شویم. منظور از نزدیک شدن آن است که به هر اندازه که بخواهیم، بتوانیم به آن نقطه نزدیک شویم. مثلاً از داخل بازهٔ $(\circ,+\infty)$ به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به ۱ نزدیک شویم.

مثال ۳

حد تابع $g(x)=\dfrac{۴}{x^{۲}+۱}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در چه نقاطی قابل تعریف است؟

دامنهٔ این تابع، تمام اعداد حقیقی است. پس، از دامنهٔ این تابع به هر نقطه مانند a می‌توان نزدیک شد. بنابراین، حد این تابع در همهٔ نقاط قابل تعریف است. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است و مثلاً نزدیک شدن به یک نقطه مانند a، از نقاط دامنهٔ تابع، نمایش داده شده است.

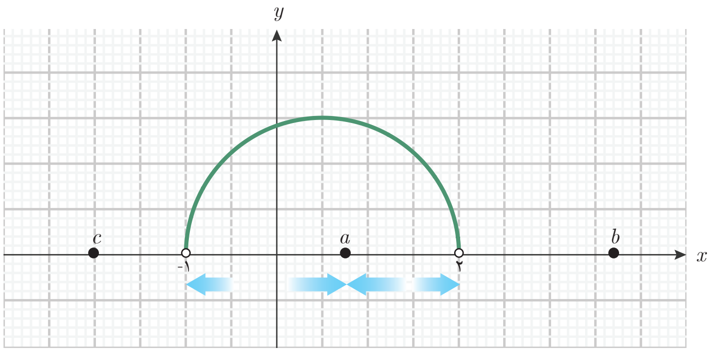


مثال ۴

حد تابع $f(x)=\sqrt{(x+۱)(۲-x)}$ با دامنهٔ $(-۱,۲)$ در چه نقاطی قابل تعریف است و در چه نقاطی قابل تعریف نیست؟

نمودار این تابع به شکل صفحه بعد است. همان‌طور که از روی شکل دیده می‌شود، از نقاط دامنهٔ این تابع به همهٔ نقاط بازهٔ $(-۱,۲)$ از دو طرف می‌توان نزدیک شد (مانند نقطهٔ a که در شکل نشان داده

شده است). به نقطهٔ ۲ فقط از سمت چپ می‌توان نزدیک شد و به ۱- فقط از سمت راست می‌توان نزدیک شد. بنابراین، حد این تابع در تمام نقاط بازهٔ [۱,۲-] قابل تعریف است. ولی از نقاط دامنهٔ این تابع نمی‌توان به نقاطی مانند b و c (در شکل زیر) که خارج از بازهٔ [۱,۲-] هستند، نزدیک شد. بنابراین حد این تابع برای نقاط خارج از بازهٔ [۱,۲-] قابل تعریف نیست.



به طور کلی در ریاضی، حد تابع‌ها به شکل زیر تعریف می‌شود:

تعریف

حد تابع

فرض کنید f یک تابع و a نقطه‌ای باشد که بتوان از نقاط دامنهٔ تابع f [1] (به اندازهٔ دلخواه) به آن نزدیک شد. در این حالت می‌گوییم حد f در نقطهٔ a **قابل تعریف** است.

اگر حد f در نقطهٔ a قابل تعریف باشد و با نزدیک شدن مقادیر متغیر x (از نقاط دامنهٔ f) به a که $x \neq a$، مقادیر $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند[2]، می‌گوییم حد تابع f در نقطهٔ a برابر عدد L است.

این عمل را **حدگیری از تابع f در نقطهٔ a**، و a را **نقطهٔ حدگیری** می‌نامند.

در عمل حدگیری از یک تابع f، مقادیر $f(x)$ نمی‌توانند هم‌زمان به دو عدد مختلف نزدیک شوند، بنابراین حد یک تابع در یک نقطه، در صورت وجود، یکتاست.

۱ـ در این کتاب فرض بر آن است که هرگاه از حد یک تابع صحبت می‌کنیم دامنهٔ آن به صورت یک بازه یا اجتماع چند بازه است.

۲ـ توجه داشته باشید که نزدیک شدن $f(x)$ به L نیز باید به اندازهٔ دلخواه باشد، یعنی با نزدیک کردن x به a (به اندازهٔ کافی) باید $f(x)$ را به L، به هر اندازه که بخواهیم نزدیک سازیم .

برای مثال، حد تابع $f(x)=\sqrt{(x+۱)(۲-x)}$ با دامنهٔ $(-۱,۲)$ را در نظر بگیرید حد این تابع در نقاط بازهٔ $[-۱,۲]$ قابل تعریف است ولی برای نقاط خارج از این بازه، حد این تابع قابل تعریف نیست.

کار در کلاس ۱

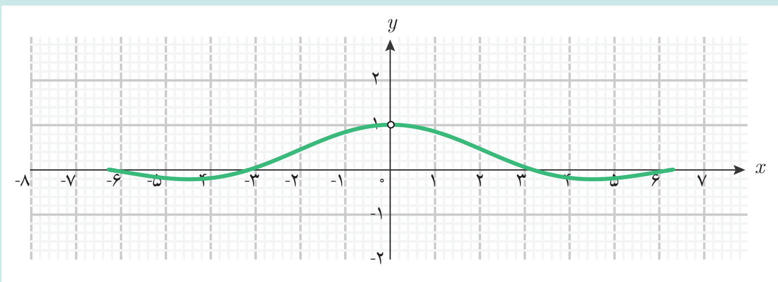
تابع $S(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ با دامنهٔ $(-۲\pi , ۲\pi) - \{۰\}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنهٔ این تابع را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید و توضیح دهید چرا نزدیک شدن به صفر از نقاط دامنهٔ این تابع از دو طرف انجام می‌شود.

ب) جدول زیر را کامل کنید و حد این تابع را در صفر حدس بزنید.

