پودمان چهارم

درک مفهوم مشتق

درک شهودی از مفهوم سرعت از مدت‌ها قبل وجود داشته و فیزیکدانان با آن آشنا بوده‌اند اما ارائهٔ فرمول دقیق برای محاسبهٔ سرعت و تعیین اندازهٔ آن، به کمک مفاهیم ریاضی انجام شده‌است. با استفاده از معادلهٔ حرکت و مشتق‌گیری از آن می‌توان معادلهٔ سرعت یک متحرک را به‌دست آورد. امروزه تجهیزات پیشرفته‌ای برای تعیین سرعت وجود دارد، با استفاده از این وسایل سرعت وسیلهٔ نقلیه کنترل و شرایط برای رانندگی ایمن فراهم می‌شود.

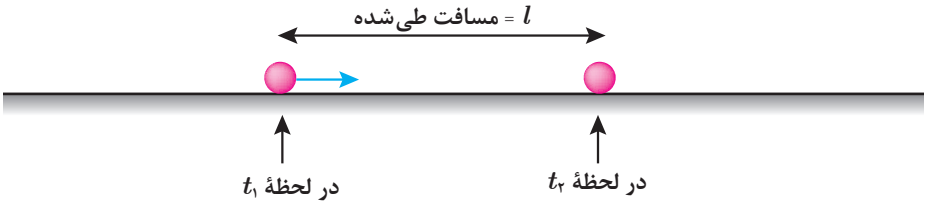
۱ــ مشتق تابع‌ها

درس امروز ما با موضوع «مسئلهٔ نیوتن در محاسبهٔ سرعت اجسام متحرک» شروع شد.

دبیر گفت: نیوتن فیزیکدانی بود که حدوداً سیصد سال پیش زندگی می‌کرد. آن زمان کسی نمی‌دانست سرعت اجسام متحرک را چگونه می‌توان محاسبه کرد. چه کسی می‌داند سرعت متحرکی که به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند (حرکت با سرعت ثابت)، چگونه اندازه‌گیری می‌شود؟

سعید گفت: اندازه‌گیری سرعت متحرک‌هایی که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، ساده است؛ کافی است مسافت طی‌شده توسط متحرک (l) در یک بازهٔ زمانی را پیدا کنیم و آن را بر زمان سپری شده $(t_۲ - t_۱)$ تقسیم کنیم.

$$\text{سرعت متحرک} = v = \frac{l}{t_۲ - t_۱}$$



دبیر گفت: آیا فرقی می‌کند که در کدام بازهٔ زمانی مسافت طی‌شده را حساب کنیم؟

سعید گفت: خیر، فرقی نمی‌کند. با توجه به اینکه سرعت ثابت است، تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان سپری‌شده در هر بازهٔ زمانی، مقدار ثابتی است که همان سرعت متحرک است.

دبیر گفت: البته در بیشتر موارد، متحرک‌ها سرعت ثابت ندارند و سرعت آنها در حال تغییر است و در لحظه‌های مختلف، سرعت‌های متفاوتی دارند. مسئلهٔ اصلی نیوتن، محاسبهٔ سرعت لحظه‌ای چنین متحرک‌هایی بود. اگر شما به جای نیوتن بودید این مسئله را چگونه حل می‌کردید؟

حمید گفت: برای هر متحرکی (با سرعت ثابت یا غیرثابت) می‌توان مسافت طی‌شده در یک بازهٔ زمانی را به‌دست آورد. من فکر می‌کنم با تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان سپری شده، می‌توان سرعت متحرک را به‌دست آورد.

سعید گفت: اگر در یک بازهٔ زمانی، متحرک با سرعت‌های مختلفی حرکت کرده باشد، در این صورت تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان سپری‌شده، کدام‌یک از آن سرعت‌ها را نشان خواهد داد؟

دبیر گفت: در فیزیک، نسبت مسافت طی‌شده در یک بازهٔ زمانی، به زمان حرکت را **سرعت متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی** می‌نامند.

حمید گفت: آیا می‌توان گفت که سرعت متوسط محاسبه شده با این روش، همان سرعت لحظه‌ای متحرک است؟

دبیر گفت: خیر، سرعت متوسط مربوط به هیچ لحظهٔ خاصی نیست و در یک بازهٔ زمانی محاسبه می‌شود. فقط در سرعت ثابت، سرعت متوسط همان سرعت متحرک در هر لحظه است.

سعید گفت: اگر طول بازهٔ زمانی (زمان سپری‌شده) را کوچک در نظر بگیریم، آیا می‌توان گفت که سرعت متحرک در هر لحظه از آن بازه، تقریباً با سرعت متوسط در همان بازه برابر است؟

دبیر گفت: بله، ایدهٔ خوبی است، ولی مسئلهٔ ما یافتن مقدار تقریبی سرعت لحظه‌ای نیست، بلکه می‌خواهیم مقدار دقیق آن را به‌دست آوریم.

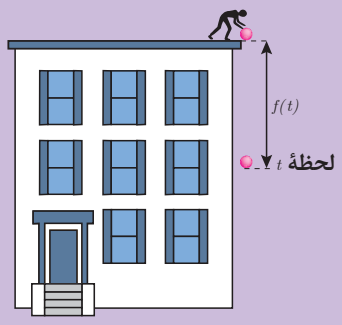
حمید گفت: فکر می‌کنم که اگر بازهٔ زمانی را خیلی کوچک کنیم، می‌توانیم تقریب بهتری از سرعت لحظه‌ای به‌دست آوریم.

دبیر گفت: آیا منظور شما آن است که عمل حدگیری انجام دهیم؟

حمید گفت: بله. فکر می‌کنم از این طریق می‌توان این مسئله را حل کرد.

دبیر گفت: بهتر است این پیشنهاد را در فعالیت زیر بررسی کنیم.

فعالیت ۱



توپی را از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۱۶ متر رها می‌کنیم. فاصلهٔ این توپ تا نقطهٔ رها شدن در هر لحظهٔ t با تابع $f(t)=۵t^۲$ محاسبه می‌شود که در آن t زمان برحسب ثانیه و $f(t)$ فاصله برحسب متر است.

