

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَجِّلْ فَرَجَهُمْ



ریاضی

پایہ ہشتم

دورہ اول متوسط

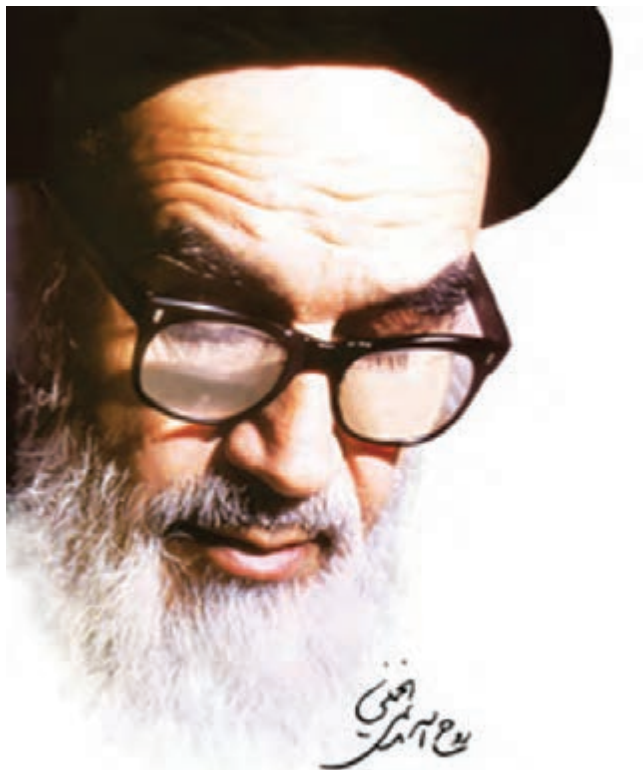


وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی



نام کتاب :	ریاضی - پایه هشتم دوره اول متوسطه - ۸۰۵
پدیدآورنده :	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف :	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف :	حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، سوسن پناهنده، طیبه حمزه بیگی، خسرو داودی، محمدحاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی، مریم شکری کُهی، میرشهرام صدر، محمدصادق عسگری، دیانا فردین، محمد مقاصدی، زهرا نیکنام و محبوبه یعقوبی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
مدیریت آماده‌سازی هنری :	حمیدرضا امیری، زهره پندی، حسین خسروآبادی، خسرو داودی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی و میرشهرام صدر (اعضای گروه تألیف) - افسانه حجتی طباطبایی و محمد دانشگر (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی :	اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی :	احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) - ندا عظیمی (طراح گرافیک) - ندا عظیمی، زهره بهشتی شیرازی (صفحه‌آرا) - طاهره حسن‌زاده (طراح جلد) - فاطمه رئیسیان فیروزآباد و مریم دهقان‌زاده (رسم) - فاطمه باقری‌مهر، کبری اجابتی، علی نجمی، سیف‌الله بیک‌محمد دلیوند، زینت بهشتی شیرازی و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان :	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
ناشر :	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
جایخانه :	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ :	چاپ سیزدهم ۱۴۰۵

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



- انسان عصاره همه موجودات عالم است.
 - با تربیت صحیح ممکن نیست که یک مملکتی تحت تأثیر استعمار باشد.
 - اگر ملتی بخواهد به طرف سعادت پرواز کند باید با دو بال تهذیب نفس و علم باشد.
- امام خمینی «قُدَسَ سِرُّهُ»

فصل ۱

۱ عددهای صحیح و گویا

- درس اول : یادآوری عددهای صحیح ۲
- درس دوم : معرفی عددهای گویا ۶
- درس سوم : جمع و تفریق عددهای گویا ۱۰
- درس چهارم : ضرب و تقسیم عددهای گویا ۱۴
- مرور فصل ۱ ۱۸

فصل ۲

۱۹ عددهای اول

- درس اول : یادآوری عددهای اول ۲۰
- درس دوم : تعیین عددهای اول ۲۴
- مرور فصل ۲ ۲۸

فصل ۳

۲۹ چند ضلعی ها

- درس اول : چندضلعی ها و تقارن ۳۰
- درس دوم : توازی و تعامد ۳۴
- درس سوم : چهارضلعی ها ۳۸
- درس چهارم : زاویه های داخلی ۴۲
- درس پنجم : زاویه های خارجی ۴۶
- مرور فصل ۳ ۵۰

فصل ۴

جبر و معادله

۵۱

- درس اول : ساده کردن عبارت های جبری ۵۲
- درس دوم : پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری ۵۶
- درس سوم : تجزیه عبارت های جبری ۶۰
- درس چهارم : معادله ۶۴
- مرور فصل ۴ ۶۸

فصل ۵

بردار و مختصات

۶۹

- درس اول : جمع بردارها ۷۰
- درس دوم : ضرب عدد در بردار ۷۴
- درس سوم : بردارهای واحد مختصات ۷۸
- مرور فصل ۵ ۸۲

فصل ۶

مثلث

۸۳

- درس اول : رابطه فیثاغورس ۸۴
- درس دوم : شکل های هم نهشت ۸۸
- درس سوم : مثلث های هم نهشت ۹۲
- درس چهارم : هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه ۹۶
- مرور فصل ۶ ۱۰۰

فصل ۷ توان و جذر ۱۰۱

- درس اول : توان ۱۰۲
- درس دوم : تقسیم اعداد توان دار ۱۰۶
- درس سوم : جذر تقریبی ۱۱۰
- درس چهارم : نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد ۱۱۴
- درس پنجم : خواص ضرب و تقسیم رادیکال ها ۱۱۵
- مرور فصل ۷ ۱۱۸

فصل ۸ آمار و احتمال ۱۱۹

- درس اول : دسته بندی داده ها ۱۲۰
- درس دوم : میانگین داده ها ۱۲۴
- درس سوم : احتمال یا اندازه گیری شانس ۱۲۸
- درس چهارم : بررسی حالت های ممکن ۱۳۲
- مرور فصل ۸ ۱۳۶

فصل ۹ دایره ۱۳۷

- درس اول : خط و دایره ۱۳۸
- درس دوم : زاویه های مرکزی ۱۴۲
- درس سوم : زاویه های محاطی ۱۴۶
- مرور فصل ۹ ۱۵۰

سخنی با معلم

کتاب ریاضی هشتم در راستای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب درسی هفتم تألیف شده است. یکی از اهداف مهم و اصلی این کتاب درگیر شدن دانش آموزان در فرایند حل مسئله است. فعالیت های کتاب به طور عمده به این منظور طراحی شده اند. به طور معمول دانش آموزان در این فعالیت ها با دشواری و چالش روبه رو خواهند شد و این موضوع نه تنها نگران کننده نیست بلکه هنگامی که با کمک و راهنمایی معلم همراه باشد، نتیجه ای مناسب به دنبال دارد. مواجهه کردن دانش آموزان با مسئله، امری هدفمند و آگاهانه در این کتاب به شمار می رود. کمک به دانش آموز نباید با در اختیار گذاشتن حل مسئله یکسان تلقی شود. کمک ها و راهنمایی ها باید تا جایی باشد که شوق کشف و لذت حل کردن را از دانش آموز نگیرد. در طی این مسیر، گفت و گوی دانش آموزان با معلم و نیز با یکدیگر، توضیح افکار و دفاع از آنها، قضاوت در مورد افکار ریاضی دیگر دانش آموزان، بررسی و آزمایش حدس ها و نقد راه حل ها جزئی از فرایند یادگیری ریاضی است. در این راستا معلم ریاضی به یقین می تواند نقشی بی بدیل ایفا کند. معلم در گفت و گوی ریاضی وار در کلاس درس، که از آن به گفتمان ریاضی نیز یاد می شود با بسیاری از دیدگاه ها، افکار و مشکلات و بدفهمی های دانش آموزان درباره مفاهیم درسی آشنا می شود و امکان برطرف کردن آنها را در کلاس و احتمالاً با مشارکت دیگر دانش آموزان پیدا می کند. این کار، مستلزم تمرکز و بازتاب بر فرایند حل مسئله و به ویژه پس

از ارائه پاسخ از سوی دانش‌آموزان است. به همین دلیل حجم زیاد و فراوانی مسائل، خود، مانعی به شمار می‌آید. تعداد مسائلی که در بیشتر کتاب‌های کمک‌آموزشی مطرح است به طور معمول از نیاز دانش‌آموزان بیشتر است. اگر تعداد کمتری مسئله ولی با عمق بیشتر در کلاس درس و با مشارکت دانش‌آموزان حل و بررسی شود، نسبت به حالتی که تعداد زیادی مسئله و به شیوه تکرار و تمرین حل شود، نتیجه به مراتب بهتری به دست می‌آید. در ادبیات پژوهشی این فکر با عنوان «کم بیشتر است!» ذکر می‌شود.

درحالی که امروزه بر یادگیری مفهومی به ظاهر تأکید زیادی می‌شود، پژوهش‌ها بر رعایت تعادل و توازن بین آموزش مفهومی و آموزش روش‌ها و قواعد تکیه دارند. در این کتاب نیز سعی شده است این تناسب و هماهنگی رعایت شود. مؤلفان اطمینان دارند که بدون تلاش، اراده و همت همکاران عزیز اهداف کتاب برآورده نخواهد شد و صد البته، پشتیبانی و آموزش معلمان برای ما وظیفه و برای آنان حق است. در این راستا مؤلفان از طریق واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری و نیز ارائه بسته‌های آموزشی پشتیبان کلاس درس، آمادگی همکاری با جامعه محترم معلمان ریاضی کشور را دارند.

با توجه به رویکرد آموزشی کتاب‌های ریاضی، استفاده از ماشین حساب توسط دانش‌آموزان مجاز است؛ اما هیچ‌گونه اجباری در استفاده یا عدم استفاده از ماشین حساب در ارزشیابی، وجود ندارد و تشخیص استفاده از آن به عهده دبیر محترم است.



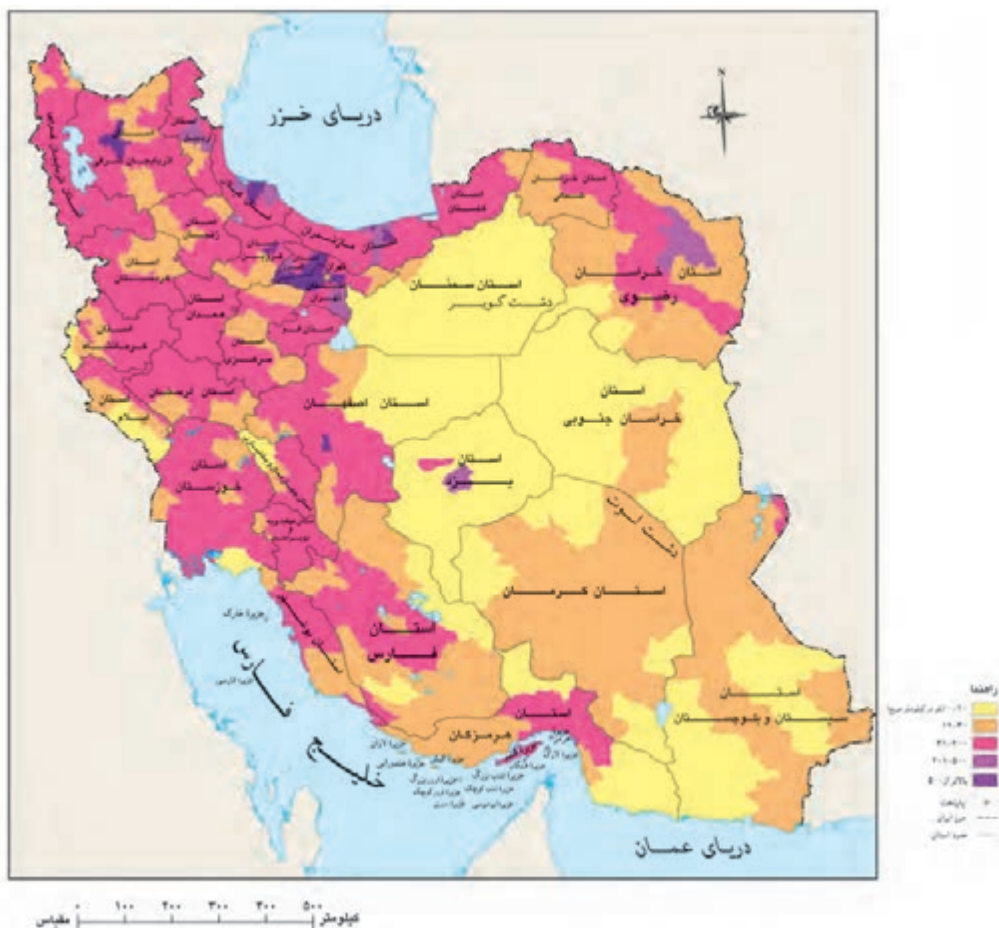
نظر سنجی کتاب درسی



۱

فصل

عددهای صحیح و گویا

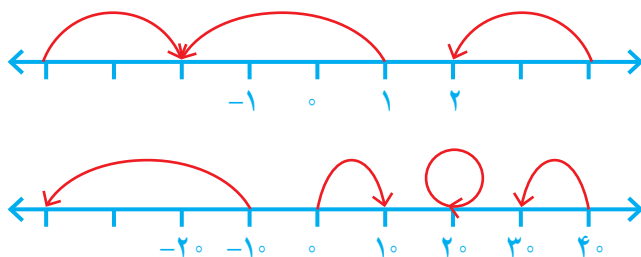


عددهای گویا در زندگی واقعی و نیز در علمی چون ریاضیات و فیزیک کاربردهای زیادی دارند. ما بسیاری از اندازه‌ها را با عددهای کسری و اعشاری بیان می‌کنیم.



با انجام دادن تمرین‌های زیر، آنچه را در سال گذشته دربارهٔ عددهای صحیح یاد گرفته‌اید، مرور کنید.

۱- برای هر حرکت روی محور، یک عدد بنویسید.



۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

عدد صحیح	۶	-۴	$-(-۷)$	۰			۳
قرینه آن					-۸	۵	-۳

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$-۱۶ + ۱۲ =$$

$$۸ - ۱۲ =$$

$$-۳ + ۹ =$$

$$-۴ - ۸ =$$

$$-۳ \times ۷ =$$

$$-۸ \div (-۴) =$$

$$-۱۲ \div ۲ =$$

$$-۴ \times (-۳) =$$

۴- حاصل عبارت‌ها را با توجه به ترتیب عملیات به دست آورید.

$$-۸ - ۳ \times ۵ = -۸ - ۱۵ =$$

$$-۱۶ \div ۲ \times ۳ - ۴ =$$

$$۱ - ۲ \times (۱ - (۸ - ۹)) =$$

$$-۴ \div ۴ - ۴ \times ۳ =$$

۵- عبارت $۲۹-۳۷-۴۳$ را چهار دانش آموز محاسبه کرده اند. راه حل هریک را توضیح دهید.

راه حل علی :

$$-۴۳+۳۷-۲۹=-۴۳-۲۹+۳۷=-۷۲+۳۷=-۳۵$$

توضیح :

راه حل مجتبی :

$$-۴۳+۳۷-۲۹=-۴۳+۸=-۳۵$$

توضیح :

راه حل مرتضی :

$$-۴۳+۳۷-۲۹=-۶-۲۹=-۳۵$$

توضیح :

	د	ی
-	۴	۳
+	۳	۷
-	۲	۹

$$-۴۰ - ۳$$

$$+۳۰ + ۷$$

$$-۲۰ - ۹$$

$$-۳۰ - ۵ = -۳۵$$

راه حل مصطفی :

توضیح :

شما کدام راه حل را می پسندید؟ چرا؟

آیا راه حل دیگری برای پیدا کردن حاصل این عبارت سراغ دارید؟

کار در کلاس



۱- حاصل عبارت های زیر را با روش مورد نظر خود به دست آورید.

$$-(-۱۷)+۱۴-۱۳-۱۹=$$

$$-(-۷)-۲+(-۹)=$$

$$-۱۸-(-۴)-(-۱۹)=$$

$$-۲۴-۹۷+۱۰۰-۲۳=$$

۲- حاصل عبارت $۱۰+۳-۷-۲$ را به دو روش حساب کرده ایم. کدام درست و کدام نادرست

است؟ توضیح دهید.

$$۱۰+۳-۷-۲=۱۳-۵=۸$$

$$۱۰+۳-۷-۲=۱۳-۹=۴$$

۳- قبل از انجام دادن محاسبات در عبارت های داده شده خوب دقت، و با دسته بندی مناسب،

راه ساده ای پیدا کنید. راه حل خود را با راه حل های دوستانتان مقایسه کنید و آن گاه با ماشین حساب،

درستی پاسخ های خود را بررسی کنید.

$$-۴۰+۳۵+۸۰-۱۷-۴۰=$$

$$-۳۲-۲۱+۱۲+۳ \times ۷=$$

۴- یکی از ریاضی‌دانان بزرگ در کودکی جمع عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را با روشی ابتکاری محاسبه کرد.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 =$$



چند جفت عدد با هم جمع شده‌اند؟

حاصل جمع هر جفت عدد چند است؟

حاصل عبارت چند می‌شود؟

۵- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. روش کار را توضیح دهید.

$$-2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12 =$$

$$(10 - 1)(9 - 1)(8 - 1) \dots (-9 - 1)(-10 - 1) =$$

۶- ابتدا در مربع‌های خالی علامت‌های «+» یا «-» بگذارید؛ سپس، عبارت داده شده را محاسبه کنید و همهٔ عددهای صحیح ممکن را که به دست می‌آیند از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$-3 \square (+7) \square 2$$



در جاهای خالی علامت «+» یا «-» را طوری قرار دهید که حاصل عبارت زیر، بزرگ‌ترین مقدار ممکن شود.

$$-5 \square (-6) \square (+3) \square (-9)$$

در زیر، چهار پاسخ به این مسئله داده شده که فقط یکی از آنها درست است. آن را مشخص کنید و دلیل نادرست بودن پاسخ‌های دیگر را هم توضیح دهید.

$$-5 \square + (-6) \square + (+3) \square + (-9) = -5 - 6 + 3 - 9 = -11 - 6 = -17 \quad \text{پاسخ اول:}$$

$$-5 \square + (-6) \square - (+3) \square + (-9) = -5 - 6 - 3 - 9 = -23 \quad \text{پاسخ دوم:}$$

$$-5 \square - (-6) \square + (+3) \square - (-9) = -5 + 6 + 3 + 9 = 1 + 12 = 13 \quad \text{پاسخ سوم:}$$

$$-5 \square + (-6) \square + (+3) \square - (-9) = -5 - 6 + 3 + 9 = -11 + 12 = 1 \quad \text{پاسخ چهارم:}$$

تمرین



- ۱- عددهای خواسته شده را بنویسید.
- الف) عددهای صحیح بین ۳ و ۵- را بنویسید.
- ب) عددهای صحیح کوچک تر از ۴- را بنویسید.
- ج) عددهای صحیح بزرگ تر از ۳- را بنویسید.
- ۲- مانند نمونه، جدول را کامل کنید.

عدد	+۳	۰	۵ ^۳	$\sqrt{4}$	$\frac{3}{1}$	$-(-2)$	$-\frac{2}{3}$	۰/۷
طبیعی	✓							
صحیح	✓							

۳- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$-8 + 6 - 12 + 14 - 20 + 22 =$$

$$-8 + 7 - 6 + 8 - 7 + 6 =$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 =$$

$$3 - (2 - (1 - 7) - 1) =$$

$$3 - 4 \times 5 =$$

$$-8 - 4 \div 2 =$$

۴- هریک از عبارت های زیر چه عددی را نشان می دهد؟

کوچک ترین عدد طبیعی :

بزرگ ترین عدد صحیح منفی :

کوچک ترین عدد زوج طبیعی :

کوچک ترین عدد صحیح مثبت :

بزرگ ترین عدد زوج طبیعی سه رقمی :

کوچک ترین عدد فرد طبیعی دو رقمی :

۵- جدول زیر را کامل کنید؛ طوری که حاصل جمع عددهای هر ردیف با مجموع عددهای

هر ستون و هر قطر مساوی باشد.

-۸		
	-۲	-۶
		۴

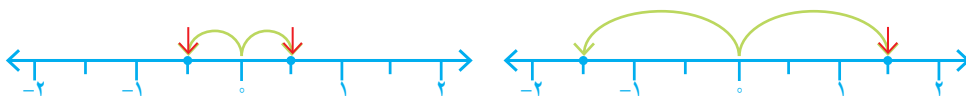
فعالیت



۱- نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نشان می‌دهند؟



۲- قرینه هر عدد را روی محور پیدا، و تساوی‌ها را مانند نمونه، کامل کنید.



$$\frac{1}{2} \text{ قرینه } = -\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2} \text{ قرینه } =$$



$$\frac{2}{3} \text{ قرینه } =$$

$$\frac{4}{3} \text{ قرینه } =$$

۳- به این ترتیب، می‌توانید قرینه همه کسرهایی را که با آنها آشنا شده‌اید بنویسید :

$$\text{قرینه صفر} = \quad \frac{1}{5} \text{ قرینه } = \quad -1\frac{9}{10} \text{ قرینه } = \quad 0/01 \text{ قرینه } =$$

۴- کسرها را به عدد مخلوط و عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید.

$$+3\frac{1}{4} = \quad -\frac{7}{5} = \quad +\frac{14}{3} = \quad -2\frac{1}{3} =$$

۵- نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نمایش می‌دهند؟ از این عددها،

کدام صحیح و کدام غیر صحیح‌اند؟



عددهای صحیح :

عددهای غیر صحیح :

۶- الف) نقطه‌های مشخص شده روی محورهای چه کسرهایی را نشان می‌دهند؟ آیا این سه کسر با هم مساوی‌اند؟ نتیجه را به صورت تساوی کسرها بنویسید.



$$\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{-3}{6}$$



ب) تساوی کسرهایی زیر را روی محور نمایش دهید. $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{3}{6}$



۷- مقدار x را به دست آورید.

$$-\frac{3}{7} = -\frac{12}{x}$$

$$-\frac{4}{6} = -\frac{x}{15}$$

کار در کلاس



۱- کسرهایی زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$-\frac{108}{6} =$$

$$+\frac{66}{42} =$$

$$-\frac{90}{126} =$$

۲- عقربه چه عددی را نشان می‌دهد؟ بنویسید.



۳- به کمک محور، عددهای زیر را از کوچک به بزرگ و از چپ به راست مرتب کنید.

$$\frac{3}{5}, \frac{1}{10}, 0, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}$$

۴- در جای خالی علامت مناسب > یا < یا = بگذارید.

$$\frac{3}{5} \bigcirc 0/25$$

$$-\frac{1}{7} \bigcirc -\frac{11}{5}$$

$$-\frac{3}{6} \bigcirc -0/5$$

۵- هریک از عددها را در جدول زیر در جای خود قرار دهید و جدول را کامل کنید.

$$\frac{17}{7}, \frac{1}{15}, -\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{25}{6}, +\frac{35}{7}, \frac{27}{10}, -3\frac{1}{17}, -7\frac{2}{10}$$

کوچک‌تر از -۳	بین -۳ و -۲	بین -۲ و -۱	بین -۱ و ۰	بین ۰ و ۱	بین ۱ و ۲	بزرگ‌تر از ۲



۱- روی محور روبه‌رو فاصله بین عددهای ۱ و ۲



را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم.

نقطه مشخص شده چه عددی را نشان می‌دهد؟



۲- اگر فاصله عددهای ۱ و ۲ را به ۳ قسمت

مساوی تقسیم کنیم، نقطه‌های مشخص شده

چه عددهایی را نشان می‌دهند؟

۳- در شکل زیر، فاصله بین دو عدد ۱ و ۲ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم اما آن را

بزرگ‌تر رسم کرده‌ایم تا شما نقطه‌ها را بهتر ببینید. اکنون مانند نمونه مشخص کنید که هر نقطه چه

عددی را نشان می‌دهد.



در تساوی زیر، عدد اعشاری ۱/۲ را به صورت کسری نوشته‌ایم. شما هم در محور بالا

عددهای اعشاری را به صورت کسری نشان دهید.

$$1/2 = 1 \frac{2}{10} = \frac{12}{10}$$

۴- چگونه می‌توانیم بین دو عدد ۱ و ۲، تعداد بیشتری عدد کسری بنویسیم؟ توضیح دهید.

۵- آیا می‌توانیم بگوییم بین دو عدد ۱ و ۲ کسرهای بی‌شماری وجود دارد؟

آیا همین نتیجه را می‌توان برای عددهای ۱- و ۲- نیز تکرار کرد؟

بین هر دو عدد صحیح چند عدد کسری هست؟



با توجه به محورهای روبه‌رو و تقسیم شدن فاصله



بین دو عدد ۰ و ۱- کسرهای مختلفی بین این دو

عدد بنویسید.

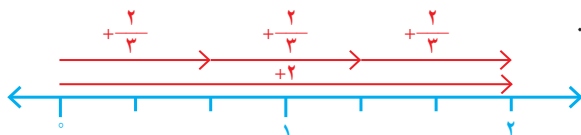


توضیح دهید چگونه بین هر دو عدد کسری هم می‌توانیم کسرهای بی‌شماری پیدا کنیم.

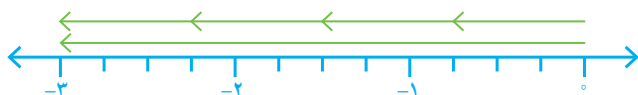
فعالیت



۱- چگونه می‌توانیم به کمک بردارهایی که در شکل نمایش داده شده‌اند، درستی تساوی‌ها را نتیجه بگیریم؟ توضیح دهید.



$$+2 \div 3 = \frac{+2}{3} = +\frac{2}{3}$$



$$-3 \div 4 = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

۲- مانند نمونه، کسر مساوی هر کسر را بنویسید.

$$\frac{-2}{3} = -2 \div 3 = -(2 \div 3) = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{-4}{7} =$$

$$\frac{-3}{-4} =$$

به هر عدد، که بتوان به صورت کسر $\frac{a}{b}$ که در آن a و b عددهای صحیح باشند و $b \neq 0$ نوشت، عدد گویا می‌گوییم.