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\rightarrow ۰ \leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$S(x)$	۰/۹۹۸	...	...	$\rightarrow ? \leftarrow$	...	...	۰/۹۹۸

پ) نمودار این تابع به شکل زیر است. درستی حدس خود را از طریق نمودار بررسی کنید.



ت) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟

گفتگو

پس از آنکه سعید فهمید در چه نقاطی می‌توان حد یک تابع را تعریف کرد، سؤالی برای او پیش آمد.

سعید پرسید: در محاسبهٔ حد یک تابع در یک نقطه، از کجا معلوم است که مقادیر تابع حتماً به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

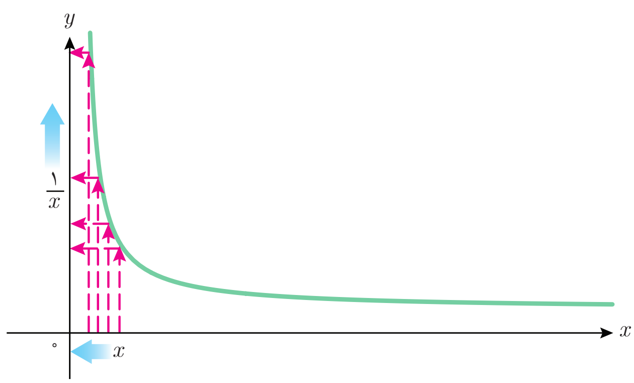
دبیر گفت: وقتی حد یک تابع را در یک نقطه بررسی می‌کنیم، لزومی ندارد حتماً مقادیر تابع به عدد خاصی نزدیک شوند. ممکن است مقادیر تابع به هیچ عدد خاصی نزدیک نشوند. در این حالت می‌گویند تابع در آن نقطه حد ندارد.

سعید گفت: پس آیا می‌توان گفت که اگر حد یک تابع در یک نقطه قابل تعریف باشد، ممکن است تابع در آن نقطه حد نداشته باشد؟

دبیر گفت: بله، **قابل تعریف بودن حد تابع در یک نقطه به معنای وجود حد در آن نقطه نیست.** برای مثال، حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $(0,+\infty)$ را در صفر بررسی می‌کنیم. ابتدا جدول مقادیر تابع را در برخی نقاط نزدیک صفر تشکیل می‌دهیم. از آنجا که دامنهٔ تابع فقط نقاط سمت راست صفر را در بردارد، فقط نقاط نزدیک صفر را که سمت راست صفر قرار دارند، در جدول قرار می‌دهیم.

x	$0 \leftarrow$	$0/0001$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$f(x)$	$? \leftarrow$	10000	1000	100	10

این جدول نشان می‌دهد که هر چه x به صفر (با مقادیر مثبت) نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $\frac{1}{x}$ بزرگ‌تر می‌شوند. نمودار این تابع نیز همین مطلب را نشان می‌دهد. آیا در این وضعیت، مقادیر $\frac{1}{x}$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟



سعید گفت: خیر، چون مقادیر $\frac{1}{x}$ در حال بزرگ شدن هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند.

بنابراین، تابع با قانون $\frac{1}{x}$ و دامنهٔ $(0,+\infty)$ در صفر، حد ندارد.

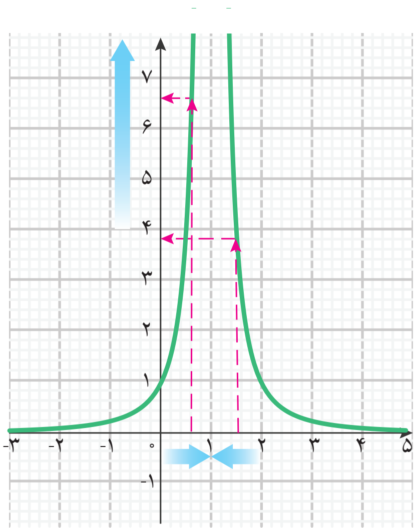
مثال ۵

آیا تابع $g(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{1\}$ در $x=1$، حد دارد؟

دامنهٔ این تابع به صورت $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ است و می‌توان از دو طرف از نقاط دامنهٔ تابع به ۱ نزدیک شد. بنابراین، جدول مقادیر این تابع را در نزدیک ۱ به شکل زیر تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow$ ۱ $\leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$g(x)$	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	$\rightarrow ? \leftarrow$	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰

این جدول نشان می‌دهد که با نزدیک شدن x به ۱، مقادیر $\frac{1}{(x-1)^2}$ بزرگ می‌شوند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. نمودار این تابع نیز همین مطلب را نشان می‌دهد.



بنابراین، این تابع در $x=1$ حد ندارد.

در این مثال‌ها دیدیم که **ممکن است حد یک تابع مانند f در یک نقطه مانند a قابل تعریف باشد، ولی با نزدیک شدن x از نقاط دامنهٔ f به a $(x\neq a)$، مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند. در این حالت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a حد ندارد.**

کار در کلاس ۲

موارد الف و ب را برای هر یک از تابع‌های $h(x)$ ، $g(t)$ و $f(x)$ بررسی کنید.

الف) آیا حد تابع در صفر قابل تعریف است؟

ب) در صورت قابل تعریف بودن، وجود حد و مقدار آن را (در صورت وجود) با کامل کردن جدول و رسم نمودار به کمک جئوجبرا، بررسی کنید.