۱ $f(۱)$ چه معنایی دارد؟ آن را محاسبه کنید.

۲ اگر h عددی کوچک و مثبت باشد، $f(۱+h)$ چه معنایی دارد؟ آن را به‌دست آورید.

۳ توپ در بازهٔ زمانی $[۱,۱+h]$ چند متر حرکت کرده است و این حرکت چند ثانیه طول کشیده است؟

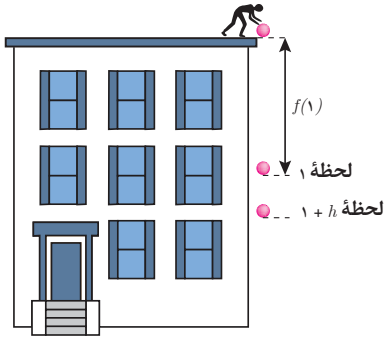
۴ سرعت متوسط توپ در بازهٔ زمانی $[۱,۱+h]$ تابعی از h است. این تابع را با $v(h)$ نشان دهید. قانون تابع $v(h)$ را بنویسید.

۵ جدول تابع $v(h)$ را به ازای برخی hهای کوچک و مثبت کامل کنید.

h	۰ ←	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$v(h)$	? ←	...	...	۱۰/۰۵	۱۰/۵

۶ $\lim\limits_{h\to ۰} v(h)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۷ سرعت توپ در لحظهٔ $t=۱$ چقدر است؟



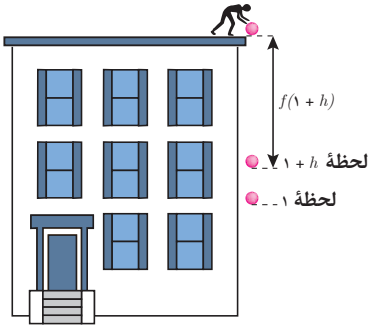
تابع $f(t)$ نشان‌دهندهٔ فاصله توپ از نقطهٔ رها شدن است.
برای یک مقدار مثبت و کوچک h:

- عدد $۱+h$ زمانی بعد از $t=۱$ و نزدیک به آن را نشان می‌دهد.
- $[۱,۱+h]$ بازه‌ای از زمان‌های بعد از $t=۱$ و نزدیک به آن است.

با پاسخ به سؤالات (۱) تا (۴) سرعت متوسط این توپ در این بازه به‌دست می‌آید. طول زمان حرکت توپ در بازهٔ $[۱,۱+h]$ برابر h و مسافت طی‌شده برابر $f(۱+h)-f(۱)$ است. بنابراین، سرعت متوسط توپ در این بازه به صورت $v(h)=\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ است. با نزدیک کردن h به صفر، سرعت متوسط توپ به سرعت لحظه‌ای توپ در $t=۱$ نزدیک می‌شود. بنابراین، $\lim\limits_{h\to ۰} v(h)$ را می‌توان سرعت لحظه‌ای توپ در لحظهٔ $t=۱$ در نظر گرفت.

برای یافتن سرعت لحظه‌ای توپ در $t=۱$، باید به زمان‌های قبل از $t=۱$ نیز توجه کنیم[۱]. برای یک مقدار منفی و کوچک h، عدد $۱+h$ زمانی قبل از $t=۱$ و نزدیک به آن را نشان می‌دهد $(۱+h<۱)$. $[۱+h,۱]$ بازه‌ای از زمان‌های قبل از $t=۱$ و نزدیک به آن است. زمان حرکت توپ در این بازه برابر

۱ـ اعداد قبل از ۱ را می‌توان به صورت $۱+h$ نوشت که $h<۰$.



است با: $۱-(۱+h)=-h$. با توجه به آنکه h منفی است، $-h$ مثبت است. مسافت طی‌شده در این بازه برابر است با $f(۱)-f(۱+h)$. بنابراین، سرعت متوسط در این بازه برابر است با:

$$v(h)=\frac{f(۱)-f(۱+h)}{-h}=\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$$

در این حالت نیز حد این کسر وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، برابر سرعت لحظه‌ای توپ در $t=۱$ است؛ بنابراین سرعت توپ در لحظهٔ $t=۱$ برابر است با حد دوطرفهٔ زیر:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$$

فرض کنید f تابعی دلخواه باشد. برای یک نقطه مانند a از دامنهٔ این تابع، اگر h عددی کوچک باشد، تفاضل $f(a+h)-f(a)$، میزان تغییر مقادیر تابع f را وقتی متغیر از a به $a+h$ تغییر می‌کند، نشان می‌دهد. میزان تغییر مقادیر متغیر برابر h است. نسبت تغییرات مقادیر تابع به تغییرات مقادیر متغیر عبارت است از:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد این کسر را وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، در صورت وجود، **مشتق f در a** می‌نامند و با $f'(a)$ (خوانده می‌شود f پریم a) نشان می‌دهند. یعنی:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

کسر $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نشان‌دهندهٔ میزان تغییرات مقادیر تابع نسبت به میزان تغییرات متغیر در نقطهٔ a است. بنابراین، حد این کسر وقتی h به صفر میل می‌کند، سرعت تغییرات مقادیر تابع را نسبت به تغییرات مقادیر متغیر در نقطهٔ a نشان می‌دهد. پس، مشتق یک تابع در یک نقطه، نشان‌دهندهٔ سرعت تغییرات مقادیر تابع نسبت به تغییرات مقادیر متغیر در آن نقطه است.

تعریف

مشتق تابع در یک نقطه

فرض کنید f تابعی با دامنهٔ D_f باشد. برای نقطه‌ای مانند a از دامنهٔ این تابع، حد زیر را در صورت وجود، **مشتق f در a** می‌نامند و با نماد $f'(a)$ نشان می‌دهند.