تمرین



- ۱- آیا می‌توان گفت هر عدد صحیح و هر عدد طبیعی نیز عدد گویاست؟ چرا؟
- ۲- هریک از کسرهای سطر اول را به کسر مساوی‌اش در سطر دوم وصل کنید.

$$\frac{-3}{5}$$

$$\frac{-3}{-5}$$

$$\frac{-3}{-4}$$

$$\frac{-3}{-4}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{-5}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{-3}{4}$$

۳- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

عدد	12	$\frac{-1}{5^3}$	$\frac{-4}{-2}$	$\frac{-8}{-3}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{-2}{3}$	$\sqrt{9}$	$\frac{-6}{2}$	$-(-(+4))$	نوع
طبیعی											
صحیح						✓					
گویا					✓	✓					

۴- ابتدا علامت هر عبارت را تعیین، و سپس آن را ساده کنید.

۹

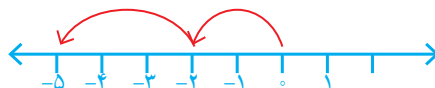
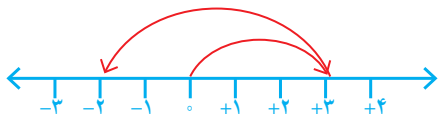
$$\frac{-8 \times (-18)}{12 \times 16} =$$

$$\frac{8 \times 18}{12 \times 16} =$$

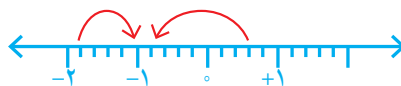
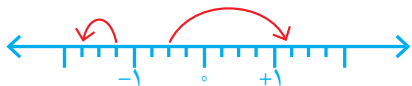
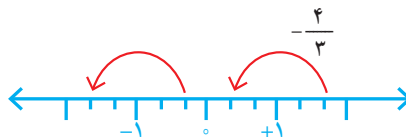
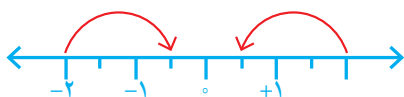
$$\frac{10 \times (-2)}{-7 \times 25} =$$



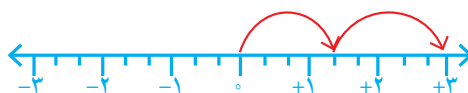
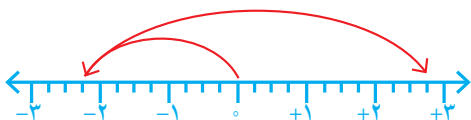
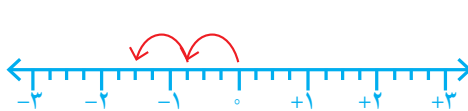
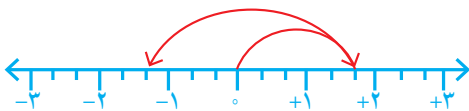
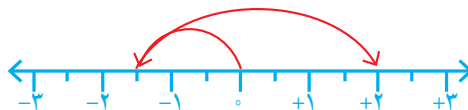
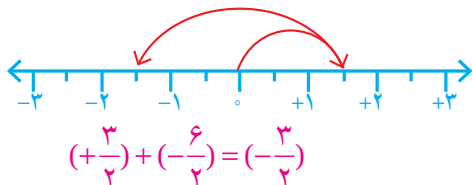
۱- با توجه به درس سال گذشته برای حرکت‌های روی محور، یک جمع عددهای صحیح بنویسید.



۲- با توجه به سؤال ۱، برای هر حرکت روی محور، عددی متناظر بنویسید.



۳- برای محورهای زیر مانند نمونه، یک جمع با عددهای گویا بنویسید.



۴- عبارت‌های زیر را مانند نمونه به صورت جمع دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{8} =$$

$$-\frac{5}{8} - (-\frac{7}{8}) = -\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{5} =$$

$$-\frac{3}{5} - (+\frac{4}{5}) =$$

$$0/5 - 0/85 =$$

$$-2/3 - 5/8 =$$

$$-12/3 - (-7) =$$

$$25 - 18/4 =$$

۵- مانند نمونه، عددها را ابتدا به طور تقریبی به نزدیک ترین عدد صحیح گرد کنید؛ سپس، حاصل عبارت را به دست آورید.

$$-17/9 - (-8/001) + 12/87 = -18 - (-8) + 13 = -18 + 8 + 13 =$$

$$-1\frac{14}{15} + 2\frac{1}{17} - 3\frac{2}{19} \approx$$

کار در کلاس



به کمک محور، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. ابتدا تفریق‌ها را به صورت جمع

بنویسید.

$$-\frac{4}{3} - (+\frac{5}{3}) =$$



$$(+\frac{7}{5}) + (-\frac{9}{5}) =$$



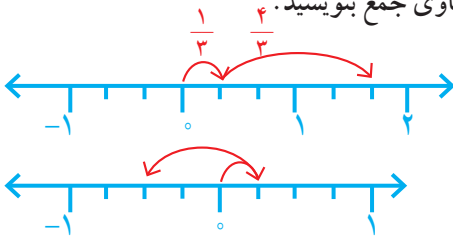
$$-\frac{3}{2} - (-\frac{5}{2}) =$$



فعالیت



۱- برای هر کدام از محورهای یک تساوی جمع بنویسید.



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$-1 + (-3) = -4$$

حاصل عبارت روبه‌رو را به‌دست آورید و با حاصل جمع بالا مقایسه کنید.

$$\frac{1 + (-3)}{4} = \frac{-2}{4}$$

با توجه به تساوی‌های زیر، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم حاصل جمع و تفریق دو عدد گویا را با استفاده از جمع و تفریق دو عدد صحیح به‌دست آوریم.

$$-\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{-3+2}{5}$$

$$-\frac{3}{7} - (-\frac{4}{7}) = \frac{-3 - (-4)}{7} = \frac{-3+4}{7}$$

۲- مانند نمونه، ابتدا مخرج‌ها را یکی کنید؛ سپس، جمع و تفریق‌ها را انجام دهید.

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{4} = \frac{20}{28} - \frac{21}{28} = \frac{20-21}{28} = -\frac{1}{28}$$

$$\frac{6}{5} + \frac{7}{5} = \frac{13}{5}$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{-9+8}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-3-2}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{2}{5} - \frac{-2}{3} = \frac{-6+4}{15} = -\frac{2}{15}$$

کار در کلاس



۱- مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌ها را به‌دست آورید.

$$(+\frac{7}{9}) + (-\frac{4}{9}) = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$(-\frac{7}{9}) - (-\frac{4}{9}) = \frac{-7+4}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$(-\frac{6}{11}) + (+\frac{8}{11}) = \frac{-6+8}{11} = \frac{2}{11}$$

$$(-\frac{6}{11}) - (+\frac{8}{11}) = \frac{-6-8}{11} = -\frac{14}{11}$$

$$-\frac{6}{11} - \frac{8}{11} = \frac{-6-8}{11} = -\frac{14}{11}$$

$$(-\frac{6}{5}) + (-\frac{12}{25}) = \frac{-30-12}{25} = -\frac{42}{25}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} =$$

$$\left(-\frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{5}{9}\right) =$$

$$-\frac{4}{5} + \frac{4}{5} =$$

$$-\frac{3}{4} - \frac{15}{8} =$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4 + \frac{3}{7} =$$

$$4 + \left(-\frac{3}{7}\right) =$$

$$-4 + \left(-\frac{3}{7}\right) =$$

$$-4 + \frac{3}{7} =$$

$$4 - \frac{3}{7} =$$

$$-4 - \frac{3}{7} =$$

حالا مانند نمونه، هر عدد مخلوط را به صورت دو عدد صحیح و کسری در آورید و با هم جمع کنید.

$$-2\frac{1}{2} = -2 + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-3\frac{3}{4} =$$

$$+4\frac{1}{3} =$$



تمرین

۱- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

$$-\frac{4}{15} + \frac{4}{5} =$$

$$-\frac{3}{8} - \frac{5}{12} =$$

$$-2 - \frac{5}{3} =$$

$$-2 + \frac{3}{5} =$$

$$-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} =$$

$$-4\frac{1}{5} - 2\frac{1}{2} =$$

$$7\frac{1}{3} - 10\frac{1}{4} =$$

۲- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

$$\begin{cases} -25 + 75 = \\ -\circ/25 + \circ/75 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 + 3 = \\ -\circ/9 + \circ/3 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 12 = \\ \circ/7 - 1/2 = \end{cases}$$

بین این تساوی‌ها چه رابطه‌ای می‌بینید؟

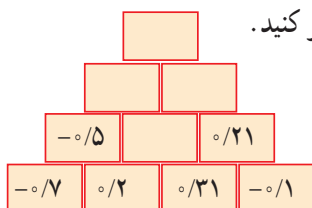
۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$12/8 - 15/4 =$$

$$-25 + 7/2 =$$

$$-4/1 - 3/7 =$$

۴- به کمک الگویابی، جاهای خالی شکل را پر کنید.





۱- مانند نمونه، ضرب عددهای گویا را به ضرب عددهای صحیح تبدیل کنید. با توجه به حاصل عبارت‌ها، جدول را برای ضرب دو عدد گویا کامل کنید.

$$-\frac{2}{3} \times (+\frac{3}{4}) = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{(-2) \times (+3)}{3 \times 4} = -\frac{2 \times 3}{3 \times 4} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{4} \times (+\frac{5}{7}) =$$

$$-\frac{2}{9} \times (-\frac{4}{7}) =$$

$$\frac{3}{5} \times (\frac{1}{9}) =$$

$$\frac{4}{3} \times (-\frac{9}{4}) =$$

 ×	+	-
+		
-		

۲- با توجه به جدول بالا، ابتدا علامت حاصل ضرب را تعیین کنید؛ سپس، مانند نمونه با ضرب کسرها حاصل را پیدا کنید.

$$-\frac{3}{4} \times (-\frac{8}{15}) = +\frac{3}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{3 \times 8}{4 \times 15} = \frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{2} \times (+\frac{2}{3}) =$$

$$+\frac{1}{3} \times (-\frac{3}{5}) =$$



با توجه به نتیجه‌ای که از فعالیت قبل گرفته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(+\frac{3}{5}) \times (-\frac{4}{7}) =$$

$$(+\frac{2}{3}) \times (-\frac{5}{7}) =$$

$$(-\frac{6}{35}) \times (-\frac{21}{8}) =$$

$$-\frac{4}{7} \times (+\frac{2}{5}) =$$

$$(-\frac{3}{11}) \times (+\frac{11}{6}) =$$

$$-1/2 \times (-1/1) =$$

$$-1\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} =$$

$$-2\frac{1}{4} \times (-1\frac{1}{3}) =$$



۱- معکوس کسر $\frac{2}{3}$ برابر با $\frac{3}{2}$ است. معکوس عددهای گویای زیر را بنویسید.

$$-\frac{3}{5} \rightarrow -\frac{5}{3}$$

$$+\frac{2}{7} \rightarrow$$

$$-3 \rightarrow$$

$$+\frac{7}{3} \rightarrow$$

$$-2\frac{1}{3} \rightarrow$$

$$0/1 \rightarrow$$

$$+1\frac{1}{4} \rightarrow$$

$$-1 \rightarrow$$

مانند نمونه هر عدد بالا را در معکوس خود ضرب کنید و حاصل را به دست آورید.

$$-\frac{3}{5} \times (-\frac{5}{3}) =$$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲- همان‌طور که می‌دانید، تقسیم را می‌توانیم به ضرب تبدیل کنیم؛ پس، مانند نمونه ابتدا علامت حاصل تقسیم را بگذارید و سپس آن را به ضرب دو عدد تبدیل کنید.

$$(+\frac{2}{3}) \div (-\frac{5}{7}) = -(\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}) = -(\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}) =$$

$$-\frac{6}{35} \div (-\frac{8}{21}) =$$

$$-\frac{15}{12} \div (+\frac{1}{18}) =$$

۳- جاهای خالی را با کسر مناسب پر کنید.

$$-2\frac{1}{2} \times \text{---} = 1$$

$$-\frac{3}{5} \times \text{---} = 1$$

$$+1\frac{1}{4} \times \text{---} = 1$$

$$+\frac{1}{4} \times \text{---} = 1$$

صفر تنها عددی است که معکوس ندارد؛ چون کسری که مخارج آن صفر باشد تعریف نشده است.

کار در کلاس



۱- حاصل تقسیم‌های زیر را حساب کنید.

$$-\frac{8}{9} \div (-8) =$$

$$-\frac{4}{7} \div (-\frac{5}{7}) =$$

$$-\frac{3}{8} \div (-\frac{3}{8}) =$$

$$1 \div (-\frac{2}{3}) =$$

$$(+\circ/4) \div (-5) =$$

$$-\circ/8 \div 4 =$$

۲- طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.

$$1 \div \frac{3}{5} =$$

$$1 \div (-\frac{3}{4}) =$$

$$1 \div (-\frac{7}{2}) =$$

$$\frac{3}{5} \text{ معکوس} =$$

$$-\frac{3}{4} \text{ معکوس} =$$

$$-\frac{7}{2} \text{ معکوس} =$$

حاصل تقسیم عدد یک بر هر عدد غیر صفر چیست؟ توضیح دهید.

فعالیت



۱- کسره‌های زیر را مانند نمونه و به کمک ماشین حساب به عددی اعشاری تبدیل کنید.

$$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = \circ/4$$

$$\frac{1}{3} \approx$$

$$\frac{3}{7} \approx$$

$$\frac{1}{8} =$$

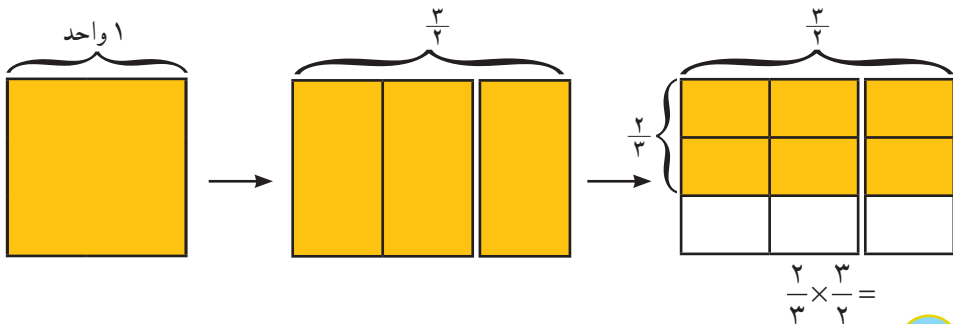
$$\frac{5}{4} =$$

$$\frac{5}{6} \approx$$

بین عددهای حاصل چه تفاوتی مشاهده می‌کنید؟ آیا می‌توانید کسرها را طبقه‌بندی کنید؟

۲- مانند نمونه، ضرب یک کسر در معکوسش را روی شکل نشان دهید. چگونه می‌توانیم از

روی شکل نشان دهیم که حاصل ضرب کسر در معکوسش، یک می‌شود؟



تمرین



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(-\frac{6}{17}\right) + \left(-\frac{8}{17}\right) =$$

$$\left(-\frac{12}{35}\right) - \left(+\frac{11}{42}\right) =$$

$$\left(-\frac{2}{63}\right) - \left(-\frac{5}{72}\right) =$$

$$-\frac{7}{12} + (-3) =$$

$$\left(+\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{6}{9}\right) =$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right) \times \left(+\frac{8}{12}\right) =$$

$$-8 \div (+5) =$$

$$(-12) \div (-28) =$$

$$\left(-\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{28}{27}\right) =$$

$$-2/4 \div 1/2 =$$

۲- عددهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$-(-\frac{5}{8}) =$$

$$-(\frac{14}{-19}) =$$

$$-(\frac{-5}{-13}) =$$

$$-\frac{3}{5} =$$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(\frac{3}{5} - \left(+\frac{2}{5}\right)\right) \times \frac{5}{12} =$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right) =$$

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5} - \frac{7}{5} + \frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) =$$

$$\left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{6} - \frac{8}{9}\right) \div \frac{-7}{24} =$$

$$(-2 + 3 - 7) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15}\right) =$$

$$-1\frac{1}{2} \times \left(-3\frac{1}{3}\right) =$$

$$-4\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{4} =$$

$$-1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} \times \frac{-8}{5} =$$

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

● عددهای طبیعی ● عددهای صحیح ● عددهای گویا ● معکوس عدد گویا

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود، خلاصه درس مربوط به آن را بنویسید.

- محاسبه حاصل یک عبارت، شامل عددهای صحیح با رعایت ترتیب عملیات
- پیدا کردن راه حل مناسب برای محاسبه یک عبارت
- پیدا کردن عددهای گویای مساوی
- نمایش جمع و تفریق عددهای گویا روی محور
- محاسبه جمع و تفریق دو عدد گویا
- محاسبه ضرب و تقسیم دو عدد گویا
- پیدا کردن معکوس یک عدد گویا
- محاسبه حاصل یک عبارت، شامل عددهای گویا با رعایت ترتیب عملیات

کاربرد

محاسبه عددهای گویا در محاسبات عبارت‌های جبری و حل معادله‌ها کاربرد دارد.

تمرین‌های ترکیبی

۱- عددهای گویا را روی محور نمایش دهید.

$$\frac{-5}{-2} \quad -1\frac{1}{4} \quad -(-\frac{2}{3})$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

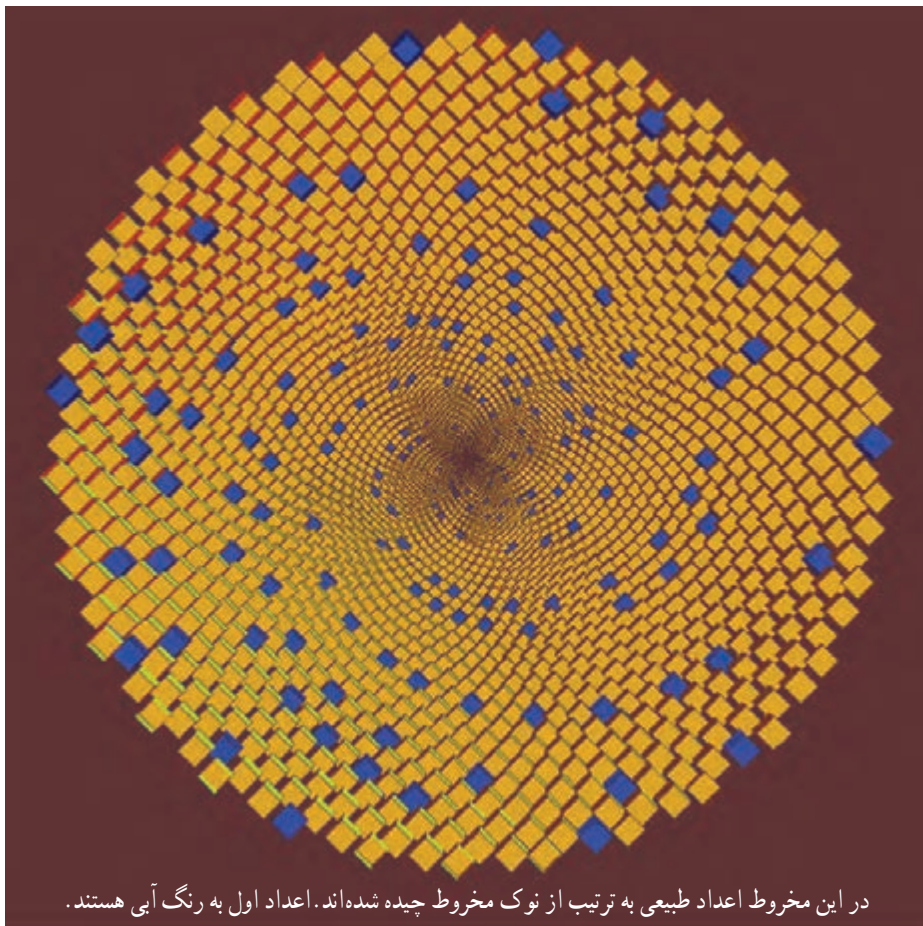
$$1 - \frac{1 - 1\frac{1}{2}}{-1 + 1\frac{1}{3}} = \quad (-2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}) \div (-1\frac{1}{4} \times \frac{-2}{5}) =$$



۲

فصل

عددهای اول



در این مخروط اعداد طبیعی به ترتیب از نوک مخروط چیده شده‌اند. اعداد اول به رنگ آبی هستند.

شمارنده‌های اول یک عدد مانند ماده اولیه کارخانه عدس‌سازی هستند. همه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از یک و غیر اول را می‌توانیم با ضرب شمارنده‌های اول به دست آوریم. امروزه از عددهای اول، که تجزیه و شکسته نمی‌شوند برای رمزگذاری و رمزگشایی استفاده می‌شود.



- ۱- می‌خواهیم ۱۹ نفر از دانش‌آموزان را برای کارهای مختلف به گروه‌هایی تقسیم کنیم. آیا می‌توانیم این تعداد را به گروه‌های مساوی تقسیم کنیم؟ اگر تعداد دانش‌آموزان ۷ نفر باشد، چه گروه‌هایی را می‌توانیم تشکیل دهیم؟ همه حالت‌های ممکن را بنویسید.
اگر تعداد آنها ۱۵ نفر باشد، چه گروه‌هایی را می‌توانیم تشکیل دهیم؟

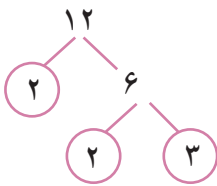


- ۲- تعدادی از سربازان می‌خواهند رژه بروند. فرمانده آنها آرایش‌های مستطیلی مختلف برای گروه‌های ۶ نفره را روی کاغذ کشیده است.



- شما هم برای ۸ نفر، آرایش‌های مستطیلی مختلف رسم کنید.
برای ۵ نفر هم آرایش‌های ممکن را رسم کنید.
کدام عددها فقط ۲ آرایش مستطیلی دارند؟

- ۳- مانند نمونه‌ها با رسم نمودارهای درختی، عددهای داده شده را به صورت ضرب شمارنده‌های اول بنویسید (تجزیه کنید).



$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

۱۵

۱۱

۱۴

۷

۵



هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک، که هیچ شمارنده طبیعی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود.

کار در کلاس



اگر بتوانیم عددی طبیعی را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسیم، عدد مورد نظر، اول نخواهد بود و به چنین عددی، **عدد مرکب** می‌گویند؛ برای مثال؛ ۲۴ عددی مرکب است؛ چون: $24 = 6 \times 4$

همهٔ عددهای مرکب بین ۱۵ و ۳۰ را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسید.

فعالیت



۱- عددهای طبیعی از ۱ تا ۲۰ را بنویسید و دور عددهای اول خط بکشید. آیا

عدد ۱ اول است؟ چرا؟

آیا عدد ۱ مرکب است؟ چرا؟

۲- با توجه به سؤال بالا، عددهای طبیعی را به سه دسته تقسیم کنید و ویژگی‌های هر کدام را بنویسید.

۳- مضرب‌های طبیعی عدد ۲ در زیر نوشته شده است. در صورت امکان، آنها را مانند نمونه به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بنویسید.

۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۴ ، ...

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 \end{array}$$

به همین ترتیب، مضرب‌های طبیعی عددهای ۳ و ۴ را بنویسید و در صورت امکان آنها را به صورت ضرب دو عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ بنویسید.

مضرب‌های طبیعی عدد ۳ :

مضرب‌های طبیعی عدد ۴ :

۴- با توجه به سؤال بالا، آیا می‌توانیم بگوییم که همهٔ مضرب‌های یک عدد طبیعی مرکب‌اند؟ چرا؟

عدد ۱ نهٔ اول است نهٔ مرکب؛ به این ترتیب، عددهای طبیعی را می‌توان به سه بخش تقسیم کرد :

عددهای اول، عددهای مرکب و عدد یک

کار در کلاس



۱- در بین اعداد زیر، اعداد مرکب را مشخص کنید.

۲۱ ۳۱ ۳۵ ۴۷ ۴۹

۲- کدام عددهای طبیعی را می‌شناسید که همهٔ مضرب‌هایشان عددهای مرکب باشند؟

۳- عدد ۱۷ چند مضرب دارد؟ چند تا از مضرب‌های آن عدد اول هستند؟

۴- اگر a یک عدد اول باشد، آیا همهٔ مضرب‌هایش مرکب‌اند؟



فعالیت

۱- ب.م.م جفت عددهای داده شده را بنویسید.

$$(۱۵, ۶) = ۳$$

$$(۲, ۸) =$$

$$(۳, ۹) =$$

$$(۱, ۴) =$$

$$(۱۸, ۱۲) =$$

$$(۵, ۱۲) =$$

$$(۱۵, ۴) =$$

$$(۳, ۵) =$$

$$(۲۴, ۲۵) =$$

$$(۱۸, ۲۵) =$$

$$(۷, ۸) =$$

$$(۳, ۳) =$$

اگر ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه [شمارنده] مشترک) دو عدد برابر یک باشد، می‌گوییم آن دو عدد **نسبت به هم اول** هستند؛ برای مثال، عددهای ۸ و ۹ هر دو مرکب‌اند اما چون $(۸, ۹) = ۱$ می‌گوییم این دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

۲- دو عدد اول متفاوت انتخاب کنید و ب.م.م آنها را بنویسید.

آیا می‌توان گفت هر دو عدد اول نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟

۳- یک عدد اول و یک عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.

۴- دو عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.

۵- آیا دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول می‌شوند؟

۶- اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها چگونه به دست می‌آید؟

تمرین



۱- برای تساوی روبه‌رو، چهار پاسخ مختلف به دست آورید. $1 = (4 \text{ و } \square)$

۲- عددهای اول بین دو عدد 40 و 60 را بنویسید.