۱ تابع $h(x) = \sin x$ با دامنهٔ $(-\pi , \pi)$

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	$\rightarrow$ ۰ $\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$\sin(x)$	−۰/۰۹۹	۰/۰۰۹	...	$\rightarrow ? \leftarrow$	...	۰/۰۰۹	۰/۰۹۹

۲ تابع $g(t)=\dfrac{\sqrt{t^{۲}+t}}{t}$ با دامنهٔ $(۰,۴)$

t	۰ $\leftarrow$	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$g(t)$	$? \leftarrow$	...	۳۱/۶۴	۱۰/۰۵	۳/۳۲

۳ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{۴}+x^{۶}}}{x^{۲}}$ با دامنهٔ $(-۵ , ۵) - \{۰\}$

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	$\rightarrow$ ۰ $\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	۱/۰۰۴	...	...	$\rightarrow ? \leftarrow$	...	۱/۰۰۰۰۴	۱/۰۰۴

برای نمایش حد یک تابع از نماد lim استفاده می‌شود[۱]. برای بیان حد تابع $f(x)$، از عبارت $\lim f(x)$ استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه حد یک تابع در یک نقطه (نقطهٔ حدگیری)، تعریف و محاسبه می‌شود،

۱ـ lim ابتدای کلمهٔ limit است. این کلمه در زبان انگلیسی به معنای حد و مرز است.

نقطهٔ حدگیری نیز باید در نماد حد، نمایش داده شود. برای مثال، اگر حدگیری در نقطه‌ای مانند a انجام شود، از نماد $x \to a$ برای بیان این مطلب استفاده می‌شود که نشانگر آن است که x (متغیر تابع) در حال نزدیک شدن به a (میل کردن به a) است. نماد $x \to a$ را در زیر نماد $\lim$ می‌نویسند. به‌عبارت دیگر:

حد تابع f در نقطهٔ a به صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ نمایش داده می‌شود.

از آنجا که نماد $x \to a$ نشانگر میل کردن x به a است، $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ به صورت «حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند» خوانده می‌شود.

مثال ۶

اگر حد تابع با قانون $x+۲$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=۳$ با تشکیل جدول پیدا کنیم، برابر ۵ می‌شود.

x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	$\to ۳ \leftarrow$	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$x+۲$	۴/۹	۴/۹۹	۴/۹۹۹	$\to ۵ \leftarrow$	۵/۰۰۱	۵/۰۱	۵/۱

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to ۳}(x+۲)=۵$$

عبارت بالا را به صورت زیر می‌خوانیم:

«حد تابع $x+۲$ وقتی x به ۳ میل می‌کند، برابر ۵ است».

مثال ۷

در کار در کلاس (۱) حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ با دامنهٔ $(-۲\pi , ۲\pi) - \{۰\}$ را در $x=۰$ محاسبه کردید. مقدار این حد برابر ۱ بود، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

عبارت بالا را به صورت زیر می‌خوانیم:

«حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی x به صفر میل می‌کند، برابر ۱ است».

مثال ۸

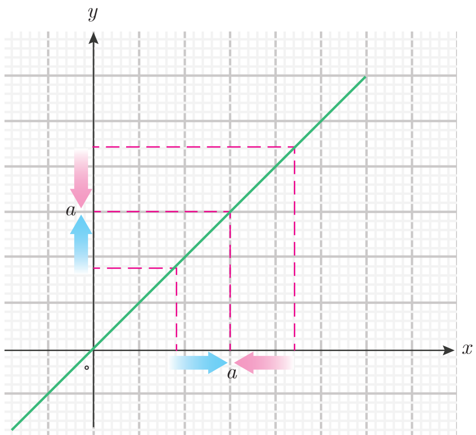
در مثال (۲) دیدیم حد تابع $g(x)=\dfrac{x^{۲}-x-۲}{x-۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ در نقطهٔ $x=۲$ برابر ۳ است.
بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-x-۲}{x-۲}=۳$$

عبارت بالا را به صورت زیر می‌خوانیم:

«حد تابع $\dfrac{x^{۲}-x-۲}{x-۲}$ وقتی x به ۲ میل می‌کند، برابر ۳ است.»

مثال ۹



تابع $f(x)=x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مقدار تابع در هر نقطه مانند x، همان x است. بنابراین، با نزدیک شدن x به هر نقطه‌ای مانند a، مقادیر $f(x)$ (که همان x است) نیز به a نزدیک می‌شوند.

برای مثال در نقطه ۳ جدول این تابع در نزدیکی این نقطه به شکل زیر است.

x	۲/۹	۲/۹۹	$\to$ ۳ $\leftarrow$	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)=x$	۲/۹	۲/۹۹	$\to$ ۳ $\leftarrow$	۳/۰۱	۳/۱

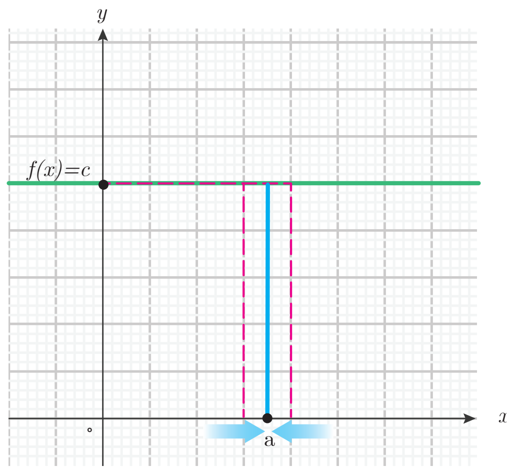
بنابراین $\lim\limits_{x\to ۳} = ۳$

به طور کلی حد این تابع در همهٔ نقاط وجود دارد و می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال ۱۰

تابع ثابت $f(x)=c$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.
نمودار این تابع نشان می‌دهد که با نزدیک شدن x به هر نقطه‌ای مانند a (شکل روبه‌رو)، مقادیر $f(x)$ همان مقدار ثابت c است.



x	x	$\rightarrow a \leftarrow$	x
$f(x)=c$	c	$\rightarrow c \leftarrow$	c

در این وضعیت حد این تابع همان c است؛ یعنی حد تابع ثابت در هر نقطه‌ای وجود دارد و برابر همان مقدار ثابت است. بنابراین،

$$\lim_{x\to a} c = c$$

کار در کلاس ۳

با استفاده از نماد حد، حد تابع‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) حد تابع $۳x-۱$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $x=۲$ برابر ۵ است.