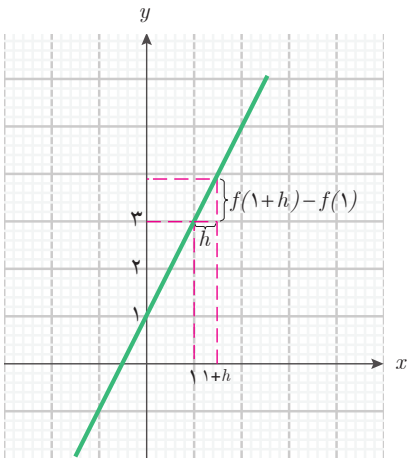
$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

در این حالت می‌گوییم f در a مشتق‌پذیر است. اما، اگر حد بالا وجود نداشته باشد، می‌گوییم f در a مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۱

مشتق تابع خطی $f(x)=۲x+۱$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقاط $x=۱$، $x=۳$ و نقطهٔ دلخواه a حساب کنید.

$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۱+h)+۱-(۲\times ۱+۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲h}{h}=\lim_{h\to ۰}۲=۲$$



برای داشتن درک بهتر از نسبت تغییرات مقادیر تابع به تغییرات مقادیر متغیر، این تغییرات را روی نمودار این تابع بررسی می‌کنیم:

همان‌طور که در نمودار دیده می‌شود، نسبت تغییرات مقادیر تابع به تغییرات متغیر در هر بازهٔ $[۱,۱+h]$، همان شیب خط است. بنابراین، مشتق این تابع خطی در نقطهٔ $x=۱$ با شیب این خط برابر است.

مشتق این تابع در نقطهٔ $x=۳$ به صورت زیر است.

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲(۳+h)+۱)-(۲\times ۳+۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲h}{h}=\lim_{h\to ۰}۲=۲$$

به‌طور کلی در نقطهٔ دلخواه a، مشتق این تابع به صورت زیر است:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲(a+h)+۱)-(۲a+۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲h}{h}=\lim_{h\to ۰}۲=۲$$

بنابراین، مشتق این تابع در همهٔ نقاط، مقدار ۲ می‌باشد.

مثال ۲

مشتق تابع خطی $g(x)=-۴x+۷$ را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

$$g'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\big(-۴(a+h)+۷\big)-(-۴a+۷)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۴h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-۴)=-۴$$

در این مثال‌ها دیدیم مشتق این تابع‌های خطی در هر نقطه، همان شیب خط است. به‌طور کلی **مشتق هر تابع خطی در هر نقطه، مقدار ثابتی است که همان شیب نمودار آن تابع خطی است**. برای دیدن درستی این مطلب، تابع خطی دلخواه $g(x)=mx+b$ را با شیب m در نظر بگیرید. مشتق این تابع را در یک نقطهٔ دلخواه a به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$g'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\big(m(a+h)+b\big)-(ma+b)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{ma+mh+b-ma-b}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{mh}{h}=\lim_{h\to ۰}m$$

با توجه به اینکه m عددی ثابت است، داریم: $\lim_{h\to ۰}m=m$ پس: $g'(a)=m$

این ویژگی، به معنای آن است که سرعت تغییرات (افزایش یا کاهش) مقادیر تابع خطی در همهٔ نقاط، یکسان است و برابر همان شیب نمودار آن تابع خطی است.

مثال ۳

مشتق تابع ثابت $g(x)=۵$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a حساب کنید.

$$g'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۵-۵}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰}{h}=\lim_{h\to ۰}۰=۰$$

مشتق این تابع ثابت در همهٔ نقاط صفر است. برای هر تابع ثابت دیگری نیز این محاسبه قابل تکرار است. بنابراین، **مشتق هر تابع ثابت در هر نقطه صفر است**. این نتیجه قابل پیش‌بینی بود، زیرا مشتق یک تابع نشان‌دهندهٔ سرعت تغییرات تابع نسبت به تغییرات متغیر در هر نقطه است و تابع ثابت هیچ‌گونه تغییری ندارد؛ پس طبیعی است که مشتق آن صفر باشد.

مثال ۴

مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ $x=۰$ بررسی کنید.

برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=۰$، باید وجود حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{|۰+h|-|۰|}{h}$ را بررسی کنیم.

در محاسبهٔ این حد، لازم است وضعیت $|h|$ را بشناسیم، یعنی علامت h باید مشخص باشد، بنابراین حد چپ و حد راست این تابع کسری را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{|۰+h|-|۰|}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}۱=۱$$

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{|۰+h|-|۰|}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to ۰^-}-۱=-۱$$

از آنجا که حد چپ و حد راست $\frac{|۰+h|-|۰|}{h}$ در صفر برابر نیستند، این تابع وقتی $h\to ۰$، حد ندارد. بنابران تابع f در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

دیدیم تابع $f(x)=|x|$ در $x=۰$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین، **ممکن است تابعی در نقطه‌ای از دامنهٔ خود پیوسته باشد، ولی در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد.** اما می‌توان ثابت کرد که **اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، حتماً در آن نقطه پیوسته خواهد بود.**

مثال ۵

تابع دو ضابطه‌ای زیر را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=۳$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+x & x\le ۳\\ x+۹ & ۳<x\end{cases}$$

باید وجود $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ را بررسی کنیم. داریم $f(۳)=۱۲$ ولی برای محاسبهٔ $f(۳+h)$ چون h ممکن است مثبت یا منفی باشد و قانون f در سمت چپ و راست ۳ متفاوت است، لازم است

حد چپ و حد راست $\frac{f(۳+h)-۱۲}{h}$ را وقتی h به سمت صفر میل می‌کند جداگانه به‌دست آوریم.