۳- تعداد عددهای اول کمتر از 20 ، هشت عدد است، تعداد عددهای مرکب کوچک‌تر از 20 چندتا است؟ چرا؟

۴- آیا جمله زیر درست است؟ چرا؟

«هر عدد طبیعی دست کم ۲ شمارنده دارد.»

۵- مجموع دو عدد اول ۹۹ است. آن دو عدد را مشخص کنید و توضیح دهید که چگونه آنها را پیدا کردید.

۶- پنج عدد بنویسید که غیر از ۲ و ۳ شمارنده اول دیگری نداشته باشند.

۷- عددی در نظر بگیرید که ۴ و ۹ دو شمارنده آن باشند. حال شش عدد دیگر پیدا کنید که شمارنده‌های عدد مورد نظر باشند.

خواندنی

دو عدد اول که با هم دو واحد اختلاف دارند را یک جفت عدد **اولِ دوقلو** می‌نامند، مانند (۳، ۵) یا (۱۱، ۱۳) یا (۱۰۳، ۱۰۵). ریاضیدانان بر این باورند (حدس می‌زنند) که برای دوقلوهای اول پایانی وجود ندارد.

همچنین هر سه عدد فرد و متوالی را، که هر سه اول نیز باشند، اعداد **اولِ سه‌قلو** می‌نامند که فقط یک سه‌قلوی اول در بین اعداد طبیعی وجود دارد؛ یعنی (۳، ۵، ۷) و سه‌قلوی دیگری یافت نمی‌شود! چرا؟



می‌خواهیم عددهای اول از ۱ تا ۵۰ را تعیین کنیم.
ابتدا عددهای ۱ تا ۵۰ را می‌نویسیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰

– حالا عددهای غیراول را خط می‌زنیم تا عددهای اول باقی بمانند.

۱– آیا عدد ۱ را خط زدید؟ چرا؟ _____

۲– آیا مضرب‌های عدد ۲ را خط می‌زنید؟ چرا؟ _____

– مضرب‌های مرکب عدد ۲ را به صورت $\diagup$ خط بزنید.

– مضرب‌های مرکب عدد ۳ را خط بزنید.

۳– آیا لازم است مضرب‌های عدد ۴ را خط بزنیم؟ خیر چرا؟ زیرا اگر عددی مضرب ۴ باشد، پیش از آن به عنوان مضرب ۲ خط خورده است.

۴– آیا مضرب‌های عدد ۵ را خط می‌زنید؟ چرا؟ _____

مضرب‌های مرکب عدد ۵ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۵، که برای اولین بار خط می‌خورد، کدام است؟ _____

۵– آیا مضرب‌های عدد ۶ را خط می‌زنید؟ چرا؟ _____

۶– آیا مضرب‌های عدد ۷ را خط می‌زنید؟ چرا؟ _____

۷– مضرب‌های مرکب عدد ۷ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۷، که برای اولین بار خط می‌خورد، کدام است؟ _____

۸– آیا مضرب‌های اعداد ۸ و ۹ و ۱۰ را خط می‌زنید؟ چرا؟ _____

۹- اگر بخواهیم مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم، کدام مضرب ۱۱ برای اولین بار خط خواهد خورد؟

۱۰- به این ترتیب، آیا لازم است مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم؟

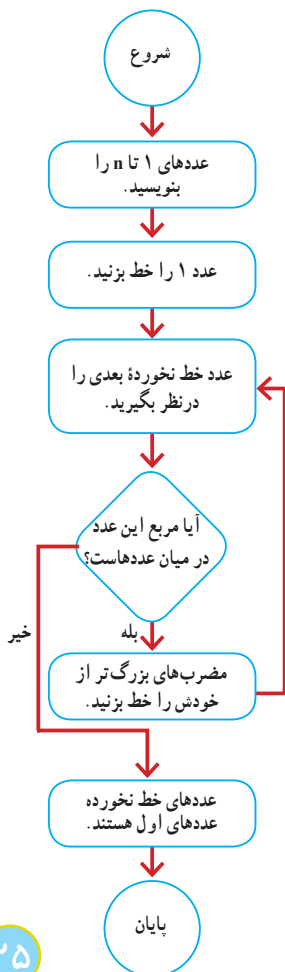
۱۱- آیا عددهای باقیمانده، اول هستند؟

برای تعیین عددهای اول، عدد یک و مضرب‌های مرکب اعداد اول را خط می‌زنیم و خط‌زدن را تا عدد اولی ادامه می‌دهیم که مربع آن، بین عددهای نوشته‌شده نباشد.

کار در کلاس



نتایج فعالیت قبل، که به آن **روش غربال** می‌گویند در نمودار زیر خلاصه شده است.



این نمودار را برای $n = 40$ دنبال کنید و همهٔ مرحله‌ها را یک به یک انجام دهید. هر مرحله از نمودار را برای خود توضیح دهید؛ برای مثال، جملهٔ «عددهای ۱ تا n را بنویسید» را بخوانید و عددهای ۱ تا ۴۰ را در کادر زیر بنویسید. عدد ۱ را خط بزنید. عدد خط‌نخوردهٔ بعدی را، که عدد ۲ است در نظر بگیرید. آیا مربع عدد ۲ بین عددها هست؟ مضرب‌های مرکب آن را خط بزنید. دوباره به مرحلهٔ قبلی برگردید و به همین ترتیب کار را ادامه دهید.



می‌خواهیم مشخص کنیم ۴۷ اول است یا نه. مانند روش غربال، که در صفحه قبل توضیح داده شد، فرض کنید عددهای ۱ تا ۴۷ نوشته شده‌اند.

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۲ خط می‌خورد؟ ————— با انجام دادن چه عملی می‌توانید به این سؤال پاسخ دهید؟ —————

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۳ خط می‌خورد؟ ————— چرا؟ —————

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۵ خط می‌خورد؟ ————— چرا؟ —————

آیا لازم است بررسی کنیم که عدد ۴۷ با مضرب‌های ۷ خط می‌خورد یا نه؟ ————— چرا؟ —————

آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که عدد ۴۷ را فقط بر عددهای اول تقسیم می‌کنیم؟ ————— چرا؟ —————

چرا تقسیم کردن را تا عدد اولی که مربع آن از ۴۷ بزرگ‌تر شود ادامه می‌دهیم؟ توضیح دهید.



مانند نمونه، بررسی کنید که عددهای داده شده (۹۷، ۱۳۱ و ۱۴۳) اول یا مرکب هستند.

پس باید آن را به عددهای اول ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم. $\sqrt{97} \approx 9 \rightarrow$

$\begin{array}{r l} 97 & 2 \\ \hline & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 97 & 3 \\ \hline & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 97 & 5 \\ \hline & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 97 & 7 \\ \hline & \end{array}$
---	---	---	---

چون تمام تقسیم‌ها باقی‌مانده دارند، ۹۷ مضرب هیچ‌کدام نیست؛ یعنی عددی اول است.

$\sqrt{131} \approx \rule{1cm}{0.4pt} \rightarrow$

$$\sqrt{43} \approx \text{—————} \rightarrow$$



۱- از روش غربال برای عددهای ۱ تا ۶۰ استفاده و عددهای اول کمتر از ۶۰ را

پیدا کنید.

۲- مشخص کنید که عددهای ۱۰۷ و ۲۵۱ اول اند یا مرکب.

۳- «برای اینکه بفهمیم عددهای کمتر از ۱۰۰ اول اند یا نه، کافی است آنها را به عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم.»

آیا این جمله درست است؟ چرا؟

۴- عددی از ۱۲۰ کوچک تر و از ۱۰۰ بزرگ تر است. برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا نه، حداکثر چند تقسیم انجام می دهیم؟ چرا؟

۵- عددهای ۱ تا ۱۰۰ را بنویسید و غربال کنید؛ سپس به سؤال های زیر پاسخ دهید.

- اولین عددی که خط خورد.
- در مرحله حذف مضرب های ۷، اولین مضرب ۷ که به عنوان مضرب های سایر عددها خط نخورد.
- عددی که با مضرب های آن عدد ۲۴ خط خورد.
- تمام مضرب های ۵ که در مرحله حذف مضرب های ۵ برای اولین بار خط خوردند.

خواندنی

توزیع و نوع قرار گرفتن اعداد اول بین اعداد طبیعی بسیار نامنظم است و از قانون خاصی پیروی نمی کند ولی همین اعداد اول که به صورتی نامنظم در بین اعداد طبیعی رویده اند، می توانند هر عدد طبیعی و بزرگ تر از یک را بسازند و به عنوان بلوک های ساختمانی برای اعداد طبیعی به کار بروند.

$$۳۶ = ۲^2 \times 3^2, \quad ۱۰۰ = ۲^2 \times 5^2$$

$$۲۷ = 3^3, \quad ۵ = 5^1, \quad ۱۲ = ۲^2 \times 3$$

مفاهیم و مهارت‌ها

اصطلاحات زیر در این فصل به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

● نمودار درختی ● عدد مرکب ● نسبت به هم اول ● روش غربال
روش‌های اصلی زیر در این فصل مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و خلاصه درس را در دفتر خود بنویسید.

- پیدا کردن عددهای اول با روش‌های تقسیم، ضرب و بخش پذیری
- تشخیص عددهای اول و مرکب
- تعیین عددهای اول به کمک روش غربال
- دنبال کردن یک دستورالعمل و نمودار
- تعیین اینکه یک عدد، اول یا مرکب است.

کاربرد

این درس در فصل مربوط به توان و جذر کاربرد دارد. از تبدیل پایه‌های مرکب به پایه‌های عدد اول برای ساده کردن عبارت‌های توان‌دار استفاده می‌شود.

تمرین‌های ترکیبی

۱- یک عدد مرکب بنویسید که شمارنده‌های اول غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد. آیا این عدد و عددی که شمارنده‌های اول آن ۲ و ۵ است، نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟

۲- با روش غربال، عددهای اول بین ۲۰ و ۴۰ را پیدا کنید. در این روش، کار را از خط‌زدن مضرب‌های کدام عدد شروع می‌کنید و با مضرب‌های کدام عدد پایان می‌دهید؟

۳- آیا عدد ۱۳۷ اول است؟ چرا؟

۴- ۲ عدد مرکب بنویسید که نسبت به هم اول باشند.



۳

فصل

چند ضلعی ها



طی هزاران سال گذشته در آثار هنری گوشه و کنار کشور پر افتخارمان، نقش مؤثر استفاده از هندسه و شکل های هندسی و نیز مفاهیم مهم آن همچون انتقال، تقارن و دوران به وضوح قابل مشاهده است.

فعالیت

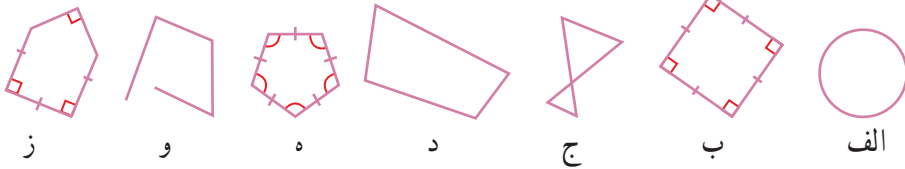


۱- در صفحه به هر خط شکسته بسته، چندضلعی گفته می‌شود به شرط اینکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند.

شکل «ج» چندضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شکل «و» چندضلعی نیست؛ چرا؟

شکل «الف» هم چندضلعی نیست؛ چرا؟



۲- اگر در یک چندضلعی همه ضلع‌ها با هم و همه زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منظم است.

از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چندضلعی منظم‌اند؟

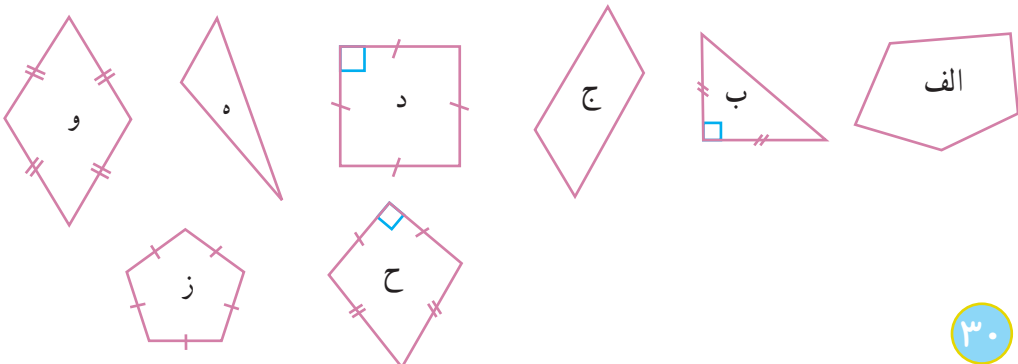
۳- یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید؛ سپس درباره تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها و... توضیح دهید تا دوستان شکی را پیدا کند که انتخاب کرده‌اید.
سپس به توضیحات دوستان گوش کنید و شکلی را پیدا کنید که او انتخاب کرده است.

کار در کلاس

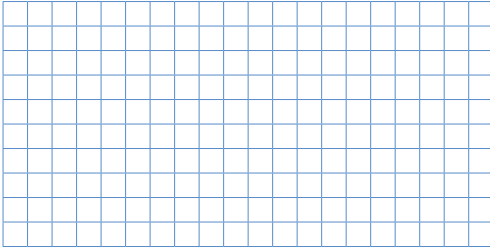


۱- هر یک از عبارت‌های زیر به کدام چند ضلعی‌ها مربوط است؟

- لوزی با زاویه قائمه
- پنج ضلعی غیر منظم
- مثلث با زاویه باز
- چندضلعی منظم



۲- چند ضلعی‌های زیر را در صفحه شطرنجی رسم کنید.



الف) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین

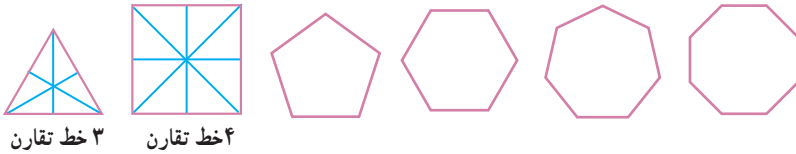
ب) مستطیلی با ضلع‌های مساوی

ج) یک دوزنقه قائم الزاویه

د) یک شش ضلعی با دقیقاً سه زاویه قائمه

۳- در سال گذشته با خط تقارن شکل آشنا شدید.

الف) تعداد خط‌های تقارن هر یک از چند ضلعی‌های منتظم زیر را پیدا کنید.

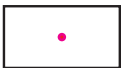


ب) به نظر شما نه ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ده ضلعی منتظم چطور؟

فعالیت



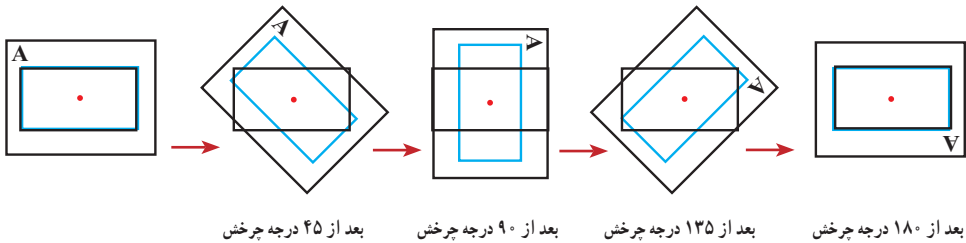
۱- یک ورق کاغذ پوستی روی مستطیل روبه‌رو قرار دهید



و تصویر مستطیل را روی آن رسم کنید.

نوک مدادتان را روی مرکز دوران بگذارید و مانند شکل‌های زیر،

کاغذ پوستی را 180° درجه حول مرکز دوران بچرخانید.



آیا تصویر، روی شکل منطبق می‌شود؟

اگر شکلی را حول یک نقطه، 180° درجه دوران دهیم و نتیجه دوران، روی خودش منطبق شود، می‌گوییم شکل **مرکز تقارن** دارد و نقطه مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.



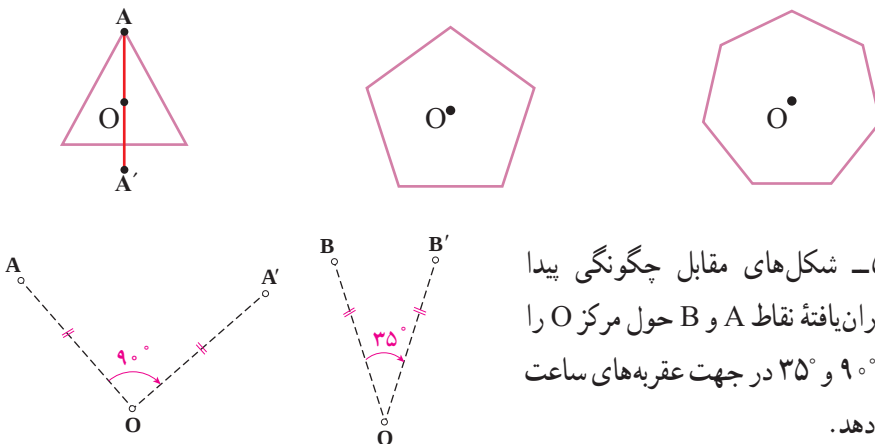
۲- شکل روبه‌رو مثلثی متساوی الاضلاع است. یک ورق کاغذ پوستی روی آن قرار دهید و مراحل فعالیت (۱) را تکرار کنید. آیا تصویر، روی شکل منطبق می‌شود؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳- در کدام یک از چندضلعی‌های منتظم زیر، نقطه مشخص شده مرکز تقارن است؟



به نظر شما نه ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد؟
ده ضلعی منتظم چگونه؟ از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴- یکی از راه‌های تشخیص اینکه نقطه O در مثلث متساوی الاضلاع مرکز تقارن نیست، این است که می‌توان روی شکل، نقطه‌ای پیدا کرد که قرینه آن نسبت به نقطه O روی خود شکل قرار نگرفته باشد. مانند نمونه، نشان دهید که نقطه O در دو شکل دیگر هم، مرکز تقارن نیست.



۵- شکل‌های مقابل چگونگی پیدا کردن دوران یافته نقاط A و B حول مرکز O را به اندازه 90° و 35° در جهت عقربه‌های ساعت نشان می‌دهد.

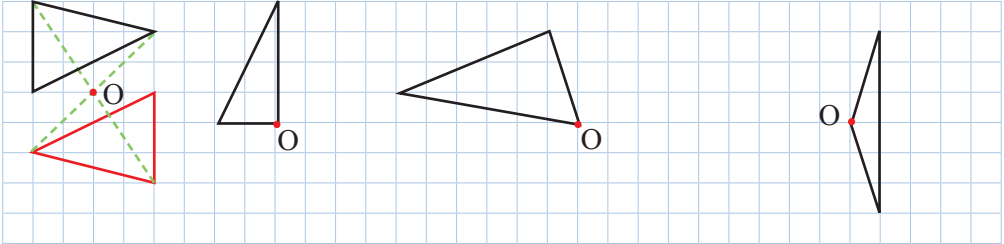
کدام یک از شکل‌های فعالیت (۳) با

دوران 90° حول نقطه مشخص شده در جهت عقربه‌های ساعت روی خودش می‌افتد؟

کار در کلاس



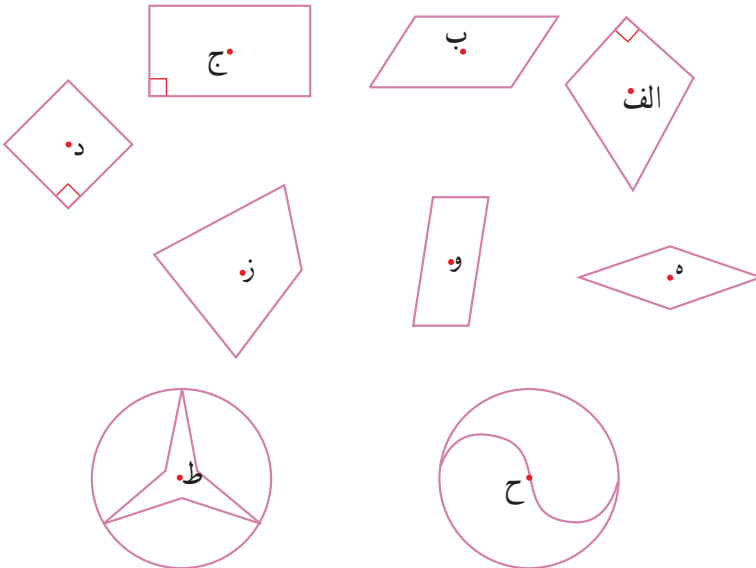
مانند نمونه هر شکل را طوری کامل کنید که نقطه O مرکز تقارن باشد.



تمرین

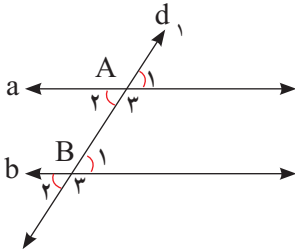


در هر شکل، بررسی کنید که نقطه مشخص شده، مرکز تقارن شکل هست یا نه.





اگر خطی مانند d_1 ، خطوط a و b را مانند شکل با زاویه‌های مساوی قطع کرده باشد، خط‌های a و b با هم موازیند.



به خط d_1 ، خط **مورب** می‌گویند.

موازی بودن خط‌های a و b را به صورت $a \parallel b$ نمایش می‌دهند. هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها زاویه‌های مساوی می‌سازد.

۱- اگر $\hat{A}_1 = 60^\circ$ باشد، زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

$\hat{A}_3 =$ _____ چون $\hat{A}_1$ زاویهٔ $\hat{A}_3$ است.

$\hat{B}_1 =$ _____

$\hat{B}_2 =$ _____ چون $\hat{B}_1$ زاویهٔ $\hat{B}_2$ متقابل به رأس است.

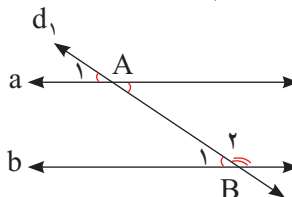
$\hat{B}_3 =$ _____

۲- خط d_2 را بر a عمود کنید و ادامه دهید تا خط b را قطع کند. چرا d_2 بر b هم عمود است؟

۳- خط d_2 با خط b زاویهٔ 70° ساخته است. خط d_2 با خط a چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۴- دو خط a و b با هم موازی‌اند و خط d_1 مورب است؛ پس زاویه‌های A_1 و B_1 با هم مساوی‌اند. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$(a \parallel b) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$



چرا A_1 و B_2 مکمل اند؟

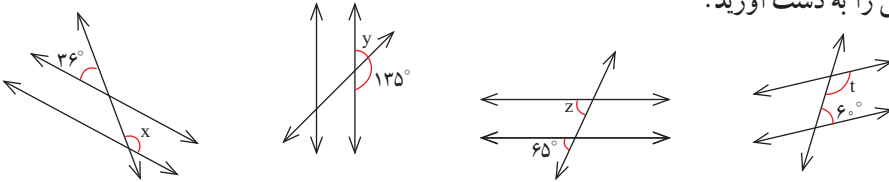
اگر خط a را روی صفحه انتقال دهیم تا روی خط b قرار گیرد و نقطه A روی B بیفتد، زاویه A_1 روی کدام زاویه قرار می‌گیرد؟

چگونه از این طریق می‌توان توجیه کرد که زاویه A_1 و زاویه B_2 مکمل یکدیگرند؟ توضیح دهید.

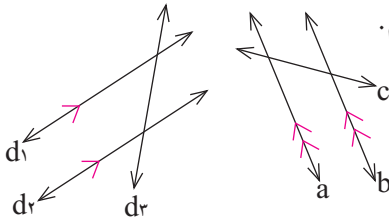
کار در کلاس



۱- در هر شکل یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کرده است. اندازه زاویه‌های مجهول را به دست آورید.



۲- موازی بودن دو خط را مانند شکل با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم. عبارت «خط



d_1 با خط d_2 موازی نیست» را به صورت $d_1 \nparallel d_2$ می‌نویسیم.

الف) عبارت‌های $a \parallel c$ و $a \parallel b$ را بخوانید.

ب) زاویه‌های مساوی را در شکل‌ها با

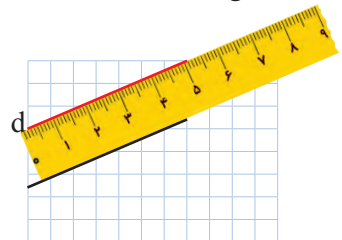
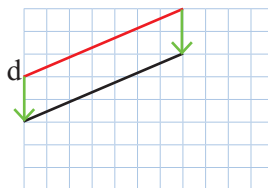
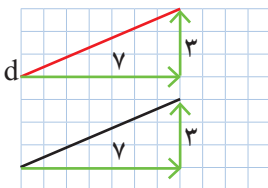
علامت گذاری مشخص کنید.

فعالیت

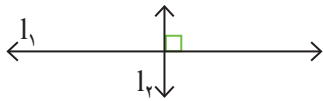


۱- می‌خواهیم در صفحه شطرنجی خطی موازی خط d رسم کنیم. راه حل سه

دانش آموز را مشاهده کنید و توضیح دهید هر کدام از آنها چگونه خط موازی را رسم کرده است.



۲- عمود بودن دو خط را با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم و عبارت «خط l_1 بر خط l_2 عمود است» را به صورت $l_1 \perp l_2$ می‌نویسیم.