ب) حد تابع $g(x)=\dfrac{x}{x+۱}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۱)$ در $x=-۳$ برابر $\dfrac{۳}{۲}$ است.

پ) حد تابع $\sqrt{x^{۲}-۱}$ با دامنهٔ $(۱,+\infty)$ در $x=۱$ برابر صفر است.

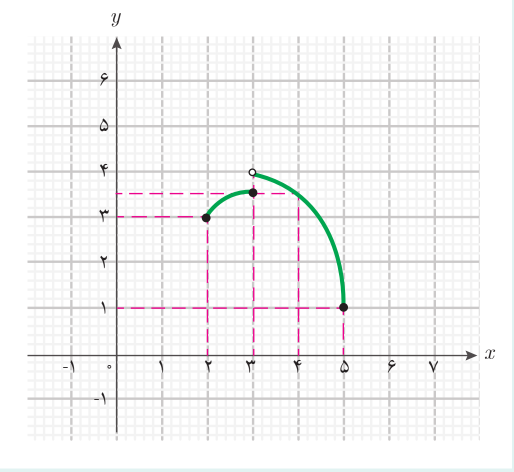
ت) حد تابع ثابت با مقدار ۸ در $x=-۱$ برابر ۸ است.

مسائل

۱ شکل روبه‌رو، نمودار تابع h را نشان می‌دهد.

الف) در کدام‌یک از نقاط ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ حد این تابع قابل تعریف است؟ چرا؟

ب) در کدام یک از نقاط ۳، ۴، ۵ حد این تابع موجود است؟ حد این تابع در این نقاط را در صورت وجود بیابید و با نماد حد بنویسید.



۲ حدهای زیر را به زبان فارسی بیان کنید. دامنهٔ این تابع‌ها را بازهٔ $(۰,+\infty)$ در نظر بگیرید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x}=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۴}}\frac{۱}{x}=۴$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\sin x=۱$

۳ تابع $f(x)=\dfrac{x^۲}{۴-x^۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۲\ ۲\}$ را در نظر بگیرید. حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟

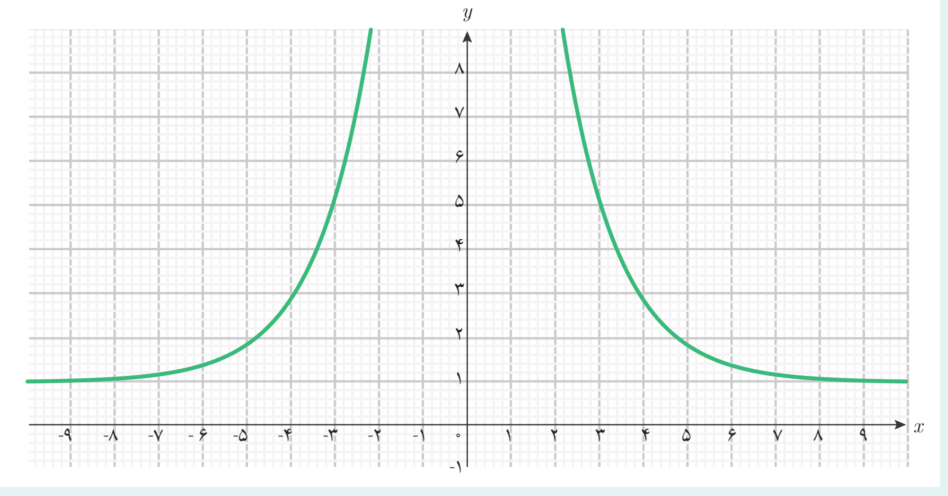
۴ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-۲}}{x-۲}$ را با دامنهٔ $(۲,+\infty)$ در نظر بگیرید. حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟ به کمک تشکیل جدول این تابع در نزدیک ۲، وجود حد این تابع در $x=۲$ را بررسی کنید.

۵ تابعی خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید و حد آن را در ۱ بررسی کنید. آیا حد این تابع در هر نقطهٔ دیگری هم وجود دارد؟

۶ تابع $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-۴}}$ با دامنهٔ $(۲,+\infty)\cup(-\infty,-۲)$ را در نظر بگیرید.

الف) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟

ب) نمودار این تابع به شکل زیر است. حدس بزنید حد این تابع در چه نقاطی وجود دارد و در چه نقاطی وجود ندارد؟



۷ تابع $g(x)=۱+\sqrt{x}$ با دامنهٔ $[۰,+\infty)$ را در نظر بگیرید.

الف) با تشکیل جدول این تابع در نزدیکی‌های ۴ حد این تابع را در ۴ بیابید و با نماد حد بنویسید.

ب) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف نیست؟

پ) با رسم نمودار این تابع به کمک جئوجبرا مشخص کنید، حد این تابع در چه نقاطی وجود دارد و در چه نقاطی وجود ندارد.

۸ آیا حد تابع $h(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۲}{۲-x}$ با دامنهٔ $(-\infty,۲)$ در ۲ قابل تعریف است؟ با تشکیل جدول و رسم نمودار این تابع، حد آن را در ۲، در صورت وجود، بیابید و با نماد حد بنویسید.

۲ــ محاسبهٔ حد تابع‌ها

با یادگیری مفهوم حد، سعید به دنبال جواب این سؤال بود که حد را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟

سعید گفت: برای یافتن حد یک تابع، ما مقادیر تابع را در نزدیک نقطهٔ حدگیری به کمک قانون تابع، محاسبه می‌کردیم و با استفاده از این مقادیر، حد تابع را حدس می‌زدیم. از کجا معلوم، حدس ما درست باشد؟ آیا روش‌های دیگری برای یافتن حد تابع‌ها داریم؟

دبیر گفت: سؤال خوبی است. ما نمی‌توانیم فقط به حدس خود اطمینان کنیم. روش‌هایی برای محاسبهٔ حد تابع‌ها وجود دارند که به کمک آنها، حد بسیاری از تابع‌ها را می‌توان محاسبه کرد. برای مثال، اگر تابعی از جمع یا ضرب تابع‌های ساده‌تر ساخته شده باشد، می‌توانیم از حد همان تابع‌های ساده‌تر برای محاسبهٔ حد آن تابع استفاده کنیم.