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۳+h)-۱۲}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{\left((۳+h)^۲+(۳+h)\right)-۱۲}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۹+۶h+h^۲+۳+h-۱۲}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۷h+h^۲}{h}=\lim_{h\to ۰^-}(۷+h)=۷$$

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۳+h)-۱۲}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{\left((۳+h)+۹\right)-۱۲}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}۱=۱$$

این محاسبه نشان می‌دهد $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۱)}{h}$ وجود ندارد و تابع f در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۶

تابع دو ضابطه‌ای زیر را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=۱$ بررسی کنید.

$$g(x)=\begin{cases}-۲x^۲+۱۰x & x\le ۱\\ ۶x+۲ & ۱<x\end{cases}$$

باید وجود $\lim_{h\to ۰}\frac{g(۱+h)-g(۱)}{h}$ را بررسی کنیم. داریم $g(۱)=۸$ ولی برای محاسبهٔ $g(۱+h)$ چون h ممکن است مثبت یا منفی باشد و قانون g در سمت چپ و راست ۱ متفاوت است، لازم است حد چپ و حد راست $\frac{g(۱+h)-۸}{h}$ را وقتی h به سمت صفر میل می‌کند جداگانه به‌دست آوریم.

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{g(۱+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{\left(-۲(۱+h)^۲+۱۰(۱+h)\right)-۸}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^-}\frac{-۲-۴h-۲h^۲+۱۰+۱۰h-۸}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰^-} \frac{۶h - ۲h^۲}{h} = \lim_{h \to ۰^-} \left(۶ - ۲h\right) = ۶$$

$$\lim_{h \to ۰^+} \frac{g(۱+h) - ۸}{h} = \lim_{h \to ۰^+} \frac{\left(۶(۱+h) + ۲\right) - ۸}{h} = \lim_{h \to ۰^+} \frac{۶ + ۶h - ۶}{h} = \lim_{h \to ۰^+} ۶ = ۶$$

این محاسبه نشان می‌دهد تابع g در $x = ۱$ مشتق‌پذیر است و $g'(۱) = ۶$.

کار در کلاس ۱

مشتق تابع $f(x) = x^۲ + ۴x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ $x = ۲$ بیابید.

مسائل

۱ مشتق تابع‌های زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ $x=۴$ به‌دست آورید.

الف) $f(x)=۲$

ب) $g(x)=-۳x+۴$

پ) $u(x)=x-x^۲$

۲ مشتق تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را در نقطهٔ $x=۲$ به‌دست آورید.

۳ تابع دوضابطه‌ای f را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و قانون زیر در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x^۲-۱۰ & x\leq ۳ \\ -x+۱۱ & ۳<x \end{cases}$$

پیوستگی و مشتق‌پذیری این تابع را در $x=۳$ بررسی کنید.

۴ نشان دهید تابع دوضابطه‌ای زیر در $x=-۱$ مشتق‌پذیر است. سپس مشتق آن را در این نقطه به‌دست آورید.

$$v(x)=\begin{cases} ۴x^۲+۲x-۴ & x\leq -۱ \\ -۶x-۸ & -۱<x \end{cases}$$

۵ تابع دوضابطه‌ای g را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به صورت زیر در نظر بگیرید.

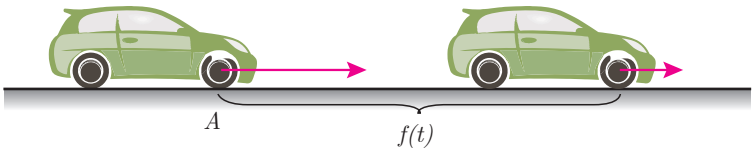
$$g(x)=\begin{cases} x^۲-x+۱ & x\leq ۰ \\ ax+۱ & ۰<x \end{cases}$$

الف) نشان دهید g در $x=۰$ پیوسته است.

ب) a را طوری تعیین کنید که g در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت $g'(۰)$ چقدر خواهد بود؟

۲ــ مشتق و سرعت متحرک‌ها

برای آزمایش ترمز خودروها، آنها را با سرعت‌های متفاوت به حرکت درمی‌آورند و سپس با ترمز کردن مدت زمان لازم برای متوقف شدن و مسافت طی‌شده (طول خط ترمز) را اندازه‌گیری می‌کنند. برای مثال، فرض کنید ماشینی با سرعت ثابت ۲۰ متر بر ثانیه (معادل ۷۲ کیلومتر بر ساعت) در حال حرکت است.



در لحظهٔ $t=۰$ در نقطهٔ A راننده پدال ترمز را فشار می‌دهد و خودرو پس از طی مسافتی، بعد از چند ثانیه متوقف می‌شود. اگر مسافت طی‌شده توسط خودرو (بر حسب متر) از نقطهٔ A به عنوان تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) با قانون $f(t)=-۲t^۲+۲۰t$ بیان شده باشد، طبق فعالیت (۱)، سرعت این خودرو پس از ۲ ثانیه، همان مشتق تابع در لحظهٔ $t=۲$، یعنی $f'(۲)$ است.

$$f'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\left(-۲(۲+h)^۲+۲۰(۲+h)\right)-(-۲\times ۲^۲+۲۰\times ۲)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲h^۲-۸h+۲۰h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-۲h-۸+۲۰)=۱۲$$

بنابراین، سرعت این خودرو پس از ۲ ثانیه از ۲۰ متر بر ثانیه به ۱۲ متر بر ثانیه کاهش پیدا می‌کند. سرعت این خودرو پس از t ثانیه برابر $f'(t)$ است.

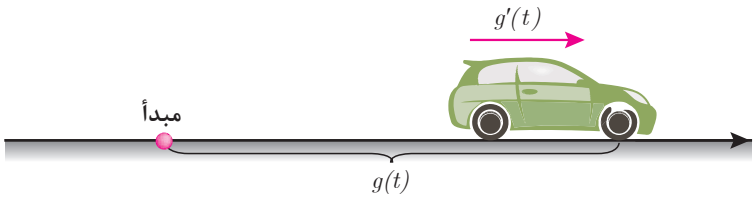
$$f'(t)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\left(-۲(t+h)^۲+۲۰(t+h)\right)-(-۲t^۲+۲۰t)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲h^۲-۴th+۲۰h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-۲h-۴t+۲۰)=-۴t+۲۰$$

به کمک تابع $f'(t)$ می‌توانیم تشخیص دهیم، خودرو در چه زمانی متوقف می‌شود و تا محل توقف چند متر را طی می‌کند. سرعت خودرو پس از t ثانیه به اندازه $f'(t)=-۴t+۲۰$ (متر بر ثانیه)

خواهد بود. توقف خودرو به معنای صفر شدن سرعت آن است. بنابراین باید لحظه‌ای را بیابیم که $f'(t)=-۴t+۲۰=۰$. از حل این معادله مشخص می‌شود که سرعت خودرو به ازای $t=۵$ صفر می‌شود. یعنی خودرو پس از ۵ ثانیه متوقف می‌شود. برای به‌دست آوردن مسافت طی‌شده توسط خودرو از تابع f استفاده می‌کنیم. داریم: $f(۵)=۵۰$، بنابراین، خودرو پس از طی ۵۰ متر می‌ایستد.
توجه داشته باشید قانون این تابع، فقط از زمان شروع ترمز تا زمانی که خودرو توقف می‌کند، اعتبار دارد؛ یعنی دامنهٔ این تابع، بازهٔ $[۰,۵]$ است.