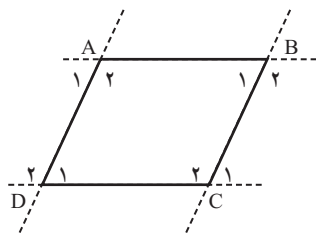
الف

مانند نمونه برای هر کدام شکل بکشید و جاهای خالی را پر کنید.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow b \parallel c$$

دو خط عمود بر یک خط

ب	ج
$\left. \begin{array}{l} g \parallel h \\ k \perp h \end{array} \right\} \Rightarrow$	$\left. \begin{array}{l} d \parallel e \\ d \parallel f \end{array} \right\} \Rightarrow$
اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود	دو خط موازی با یک خط

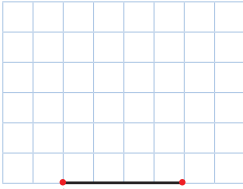


۳- در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو باهم موازی‌اند. چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است. (الف) ضلع‌های موازی را با علامت گذاری مشخص کنید. (ب) جاهای خالی را در رابطه‌های زیر کامل کنید.

$(AB \parallel DC \text{ و } BC \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1, \hat{A}_2 = \hat{D}_2$

$(AD \parallel BC \text{ و } DC \text{ مورب}) \Rightarrow$

کار در کلاس



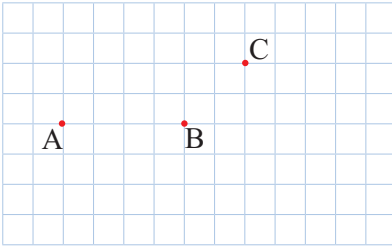
A B

۱- الف) یک مثلث متساوی الساقین بکشید؛ طوری که پاره خط AB قاعده آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) خط تقارن مثلث را رسم کنید.

ج) آیا دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند؟

د) آیا خط تقارن، عمود منصف قاعده و نیمساز زاویه مقابل آن است؟



۲- متوازی الاضلاعی رسم کنید که نقاط A, B, و C سه تا از رأس‌های آن باشند.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.

کنید.

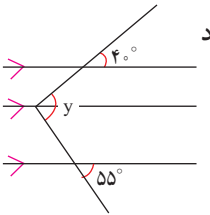
برای این سؤال چند پاسخ مختلف می‌توانید پیدا کنید؟

کنید؟

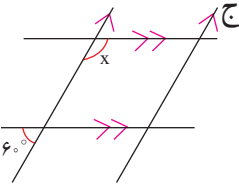
تمرین



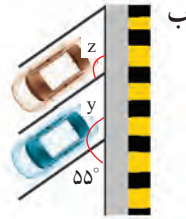
۱- در هر قسمت، اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



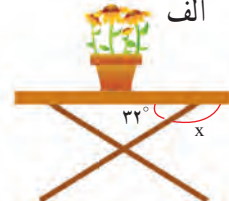
د



ج

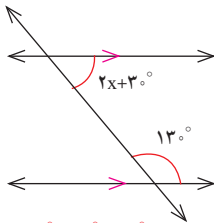


ب

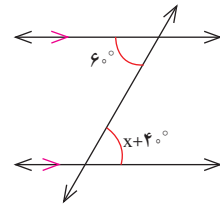
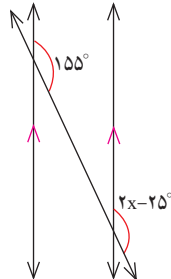


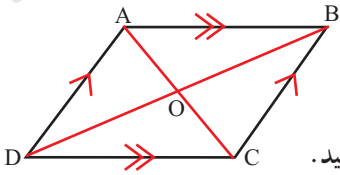
الف

۲- مانند نمونه با تشکیل معادله، مقدار x را پیدا کنید.



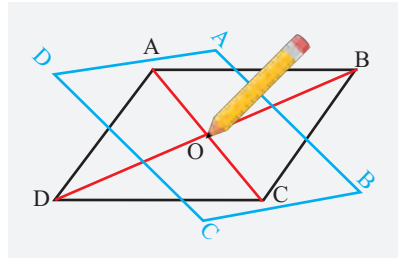
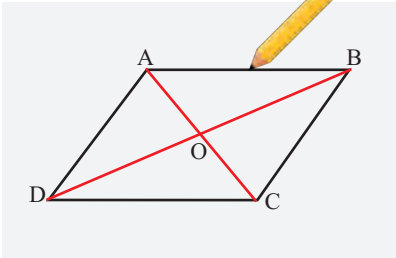
$$2x + 30^\circ + 130^\circ = 180^\circ$$





چهار ضلعی ای که ضلع های روبه روی آن دو به دو موازی اند، متوازی الاضلاع نام دارد.

۱- متوازی الاضلاعی را رسم، و مانند شکل نام گذاری کنید.
یک ورق کاغذ پوستی روی آن بگذارید و تصویر متوازی الاضلاع را رسم کنید.
نوک مدادتان را روی نقطه O (محل برخورد قطرها و مرکز تقارن شکل) قرار دهید و مانند شکل های زیر، تصویر را 180° درجه حول این نقطه بچرخانید تا بر شکل منطبق شود.



۲- با توجه به انطباق شکل و تصویر، تساوی ها را کامل کنید.

$$\hat{A} = \hat{\quad} \quad \hat{B} = \hat{\quad} \quad \overline{AB} = \overline{\quad} \quad \overline{BC} = \overline{\quad}$$

هر یک از عبارت های زیر، یکی از خاصیت های متوازی الاضلاع را بیان می کند. با توجه به تساوی های بالا، این دو عبارت را کامل کنید.

- در هر متوازی الاضلاع، زاویه های رو به رو _____
در هر متوازی الاضلاع، ضلع های رو به رو _____
در هر متوازی الاضلاع، زاویه های مجاور _____

۳- پاره خط OA بر کدام پاره خط منطبق شده است؟

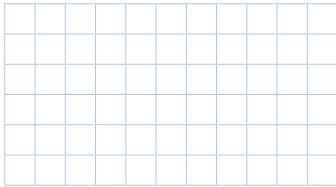
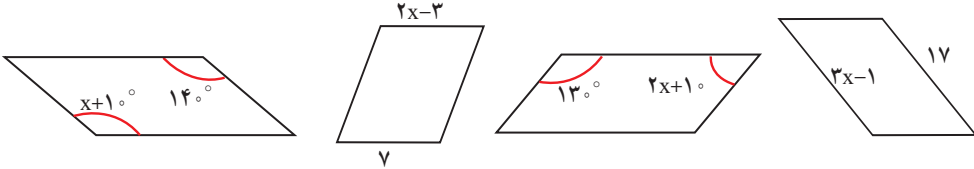
پاره خط OB چگونه؟

با توجه به پاسخ این دو پرسش، یک خاصیت دیگر متوازی الاضلاع را پیدا کنید و بنویسید.
در هر متوازی الاضلاع، _____

کار در کلاس



۱- شکل‌های زیر متوازی الاضلاع‌اند. با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید.



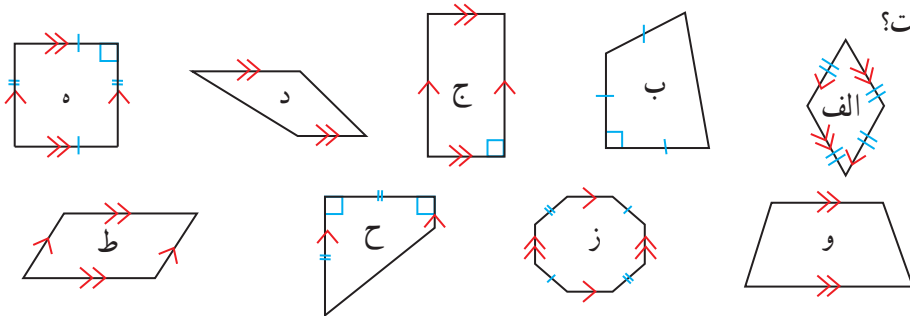
۲- در صفحه شطرنجی متوازی الاضلاعی رسم کنید که یکی از زاویه‌هایش قائمه (90° درجه) باشد. چرا زاویه‌های دیگر آن هم حتماً قائمه‌اند؟ توضیح دهید.

فعالیت



۱- با توجه به تعریف متوازی الاضلاع، کدام یک از شکل‌های زیر متوازی الاضلاع

است؟



۲- در اینجا چند چهارضلعی دیگر هم تعریف شده است. هر تعریف را بخوانید و از میان چهارضلعی‌های فعالیت قبل، مثال‌هایی برای هر یک پیدا کنید.

مستطیل متوازی الاضلاعی است که زاویه‌های قائمه دارد.

لوزی متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند.

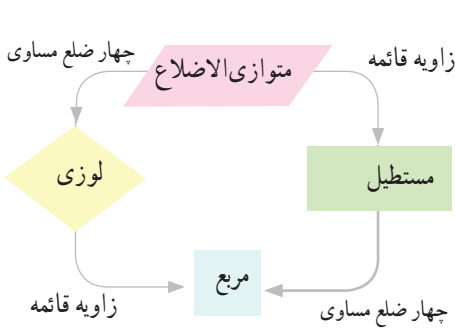
مربع متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زاویه‌های قائمه دارد.

۳- می‌دانیم که «در هر متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.»

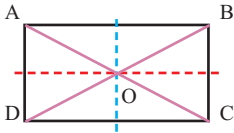
آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که «در هر لوزی هم قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند»؟ چرا؟



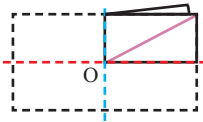
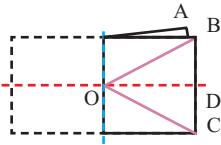
۱- با توجه به نمودار روبه‌رو در جدول زیر، جاهای خالی را پر کنید.



متوازی الاضلاع	لوزی	مستطیل	مربع	
	—	—	—	



۲- روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور آن را ببرید. مستطیل را مانند شکل نام‌گذاری کنید؛ سپس آن را ابتدا روی یکی از خط‌های تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر تا کنید.



مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به‌دست آمده چگونه هر یک از خاصیت‌های مستطیل را نشان

می‌دهد.

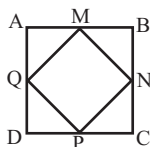
● در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون OA روی OC و OB روی OD قرار گرفته

است.

(الف) همه زاویه‌ها در مستطیل با هم برابرند؛ چون

(ب) ضلع‌های روبه‌رو در مستطیل مساوی‌اند؛ چون

(ج) قطرها در مستطیل با هم برابرند؛ چون



۳- در یک طرح کاشی کاری، مربع $ABCD$ دیده می شود. چهارضلعی $MNPQ$ هم با وصل شدن وسط ضلع های این مربع تشکیل شده است.

دو دانش آموز توضیح داده اند که $MNPQ$ چه نوع چهارضلعی ای است. نظر این دو دانش آموز در اینجا آمده است.

هادی

$ABCD$ مربع است.

این مربع را روی دو قطر آن، که محور تقارن نیز هستند، تا می کنیم.

همه زاویه های چهارضلعی $MNPQ$ روی هم می افتند؛ پس با هم برابرند. چون مجموع آنها 360° است؛ پس هر کدام 90° می شوند.

در نتیجه این چهارضلعی مستطیل است.

مبین

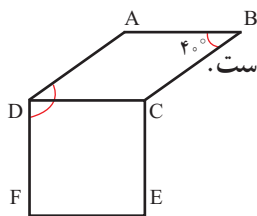
$ABCD$ مربع است.

این مربع را روی دو خط تقارنی، که موازی ضلع های آن هستند، تا می کنیم.

همه ضلع های چهارضلعی $MNPQ$ روی هم می افتند.

پس، این چهارضلعی لوزی است.

دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می توانیم نتیجه بگیریم که $MNPQ$ مربع است.



۱- چهار ضلعی $ABCD$ لوزی و چهار ضلعی $DCEF$ مربع است.

الف) چرا $\overline{AD} = \overline{CE}$ ؟ ب) چرا $AB \parallel EF$ ؟

ج) زاویه ADF چند درجه است؟

۲- روی کاغذ، لوزی دلخواهی بکشید و دور آن را ببرید.

این لوزی را کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به دست آمده چه نتایجی در مورد قطرهای لوزی به دست می آید.

۳- وسط ضلع های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می کنیم. چهارضلعی به دست آمده چه نوع چهارضلعی ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۴- درستی یا نادرستی هریک از جمله های زیر را بررسی کنید.

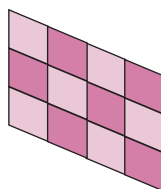
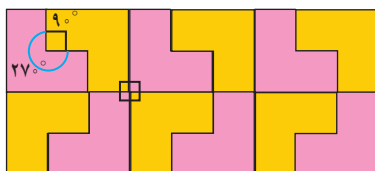
الف) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی اند. ب) قطرهای هر لوزی با هم مساوی اند.

ج) قطرهای هر مستطیل بر هم عمودند. د) قطرهای هر لوزی بر هم عمودند.

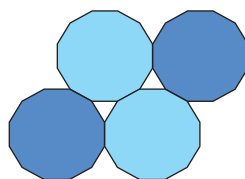
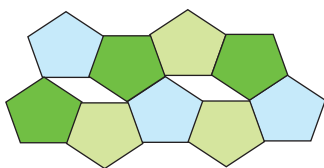




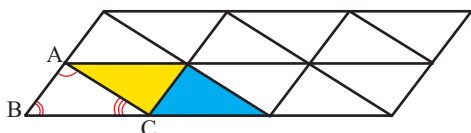
۱- در کاشی کاری، کاشی‌ها را طوری کنار هم قرار می‌دهند که روی هم نیفتند و جای خالی هم بین آنها نباشد. در اینجا چند نمونه کاشی کاری را مشاهده می‌کنید که هر کدام تنها با یک نوع کاشی انجام شده است.



حالا به شکل‌های زیر توجه کنید. در هر مورد توضیح دهید، چرا کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نمی‌شود؟



۲- سطح زیر با مثلث‌هایی هم نهشت با مثلث ABC کاشی کاری شده است.



مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است،

مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.

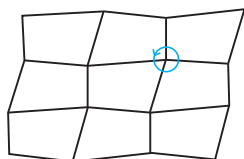
زاویه‌های متناظر با هریک از زاویه‌های مثلث ABC را در این دو مثلث مشخص کنید.

در کاشی کاری بالا، قسمتی را که نشان می‌دهد $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ پیدا کنید.

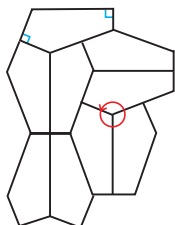
کار در کلاس



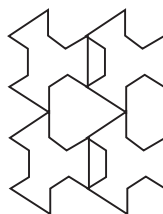
در کدام شکل، کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است؟



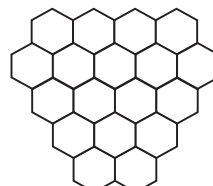
الف



ب



ج



د

فَعَالِیَّت



زاویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، **زاویه‌های داخلی** آن چندضلعی نامیده می‌شوند. مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° درجه است.

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶
شکل				
تعداد مثلث‌ها	۱	۲	—	—
مجموع زاویه‌های داخلی	$1 \times 180^\circ = 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$\dots \times 180^\circ = \dots$	

جدول بالا نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی با مجموع زاویه‌های داخلی دو تا مثلث برابر است؛ پس **مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° می‌شود.**

الف) با کامل کردن جدول، مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های دیگر را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک هفت ضلعی چند درجه است؟

یک هشت ضلعی چگونه؟ چرا؟

ج) عبارت جبری زیر را طوری کامل کنید که نشان‌دهندهٔ مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی باشد.

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی یک } n \text{ ضلعی} = (\text{---} - \text{---}) \times 180^\circ$$

اکنون با کامل کردن جدول زیر اندازهٔ هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنید.

تعداد ضلع‌ها	مجموع زاویه‌های داخلی	اندازهٔ هر زاویه
۳	180°	$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$
۴	360°	
۵		
۶		$\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$

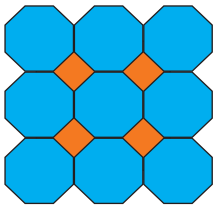
یک عبارت جبری بنویسید که نشان‌دهندهٔ اندازهٔ هر یک از زاویه‌های یک n ضلعی منتظم باشد.

کار در کلاس



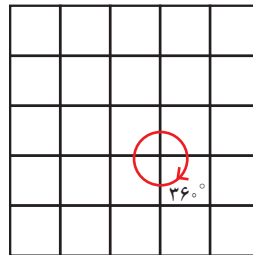
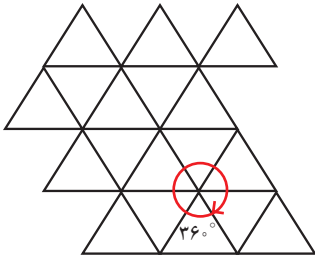
- ۱- مجموع زاویه‌های هریک از چندضلعی‌های زیر را محاسبه کنید.
 الف) هفت ضلعی منتظم
 ب) دوازده ضلعی منتظم

- ۲- به کمک جواب قسمت (ب) سؤال قبل، اندازه هر یک از زاویه‌های دوازده ضلعی منتظم را حساب کنید.

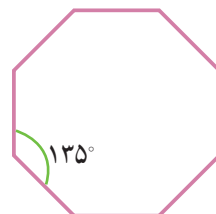
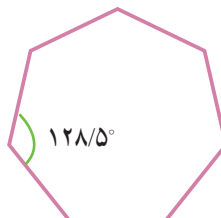
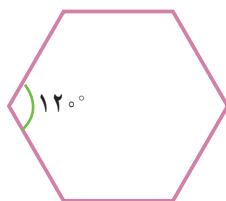
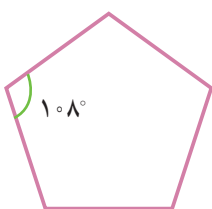


- ۳- سطح روبه‌رو با دو نوع کاشی منتظم، کاشی کاری شده است.
 اندازه زاویه‌های هر دو نوع کاشی را محاسبه کنید.

- ۴- کاشی‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم داریم و می‌خواهیم سطحی را فقط با یک نوع از آنها کاشی کاری کنیم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که با سه ضلعی و چهارضلعی منتظم (یعنی مثلث متساوی الاضلاع و مربع) می‌توان کاشی کاری کرد.



- یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی کاری کرد.

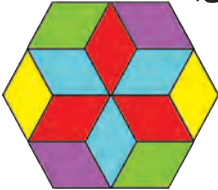


تمرین



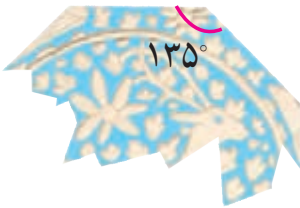
۱- اندازه هر یک از زاویه‌های یک بیست ضلعی منتظم را پیدا کنید.

۲- در کاشی کاری روبه‌رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است.



الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی ای است؟

ب) اندازه هر یک از زاویه‌های آن چقدر است؟



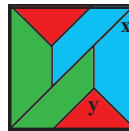
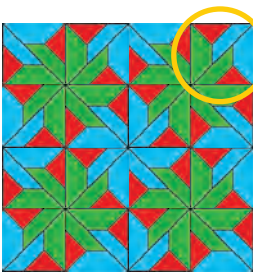
۳- شکل روبه‌رو قسمتی از یک بشقاب قدیمی به شکل

چند ضلعی منتظم است.

حدس می‌زنید این بشقاب چندضلعی بوده است؟ چرا؟

۴- به کاشی کاری زیر توجه کنید. این کاشی کاری با سه نوع کاشی مختلف انجام شده است.

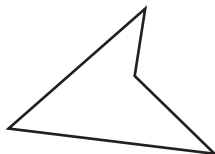
شکل سمت راست، قسمتی از این طرح را به صورت بزرگ‌تر نمایش داده است. اندازه زاویه‌های مشخص شده را به دست آورید.



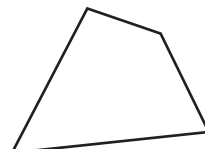
شکل سمت راست مربع است

و کاشی‌ها متساوی‌الساقین هستند.

۵- مجموع زاویه‌های داخلی هر شکل را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.



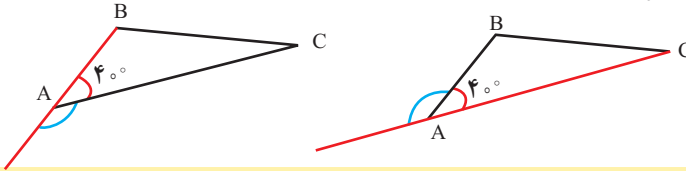
(ب)



(الف)



در شکل سمت چپ، زاویه خارجی رأس A از مثلث ABC از امتداد یافتن ضلع AB تشکیل شده است. در شکل سمت راست، زاویه خارجی رأس A از امتداد یافتن ضلع AC تشکیل شده است. چرا این دو زاویه مساوی‌اند؟

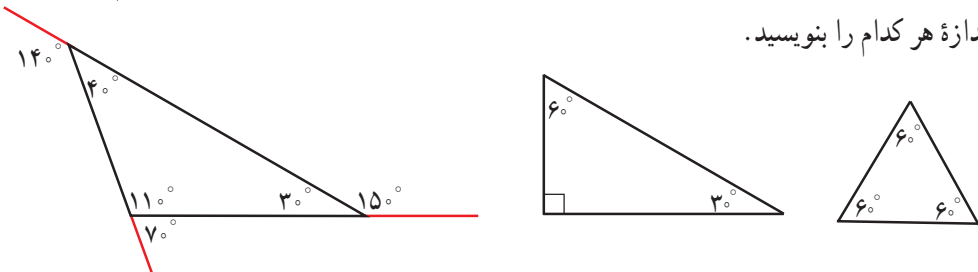


زاویه‌ای که در هر رأس یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد دیگر تشکیل می‌شود، **زاویه خارجی** آن رأس نامیده می‌شود.

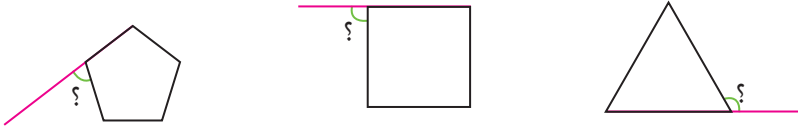
کار در کلاس



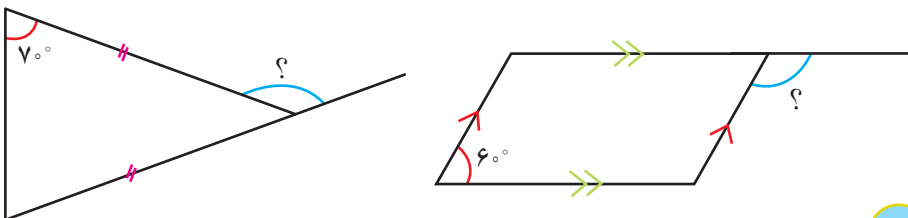
۱- الف) مانند نمونه در هر یک از مثلث‌های زیر، زاویه خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه هر کدام را بنویسید.



ب) مجموع زاویه‌های خارجی هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید. چه رابطه‌ای میان آنها دیده می‌شود؟
۲- چند ضلعی‌های زیر منتظم‌اند. اندازه زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید.

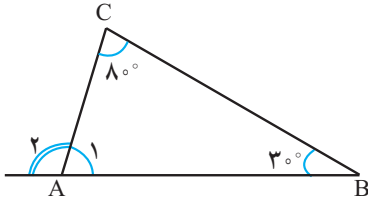


۳- با توجه به شکل، اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



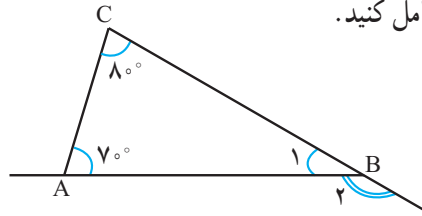


هدی برای یافتن زاویه خارجی یکی از رأس‌های مثلث به ترتیب زیر عمل کرد. راه حل او را کامل کنید.



$$\hat{A}_1 = 18^\circ - (3^\circ + 8^\circ) = 18^\circ - 11^\circ = 7^\circ$$

$$\hat{A}_2 = 18^\circ - 7^\circ = 11^\circ$$

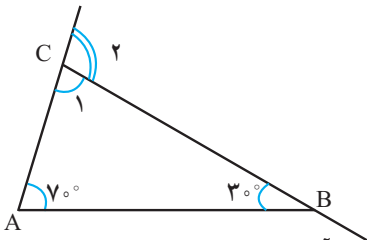


$$\hat{B}_1 = 18^\circ - (\text{---} + \text{---}) = 18^\circ - \text{---} = \text{---}$$

$$\hat{B}_2 = 18^\circ - \text{---} = \text{---}$$

او رابطه جالبی را مشاهده کرد. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای؟

هدی با خودش فکر کرد: «آیا هر زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن مثلث است؟» با یک مثال دیگر حدس خود را بررسی کرد.

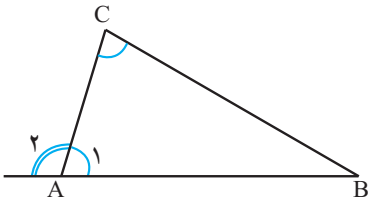


$$\hat{C}_1 = 18^\circ - (\text{---} + \text{---}) = 18^\circ - \text{---} = \text{---}$$

$$\hat{C}_2 = 18^\circ - \text{---} = \text{---}$$

این آزمایش نیز حدس او را تأیید کرد. آیا حدس زدن و آزمایش کردن کافی است؟ چرا؟

یکی از دوستان هدی راه حل او را به صورت کلی و بدون در نظر گرفتن مثال نوشت تا به این ترتیب، درستی حدس او را اثبات کند.



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 &= 18^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} &= 18^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

بنابراین در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن است.



۱- مثالی بیاورید که نشان دهد جمله زیر، نادرست است.

«هر زاویه خارجی یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر آن است.»

۲- اندازه دو زاویه یک مثلث را می‌دانیم؛ پس می‌توانیم اندازه زاویه سوم آن را پیدا کنیم.
(چگونه؟)

برای اینکه بتوانیم اندازه همه زاویه‌های هر یک از شکل‌های زیر را پیدا کنیم، دست کم چندتا از آنها باید معلوم باشند؟ الف) لوزی ب) چهارضلعی با ضلع‌های نامساوی

فعالیت



سطر اول جدول زیر، نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر 360° است.