فعالیت زیر یکی از این روش‌های محاسبهٔ حد را با یک مثال نشان می‌دهد.

فعالیت ۲

دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x}{۴}$ را با دامنهٔ یکسان (۰,۴) در نظر بگیرید. مجموع این دو تابع را به صورت $h(x)=\frac{x}{۴}+\sqrt{x}$ نشان می‌دهیم که دامنهٔ آن همان بازهٔ (۰,۴) است.

۱ جدول زیر را برای یافتن حد سه تابع f و g و h در نقطهٔ ۴ کامل کنید.

x	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	$\to$ ۴
$f(x)$	۱/۷۳۲	۱/۸۷۰	۱/۹۷۴	...	...	$\to ?$
$g(x)$	۰/۷۵۰	۰/۸۷۵	۰/۹۷۵	...	...	$\to ?$
$h(x)$	۲/۴۸۲	۲/۷۴۵	۲/۹۴۹	...	...	$\to ?$

۲ حد هر تابع را در نقطهٔ ۴ جداگانه به‌دست آورید. چه رابطه‌ای بین حد این سه تابع در نقطهٔ ۴ می‌یابید؟

۳ جدول زیر را برای یافتن حد این سه تابع در نقطهٔ ۱ کامل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\to$ ۱ $\leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$	۰/۹۴۸	۰/۹۹۴	...	$\to ? \leftarrow$	۱/۰۰۰	۱/۰۰۴	۱/۰۴۸
$g(x)$	۰/۲۲۵	۰/۲۴۷	۰/۲۴۹	$\to ? \leftarrow$	...	۰/۲۵۲	۰/۲۷۵
$h(x)$	۱/۱۷۳	۱/۲۴۱	...	$\to ? \leftarrow$	...	۱/۲۵۶	۱/۳۲۳

۴ حد هر تابع در نقطهٔ ۱ را جداگانه به‌دست آورید. چه رابطه‌ای بین حد این سه تابع در نقطهٔ ۱ می‌یابید؟

۵ در حالت کلی بین حد دو تابع و حد مجموع آن دو تابع (در یک نقطهٔ مشخص) چه رابطه‌ای را حدس می‌زنید؟

در این فعالیت، دو تابع مشخص f و g با دامنهٔ یکسان ارائه شده‌اند. با جمع قانون‌های f و g تابع دیگری با همان دامنهٔ مشترک این دو تابع به‌دست می‌آید (تابع h). در حالت کلی با جمع هر دو تابع دلخواه که دامنهٔ یکسانی دارند، می‌توانیم تابعی با همان دامنهٔ مشترک آنها به‌دست آوریم. این عمل را **جمع کردن تابع‌ها** می‌نامند. در این فعالیت حد مجموع این دو تابع در یک نقطهٔ مشخص بررسی شد. دیدیم که با نزدیک شدن x به ۱، مقادیر $f(x)$ به ۱ و مقادیر $g(x)$ به $\frac{۱}{۴}$ نزدیک می‌شوند، بنابراین مقادیر $f(x)+g(x)$ به $۱+\frac{۱}{۴}$ نزدیک می‌شوند. این بررسی نشان می‌دهد که **حد مجموع این دو تابع در یک نقطه برابر با مجموع حدهای این دو تابع در همان نقطه است.**

به طور کلی اگر حد دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در نقطهٔ a به ترتیب $L_۱$ و $L_۲$ باشند، به عبارت دیگر با نزدیک شدن x به a، مقادیر $f(x)$ به $L_۱$ و مقادیر $g(x)$ به $L_۲$ نزدیک شوند، مقادیر $f(x)+g(x)$ به $L_۱+L_۲$ نزدیک می‌شوند. پس، می‌توانیم نتیجه بگیریم مجموع دو تابع f و g نیز در نقطهٔ a حد دارد و حد آن $L_۱+L_۲$ است.

تابع‌های با دامنهٔ یکسان را می‌توان در هم ضرب کرد و تابع دیگری با همان دامنهٔ مشترک به‌دست آورد. این عمل را **ضرب تابع‌ها** می‌نامند. برای ضرب دو تابع f و g نیز نتیجه مشابهی به‌دست می‌آید: اگر با نزدیک شدن x به نقطهٔ a، مقادیر $f(x)$ به $L_۱$ و مقادیر $g(x)$ به $L_۲$ نزدیک شوند، مقادیر $f(x).g(x)$ به $L_۱L_۲$ نزدیک می‌شوند. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم حاصل ضرب دو تابع f و g نیز در نقطهٔ a حد دارد و حد آن $L_۱L_۲$ است.

با استفاده از نماد حد تابع، می‌توانیم حد مجموع و حاصل‌ضرب دو تابع را به شکل زیر بنویسیم.

حد مجموع و حاصل‌ضرب دو تابع

اگر دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در $x=a$ حد داشته باشند، آنگاه مجموع و حاصل‌ضرب‌های این دو تابع نیز در a حد دارند و

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)$$

وضعیت تفاضل تابع‌ها نیز مشابه جمع تابع‌هاست و حد تفاضل دو تابع (با دامنهٔ یکسان) در یک نقطه، برابر است با تفاضل حد آن دو تابع در آن نقطه، یعنی:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$$

برای جمع سه تابع (یا بیشتر) نیز حد مجموع آنها در یک نقطه، برابر مجموع حد آن تابع‌ها در آن نقطه است. همچنین، برای ضرب سه تابع (یا بیشتر) نیز حد حاصل ضرب آنها، در یک نقطه، برابر حاصل‌ضرب حد آن تابع‌ها در آن نقطه است.

مثال ۱۱

حد تابع $f(x)=x^{۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=-۲$ به‌دست آورید.