به‌طور کلی، اگر متحرکی روی یک مسیر مستقیم (شکل زیر) حرکت کند، با در نظر گرفتن یک محور روی مسیر حرکت، می‌توانیم مکان این متحرک را در هر لحظهٔ t در یک بازهٔ زمانی خاص، با مقدار $g(t)$ نشان دهیم. در این صورت g را **تابع حرکت** این متحرک می‌نامند.



مشتق تابع حرکت g در هر لحظهٔ t نشان‌دهندهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ t است. یعنی سرعت متحرک در لحظهٔ t برابر $g'(t)$ است.

یک متحرک ممکن است در جهت محور یا در خلاف جهت محور حرکت کند. این نکته را از علامت مشتق تابع حرکت می‌توان تشخیص داد. **مثبت بودن مشتق تابع حرکت در یک لحظه، نشان می‌دهد که متحرک در آن لحظه در جهت مثبت محور در حال حرکت است و منفی بودن مشتق تابع حرکت در یک لحظه، نشان می‌دهد که متحرک در آن لحظه در جهت منفی محور در حال حرکت است. صفر شدن مشتق در یک لحظهٔ خاص به معنای آن است که متحرک در آن لحظه، توقف لحظه‌ای می‌کند.**

مثال ۷

متحرکی روی یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند و تابع حرکت آن $g(t)=t^۲-۲t$ است. زمان را بر حسب ثانیه و فاصله را بر حسب متر در نظر بگیرید. این حرکت در بازهٔ زمانی $[۰,۴]$ انجام می‌شود. این متحرک از چه نقطه‌ای به چه نقطه‌ای می‌رود. تغییرات سرعت این متحرک را در این بازهٔ زمانی توصیف کنید.

با توجه به اینکه $g(۰)=۰$ و $g(۴)=۸$، این متحرک از مبدأ حرکت می‌کند و نهایتاً به ۸ متر جلوتر می‌رسد. برای درک چگونگی حرکت، سرعت این متحرک را در لحظهٔ دلخواه t به‌دست می‌آوریم. داریم $g'(t)=۲t-۲$. تغییرات g' و علامت آن و شیوه حرکت متحرک در جدول زیر مشخص شده است.

t	۰		۱		۴
$g'(t)$	-۲	منفی	۰	مثبت	۶
شیوه حرکت متحرک		حرکت رو به عقب	ایست لحظه‌ای	حرکت رو به جلو	

این جدول نشان می‌دهد: متحرک در ۱ ثانیه اول رو به عقب حرکت می‌کند، سپس ایست لحظه‌ای می‌کند. ۳ ثانیه بعد رو به جلو حرکت می‌کند. از آنجا که $g(۱)=-۱$، متحرک در ۱ ثانیه اول ۱ متر رو به عقب حرکت کرده است و در آن نقطه ایستاده است و با تغییر جهت، رو به جلو حرکت کرده است. از آنجا که $g(۴)=۸$، این متحرک از نقطه ۱- به نقطه ۸ می‌رود.

در مورد تابع حرکت متحرک‌هایی مانند $g(t)$، دیدیم مشتق آنها در یک نقطهٔ دلخواه، تابع جدیدی می‌سازد که مقدار آن در هر لحظهٔ t به صورت $g'(t)$ است. این تابع جدید را **مشتق تابع g** می‌نامند. به‌طور کلی مشتق یک تابع، به عنوان یک تابع جدید، به شکل زیر تعریف می‌شود:

تعریف

مشتق تابع

فرض کنید تابع f در تمام نقاط دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد. در این صورت مشتق آن در نقطهٔ دلخواه x با $f'(x)$ نشان داده می‌شود. به این ترتیب، تابع جدید f' با همان دامنهٔ f به‌دست می‌آید که آن را مشتق تابع f می‌نامند.

مثال ۸

مشتق تابع $f(x)=kx^{۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

مشتق این تابع را در نقطهٔ دلخواه x به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{k(x+h)^{۲}-kx^{۲}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{kx^{۲}+۲kxh+kh^{۲}-kx^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲kx+kh)=۲kx$$

بنابراین برای تابع $f(x)=kx^{۲}$ داریم $f'(x)=۲kx$.

مثال ۹

مشتق تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را به‌دست آورید.

مشتق این تابع را در نقطهٔ دلخواه x از دامنهٔ تابع حساب می‌کنیم. چون x در دامنهٔ تابع است داریم: $x\neq ۰$.

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{x+h}-\frac{۱}{x}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-h}{x(x+h)h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{x(x+h)}=-\frac{۱}{x^{۲}}$$

بنابراین برای تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ داریم: $g'(x)=-\frac{۱}{x^{۲}}$.

کار در کلاس ۲

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) تابع $f(x)=۳x^۲-۴x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$.

ب) تابع $g(x)=\frac{۱}{x^۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$.

۲ متحرکی روی یک مسیر مستقیم با تابع حرکت $f(x)=-۴t^۲+۱۶t+۱$ در بازهٔ زمانی $[۰,۶]$ در حال حرکت است.

الف) سرعت این متحرک را در لحظهٔ دلخواه t از دامنهٔ تابع حرکت به‌دست آورید.