تعداد ضلع‌ها	شکل	مجموع زاویه‌های داخلی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های خارجی
۳		$1 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$(3-1) \times 180^\circ = 360^\circ$
۴		$2 \times 180^\circ$	$____ \times 180^\circ$	$(4-2) \times 180^\circ = ____$
۵		$____ \times 180^\circ$	$____ \times 180^\circ$	$____ \times 180^\circ = ____$
۶		$____ \times 180^\circ$		
n				

الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ _____

_____ یک هشت ضلعی چگونه؟

کار در کلاس



۱- مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی‌های زیر را حساب کنید.

الف) هشت ضلعی (ب) ده ضلعی منتظم

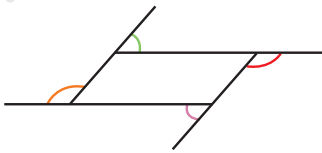
۲- به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل،

الف) اندازه هر زاویه خارجی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

ب) اندازه هر زاویه داخلی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.



تمرین



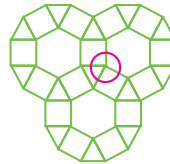
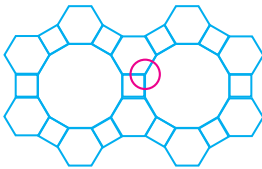
۱- زاویه‌های خارجی یک متوازی الاضلاع

در شکل نشان داده شده‌اند.

زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

۲- هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه

زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه مشخص شده در هر شکل 360° درجه است.



۳- لاک پشتی روی لبه باغچه‌ای حرکت می‌کند. او در هر گوشه می‌چرخد و روی لبه بعدی

قرار می‌گیرد.

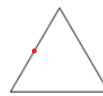
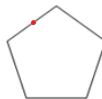
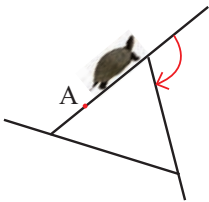
الف) این لاک پشت در هر گوشه به اندازه زاویه داخلی می‌چرخد یا زاویه خارجی؟

ب) او حرکتش را از نقطه A شروع کرده است.

تا وقتی دوباره به A برگردد، روی هم چند درجه می‌چرخد؟

ج) این لاک پشت برای پیمودن محیط هر یک از باغچه‌های منتظم زیر با شروع از نقطه مشخص شده چند

درجه می‌چرخد؟



د) در پاسخ قسمت قبل، چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید.

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- چندضلعی محدب
- چندضلعی مقعر
- مرکز تقارن
- چندضلعی منتظم
- زاویه داخلی
- زاویه خارجی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- بررسی مرکز تقارن یک شکل
- پیدا کردن زاویه‌های مساوی و مکمل در خط‌های موازی و مورب
- تعریف متوازی الاضلاع
- تعریف مستطیل
- تعریف لوزی
- تعریف مربع
- رابطه چهارضلعی‌ها
- خاصیت‌های چهارضلعی‌ها
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه خارجی یک رأس مثلث

کاربرد

این درس به شما در درک بهتر شکل‌های هندسی و رابطه بین آنها کمک می‌کند. ما در انواع صنایع دستی و آثار معماری کشور خود شکل‌های مختلف هندسی را می‌توانیم ببینیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- هر خانه جدول زیر را با علامت × یا ✓ کامل کنید.

ضلع‌های روبه‌رو برابر	ضلع‌های روبه‌رو موازی	زاویه‌های روبه‌رو برابر	قطرها منصف	قطرها برابر
مربع				
لوزی				
مستطیل				
متوازی‌الاضلاع				

۲- اندازه زاویه‌های داخلی و خارجی یک هشت ضلعی منتظم را پیدا کنید.



۴

فصل

جبر و معادله



اگر دو کفه یک ترازو روبه روی هم قرار گیرند، می گویند ترازو در حال تعادل است. اگر از یک کفه ترازو چیزی را برداریم یا به آن چیزی اضافه کنیم، همین کار را باید در کفه دیگر نیز انجام دهیم تا جبران شود و ترازو در حالت تعادل بماند. کلمه جبر هم خانواده جبران نیز هست و معادله به معنی برقرار ماندن تعادل در دو طرف تساوی است.

5

- هر عدد به توان یک، برابر خود عدد می‌شود. • $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

• یک به توان هر عدد، برابر یک می‌شود.

● در ضرب دو عبارت توان دار با پایه‌های مساوی، یک پایه را می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

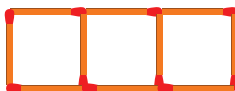
$$b^a \times c^a = (bc)^a \bullet$$

۲- الف) در عبارت جبری $2n - 1$ به جای n عددهای طبیعی $(1, 2, 3, \dots)$ قرار دهید و الگوی عددی متناظر را بنویسید.

(ب) در عبارت جبری $2m + 1$ به جای m عددهای حسابی $(0, 1, 2, 3, \dots)$ قرار دهید و الگوی عددی متناظر را بنویسید.

آیا دو الگوی عددی با هم تفاوت دارند؟

۳- شکل های زیر با چوب کبریت و با الگویی مشخص ساخته شده اند. شکل nام با چند چوب کبریت ساخته می شود؟



شكل (٣)

در اینجا پاسخ چهار دانش آموز را می بینید. توضیح دهید هر کدام از آنها پاسخ خود را چگونه به دست آورده است؛ سپس مانند نمونه ها، شکل هایی رسم کنید که روش ماهنوش را مشخص کند و بین شکل ها و عبارت های جبری رابطه برقرار کنید.



پاسخ ماهنوش : $4 + (n-1) \times 3$

پاسخ ماهر: $1 + n + n + n$



پاسخ مہتاب : $n+1+(n \times 2) \leftarrow 2+(1 \times 2), 3+(2 \times 2), 4+(3 \times 2), 5+(4 \times 2)$

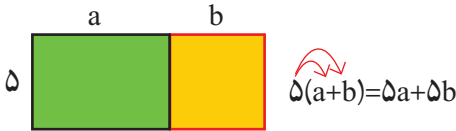
پاسخ‌های ماهنوش، ماهرو و مهتاب را ساده کنید. آیا با پاسخ ماهرخ یکی هستند؟

آیا شما هم روشی برای شمارش چوب کبریت‌ها و یافتن جمله n ام دارید؟

کار در کلاس



۱- در سال گذشته، ضرب یک عدد را در پراتز با شکل زیر یاد گرفتید.



این تساوی چگونه به کمک شکل به دست آمده است؟ توضیح دهید.

عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$3(2x-1) + 2(x+3) = 6x - 3 + \text{---} + \text{---} =$$

$$-2(y-1) + 3(1-y) =$$

$$-(a-b+1) + 2(2a+b-3) =$$

۲- شما همچنین جمع و تفریق جمله‌های متشابه (جمله‌هایی که همه قسمت‌های حرفی آنها یکی هستند) را یاد گرفتید. جمله‌های متشابه را پیدا کنید.

$$3x^2y \quad 7yx^2 \quad 2yx \quad -5x \quad +5y \quad -3xy \quad +4x \quad y$$

فعالیت

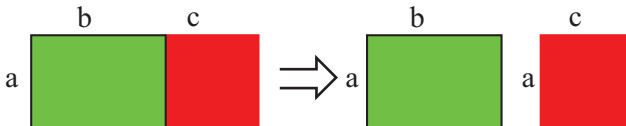


۱- حاصل ضرب دو جمله را مانند نمونه به دست آورید. از کدام قانون ساده کردن عبارت‌های توان‌دار استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

$$(-3ba)(2a^2b^2) = -6a^2b^2 \quad a \times a^2 = a^3, \quad b \times b^2 = b^3$$

$$2a \times 3b = \quad -6a \times 2a^2 = \quad 4ba \times 3b^2 =$$

۲- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت‌ها در دو قسمت، یک تساوی جبری نتیجه بگیرید.



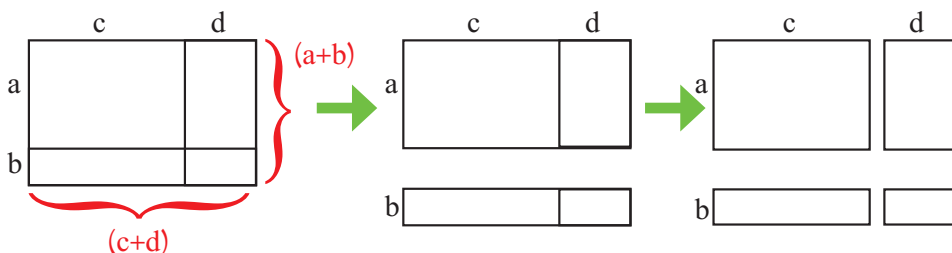
$$a(b+c) = \text{---} + \text{---}$$

با توجه به نتیجه‌ای که گرفته‌اید، ضرب‌های زیر را انجام دهید.

$$2a(a+b) =$$

$$3x(2x-1) =$$

۳- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت‌ها در دو قسمت، تساوی جبری را کامل کنید.



$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---}$$

$$(a+b)(c+d) = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---}$$

برای یافتن حاصل ضرب دو عبارت جبری، باید جمله‌های دو عبارت را درهم ضرب و سپس

ساده کنید.

$$(x+y)(x-y) =$$

$$(x-1)(x+1) =$$

$$(3x-2)(2x-3) =$$



۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$4ax + a^2 + ax =$$

$$3ab + b^2 - a^2 - 5ab =$$

$$2a - 8xy + 2xy =$$

$$9x + 7x - 8x - 3 + 11x + 5 =$$

$$5(-2a) = \frac{3}{2}(4b) =$$

$$(-7)(-4x) = \left(-\frac{4}{5}\right)(2y) =$$

$$3a(-5x) = -\frac{1}{4}a(3b) =$$

$$(-a)(-b) = (-a)(-a) =$$

$$2x(3a-b) = 3y(2x-5y) =$$

$$(x+2)(x+1) =$$

$$(a+6)(a-6) =$$

۲- عدد ۴۷ را می‌توان به صورت $40 + 7$ یا $4 \times 10 + 7$ نوشت؛ به همین ترتیب، عددهای زیر را

به صورت گسترده بنویسید.

$$92 =$$

$$75 =$$

$$33 =$$

$$\overline{ab} = 10a + b$$

عدد دورقمی ab را با نماد $\overline{ab}$ نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

تمرین



۱- عبارت جبری جمله n ام هریک از الگوهای عددی زیر را بنویسید.

۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ...

۱، ۸، ۲۷، ۶۴، ۱۲۵، ...

۲- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+3)(a+3)$$

$$(a-b)(a-b)=$$

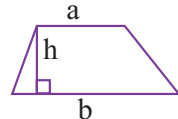
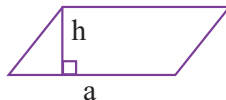
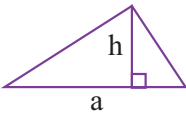
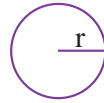
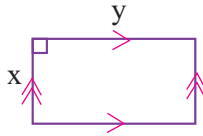
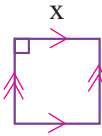
$$(a+3)(a-3)=$$

$$(a+b)(a-b)=$$

$$(x+y)(x+y)=$$

$$(2x-3y)(2x-3y)=$$

۳- مساحت هر شکل را با یک عبارت جبری بیان کنید.

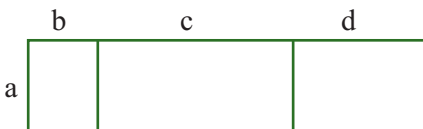


۴- دانش‌آموزی، عبارت‌های جبری زیر را نادرست ساده کرده است. اشتباه او را پیدا کنید.

الف) $a(b+c) = ab + c$

ب) $2x + 3y - (2x - y) = 2x + 3y - 2x - y = 2y$

۵- با توجه به شکل، یک تساوی جبری بنویسید.



فعالیت



۱- ماشین عددساز $\times$ عدد ورودی را در عدد داخل ماشین ضرب می‌کند. ماشین عددساز $+$ عدد ورودی را با عدد داخل ماشین جمع می‌کند. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید یا عدد داخل ماشین را بنویسید.

$a + 4$: خروجی $\rightarrow$ $+$ ۴ $\rightarrow$ ورودی a $7 \times (-3) = -21$: خروجی $\rightarrow$ $\times$ -۳ $\rightarrow$ ورودی ۷

: خروجی $\rightarrow$ $+$ -۵ $\rightarrow$ ورودی ۰ : خروجی $\rightarrow$ $\times$ ۵ $\rightarrow$ ورودی ۴

: خروجی $\rightarrow$ $+$ ۰ $\rightarrow$ ورودی c : خروجی $\rightarrow$ $\times$ ۲ $\rightarrow$ ورودی b

: خروجی $\rightarrow$ $+$ $\rightarrow$ ورودی ۱۳ : خروجی $\rightarrow$ $\times$ $\rightarrow$ ورودی ۸

۲- خروجی یک ماشین $\times$ را به ورودی یک ماشین $+$ می‌بندیم و یک ماشین ترکیبی می‌سازیم. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید.

$3x - 5$: خروجی $\rightarrow$ $+$ -۵ $\Rightarrow$ $3x$: ورودی x ۱ : خروجی $\rightarrow$ $+$ -۵ $\Rightarrow$ ۳ : ورودی ۲

: خروجی $\rightarrow$ $+$ ۸ $\Rightarrow$ -۱ $\rightarrow$ ورودی x : خروجی $\rightarrow$ $+$ ۸ $\Rightarrow$ -۱ $\rightarrow$ ورودی ۷

: خروجی $\rightarrow$ $+$ ۳ $\Rightarrow$ ۱ $\rightarrow$ ورودی x : خروجی $\rightarrow$ $+$ ۳ $\Rightarrow$ ۱ $\rightarrow$ ورودی ۵

به این ترتیب، می‌توانیم عملکرد هر ماشین ترکیبی را به شکل خلاصه، مانند مثال زیر، بنویسیم:

عملکرد ماشین ترکیبی

y : خروجی $\rightarrow$ $+$ ۴ $\Rightarrow$ ۷ : ورودی x

$y = 7x + 4$

کار در کلاس



۱- عدد x به ماشین‌های زیر وارد، و عدد y از آنها خارج می‌شود. با توجه به کاری که این ماشین‌ها انجام می‌دهند، عددهای خروجی را بنویسید.

$$-2 \longrightarrow \boxed{3x - 1} \longrightarrow$$

$$4 \longrightarrow \boxed{-2x + 1} \longrightarrow$$

$$0 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}x + 1} \longrightarrow$$

$$\frac{4}{7} \longrightarrow \boxed{-7x + 2} \longrightarrow$$

۲- با توجه به جدول‌های زیر و رابطه x و y ، جاهای خالی جدول‌ها را پر کنید:

$$y = 3x + 1$$

$$y = 5x$$

$$y = x - 7$$

$$y = 2x - 3$$

x	y
۱	
۲	
۵	

x	y
۳	
-۲	
-۴	
	۲۵

x	y
۴	
-۲	
۰	
	-۱۴

x	y
۴	
-۲	
۰	
	۵

۳- با توجه به عددهای ورودی و خروجی در هر ردیف، کاری را که ماشین انجام می‌دهد

حدس بزنید.

$$3 \rightarrow \boxed{} \rightarrow 6 \quad \text{و} \quad -7 \rightarrow \boxed{} \rightarrow -14 \quad \text{و} \quad 5 \rightarrow \boxed{} \rightarrow 10 \quad y = \underline{}$$

$$5 \rightarrow \boxed{} \rightarrow 8 \quad \text{و} \quad 11 \rightarrow \boxed{} \rightarrow 14 \quad \text{و} \quad -4 \rightarrow \boxed{} \rightarrow -1 \quad y = \underline{}$$

فعالیت



۱- به عددهای زوج زیر توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید، هر عدد زوج را می‌توان به صورت $2 \times n$ نشان داد.

۲	۴	۶	۸	۱۰
↓	↓	↓	↓	↓
2×1	2×2	2×3	$2 \times \underline{}$	$2 \times \underline{}$

۲- عددهای زوج زیر را به صورت $2n$ (n یک عدد طبیعی باشد) نشان دهید.

$$\begin{array}{ccccc} 44 & 80 & 700 & 10000 & 2000 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

۳- در عبارت های زیر به جای حروف m ، k و a عددهای طبیعی مختلفی قرار دهید. آیا

عددهای حاصل، زوج اند؟

$$\begin{array}{ccc} 2a & 2m & 2k \\ \downarrow \quad \downarrow & \downarrow \quad \downarrow & \downarrow \quad \downarrow \\ 2 \times 5 & & \end{array}$$

۴- a ، b و c را عددهای طبیعی در نظر بگیرید و به سؤال های زیر پاسخ دهید :

- آیا عبارت $2b$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟

- آیا عبارت $4c$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟

- آیا عبارت $2ab$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟

۵- آیا حاصل ضرب هر دو عدد زوج عددی زوج است؟

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا مانند نمونه چند مثال بزنید.

$$\begin{array}{ccc} 4 \times 2 = 8 & 8 \times \underline{\quad} = \underline{\quad} & \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} & \underline{\quad} \times 10 = \underline{\quad} & \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \end{array}$$

برای اینکه بدون مثال و در حالت کلی اثبات کنیم که جمله بالا درست است، دو عدد زوج را

به صورت $2m$ و $2n$ در نظر می گیریم و حاصل ضرب آنها را می نویسیم.

$$2m \times 2n = 2(m \times 2 \times n)$$

چگونه این تساوی ثابت می کند که حاصل ضرب دو عدد زوج عددی زوج است؟ توضیح دهید.

کار در کلاس



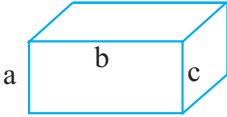
مانند سؤال ۵ فعالیت بالا، ثابت کنید که حاصل ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی زوج است.

الف) چند مثال بزنید.

ب) به صورت جبری ثابت کنید : $2m - 1 = \text{عدد فرد}$ $2n = \text{عدد زوج}$

$$(2m-1) \times 2n = \text{حاصل ضرب عدد زوج در عدد فرد}$$

تمرین



۱- مساحت کل مکعب مستطیل روبه‌رو

را به صورت جبری بنویسید.

اگر $a = 2$ و $b = 6$ و $c = 3$ باشند، مساحت کل چقدر می‌شود؟

۲- مساحت قاعده منشوری 20° و ارتفاع آن ۴ است. حجم این منشور را با نوشتن رابطه

جبری حجم منشورها به دست آورید.

۳- قاعده‌های دوزنقه‌ای ۴ و ۷ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۲ سانتی‌متر است. مساحت این دوزنقه

را پس از نوشتن رابطه جبری مساحت دوزنقه حساب کنید.

۴- آیا $x = 2$ و $x = -2$ پاسخ معادله $x^2 = 4$ هستند؟ چرا؟

۵- طول یک لوله x متر است. طول لوله دیگر، y برابر لوله اول است. طول لوله دوم را

به صورت جبری بنویسید.



۶- یک زمین والیبال مستطیل شکل، دارای x متر عرض

و $2x$ متر طول است. مساحت این زمین را به صورت جبری نشان

دهید. اگر عرض این زمین ۹ متر باشد، مساحت آن چند متر مربع است؟

۷- در درس علوم یاد می‌گیرید که انرژی پتانسیل ذخیره شده در هر جسم از رابطه $U = mgh$

به دست می‌آید که در آن، U انرژی پتانسیل، m جرم جسم، g شتاب زمین و h ارتفاع جسم است. در صورتی

که جسمی به جرم ۲۵ کیلوگرم تا ارتفاع ۴ متر بالا برود، مقدار انرژی پتانسیل آن را پیدا کنید. (شتاب زمین

را 10 فرض کنید.)

۸- با توجه به رابطه x و y ، مقدار y را برای x های مختلف پیدا کنید.

$$y = x - 3$$

x	y
۱	
۰	
۲	
-۱	

$$y = -2x + 1$$

x	y
۱	
۰	
۲	
-۱	

$$y = x^2$$

x	y
۲	
-۲	
۰	
-۱	



۱- در دوره دبستان یاد گرفتید که با تبدیل صورت و مخرج کسر به ضرب عددها، می‌توان کسر را ساده کرد.

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \times \cancel{3}}{3 \times \cancel{3}} = \frac{2}{3}$$

کسرهای زیر را مانند نمونه ساده کنید.

$$\frac{12}{18} =$$

$$\frac{15}{35} =$$

۲- بعضی از عبارت‌های جبری را نیز می‌توان به صورت ضرب دو یا چند عبارت نوشت :

$$\left. \begin{array}{l} a(b+c) = ab+ac \quad \text{خاصیت توزیع پذیری} \\ ab + ac = a(b+c) \quad \text{تجزیه (تبدیل به ضرب)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{توزیع پذیری}} \\ a(b+c) = ab+ac \\ \xleftarrow{\text{تجزیه}} \end{array}$$

با توجه به تساوی بالا، عبارت‌ها را به ضرب تبدیل کنید.

$$5ab+8ac=a(\quad + \quad)$$

$$x + xy =$$

$$5ab+3b=$$

$$3a+ab=$$

۳- برای تجزیه یک عبارت جبری، عامل یا بخش مشترک دو یا چند جمله را پیدا می‌کنیم و بیرون پیرانتز می‌نویسیم. برای تشخیص قسمت مشترک، می‌توان عبارت‌ها را به صورت ضرب نوشت :

$$\begin{aligned} 6a^2b^2 + 9a^2b^2 &= 2 \times \cancel{3} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times b \times \cancel{b} \times \cancel{b} + 3 \times \cancel{3} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{b} \times \cancel{b} \\ &= 2 \times \cancel{3} \times \cancel{a}^2 \times \cancel{b}^2 \times b + 3 \times \cancel{3} \times \cancel{a}^2 \times \cancel{b}^2 \times a \end{aligned}$$

با توجه به تساوی بالا، عامل مشترک دو جمله عبارت جبری چیست؟

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله اول عبارت ساخته می‌شود؟

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله دوم عبارت ساخته می‌شود؟

حالا این تساوی را کامل کنید. $6a^2b^2 + 9a^2b^2 = \text{---} (\text{---} + \text{---})$

۴- با توجه به سؤال صفحه قبل، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$ab+ac=$$

$$ab-ac=$$

$$5ab+3abc=$$

$$6ab+3a^2=$$

$$4x^2y+6xy^2=$$

$$8x^2y^2-4xy^2=$$

۵- ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه و سپس آن را ساده کنید.

$$\frac{ab+ac}{ab-ac}=$$

$$(a \neq 0, b \neq c)$$

$$\frac{a^2-a}{ab-b}=$$

$$(a \neq 1, b \neq 0)$$

کار در کلاس



۱- عبارت‌های زیر را به ضرب تبدیل کنید.

$$x \times 2^a - y \times 2^a =$$

$$42xy^2 - 35x^2y^2 =$$

$$2^x \times 2^y - 2^x \times 2^z =$$

$$-a^2 + 2a^2 =$$

۲- با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج کسر را ساده کنید. $(a \neq b, ab \neq 0)$

$$\frac{a^2b - ab^2}{a^3b^2 - a^2b^3} =$$

۳- آیا تساوی $-a-b = -(a+b)$ همواره برقرار است؟

۴- چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج می‌شود؟

$2n$: عدد زوج

$2m$: عدد زوج دیگر

$2n + 2m$: مجموع دو عدد زوج

خواندنی

خوارزمی در کتاب جبر و مقابله خود برای عددهای علامت‌دار اصطلاحاتی به کار برده است؛ برای مثال ۵- را «پنج ناقص» و ۵+ را «پنج زاید» خوانده است. با اینکه در زمان خوارزمی کاربرد حروف متداول نبوده است، او در حل معادله‌های جبری، مجهول را «شیئی» و مجذور مجهول را «مال» نامیده است.

فعالیت



۱- تفاوت x^2 و $2x$ چیست؟

$$x^2 =$$

$$2x =$$

۲- مانند نمونه، طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.

$$3^2 = 3 \times 3$$

$$(-5)^2 = \text{---} \times \text{---}$$

$$a^2 = \text{---} \times \text{---}$$

$$\square^2 = \square \times \square$$

$$\triangle^2 = \text{---} \times \text{---}$$

$$(a+b)^2 = \text{---} \times \text{---}$$

۳- جدول زیر را برای مقدارهای مختلف a و b کامل کنید.

a	۱	۲	۰	۲	-۱
b	۱	۰	-۳	۴	-۲
$(a+b)^2$					
$a^2 + b^2$					

از مقایسه دو ردیف آخر، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴- مانند نمونه، عبارت‌ها را ساده کنید.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x-y)^2 =$$

$$(2x+1)^2 =$$

کار در کلاس



۱- مانند نمونه، تساوی‌ها را کامل کنید.

$$x^4 = x \times x \times x \times x$$

$$-x^2 =$$

$$(-x)^2 =$$

$$(a-b)^2 =$$

$$(a+b)^2 =$$

$$(x+1)^2 =$$

۲- چرا $ba = ab$ است؟ (از کدام خاصیت ضرب استفاده می‌شود؟)

۳- عبارت زیر را ساده کنید.

$$-(a+b)^2 =$$

آیا منفی به توان ۲ می‌رسد؟ چرا؟

تمرین



۱- آیا $b-a = -(a-b)$ است؟ چرا؟

۲- چرا مجموع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود؟

۳- مجموع دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد، زوج می‌شود یا فرد؟ چرا؟

۴- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+3)^2 =$$

$$(2x-3y)^2 =$$

$$(x+7)(x-7) =$$

$$a^2 + b^2 - (a-b)^2 =$$

۵- با توجه به پیکان‌های رسم شده، عبارت را ساده کنید.

$$(x-1)(x^2+x+1)$$

۶- اگر دو پراتنز زیر را در هم ضرب کنیم، چند جمله خواهیم داشت؟ چرا؟

$$(a+b+c)(z+y+x)$$

خواندنی

خوارزمی

ابو عبدالله محمد بن موسی خوارزمی حدود سال ۱۳۵ هجری قمری در شهر خوارزم (که امروز خیه نامیده می‌شود) متولد شد. وی یکی از مفاخر علمی ایران و جهان و از بزرگ‌ترین دانشمندان مسلمان در قرن‌های گذشته است.