این تابع به صورت ضرب تابع $g(x)=x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در خودش است و داریم $\lim_{x\to -۲}x=-۲$، بنابراین:

$$\lim_{x\to -۲}x^{۲}=\lim_{x\to -۲}(x.x)=(\lim_{x\to -۲}x)(\lim_{x\to -۲}x)=(-۲)(-۲)=۴$$

مثال ۱۲

حد تابع $f(x) = x^{۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

طبق مثال (۹)، داریم $\lim\limits_{x\to a} x = a$ و می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to a} x^{۲} = \lim_{x\to a}(x.x) = (\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x) = a.a = a^{۲}$$

مثال ۱۳

حد تابع $k(x) = ۶\,x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=۲$ به‌دست آورید.

تابع $k(x)$ به صورت ضرب تابع $g(x) = x$ در تابع ثابت $f(x) = ۶$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to ۲} ۶x = (\lim_{x\to ۲} ۶)(\lim_{x\to ۲} x) = ۶\times ۲ = ۱۲$$

مثال ۱۴

حد تابع $f(x) = x^{۲} + x - ۵$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=۲$ به‌دست آورید.

این تابع به صورت مجموع سه تابع $g(x) = x^{۲}$ و $h(x) = x$ و تابع ثابت $k(x) = -۵$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲}(x^{۲} + x - ۵) = \lim_{x\to ۲} x^{۲} + \lim_{x\to ۲} x + \lim_{x\to ۲}(-۵) = ۲^{۲} + ۲ - ۵ = ۱$$

مثال ۱۵

حد تابع $h(x) = x^{۳}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

اگر تابع $g(x) = x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را سه بار در خودش ضرب کنیم، تابع h به‌دست می‌آید. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to a} x^{۳} = \lim_{x\to a}(x.x.x) = (\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x) = a.a.a = a^{۳}$$

کار در کلاس ۴

الف) حد تابع $f(x) = x^{۳} - ۵x^{۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=-۱$ به‌دست آورید.

ب) حد تابع $f(x) = x^{۳} - ۵x^{۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در یک نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

گفتگو

سعید گفت: در تمام مثال‌هایی که تاکنون از تابع‌های چندجمله‌ای دیدیم، حد آنها در هر نقطه، همان مقدار تابع در آن نقطه بود. آیا این مطلب برای همهٔ تابع‌های چندجمله‌ای درست است؟

دبیر گفت: به نکتهٔ خوبی توجه کردی. فعالیت زیر می‌تواند جوابی برای سؤال شما فراهم کند.

فعالیت ۳

۱ با به‌دست آوردن حد تابع‌های داده‌شده، جدول زیر را کامل کنید. دامنهٔ این تابع‌ها $\mathbb{R}$ می‌باشند.

$f(x)$	x	$x^۲$	$x^۳$	$x^۴$	$x^۵$	$x^۶$	x^n
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	a	$a^۲$	$a^۳$				

۲ توضیح دهید چرا برای تابع چندجمله‌ای $f(x)=bx^n$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ برای یک نقطهٔ دلخواه a داریم:

$$\lim_{x\to a} bx^n = ba^n$$

۳ حد تابع چندجمله‌ای $P(x) = ۴x^۵ - ۳x^۳ + ۷x - ۴$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

در این فعالیت، ابتدا حد تابع‌هایی به صورت x^n را در نقاط دلخواه به کمک حد حاصل ضرب تابع‌ها به‌دست آوردیم. سپس، حد تابع‌هایی به صورت bx^n را در نقاط دلخواه به‌دست آوردیم. سپس، برای یک چندجمله‌ای خاص، به کمک حد مجموع تابع‌ها، مشاهده کردیم که حد آن تابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای برابر با مقدار آن تابع در آن نقطه است. این مطلب برای هر تابع چندجمله‌ای دلخواهی برقرار است.

برای هر تابع چندجمله‌ای مانند $P(x)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ برای یک نقطهٔ دلخواه a داریم:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

گفتگو

سعید پرسید: دیدیم که تابع‌ها را می‌توانیم با هم جمع یا در هم ضرب کنیم و تابع جدیدی به‌دست آوریم.
آیا تابع‌ها را می‌توانیم بر هم تقسیم کنیم؟

دبیر گفت: بله، تقسیم تابع‌ها نیز همانند ضرب تابع‌هاست. ولی باید دقت کنیم که مقادیر تابعی که در مخرج قرار می‌گیرد، صفر نباشند. اگر f و g دو تابع با دامنهٔ یکسان D باشند و به ازای هر x در دامنهٔ D داشته باشیم: $g(x)\neq ۰$، آنگاه می‌توانیم تابعی با قانون $\frac{f(x)}{g(x)}$ و دامنهٔ D بسازیم که آن را تابع تقسیم f بر g می‌نامند. این‌گونه تابع‌ها را **تابع کسری** می‌نامیم و f را تابع صورت کسر و g را تابع مخرج کسر می‌نامند.

سعید پرسید: آیا برای محاسبهٔ حد تقسیم دو تابع نیز روشی داریم؟

دبیر گفت: در موارد خاصی می‌توانیم حد تقسیم دو تابع را هم به‌دست آوریم.

فرض کنید حد دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در نقطهٔ a به ترتیب $L_۱$ و $L_۲$ باشند و $L_۲\neq ۰$. با نزدیک شدن مقادیر x به a، مقادیر $f(x)$ به $L_۱$ و مقادیر $g(x)$ به $L_۲$ نزدیک می‌شوند. بنابراین، مقادیر $\frac{f(x)}{g(x)}$ به $\frac{L_۱}{L_۲}$ نزدیک می‌شوند و می‌توانیم نتیجه بگیریم تابع تقسیم f بر g در نقطهٔ a حد دارد و حد آن $\frac{L_۱}{L_۲}$ است.