ب) این متحرک در لحظهٔ $t=۱$ در چه جهتی (جهت محور حرکت یا خلاف آن) حرکت می‌کند؟

پ) این متحرک در لحظهٔ $t=۴$ در چه جهتی حرکت می‌کند؟

ت) آیا می‌توان لحظه‌ای را یافت که متحرک در آن لحظه توقف کند؟

پ) این متحرک در چه زمان‌هایی رو به عقب (خلاف جهت محور حرکت) حرکت می‌کند؟

مسائل

۱ مشتق تابع $g(x)=۲x-۳x^۲$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

۲ مشتق تابع $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را به‌دست آورید.

۳ تابع حرکت متحرکی روی محور به‌صورت $g(t)=t^۲-۲۰t+۱$ با دامنهٔ $[۰,۲۰]$ است. در اینجا t زمان بر حسب ثانیه و $g(t)$ مختص مکانی متحرک بر حسب متر است.

الف) سرعت متحرک را در لحظهٔ دلخواه t (در دامنهٔ تابع حرکت) به‌دست آورید.

ب) متحرک در لحظهٔ $t=۰$ در کدام مکان قرار دارد و سرعت آن در این لحظه چقدر است و در کدام جهت در حال حرکت است؟

پ) متحرک پس از چند ثانیه از شروع حرکت، می‌ایستد و در کدام مکان می‌ایستد؟

ت) متحرک در لحظهٔ $t=۲۰$ در کدام مکان قرار دارد و سرعت آن در این لحظه چقدر است و در کدام جهت در حال حرکت است؟

ث) چگونگی حرکت متحرک را در این بازهٔ زمانی توصیف کنید.

۳ــ تعبیر هندسی مشتق

گفتگو

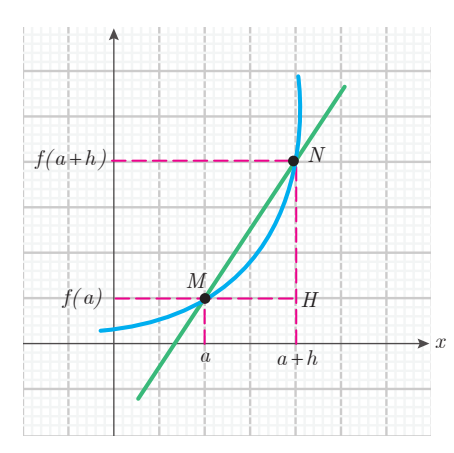
پس از یادگیری مشتق تابع‌ها، سؤال مهمی برای مسعود پیش آمد.

مسعود گفت: در گذشته نمودار یک تابع به ما کمک می‌کرد تا ویژگی‌های تابع (مانند حد، پیوستگی و غیره) را بهتر درک کنیم. آیا برای درک بهتر مشتق نیز می‌توانیم از نمودار استفاده کنیم؟

دبیر گفت: بله. مشتق یک تابع، تعبیر هندسی مهمی روی نمودار آن تابع دارد. با انجام فعالیت زیر می‌توانید تعبیر هندسی مشتق یک تابع را از روی نمودار آن درک کنید.

فعالیت ۲

در شکل روبه‌رو، نمودار یک تابع مانند f رسم شده است. روی نمودار، دو نقطهٔ M و N در نزدیکی هم انتخاب شده‌اند. طول نقطهٔ M را a و طول نقطهٔ N را $a+h$ در نظر بگیرید؛ h عددی مثبت است.



۱ مختصات نقطهٔ M را برحسب a و مختصات نقطهٔ N را برحسب a و h بنویسید.

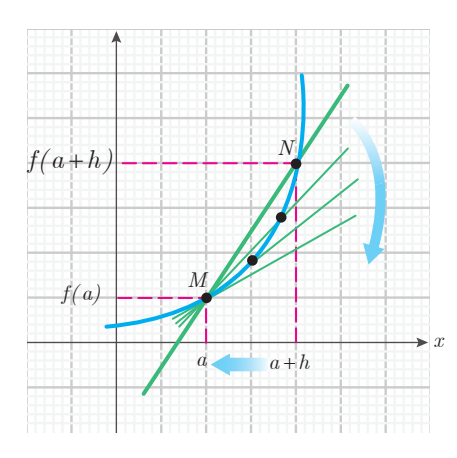
۲ طول پاره‌خط‌های MH و NH را برحسب مختصات M و N بنویسید.

۳ شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ M و N را بنویسید.

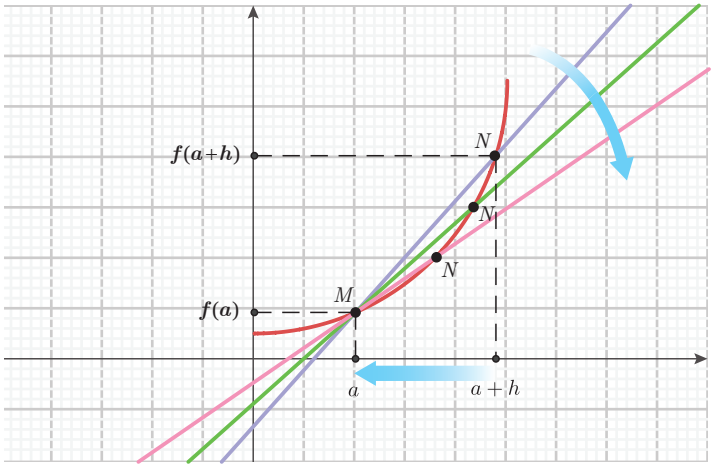
۴ چه ارتباطی بین شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ M و N و مشتق تابع f در نقطهٔ a مشاهده می‌کنید؟

۵ با تغییر h، مکان نقطهٔ N روی نمودار تابع تغییر می‌کند. اگر h را به صفر نزدیک کنیم، نقطهٔ N به چه نقطه‌ای نزدیک می‌شود؟