یکی از آثار خوارزمی کتاب جبر و مقابله است. این کتاب نخستین کتابی است که نام جبر را بر خود دارد. نام جبر به عنوان بخشی از ریاضی از نام این کتاب گرفته شده است. از این نظر، خوارزمی را می‌توان یکی از بنیان‌گذاران علم جبر دانست. امروز جبر به شاخه‌ای مهم از ریاضی گفته می‌شود.

کتاب حساب خوارزمی در قرن دوازدهم هجری به زبان‌های اروپایی ترجمه شد و به «الخوریسمی» یا «الگوریسمی» که از نام «الخوارزمی» گرفته شده بود، شهرت یافت. بعدها الگوریسم یا الگوریتم (Algorithm) به معنای فن محاسبه (یعنی حساب) به کار رفت. امروزه الگوریتم به روشی از محاسبه گفته می‌شود که در آن محاسبه مرحله به مرحله انجام می‌گیرد و محاسبه هر مرحله به مراحل قبلی بستگی دارد.

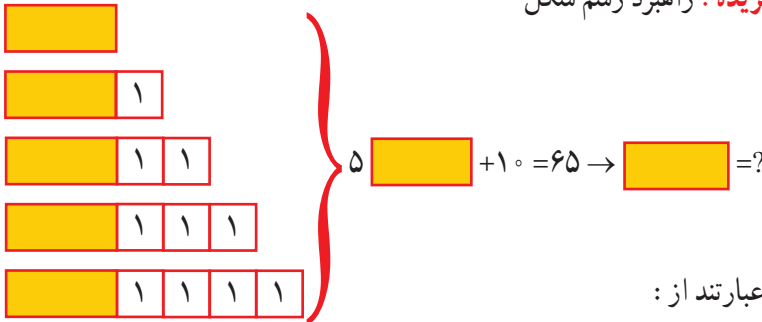


۱- حاصل جمع پنج عدد متوالی طبیعی ۶۵ شده است. عدد وسط چه عددی است؟
پنج دانش آموز این مسئله را با راهبردهای مختلف حل کرده اند. راه حل هر کدام را کامل کنید و توضیح دهید.

راه حل سمیه: راهبرد حدس و آزمایش

	عدد اول	عدد دوم	عدد سوم	عدد چهارم	عدد پنجم	حاصل جمع
حدس اول	۵	۶	۷	۸	۹	۳۵
حدس دوم	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	
حدس سوم	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	

راه حل فریده: راهبرد رسم شکل



و عددها عبارتند از:

راه حل فهیمه: راهبرد روش های نمادین

$$O + (O+1) + (O+2) + (O+3) + (O+4) = 65$$

$$5O + 10 = 65 \rightarrow O = ?$$

عدد وسطی را در تساوی بالا مشخص کنید.

و عددها عبارتند از:

راه حل مهدیه: راهبرد تشکیل معادله

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 65$$

$$5x + 10 = 65 \rightarrow x =$$

و عددها عبارتند از:

راه حل فرشته: راهبرد تشکیل معادله

$$(x-2) + (x-1) + x + (x+1) + (x+2) = 65$$

تفاوت راه حل های فرشته و مهدیه را توضیح دهید.

۲- مهدیه با توجه به آنچه سال گذشته آموخته بود، معادله خود را به صورت زیر حل کرد :

$$\begin{array}{l}
 5x + 10 = 65 \\
 -10 \\
 \hline
 5x + 10 - 10 = 65 - 10 \\
 5x = 55 \\
 \times \frac{1}{5} \\
 \hline
 \frac{1}{5} \times 5x = \frac{1}{5} \times 55 \\
 x = 11
 \end{array}$$

معلم راه حل مهدیه را به صورت زیر خلاصه کرد. توضیح دهید در این روش معنی پیکان‌ها

چیست؟

$$\begin{array}{l}
 5x + 10 = 65 \\
 5x = 65 - 10 \\
 5x = 55 \rightarrow x = \frac{55}{5} = 11
 \end{array}$$

۳- با توجه به سؤال بالا، روش حل معادله را توضیح دهید؛ سپس معادله‌های دیگر را به همین

ترتیب حل کنید.

$$2x - 3 = x + 5$$

$$3x - 1 = x - 7$$

$$2(x - 1) = 3(x + 4)$$

$$2x - x = 5 + 3$$

$$x = 8$$

کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

$$5(x - 2) = 8$$

$$x + 4 = 16$$

$$4x - 3 = 2x - 1 + 5x$$

$$1 - 2x = -(x - 1) + 2$$

$$2(x - 1) = 3(1 - x)$$

$$2x - 3(1 - x) = 0$$

فعالیت



۱- معادله زیر را دو دانش آموز حل کرده اند. راه حل آنها را توضیح دهید. ویژگی های هر کدام از روش ها را بگویید و در کلاس با یکدیگر در این باره گفت و گو کنید.

راه حل یگانه

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{6}$$

$$x = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{14}{6}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

راه حل یکتا

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$6 \times \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \right) = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$6 \times \frac{1}{2}x - 6 \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$3x - 2 = 5$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

چرا یکتا عدد ۶ را برای ضرب کردن انتخاب کرده است؟

۲- دو دانش آموز کسر $-\frac{x+3}{2}$ را به صورت زیر در ۶ ضرب کرده اند. کدام یک اشتباه کرده است؟ اشتباه او را توضیح دهید.

$$6 \times \left(-\frac{x+3}{2} \right) = -3x - 9$$

$$6 \times \left(-\frac{x+3}{2} \right) = -3x + 9$$

کار در کلاس



معادله های زیر را حل کنید.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$-\frac{6}{25}x - \frac{4}{15} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x+2}{3}$$

تمرین



۱- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$-\frac{3}{8}x + 5 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{12}x - \frac{7}{18} = 2$$

$$4x + \frac{2}{7} = \frac{3}{2}x$$

$$2x - \frac{2}{3} = 5x + 3$$

$$1 - \frac{x+1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2x-1}{4} = \frac{3}{4}$$

۲- عرض مستطیلی ۵ سانتی‌متر و محیط آن ۲۴ سانتی‌متر است. طول این مستطیل چقدر است؟

۳- هفت برابر عددی به اضافه ۴ مساوی ۵۸ است. آن عدد چند است؟

۴- حاصل جمع سه عدد متوالی طبیعی ۲۷ شده است. کوچک‌ترین این عددها را پیدا کنید.

۵- از پنج برابر عددی ۳ تا کم کردیم، عدد ۱۷ به دست آمد. آن عدد چند است؟

۶- اگر مربع عددی به آن عدد اضافه شود، عدد حاصل، ۴۲ خواهد بود. کدام یک از

اندازه‌های زیر می‌تواند مقدار آن عدد باشد؟

(الف) ۴۲

(ب) ۱۴

(ج) -۶

(د) -۷

(ه) -۵

۷- پدری ۴۵ سال دارد. دو فرزند او ۹ و ۱۴ ساله‌اند. پس از چند سال سن پدر با مجموع

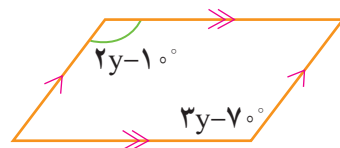
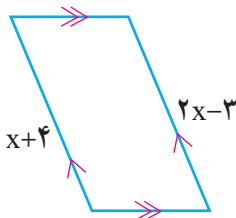
سن فرزندانش برابر می‌شود؟

۸- در درس علوم یاد گرفتید که کار انجام شده با مقدار نیرو در اندازه جابه‌جایی برابر است.

این رابطه را با تساوی $W = F \cdot d$ نشان می‌دهیم. اگر کار انجام شده ۱۲ و مقدار نیرو ۴ باشد، مقدار

جابه‌جایی را حساب کنید.

۹- با توجه به شکل، معادله تشکیل دهید و مقدار مجهول را بیابید.



مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- جمله‌های متشابه
- معادله
- تجزیه کردن (تبدیل به ضرب)

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند، با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- تبدیل عبارت جبری به عبارت کلامی و برعکس
- ساده کردن یک عبارت جبری با جمع جمله‌های متشابه
- ضرب جمله در پرانتز
- پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت
- تبدیل یک عبارت به ضرب
- بیان رابطه جبری برای الگوهای مساحت و محیط و...
- ضرب جمله در جمله
- ضرب پرانتز در پرانتز
- حل معادله‌های کسری

کاربرد

موضوع‌های این فصل علاوه بر کاربردهایی که در ریاضی دارد به شما در حل مسئله‌های روزمره نیز کمک می‌کند. شما با تشکیل معادله و حل آن می‌توانید مسائل زیادی را حل کنید؛ به همین ترتیب، می‌توانید در سایر درس‌ها، مثل علوم، نیز از رابطه‌ها و معادله‌های جبری استفاده کنید.

تمرین ترکیبی

۱- عبارت جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 =$$

مقدار عددی عبارت حاصل را به ازاء $a = 2$ و $b = -2$ به دست آورید.

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$2x - 1 = 3(x - 1)$$



۵

فصل

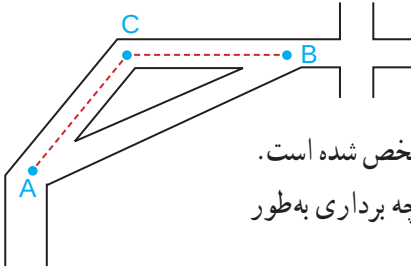
بردار و مختصات



شتاب حرکت هر جسم در هر لحظه، همواره در جهت بردار برآیند نیروهای وارد بر آن است؛ برای مثال وقتی یک موشک شلیک می‌شود، نیروهای وارد بر آن عبارت‌اند از، نیروی وزن، نیروی پیشران، نیروی مقاوم هوا در راستای حرکت موشک (پسار) و نیروی برآر (عمود بر راستای حرکت) به‌طوری که برآیند این نیروها باعث حرکت موشک می‌شود.

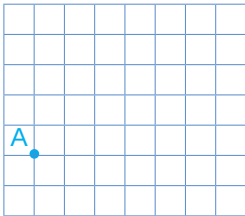
جمع بردارها

فعالیت



۱- شخصی در نقطه A ایستاده است.

مسیر حرکت او برای رسیدن به نقطه B در شکل مشخص شده است. این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به طور مستقیم به نقطه B می‌رسد؟ آن را رسم کنید.

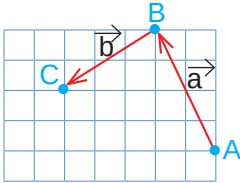


۲- روباتی فقط به صورت افقی یا عمودی حرکت می‌کند.

این روبات اکنون روی نقطه A است. با فرمان $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ۴ واحد به سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می‌کند. نقطه جدید را B نام گذاری کنید.

روبات ما با فرمان $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ از B به نقطه C می‌رسد.

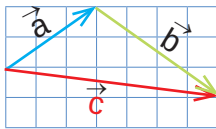
با چه فرمانی به طور مستقیم از نقطه A به C می‌رسد؟



۳- نقطه A ابتدا با بردار انتقال $\vec{a}$ به نقطه B و سپس با بردار انتقال $\vec{b}$ به نقطه C منتقل شده است. نقطه A با چه برداری به طور مستقیم به نقطه C منتقل می‌شود؟

نام آن را بردار c بگذارید. آیا می‌توانیم بگوییم بردار c کار دو بردار انتقال $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را انجام می‌دهد؟ به بردار c بردار **برایند** یا **حاصل جمع** می‌گویند.

۴- مختصات بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را بنویسید.



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

آیا بردار c با جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است؟ به ابتدا و انتهای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ توجه کنید. برداری که از ابتدای $\vec{a}$ به انتهای $\vec{b}$ رسم می‌شود (بردار c) برابر است با _____.

در فعالیت ۲ مشاهده کردید که نتیجه جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، بردار c است؛ بنابراین، می‌توان یک

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \text{ را نوشت. تساوی برداری به صورت}$$

با توجه به تساوی $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ می‌توان مختصات بردار c را از **تساوی مختصاتی** زیر به دست

$$\begin{bmatrix} \vec{a} \\ x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{b} \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a} + \vec{b} \\ x + z \\ y + t \end{bmatrix}$$

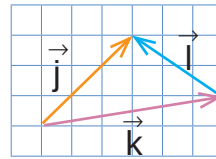
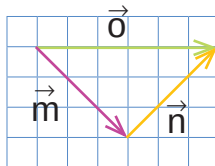
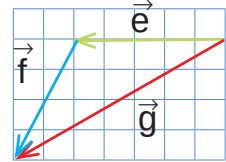
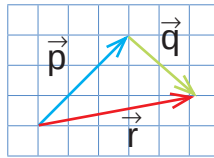
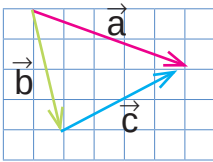
آورد:

کار در کلاس



در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد برای رسم حاصل جمع یا برابند این دو بردار می توانیم برداری از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کنیم.

ابتدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل جمع دو بردار دیگر است؛ سپس برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



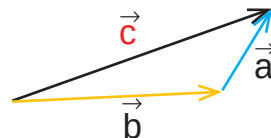
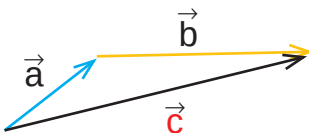
فعالیت



۱- چهار بردار مساوی بردار a رسم کنید و مختصات همه بردارها را بنویسید.



۲- با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می توان از نقطه های شروع مختلف رسم کرد، می خواهیم حاصل جمع بردارهای a و b را رسم کنیم.
راه حل های این دو دانش آموز را توضیح دهید.



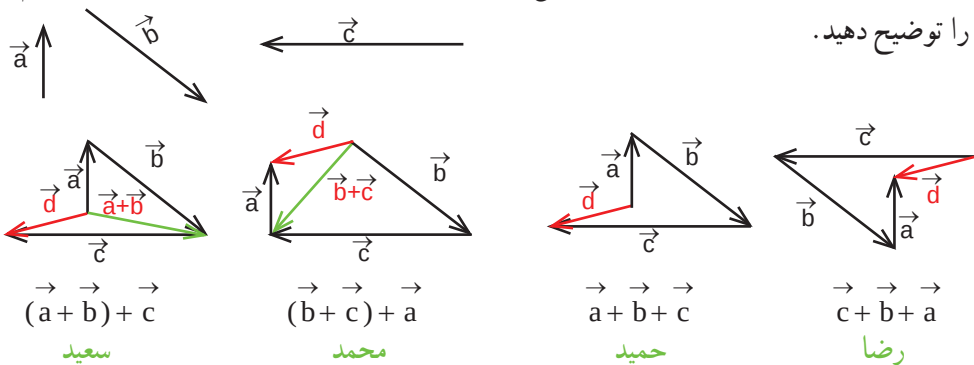
امیر

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

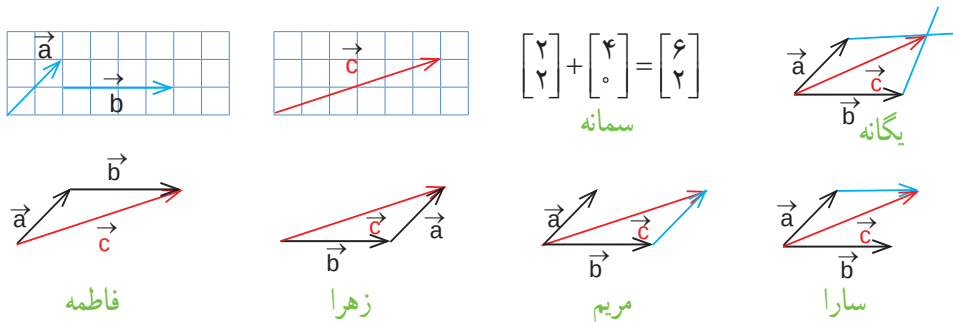
رضا

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

۳- دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار، راه‌حل‌های زیر را ارائه کرده‌اند. هر کدام را توضیح دهید.

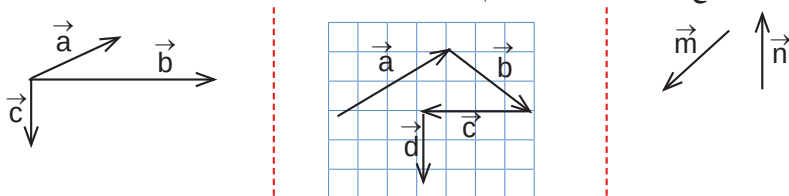


۴- راه‌حل‌های دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را مشاهده و مقایسه کنید.

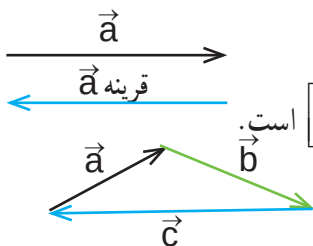


کار در کلاس

۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



۲- جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است.

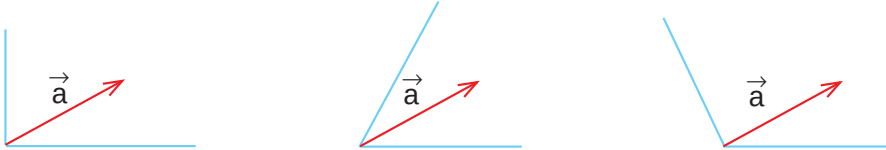


بردار صفر را به صورت $\vec{0}$ نشان می‌دهیم و مختصات آن $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ است. حاصل جمع بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ چیست؟ چرا؟

فعالیت



۱- دو بردار در راستاهای آبی رنگ رسم کنید که جمع آنها بردار a باشد. به این کار تجزیه بردار می‌گویند. چند پاسخ مختلف می‌توان به دست آورد؟ چرا؟

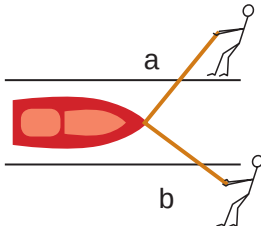


۲- مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، بنویسید.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر بنویسید. فکر می‌کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

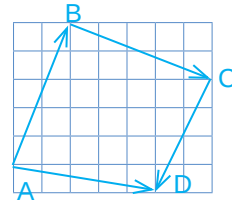
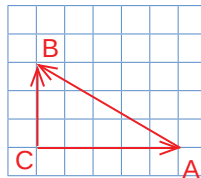
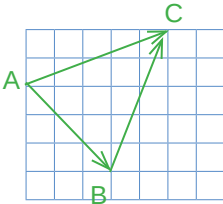
تمرین



۱- دو نفر در کنار رودخانه با دو طناب، قایقی را در خلاف جهت آب می‌کشند. الف قایق به کدام سمت حرکت می‌کند؟

ب) اگر نیروی a بیشتر باشد، قایق به کدام طرف متمایل می‌شود؟

۲- در هر شکل یکی از بردارها، حاصل جمع بردارهای دیگر است. برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



۳- در هر تساوی، x و y را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

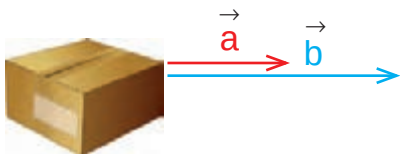


فعالیت



۱- در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده

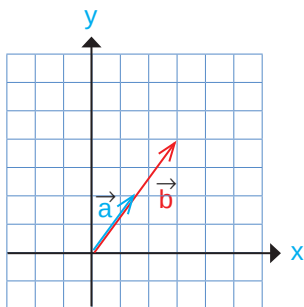
رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کند، بردار حرکت جدید را رسم کنید.



۲- دو نفر سعی می کنند جعبه روبه رو را بکشند و به جای دیگری ببرند. نیرویی که نفر اول وارد می کند با بردار a و نیروی نفر دوم با بردار b نمایش داده شده است. با توجه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول است؟ چرا؟

۳- در فعالیت های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازه آن،

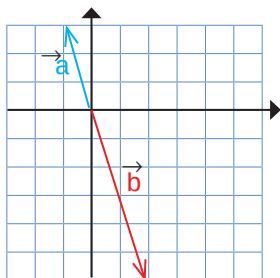
چه نکاتی را رعایت کردید؟



۴- در هر شکل، مختصات بردارهای a و b را بنویسید. رابطه دو بردار a و b را با یک تساوی برداری و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.

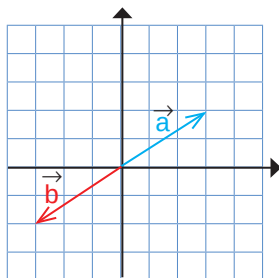
$$\vec{b} = 2\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$



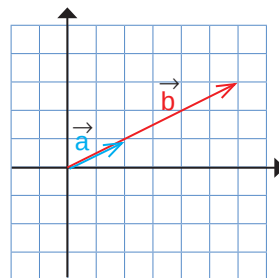
$$\vec{b} = -2\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$



$$\vec{b} =$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$



$$\vec{b} =$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.
بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

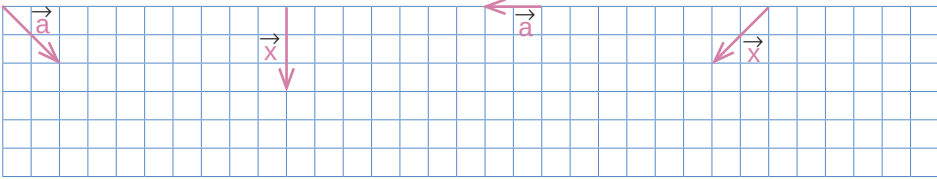
اگر بردار b قرینه بردار a باشد، می‌نویسیم: $\vec{b} = -\vec{a}$ یا $\vec{b} = (-1)\vec{a}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = -\vec{a} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

کار در کلاس



با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



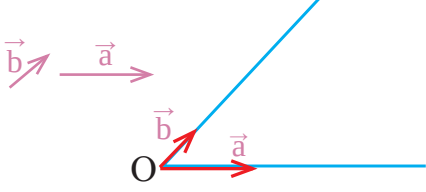
$$\vec{b} = 3\vec{a}$$

$$\vec{y} = -2\vec{x}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{a}$$

$$\vec{y} = -\frac{3}{4}\vec{x}$$

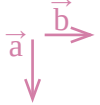
فعالیت



۱- بردارهای a و b مفروض‌اند.

بردار $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ را رسم کنید.

از نقطه دلخواه O بردارهای $2a$ و $3b$ را رسم کنید؛ سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.



$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{a} + (-3\vec{b})$$

۲- بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

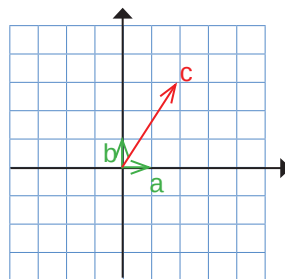
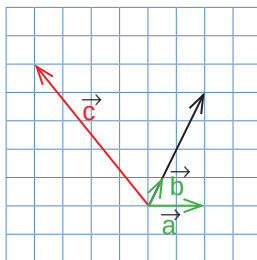
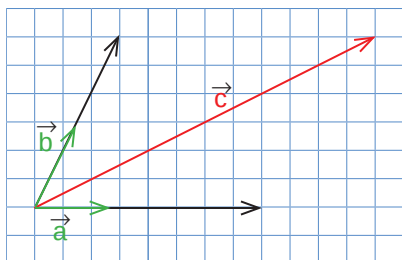


$$\vec{z} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$$

کار در کلاس



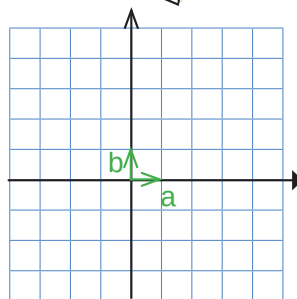
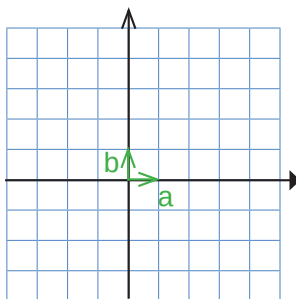
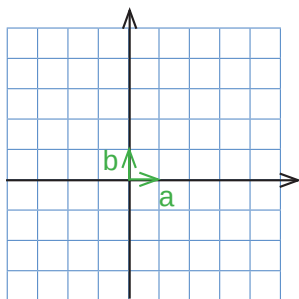
در هر شکل، بردار c را بر حسب بردارهای a و b بنویسید.



تمرین



۱- با توجه به بردارهای a و b ، بردارهای c و d را رسم کنید.



$$\vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{d} = (-2)\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -4\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -\vec{a} + 5\vec{b}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$(-4) \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

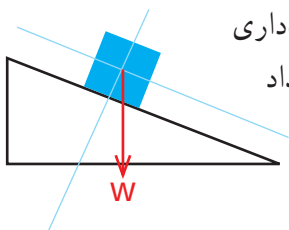
۳- معادله‌های مختصات زیر را حل کنید.

$$4x = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$-3x = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$



۴- در شکل روبه‌رو، نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب‌داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم شده تجزیه کنید.

۵- با توجه به بردارهای a و b ، مختصات بردار c را به دست آورید.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$$

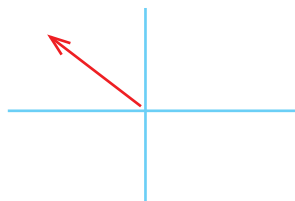
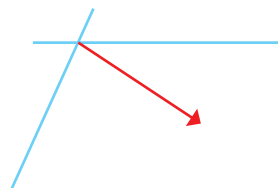
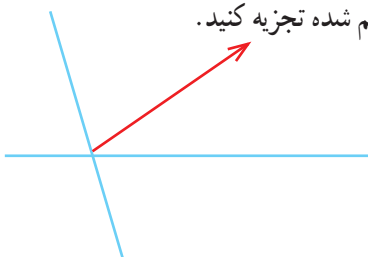
۶- با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$

۷- بردارهای داده شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.