حد حاصل تقسیم دو تابع

فرض کنید دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در یک نقطه مانند a حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq ۰$، آنگاه تابع تقسیم f بر g نیز در نقطهٔ a حد دارد و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

مثال ۱۶

تابع $h(x)=\frac{۳x}{x^۲+۱}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

الف) حد این تابع را در نقطهٔ $x=-۱$ به‌دست آورید.

ب) حد این تابع را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

تابع h به صورت تقسیم تابع $۳x$ بر تابع $x^۲+۱$ در دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. حد تابع مخرج در $x=-۱$ برابر ۲ است که عددی ناصفر است. بنابراین:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۳x}{x^۲+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to -۱} ۳x}{\lim\limits_{x\to -۱}(x^۲+۱)}=\frac{-۳}{(-۱)^۲+۱}=-\frac{۳}{۲}$$

اما در نقطهٔ دلخواه a حد تابع مخرج این کسر برابر $a^۲+۱$ است که عددی ناصفر است. بنابراین:

$$\lim_{x\to a}\frac{۳x}{x^۲+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to a}۳x}{\lim\limits_{x\to a}x^۲+۱}=\frac{۳a}{a^۲+۱}$$

مثال ۱۷

تابع $g(x)=\dfrac{x^۳+۱}{x^۲-۱}$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$ در نظر بگیرید.

الف) حد این تابع را در $x=۳$ به‌دست آورید.

ب) حد این تابع را در نقطهٔ دلخواه a از دامنهٔ آن به‌دست آورید.

تابع g به صورت تقسیم تابع $x^۳+۱$ بر تابع $x^۲-۱$ در دامنهٔ داده شده است. در نقطهٔ ۳، حد تابع مخرج برابر ۸ است $(۸\neq ۰)$. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۳+۱}{x^۲-۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}x^۳+۱}{\lim\limits_{x\to ۳}x^۲-۱}=\frac{۲۸}{۸}=\frac{۷}{۲}$$

اما در نقطهٔ دلخواه a، حد تابع مخرج این کسر برابر $a^۲-۱$ است. چون a در دامنهٔ تابع است نمی‌تواند ۱ یا ۱- باشد و داریم $a\neq \pm ۱$. پس، $a^۲-۱\neq ۰$. بنابراین:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^۳+۱}{x^۲-۱}=\frac{\lim\limits_{x\to a}x^۳+۱}{\lim\limits_{x\to a}x^۲-۱}=\frac{a^۳+۱}{a^۲-۱}$$

گفتگو

سعید پرسید: اگرچه در تقسیم دو تابع، مقادیر تابع مخرج کسر، هیچگاه صفر نمی‌شود، ولی حد آن در یک نقطه ممکن است صفر شود. در این حالت، آیا می‌توانیم در مورد حد آن تابع کسری در آن نقطه، چیزی بگوییم؟

دبیر گفت: در این حالت، بررسی وجود حد و محاسبهٔ حد کمی مشکل‌تر است. باید ببینیم حد تابع صورت کسر در آن نقطه (در صورت وجود) چگونه است. دو حالت ممکن است پیش آید: یا حد صورت کسر صفر است یا حد صورت کسر عددی ناصفر است.

حمید گفت: در حالتی که حد صورت کسر عددی ناصفر باشد، آیا می‌توانیم بگوییم چون عدد ناصفر تقسیم بر صفر، بی‌نهایت است پس تابع کسری در آن نقطه حد ندارد؟

دبیر گفت: خیر، این طوری نباید بگوییم. نباید از تقسیم عدد بر صفر صحبت کنیم، چون این عمل تعریف نشده است. همچنین، بی‌نهایت عدد نیست تا بخواهد با چیزی برابر شود. ولی وقتی حد صورت یک تابع کسری در نقطه‌ای عددی ناصفر و حد تابع مخرج، صفر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که تابع کسری در آن نقطهٔ خاص، حد ندارد. زیرا با نزدیک شدن متغیر به آن نقطه، مقادیر تابع به هیچ عدد خاصی نزدیک نخواهند شد.

سعید پرسید: درحالتی که حد تابع صورت و تابع مخرج یک تابع کسری در یک نقطه صفر شوند، دربارهٔ حد آن تابع چه می‌توانیم بگوییم؟

دبیر گفت: در این حالت، وجود یا نبود حد، بستگی به تابع‌های صورت و مخرج آن تابع کسری دارد. ممکن است تابع کسری حد داشته باشد یا نداشته باشد. به همین دلیل این حالت را **مبهم** نامیده‌اند. در این حالت، برای تشخیص وجود یا نبود حد، هر تابع کسری را باید جداگانه بررسی کرد.

مثال ۱۸

حد تابع $\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۱}$ با دامنهٔ $(۰,۱)$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

حد تابع صورت و تابع مخرج این کسر در $x=۱$، صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. در این مثال، می‌توانیم تابع‌های صورت و مخرج را به صورت ضرب یک چندجمله‌ای در x-۱ بنویسیم و با ساده‌سازی به شکل زیر حد را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۲}{x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}x-۲}{\lim\limits_{x\to ۱}x+۱}=\frac{-۱}{۲}$$

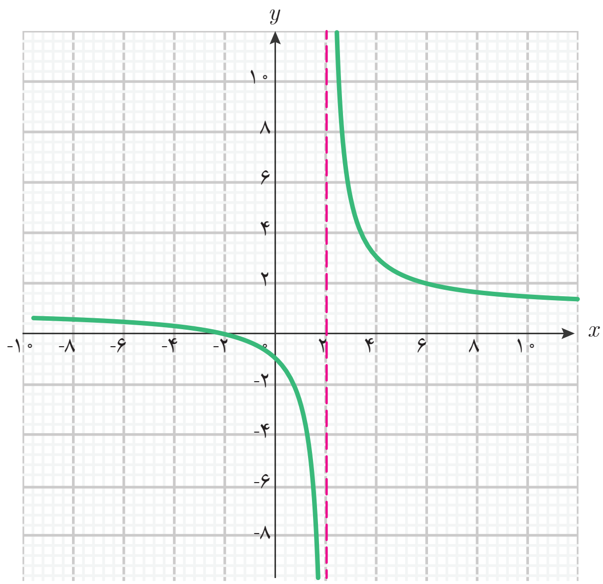
توجه داشته باشید که در محاسبات بالا، مقادیر x -۱ همواره ناصفراند (زیرا x هیچ‌گاه برابر ۱ نخواهد شد) پس این عامل را می‌توان از صورت و مخرج ساده کرد. در حالت کلی، وقتی تابع‌های صورت و مخرج چندجمله‌ای باشند و حد هر دو تابع در نقطه‌ای مانند a صفر شوند، می‌توان آنها را به صورت ضرب عواملی در x -a نوشت و عامل x -a را از صورت و مخرج ساده کرد.