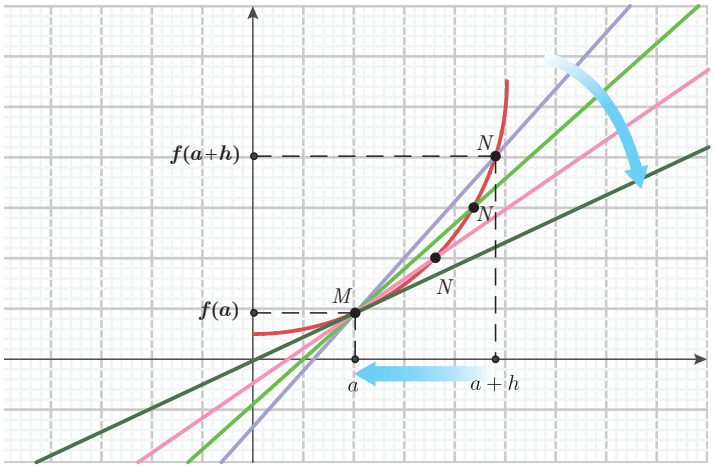
۶ اگر h را به صفر نزدیک کنیم، خط گذرنده از دو نقطهٔ M و N نسبت به نمودار تابع، چه حالتی پیدا می‌کند؟ با توجه به بند (۴)، شیب این خط به چه عددی نزدیک می‌شود؟



در فعالیت قبل، $M = \begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ نقطه‌ای ثابت روی نمودار تابع f در نظر گرفته شده است. به ازای یک عدد کوچک و مثبت h، نقطهٔ $N = \begin{bmatrix} a+h \\ f(a+h) \end{bmatrix}$ نقطه‌ای دیگر روی نمودار f است که نزدیک M قرار دارد. در شکل زیر خط گذرنده از M و N رسم شده است.



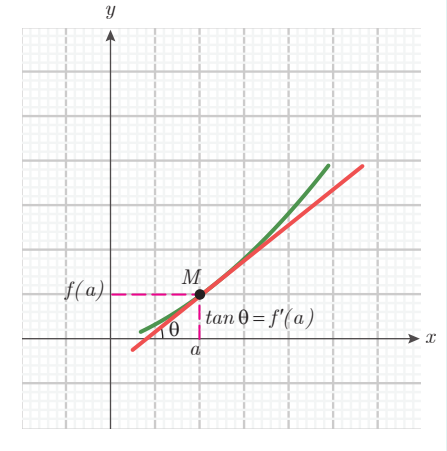
شکل بالا نشان می‌دهد که مقدار $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ همان شیب خط MN است. با نزدیک شدن h به صفر، نقطهٔ N روی نمودار تابع، به نقطهٔ M نزدیک می‌شود و خط MN به خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ M نزدیک می‌شود.



با توجه به نمودار بالا، شیب خط مماس همان حد شیب خط MN در $h=0$ (یعنی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$) است. از طرف دیگر، این حد، همان مشتق تابع f در a است؛ یعنی مشتق تابع f در a، برابر شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $M=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ است.

مشتق و شیب خط مماس بر نمودار تابع

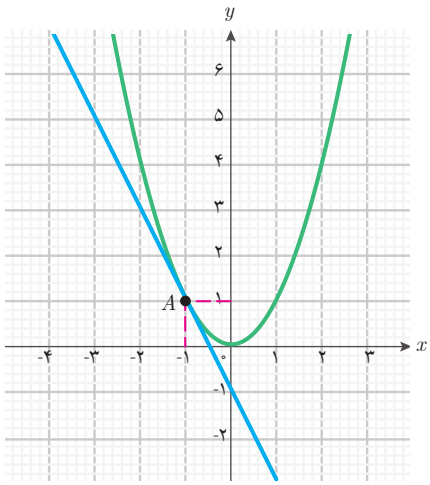
فرض کنید تابع f در نقطهٔ a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، $f'(a)$ نشان‌دهندهٔ شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطهٔ $M=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ است. از آنجا که شیب هر خط همان تانژانت زاویهٔ بین خط و محور طول‌هاست، طبق شکل داریم: $f'(a)=\tan\theta$



مثال ۱۰

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ را در نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}$ بیابید.

شیب خط مماس در این نقطه، برابر $f'(-۱)$ است. می‌دانیم $f'(x)=۲x$، بنابراین $f'(-۱)=-۲$ و شیب خط مماس برابر ۲- است. با توجه به آنکه معادلهٔ یک خط با شیب m به صورت $y=mx+b$ است، معادلهٔ خط مماس به صورت $y=-۲x+b$ خواهد بود. برای یافتن b می‌دانیم این خط از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}$ می‌گذرد. پس مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند و داریم: $۱=-۲\times(-۱)+b$ که نتیجه می‌دهد $b=-۱$. بنابراین معادلهٔ خط مماس عبارت است از: $y=-۲x-۱$.
به کمک جئوجبرا نمودار تابع f و این خط را رسم می‌کنیم که به‌صورت زیر خواهد شد.



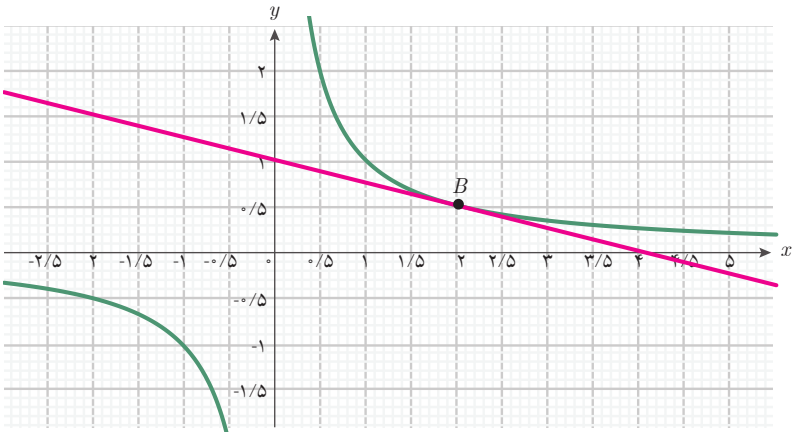
مثال ۱۱

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را در نقطهٔ $B=\begin{bmatrix}۲\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ بیابید.