فعالیت



۱- برای اندازه‌گیری هر یک از مقادیرهای زیر از چه واحدی استفاده می‌کنیم؟



زمان:



زاویه:



دما:



جرم:



طول:

۲- در محور زیر، واحد را نشان داده‌ایم. عددهای ۱ و ۲ را روی محور مشخص کنید.



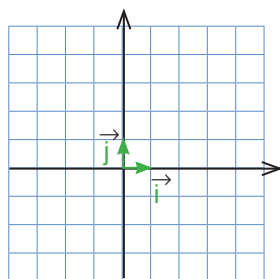
۳- همان‌طور که ملاحظه کردید برای اندازه‌گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم.

برای نمایش بردار نیز به واحد نیازمندیم. این واحد باید

از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه مختصات با

دو محور نمایش داده می‌شود به واحد روی هر دو محور نیاز داریم.

در شکل روبه‌رو، بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده‌اند.



● مختصات بردارهای واحد را بنویسید. $\vec{i} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

● بردار $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ را رسم کنید.

● مختصات بردار $\vec{a}$ را بنویسید.

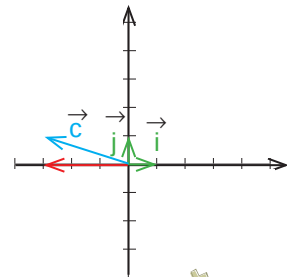
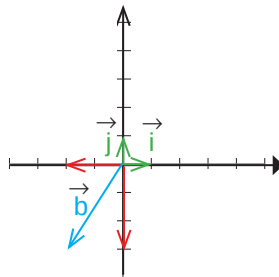
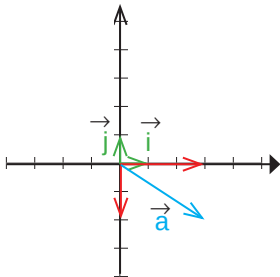
● مختصات بردار $\vec{a}$ را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 4 \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} =$$

کار در کلاس



در هر قسمت، بردار داده شده را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.



فعالیت



۱- طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} =$$

$$2\vec{i} - 3\vec{j} =$$

$$3\vec{i} =$$

۲- دو دانش آموز، معادله برداری زیر را حل کرده اند. مراحل راه حل آنها را با هم مقایسه کنید.

راه حل حمید

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j}$$

$$2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{i} - \vec{j}$$

$$2\vec{x} = -8\vec{i}$$

$$\vec{x} = -4\vec{i}$$

راه حل سعید

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳- معادله های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

$$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \vec{i} - \vec{j}$$

کار در کلاس



اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای x و y را به دست آورید.

$$\vec{x} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{y} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$$

تمرین



۱- طرف دیگر تساوی ها را بنویسید.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} -5 \\ \quad \end{bmatrix} =$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = -2\vec{j}$$

۲- دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.

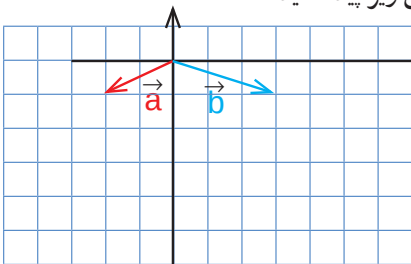
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۳- با توجه به شکل زیر، مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید.



الف) رسم شکل و نوشتن مختصات $\vec{c}$ از روی شکل

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ب) پیدا کردن مختصات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و قرار دادن آنها در

تساوی زیر.

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3 \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ویژگی های هر روش را بیان کنید.

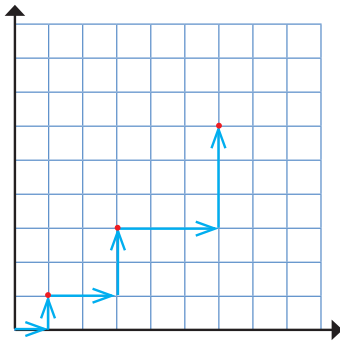
کدام روش برای رایانه ای شدن مناسب تر است؟ چرا؟

۴- با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

طول	+	-	+	-
عرض	+	+	-	-
شکل تقریبی				

۵- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، بردار x را از معادله زیر پیدا کنید.

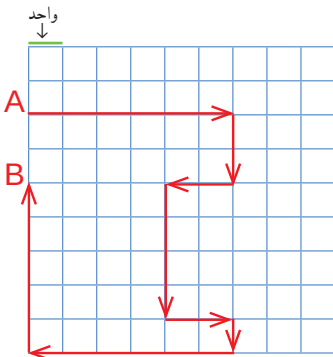
$$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b}$$



۶- یک روبات برنامه‌ریزی شده به صورت زیر از مبدأ مختصات حرکت می‌کند.

با مشاهده سه حرکت اول این روبات، الگویی برای حرکت آن کشف کنید و توضیح دهید. روبات پس از حرکت پنجم به کدام نقطه می‌رسد؟

۷- حمیده با خود فکر می‌کرد که اگر چند بردار با هم جمع شوند، بردار حاصل جمع از همه آنها بزرگ‌تر است. آیا او درست فکر کرده است؟ با کشیدن شکل توضیح دهید.



۸- در صفحه شطرنجی زیر، یک خودرو با نقطه A مشخص شده است. این خودرو مسیری را طی کرده است تا به نقطه B برسد؛ در کل به اندازه چند واحد حرکت کرده است؟

خودرو از نقطه A به B در راستای عمودی چند واحد جابه‌جا شده است؟

●●●●● مرور فصل ۵ ●●●●●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود آنها را توصیف کنید و برای هریک مثالی بزنید.

- جمع (برایند) بردارها
- تجزیه بردار
- ضرب عدد در بردار
- بردارهای واحد مختصات

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه‌ای از درس را بنویسید.

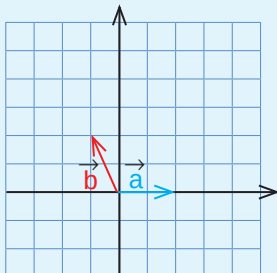
- پیدا کردن جمع دو بردار
- پیدا کردن بردار دو بردار که ابتدای آنها یک نقطه باشد
- نوشتن جمع برداری و جمع مختصاتی
- ضرب یک عدد در بردار
- رسم بردارهای ترکیبی که شامل حاصل جمع مضرب‌های دو بردارند.
- پیدا کردن مختصات بردارهای ترکیبی
- تجزیه یک بردار روی دو امتداد
- نوشتن مختصات بردار با بردارهای واحد مختصات
- نمایش بردارهای واحد مختصات به صورت مختصاتی
- حل کردن معادله‌های شامل بردار

کاربرد

موضوعات این فصل در درس‌های علوم (فیزیک – مکانیک) شما کاربرد زیادی دارد؛ ضمن اینکه در شاخه‌ای از ریاضیات به نام «جبر خطی و فضای برداری» نیز مطرح می‌شود و به کمک آن می‌توانید مسائل مختلف ریاضی و فیزیک را حل کنید.

تمرین‌های ترکیبی

- ۱- با توجه به بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، بردار $\vec{d}$ را رسم کنید. $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$
- ۲- اگر $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار $\vec{x}$ را پیدا کنید.



$$2\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{x}$$

- ۳- با توجه به شکل، مختصات بردار $\vec{c}$ را پیدا کنید.

$$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$$



٦

فصل

مثلث

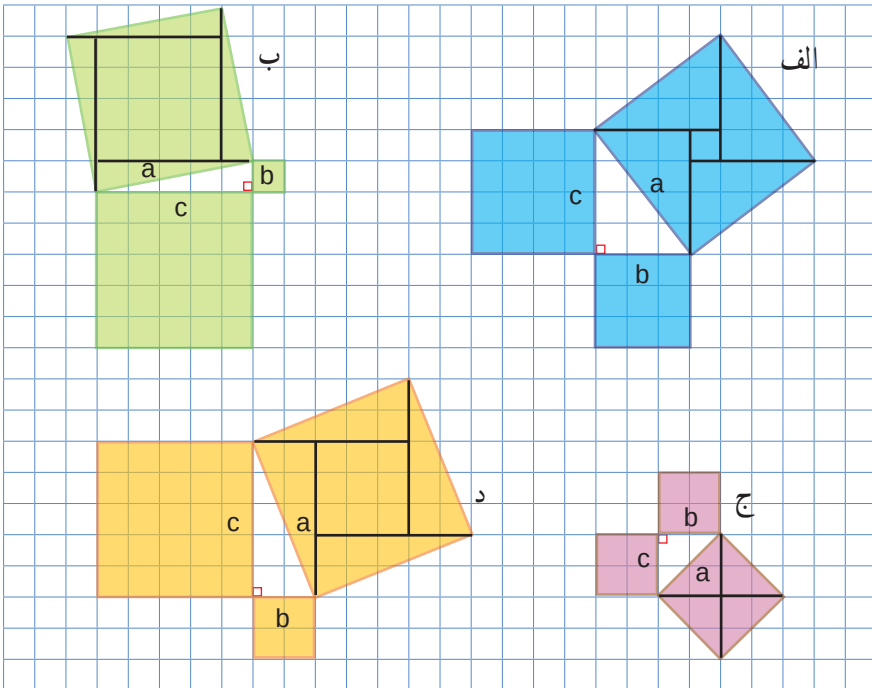
قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ... (سوره عنكبوت، آیه ۲۰)



خداوند در جهان هستی، نشانه‌هایی آفریده، و همواره تفکر و تعقل درباره آنها را از انسان خواسته است.



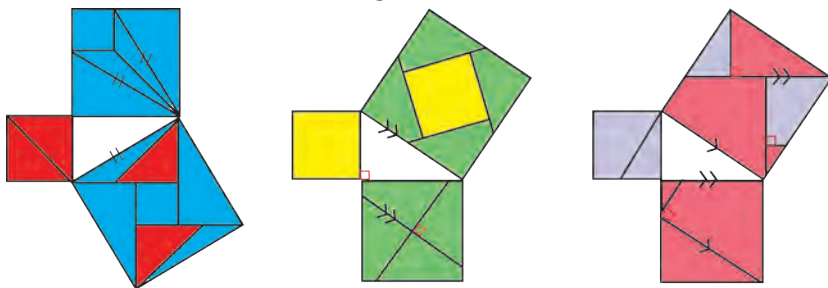
۱- روی هر ضلع مثلث‌های قائم الزاویه زیر یک مربع رسم کرده‌ایم. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع‌های ساخته شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.



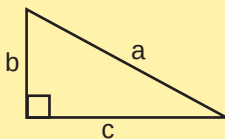
مساحت مربع ساخته شده روی ضلع a (وتر): a^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع b : b^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع c : c^2	
۲۵	۹	۱۶	الف
			ب
			ج
			د

چه ارتباطی بین عددهای هر سطر می‌بینید؟

۲- به هر یک از شکل‌های زیر با دقت نگاه کنید. در هر شکل، روشی برای نمایش دادن رابطه میان مساحت مربع‌های تشکیل شده روی ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه آمده است. شما هم روی کاغذ، یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی تشکیل دهید؛ سپس با استفاده از یکی از این روش‌ها مربع‌های ساخته شده روی دو ضلع کوچک آن را طوری به قطعه‌های کاغذی تقسیم کنید که بتوان با این قطعه‌ها مربع روی وتر را کاملاً پوشاند.



رابطه میان مجذور (مربع) اندازه ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه به **رابطه فیثاغورس** معروف است. این رابطه بیان می‌کند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

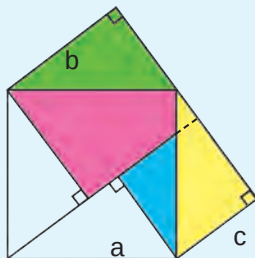
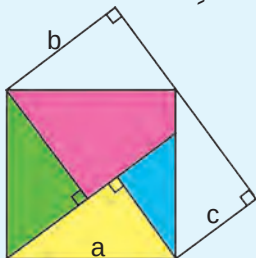


$$a^2 = b^2 + c^2$$

عکس این رابطه هم درست است یعنی، اگر در مثلی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

خواندنی

ابوالعباس نیریزی، ریاضی‌دان ایرانی در حدود هزار سال پیش، درستی رابطه فیثاغورس را به صورت زیر نشان داد.



در شکل، چهار مثلث قائم‌الزاویه هم نهشت^۱ دیده می‌شود.

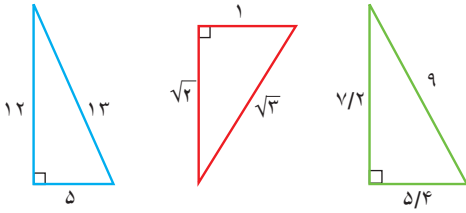
در سمت راست، مساحت دو مربعی را که روی ضلع‌های زاویه قائمه مثلث ساخته شده‌اند و در سمت چپ، مربعی را که روی وتر ساخته شده است، رنگ کرده‌ایم. چرا مساحت ناحیه رنگی در این دو شکل برابر است؟

۱- تعریف هم‌نهشتی در صفحه ۸۸ داده شده است.

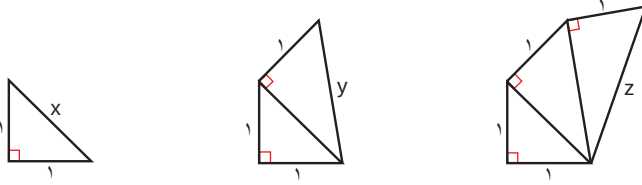
کار در کلاس



۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث های قائم الزاویه روبه رو بررسی کنید.



۲- به ترتیب طول x ، y و z را به دست آورید.

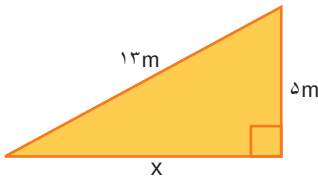


فعالیت



۱- در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را

مانند نمونه پیدا کنید.



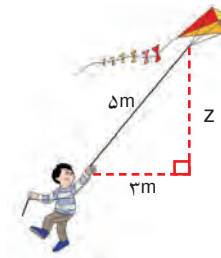
$$13^2 = x^2 + 5^2$$

$$169 = x^2 + 25$$

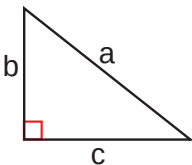
$$x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$x = \sqrt{144}$$

$$x = 12$$



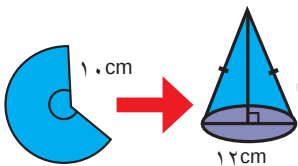
۲- تساوی های جبری زیر را کامل کنید.



$$a^2 = \text{---} + \text{---}$$

$$b^2 = \text{---} - \text{---}$$

$$c^2 = \text{---} - \text{---}$$



کار در کلاس



۱- علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع 10° سانتی متر، مخروطی به قطر قاعده 12 سانتی متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

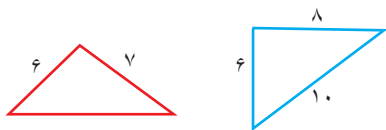
۲- معلم ریاضی از دانش آموزان خواست پاره خطی به طول $\sqrt{10}$ سانتی متر رسم کنند. در اینجا پاسخ سه دانش آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و درباره ویژگی های آنها گفت و گو کنید. کدام دانش آموز از روش هندسی و کدام یک از روش حسابی استفاده کرده است؟

مهسا:	سپاس:	زهرا:
به کمک ماشین حساب $\sqrt{10}$ را حساب می‌کنم. $\sqrt{10} \approx 3.16$ حالا به کمک خط کشی یک پاره خط به طول تقریباً 3.1 سانتی متر رسم می‌کنم.	مثلی قائم الزاویه با ضلع های 1 و 3 سانتی متر رسم می‌کنم. $1^2 + 3^2 = 10$ پس وتر آن $\sqrt{10}$ سانتی متر خواهد شد.	به همین ترتیب، ساختن مثلث های قائم الزاویه را ادامه می‌دهم تا $\sqrt{10}$ ساخته شود.

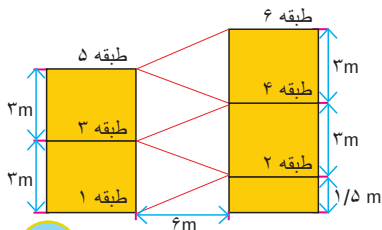
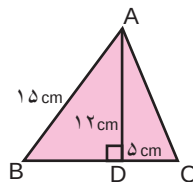
تمرین



۲- کدام مثلث قائم الزاویه است؟



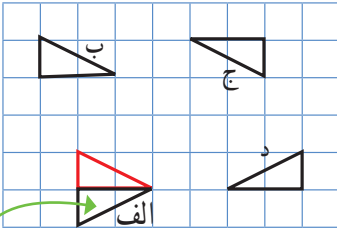
۱- محیط مثلث ABC را حساب کنید.



۳- شکل روبه رو نمایی از یک توقفگاه طبقاتی را نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه بعدی می‌رساند، چقدر است؟

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می‌توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر **هم‌نهشت** اند.

فعالیت



تقارن محوری

۱- در شکل روبه‌رو، مثلث‌های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده‌اند و با آن هم‌نهشت‌اند. مانند نمونه مشخص کنید از کدام یک تبدیل‌های انتقال، تقارن یا دوران استفاده شده است.
ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی در این پنج مثلث را با علامت‌گذاری روی شکل نشان دهید.

$$\triangle ABC \cong \triangle GHF$$

۲- این دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند:

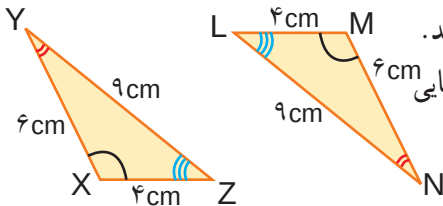
پس اجزای متناظر آنها نیز با هم مساوی هستند.

با توجه به علامت‌های روی شکل‌ها، تساوی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



$$\hat{A} = \hat{\quad} \quad \hat{B} = \hat{\quad} \quad \hat{\quad} = \hat{G}$$

$$\overline{BC} = \overline{\quad} \quad \overline{\quad} = \overline{HF} \quad \overline{\quad} = \overline{FG}$$



۳- مثلث‌های XYZ و LMN با یکدیگر هم‌نهشت‌اند.

می‌خواهیم بینیم مثلث XYZ با چه تبدیلی یا تبدیلی‌هایی بر مثلث LMN منطبق می‌شود.

راه حل دو دانش‌آموز در اینجا آمده است.

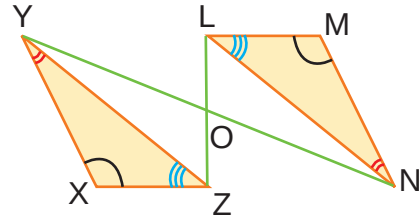
شما هم راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید و آن را توضیح

دهید؛ سپس راه حل خود را با راه حل‌های دوستانتان مقایسه کنید. خوب است بدانید که راه حل‌های

درستی‌شماری برای این مسئله وجود دارد.

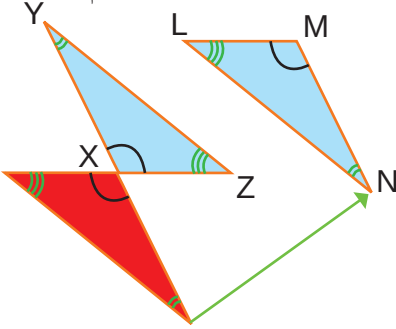
راه حل محمد:

با یک دُوران 18° حول نقطه O می توان مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کرد.

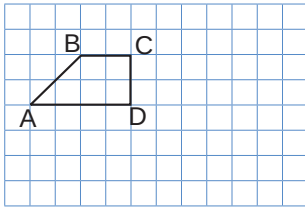


راه حل حامد:

با یک دوران 18° حول نقطه X می توانیم مثلث XYZ را بر مثلث قرمز رنگ منطبق کنیم و سپس با یک انتقال، مثلث قرمز را بر مثلث LMN منطبق کنیم.



کاردر کلاس



۱- تصویر دوزنقه ABCD را پس از دوران 18° حول

نقطه D رسم کنید و آن را $A_1B_1C_1D_1$ بنامید.

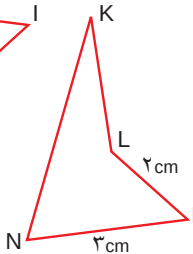
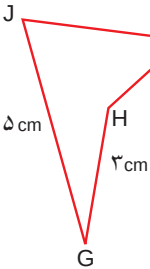
سپس آن را با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ انتقال دهید.

شکل جدید را نام گذاری کنید و عبارت هم نهستی شکل ها را کامل کنید.

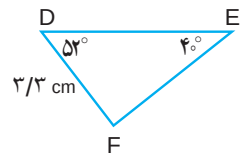
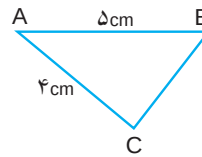
$$ABCD \cong \text{---} \cong \text{---}$$

۲- با توجه به هم نهستی شکل های هر قسمت در صورت امکان اندازه ضلع ها و زاویه های متناظر

را پیدا کنید و بنویسید.



$$GHIJ \cong KLMN$$



$$ABC \cong DEF$$

۳- دیواره های کنار پل از مثلث های قائم الزاویه هم نهست ساخته شده اند.

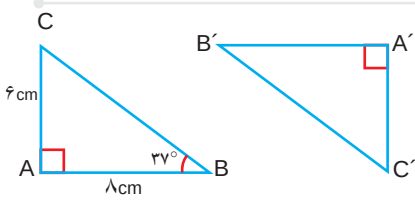


زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید

و اندازه هر یک از زاویه های یکی از مثلث ها

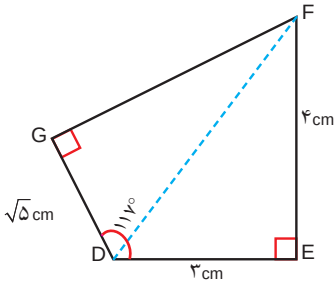
را بنویسید.

فعالیت



۱- در شکل مقابل $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

اندازه برخی ضلع‌ها و زاویه‌ها نوشته شده است. اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

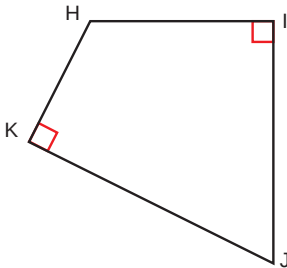


۲- چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی

افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK را به دست آورده‌ایم. اندازه برخی از ضلع‌ها و زاویه‌ها معلوم است.

اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر این چهارضلعی را به دست آورید.

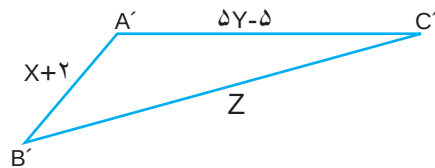
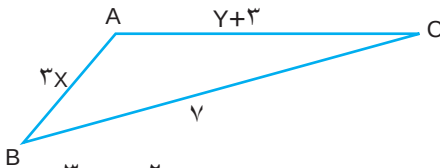
d



درباره رابطه‌هایی که از آنها در این دو سؤال استفاده کرده‌اید با هم گفت‌وگو کنید.

۳- مثلث ABC را می‌توان با انتقال بر مثلث A'B'C' منطبق کرد.

مانند نمونه با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع‌های مثلث‌ها را به دست آورید.



$$3x = x + 2$$

$$3x - x = 2$$

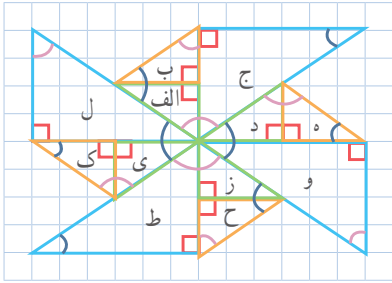
$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$\overline{AB} = 3x = 3$$

$$\overline{A'B'} = x + 2 = 1 + 2 = 3$$

تمرین



۱- در شکل رو به رو زاویه‌های مساوی را با رنگ‌های یکسان مشخص کرده‌ایم. کدام مثلث‌ها با مثلث الف هم‌نهشت‌اند؟ مانند نمونه مشخص کنید که با چه تبدیل یا تبدیلی می‌توان مثلث الف را بر مثلث‌های هم‌نهشت با آن منطبق کرد. چهار مورد دیگر بنویسید. پاسخ‌هایتان را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.

(الف) ← (ب) ← انتقال
(الف) ← (ه) ← دوران 180°

۲- سازه‌های مثلثی که در این پل به کار رفته‌اند، توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری زیادی را دارند و مانع خمیدگی پل می‌شوند.



می‌دانیم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$

الف) کدام زاویه مثلث ABC روبه روی ضلع BC است؟

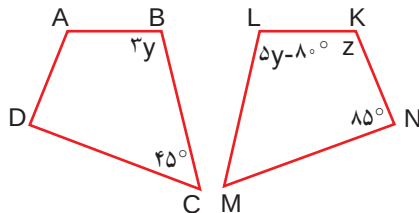
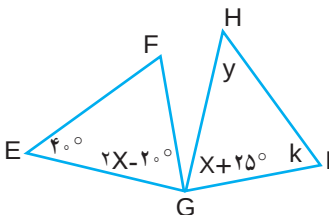
ب) کدام زاویه مثلث BCD روبه روی ضلع BC است؟

ج) مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق می‌کنیم. کدام زاویه این مثلث با زاویه A متناظر است؟

۳- زاویه‌های مجهول را بیابید.