مثال ۱۹

حد تابع $\frac{x^{۲}-۴}{(x-۲)^{۲}}$ را با دامنهٔ $(۰,۲)$ در $x=۲$ بررسی کنید.

در این مثال نیز حد تابع صورت و تابع مخرج این کسر در $x=۲$ صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. صورت و مخرج را به شکل ضرب عامل‌هایی در $x-۲$ می‌نویسیم و پس از ساده‌سازی آن، به کسر $\frac{x+۲}{x-۲}$ می‌رسیم. پس از این ساده‌سازی، به یک تابع کسری می‌رسیم که حد تابع صورت در نقطهٔ $x=۲$ عددی ناصفر است ولی حد تابع مخرج کسر در این نقطه صفر است. بنابراین تابع کسری داده شده، در نقطهٔ $x=۲$ حد ندارد.

نتیجهٔ به دست آمده را به کمک شکل بهتر می‌توانید بررسی کنید.



مثال ۲۰

حد تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را در صفر به‌دست آورید.

تابع f، یک تابع کسری است که حد تابع صورت و تابع مخرج آن در نقطهٔ صفر، برابر صفر است. پس با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. در اینجا تابع صورت، چندجمله‌ای نیست و نمی‌توانیم از روش

ساده‌سازی استفاده کنیم. اما روش محاسبهٔ مستقیم مقادیر تابع در نزدیکی‌های نقطهٔ حدگیری، همواره قابل انجام است. حد این تابع را با این روش، در «کار در کلاس (۱)» به‌دست آورده‌ایم و دیدیم که این تابع در نقطهٔ صفر حد دارد و حد آن ۱ است.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

اگر برای محاسبهٔ حد یک تابع، نتوانیم از روش‌هایی مانند ساده‌سازی و روش‌های دیگر استفاده کنیم، همواره می‌توان از روش محاسبهٔ مستقیم مقادیر تابع در نزدیکی‌های نقطهٔ حدگیری استفاده کنیم و با تشکیل جدول مقادیر تابع در نزدیکی‌های نقطهٔ حدگیری، وجود حد، مقدار حد یا نبود حد را حدس بزنیم.

کار درکلاس ۵

وجود حد تابع‌های زیر را در نقاط داده‌شده بررسی کنید. در صورت وجود حد، آن را بیابید و با نماد حد بنویسید.

الف) تابع $\frac{x^۲ - ۹}{x - ۳}$ با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{۳\}$ در $x = ۳$.

ب) تابع $\frac{(x+۱)\sin x}{x(x+۲)}$ با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{-۲, ۰\}$ در $x = ۰$ (راهنمایی: این تابع را به صورت ضرب دو تابع مناسب بنویسید).

پ) تابع $\frac{x^۲ + x - ۴}{x^۲ - ۱۶}$ با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{-۴, ۴\}$ در $x = -۴$.

مسائل

۱ حد تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده‌شده، در صورت وجود، بیابید.

الف) تابع $g(x) = x^{۳}-۲x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نقطهٔ دلخواه a.

ب) تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}$ با دامنهٔ $(۱,۵)$ در نقطهٔ $x=۳$ و در نقطهٔ $x=۱$.

پ) تابع $h(x)=\dfrac{x-x^{۳}}{x+۱}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۱\}$ در نقطهٔ دلخواه a.

۲ حد تابع $h(x)=\dfrac{x^{۲}+x-۲}{۴-x^{۲}}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۲)$ در -۲ را در صورت وجود بیابید.

۳ حد تابع $h(x)=\dfrac{x^{۲}-x-۴}{۴+x^{۲}}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a بیابید.

۴ تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x^{۲}-۴}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$ در چه نقاطی حد ندارد؟

۵ تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+x}{x^{۲}-x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ را در نظر بگیرید. وجود حد این تابع را در نقاط صفر و ۱ بررسی کنید.

۶ تابع $g(x)=\dfrac{(x+x^{۳})\sin x}{x^{۲}(۱-x)}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا این تابع در صفر حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.

ب) آیا این تابع در ۱ حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.

استانداردهای ارزشیابی پودمان ۲

عنوان پودمان	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	استاندارد عملکرد (کیفیت)	سطوح انتظارات	شاخص تحقق	نمره
پودمان دوم: درک مفهوم حد	انجام محاسبات مربوط به حد تابع‌ها	حل مسائل مرتبط با حد تابع‌ها	بالاتر از حد انتظار	☐ حل مسائل حل‌نشده در کلاس و کتاب درسی مرتبط با حد تابع‌ها	۳
			در حد انتظار	☐ حل مسائل مشابه مسائل حل‌شده در کلاس و مشابه کتاب درسی مرتبط با حد تابع‌ها	۲
			پایین‌تر از حد انتظار	☐ تشخیص وجود حد و یافتن مقدار آن از روی نمودار و جدول ☐ محاسبه حد مجموع، حاصل‌ضرب و تقسیم تابع‌ها	۱
نمره مستمر از ۵:					
نمره واحد یادگیری از ۳:					
نمره واحد یادگیری از ۲۰:					