شیب خط مماس در این نقطه، برابر $g'(۲)$ است. می‌دانیم $g'(x)=\frac{-۱}{x^{۲}}$. بنابراین، $g'(۲)=-\frac{۱}{۴}$ و معادلهٔ خط مماس به صورت $y=-\frac{۱}{۴}x+b$ است. برای یافتن b می‌دانیم این خط از نقطهٔ

$B=\begin{bmatrix}۲\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ می‌گذرد. پس، $\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}\times ۲+b$ که نتیجه می‌دهد $b=۱$. بنابراین معادلهٔ خط مماس عبارت است از: $y=-\frac{۱}{۴}x+۱$.

به کمک جئوجبرا نمودار تابع f و این خط را رسم می‌کنیم، که به شکل زیر خواهد بود.

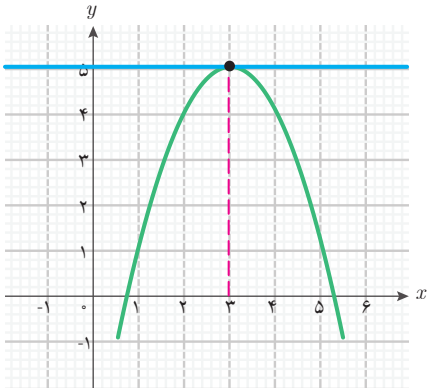


مثال ۱۲

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=-x^۲+۶x-۴$ را در نقطهٔ به طول ۳ روی نمودار تابع بیابید.

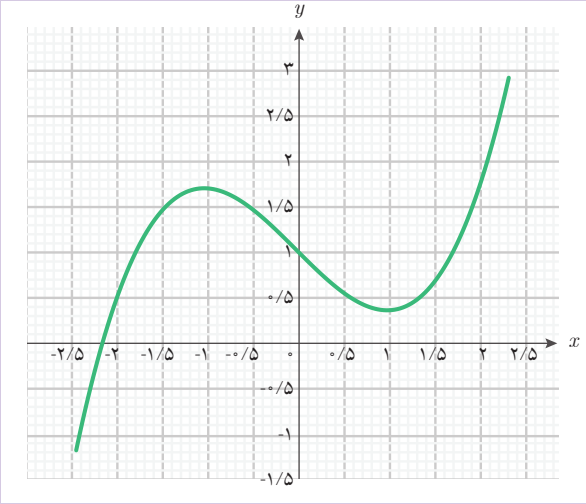
از آنجا که $g(۳)=۵$، نقطهٔ مورد نظر روی نمودار دارای مختصات $\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}$ است. شیب خط مماس در این نقطه، برابر $g'(۳)$ است. با محاسبهٔ مشتق این تابع داریم: $g'(x)=-۲x+۶$، بنابراین: $g'(۳)=۰$.

وقتی شیب خط مماس صفر باشد، یعنی خط مماس با محور طول‌ها موازی است. پس، معادلهٔ خط مماس به صورت $y=b$ است. از آنجا که این خط از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}$ می‌گذرد، نتیجه می‌شود: $b=۵$. پس معادلهٔ خط مماس به صورت $y=۵$ است. نمودار این تابع و خط مماس به‌صورت شکل روبه‌رو است:



کار در کلاس ۳

الف) نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x+۱$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به شکل زیر است. خط مماس بر این نمودار را در نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ \frac{۵}{۳} \end{bmatrix}$ با خط‌کش رسم کنید.



ب) شیب خطی را که رسم کرده‌اید، بیابید.

پ) با مشتق‌گیری از تابع f در $x=۲$ شیب خط مماس بر نمودار f را در $\begin{bmatrix} ۲ \\ \frac{۵}{۳} \end{bmatrix}$ بیابید و با شیب خطی که خود رسم کرده‌اید مقایسه کنید. در صورت وجود اختلاف، دلیل آن را بیان کنید.

مسائل

۱ تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۴x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. معادلهٔ خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۶ \end{bmatrix}$ به‌دست آورید. با رسم نمودار این تابع و نمودار خط مماس، درستی معادلهٔ خط مماس را بررسی کنید.

۲ تابع $f(x)=\frac{۲}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را درنظر بگیرید. آیا نقطه‌ای هست که خط مماس بر نمودار این تابع، موازی محور طول‌ها باشد؟ چرا؟

۳ تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}+۲x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

الف) به کمک یک لغزنده در جئوجبرا، خط‌هایی به معادلهٔ $y=۳x+b$ را به ازای مقادیر مختلف b رسم کنید. آیا یکی از این خط‌ها بر نمودار تابع f مماس می‌شود؟

ب) با استفاده از مشتق f نقطه‌ای را روی نمودار این تابع به‌دست آورید که خط مماس در آن نقطه موازی خط $y=۳x$ باشد.

استانداردهای ارزشیابی پودمان ۴

عنوان پودمان	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	استاندارد عملکردی (کیفیت)	سطوح انتظارات	شاخص تحقق	نمره
پودمان چهارم: درک مفهوم مشتق	انجام محاسبات مشتق تابع در یک نقطه با حدگیری	حل مسائل مرتبط با مشتق تابع‌ها	بالاتر از حد انتظار	□ مدل‌سازی و حل مسائل زندگی واقعی (مسائل حل‌نشده در کلاس و کتاب درسی) مرتبط با مشتق تابع‌ها	۳
			حد انتظار	□ حل مسائل مشابه مسائل حل شده در کلاس و کتاب درسی مرتبط با مشتق تابع‌ها	۲
	تعیین، توصیف و تفسیر سرعت لحظه‌ای با استفاده از مشتق تابع‌ها		پایین‌تر از حد انتظار	□ درک و کاربرد مفاهیم و روابط برای پیدا کردن سرعت لحظه‌ای متحرک □ شیب خط مماس بر نمودار در نقطه مشخص شده به کمک مشتق	۱
نمره مستمر از ۵:					
نمره واحد یادگیری از ۳:					
نمره واحد یادگیری از ۲۰:					