الف) مثلث HIG حاصل دوران 90° درجه EFG حول نقطه G است.

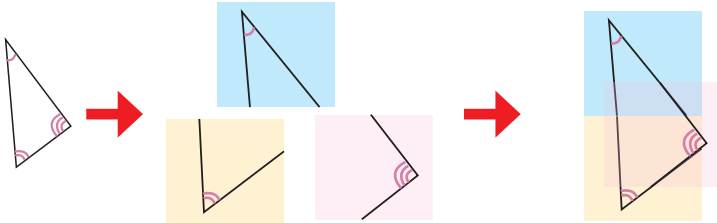
ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



فعالیت



آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت‌های هندسه بودند. معلم ریاضی، مثلثی روی کاغذ رسم کرد؛ سپس، تصویر **زاویه‌های** آن را روی سه برگه کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به کمک هم مثلثی بسازند که زاویه‌هایش با آن سه زاویه برابر باشد. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب روبه‌رو ساختند.

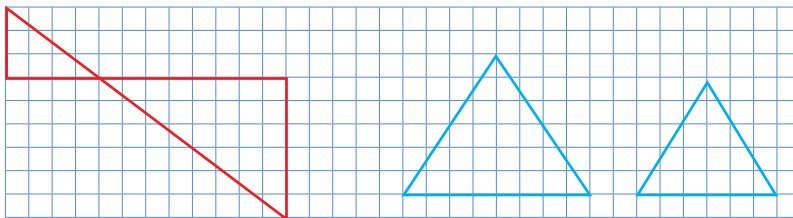


فکر می‌کنید مثلثی که آنها ساخته‌اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم‌نهشت است؟ آیا آنها می‌توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم‌نهشت باشد؟

کارد در کلاس



۱- زاویه‌های مساوی را در هر قسمت علامت‌گذاری کنید.



این دو مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

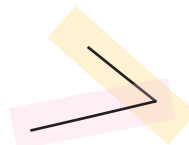
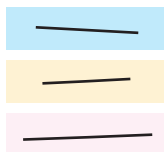
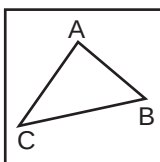
این دو مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

۲- شکل‌های سؤال قبل را نام‌گذاری کنید و تساوی زاویه‌ها را بنویسید.

فعالیت

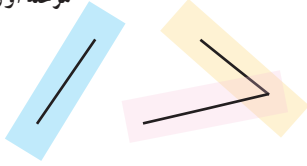


۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر **ضلع‌های** آن را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن‌گاه از بچه‌ها خواست مثلثی بسازند که ضلع‌هایش با این سه ضلع برابر باشد.

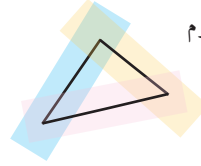


سامان مثلث مورد نظر را به این ترتیب ساخت :

مرحله اول



مرحله دوم

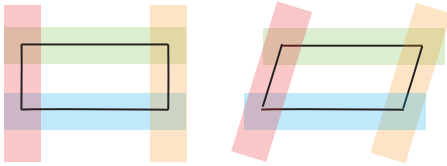


آرمان مطمئن بود مثلثی که سامان ساخته با مثلث معلم ریاضی هم نهشت است. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره آن فکر کنید.

۲- سامان پرسید : «فکر می کنی اگر ضلع های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل حتماً با یکدیگر هم نهشت اند؟»

آرمان گفت : «نه، من می گویم اگر ضلع های دو مثلث با هم مساوی باشند، آن دو مثلث حتماً با یکدیگر هم نهشت اند؛ مثلاً این دو چهارضلعی را ببین؛ با اینکه ضلع هایشان مساوی است با یکدیگر هم نهشت نیستند.»

سپس با کاغذ پوستی، دو چهارضلعی زیر را ساخت و به سامان نشان داد.

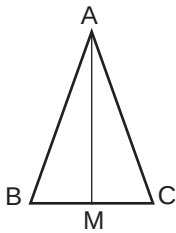


کارد در کلاس



۱- در شکل زیر نقطه M وسط BC است. مثلث ABC متساوی الساقین است. پاره خطی مانند AM را، که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می کند، میانه می نامیم.

عبارت های زیر را کامل کنید و نشان دهید چرا ضلع های دو مثلث ایجاد شده با هم برابرند.

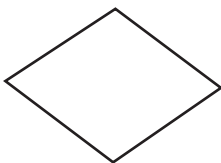


چون ساق های مثلث متساوی الساقین ABC هستند. $\overline{AM} = \overline{BM}$ چون

AM هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید.

۲- الف) لوزی مقابل را نام گذاری، و یکی از قطرهای آن را رسم کنید.



ب) دلیل تساوی ضلع های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید.

ج) زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

فعالیت



مثلی رسم کنید.

سپس دو ضلع آن و زاویه

بین آن دو ضلع را روی سه برگ

کاغذ پوستی بکشید.

اکنون سعی کنید مثلی بسازید که دو ضلع آن با این

دو ضلع برابر باشد و زاویه بین این دو ضلع هم

برابر زاویه رسم شده باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

آیا با این شرایط می‌توانید مثلی بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

مرحله اول



مرحله دوم



کار در کلاس



در شکل مقابل، نیمساز زاویه روبه‌رو به قاعده مثلث متساوی الساقین

ABC را رسم کرده‌ایم.

عبارت‌های زیر را کامل کنید و به کمک آنها نشان دهید دو مثلث

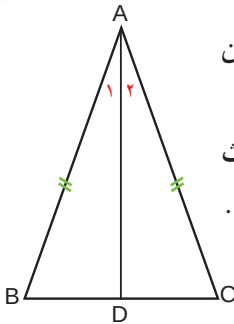
ABD و ADC با هم هم نهشت هستند و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند.

چون $\overline{AB} = \overline{AC}$

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ؛ چون AD نیمساز است.

AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید.



فعالیت

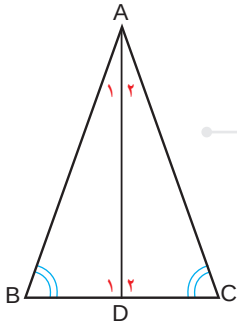


مثلی رسم کنید و این بار دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید.

سعی کنید مثلی بسازید که دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در آن با مثلث اولیه مساوی باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

آیا می‌توانید مثلی با همین شرایط بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟



کار در کلاس



در شکل مقابل، زاویه‌های B و C با هم برابرند و نیمساز زاویه A را رسم کرده‌ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم نهشت هستند و دو ضلع AB و AC با هم برابرند.

(راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ دلیل بیاورید.)

نتیجه: اگر در مثلی دو زاویه برابر باشند، آن مثلث است.

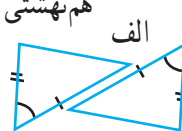
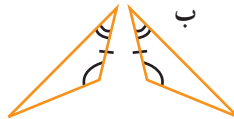
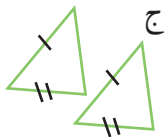
سه حالت هم نهشتی دو مثلث:

- برابری سه ضلع
 - برابری دو ضلع و زاویه بین
 - برابری دو زاویه و ضلع بین
- یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ز ض ز)

تمرین

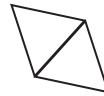
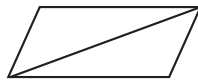


۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت



هم نهشتی را بنویسید.

۲- در هر شکل، مساوی بودن برخی از اجزای دو مثلث را می‌توان از روابط میان پاره خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص نتیجه گرفت. اجزای مساوی را پیدا، و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید؛ سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.



الف) هر دو مثلث متساوی الاضلاع‌اند.

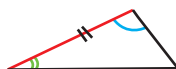
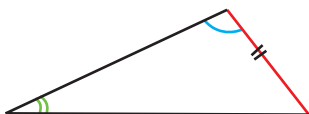
ب) قطر متوازی الاضلاع رسم شده است.

ج) دو قطر یکدیگر را در مرکز مشترک دو دایره قطع کرده‌اند.

۳- از شکل زیر کدام یک از موارد زیر را می‌توان نتیجه گرفت؟

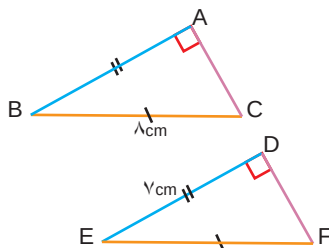
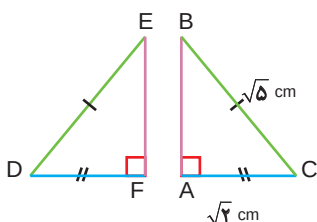
اگر دو زاویه و یک ضلع غیر بین از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیر بین از مثلی دیگر برابر باشند، الف) دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند.

ب) ممکن است دو مثلث هم نهشت نباشند.





۱- در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.



اندازه ضلع سوم هر یک از مثلث ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، سه ضلع مثلث ABC با سه ضلع مثلث DEF مساوی است؟

آیا این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ در چه حالتی؟

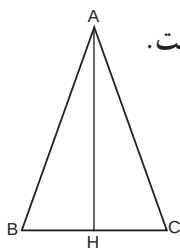
۲- می دانیم وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر است. آیا می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ چرا؟ توضیح دهید.

کاردر کلاس



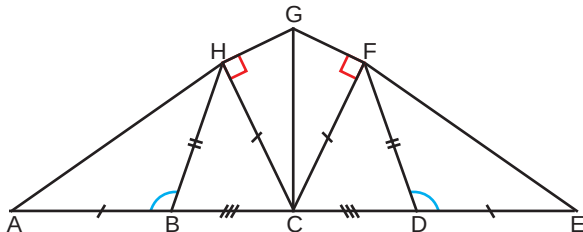
۱- پاره خط AH، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین ABC است.

چرا مثلث های ایجاد شده با یکدیگر هم نهشت اند؟



۲- با توجه به علامت های شکل زیر، مثلث های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت

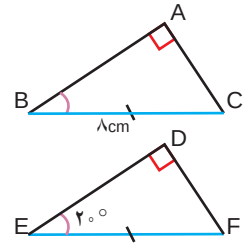
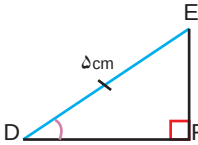
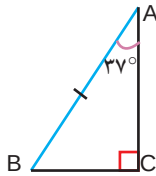
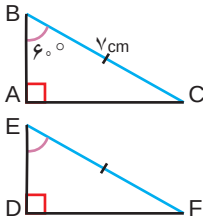
هم نهشتی هر جفت مثلث را بیان کنید.



فَعَالِيَت



۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.



زاویه دیگر هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟

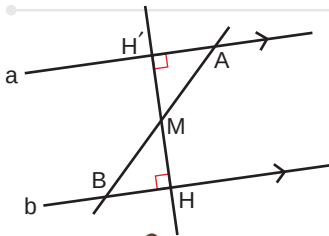
۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید.

دو حالت دیگر برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه :

• برابری وتر و یک زاویه تند
یا به اختصار (و ز)

• برابری وتر و یک ضلع
یا به اختصار (و ض)

کارد در کلاس

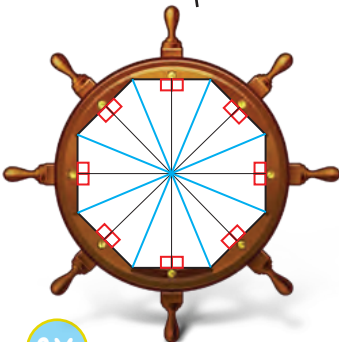


۱- از نقطه M، وسط پاره خط AB بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده‌ایم.

دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم نهشت‌اند؟

۲- در شکل روبه‌رو، هر شانزده زاویه کوچک وسط شکل با هم مساوی و هشت پاره خط آبی نیز با هم مساوی‌اند.

شانزده مثلث قائم الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم نهشت‌اند؟





شادی و مهتاب داشتند یک کتاب هندسه را مطالعه می کردند که به این جمله برخوردند :

«هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط

از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»

۱- مهتاب پرسید : «چرا این جمله درست است؟»

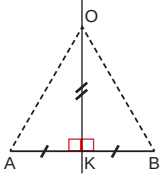
شادی سعی کرد مثالی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او پاره خطی کشید و عمود منصف آن را رسم کرد. نقطه ای را روی آن در نظر گرفت و فاصله آن نقطه را از دو سر پاره خط اندازه گرفت؛ فاصله ها مساوی بود.

(یادآوری : فاصله دو نقطه از هم برابر طول پاره خطی است که آن نقاط را به هم وصل می کند.)

فکر می کنید شادی توانسته است دلیلی برای درستی جمله مورد نظر بیاورد؟

۲- مهتاب گفت : «از کجا بفهمیم این جمله در مورد همه نقاط روی عمود منصف درست است؟»



شادی سعی کرد دلیلی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او به شکلی که کشیده بود نگاه کرد. آن را مانند

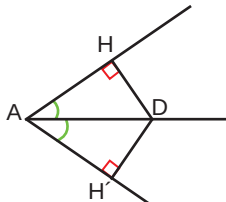
شکل رو به رو علامت گذاری کرد و گفت : «برای همه نقاط روی عمود منصف AB، مانند نقطه O، زاویه K زاویه ای قائمه است. (چرا؟)»

همچنین $AK=KB$ (چرا؟) OK هم ضلع مشترک دو مثلث است؛ پس $\triangle AOK \cong \triangle BOK$ (در چه حالتی؟)

و در نتیجه $OA=OB$ (چرا؟)»

فکر می کنید این بار شادی توانسته است برای درستی جمله مورد نظر دلیلی بیاورد؟

۳- برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید :



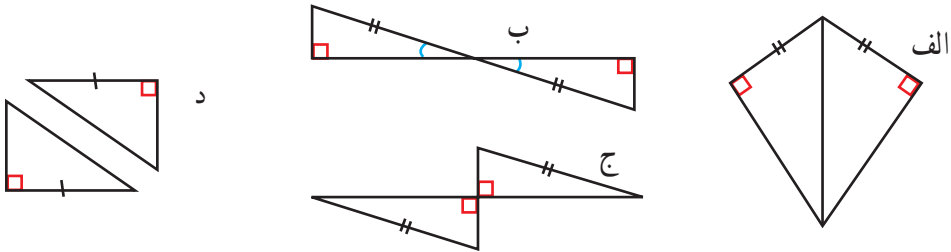
«هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

(یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط، برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن خط عمود می شود.)

تمرین

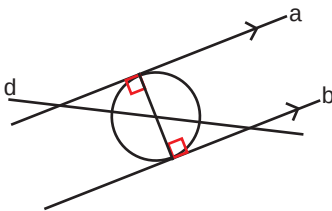


۱- در هر شکل، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم نهشت‌اند.

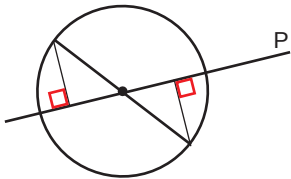


۲- در هر شکل از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص می‌توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزای دو مثلث با هم مساوی‌اند. اجزای مساوی را پیدا، و با علامت‌گذاری مناسب مشخص کنید؛ سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.

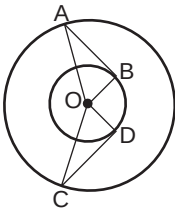
الف) خط d از مرکز دایره می‌گذرد و دو خط a و b بر قطر دایره عمودند.



ب) خط p از مرکز دایره گذشته است.



ج) نقطه O مرکز مشترک دو دایره و پاره‌خط‌های AB و CD به ترتیب بر OB و OD عمودند.



۳- در هریک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید هر مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث دیگر منطبق کرد.

مرور فصل ۶

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

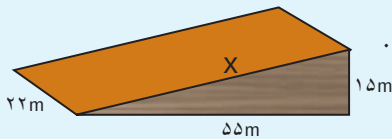
- رابطه فیثاغورس
- اجزای متناظر
- هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه
- حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث
- در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- پیدا کردن ضلع مجهول مثلث قائم‌الزاویه
- بررسی قائم‌الزاویه بودن مثلث با داشتن سه ضلع آن
- نوشتن اجزای متناظر دو شکل هم‌نهشت
- هم‌نهشتی دو مثلث در حالت سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین و حالت دو زاویه و ضلع بین
- هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت وتر و یک زاویه و حالت وتر و یک ضلع
- حل مسئله‌های مربوط به هم‌نهشتی مثلث‌ها به کمک حالت‌های بالا

کاربرد

در نقشه‌های مهندسی و برای پیدا کردن اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های مجهول از هم‌نهشتی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر استفاده می‌کنیم.

تمرین‌های ترکیبی



۱- در شکل روبه‌رو، سطح شیب‌داری را می‌بینید.

طول این سطح شیب‌دار را به‌دست آورید.

۲- الگوی زیر با مثلث‌های هم‌نهشت ساخته می‌شود.

(الف) دو شکل بعدی را رسم کنید.

(ب) محیط هر شکل را پیدا کنید.

(ج) محیط شکل شماره ۶ چقدر می‌شود؟

(د) محیط شکل شماره ۷ چقدر می‌شود؟



شکل شماره ۱



شکل شماره ۲



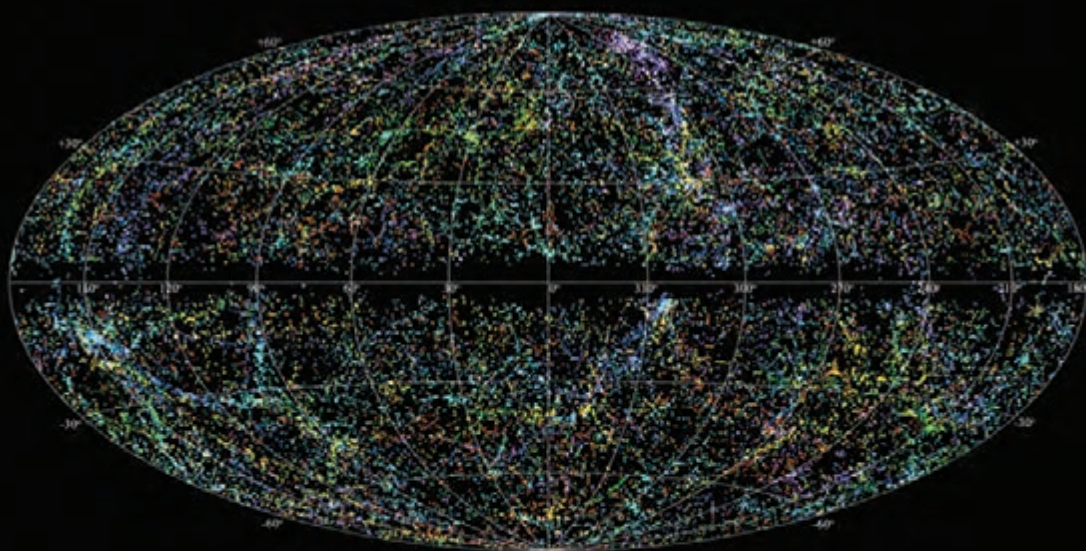
شکل شماره ۳



۷

فصل

توان و جذر



اندازه تقریبی شعاع منظومه شمسی 10^{13} متر است. اندازه تقریبی شعاع جهان قابل مشاهده توسط انسان 10^{23} برابر بیشتر است. تصویر بالا شامل ۴۳ هزار کهکشان است. اگر می‌خواهید بدانید ما کجا هستیم، باید بدانید که کهکشان راه شیری تقریباً یک نقطه کوچک در وسط‌های نقشه به‌شمار می‌رود. فکر منظومه شمسی را هم نکنید؛ چون خیلی کوچک‌تر از آن است که در این تصویر قابل دیدن باشد.

یادآوری در سال گذشته، ضرب دو عدد توان دار با پایه های مساوی و نیز توان های مساوی را یاد گرفتید. این قواعد را با نمادهای ریاضی به صورت زیر می نویسیم.

اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

یا برای سادگی :

۱- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$2^6 \times 2^3 = \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \quad 8^2 \times 2^3 = \quad (-6)^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 =$$

$$2^5 \times 3^2 \times 6^5 \times 4^2 = \quad 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 \times 81 = \quad 36 \times 144 = \quad 2^3 \times 8^5 \times 4^3 =$$

۲- حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان دار بنویسید.

$$a^2 \times a^4 =$$

$$x^4 \times y^4 =$$

$$(ab)^5 \times a^2 \times b^4 =$$

$$(xy)^2 \times (xy)^4 =$$

$$125 \times 18^2 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 =$$

$$8a \times (2a)^2 \times 2a^2 =$$

۳- حجم مکعبی به ضلع a چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است ؟

۴- جاهای خالی را با عددها و حرف های مناسب پر کنید.

$$18^5 = (6 \times \bigcirc)^5$$

$$a^4 = a^2 \times a^{\bigcirc}$$

$$7^{\bigcirc} \times 4^5 = 4^5$$

$$\left(-\frac{7}{2}\right)^{\bigcirc} \times \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^9$$

$$(4 \times 3)^6 = \bigcirc^6 \times \bigcirc^6$$

فعالیت



حاصل عبارت $2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$ را به دو روش زیر می‌توان نشان داد.

$$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12} \qquad 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = (2^3)^4$$

با مقایسه تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت: $(2^3)^4 = 2^{12}$

اکنون، درستی تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید.

$$(7^2)^5 = 7^{10} \qquad \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]^4 = \left(\frac{1}{2} \right)^{12}$$

$$\left[(-2)^3 \right]^7 = (-2)^{21} \qquad (a^2)^4 = a^8$$

آنچه را فراگرفته‌اید به صورت قانون کلی بیان کنید.

اگر a عددی دلخواه و m و n عددهایی طبیعی باشند، آنگاه:

$$(a^m)^n = a^{\boxed{}}$$

کار در کلاس



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت توان‌دار بنویسید.

$$(5^7)^4 = \qquad \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 = \qquad [(-6)^2]^5 =$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right]^4 = \qquad (18^2)^7 = \qquad (x^4)^8 =$$

$$[(ab)^3]^2 = \qquad (xy^2)^3 = \qquad (2^m)^n =$$

۲- کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

$$(3^2)^4 = 3^2 \times 3^4$$

$$3^5 \times 3^5 = (3^5)^2$$

$$(3^2)^4 = 3^8$$

$$(3^5)^2 = 3^2$$

$$(5^2)^2 = 5^4$$

$$3^2 \times 3^2 = 9^4$$

$$3^5 \times (2^2)^5 = 12^5$$

$$a^2 \cdot a^2 = 1$$

$$((-2)^2)^2 = 2^6$$

$$(-4^6) = 4^6$$

۳- حاصل عبارت $(-5)^2 \times [(-5)^2]^3$ برابر کدام یک از اندازه‌های زیر است؟

الف) $(-5)^8$

ب) -5^8

۴- در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$$9^5 = (3^{\bigcirc})^5 = 3^{\bigcirc}$$



۱- حجم مکعبی به ضلع ۸ cm را به صورت یک عدد توان دار بنویسید که پایه آن عدد ۲ باشد.

۲- بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۳- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$$[(-3)^2]^2 =$$

$$[(3^2)]^2 =$$

$$2^5 \times 2^2 \times 3^7 \times 6^3 =$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3 =$$

$$2^{4^\circ} \times 2^{4^\circ} \times 2^{4^\circ} =$$

$$(x^2)^5 \cdot (y^3)^2 \cdot x^2 y^4 =$$

۴- کدام عددهای طبیعی را می‌توان به جای نوشت تا نامساوی زیر درست باشد؟

$$(-2)^{\text{}} > 15$$

۵- حاصل $2^7 + 2^7$ و حاصل $3^5 + 3^5 + 3^5$ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۶- عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را طوری در جاهای خالی قرار دهید که یک تساوی درست به دست آید. (از هر چهار عدد استفاده کنید).

$$\text{} \times (\text{})^3 = 5^2 - (\text{})^{\text{}}$$

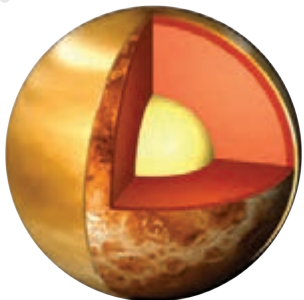
۷- مقدار عددی عبارت‌های زیر را به ازای $a=6$ و $b=-2$ و $c=-4$ به دست آورید.

$$\frac{-2(a+b^2) + \frac{c^2}{b}}{\text{الف}}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{a}{b}\right)^2 + bc - 1$$

تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی

فعالیت



دمای مرکز خورشید حدود 10^7 درجه سانتی گراد است. این دما چند برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید؟ پاسخ را ضمن کامل کردن جاهای خالی به صورت یک عدد توان دار بیان کنید و مراحل حل مسئله را نیز توضیح دهید.

حل: آب در 10^0 درجه سانتی گراد به جوش می آید و داریم: $10^0 = 10^2$

$$10^7 \div 10^2 = \frac{10^7}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = \bigcirc$$

بنابراین: $10^7 \div 10^2 = \bigcirc$

یعنی دمای مرکز خورشید — برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید. آیا تقسیم بالا را به شکل زیر نیز می توانیم انجام دهیم؟

$$\frac{10^7}{10^2} = \frac{10^2 \times 10^5}{10^2} = \bigcirc$$

اکنون، حاصل هر یک از تقسیم های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-9)^5 \div (-9)^3 = \text{—————} = (-9)^{\bigcirc}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \text{—————} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\bigcirc}$$

با استفاده از نمونه های داده شده برای محاسبه تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی قانونی

بنویسید.

اگر a عددی دلخواه و مخالف صفر و m, n عددهایی طبیعی باشند:

$$a^m \div a^n = a^{\bigcirc}$$

کار در کلاس



۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$8^9 \div 8^5 =$$

$$\frac{3^7}{3^3} =$$

$$6^2 \div 6 =$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^2 =$$

$$\frac{(-2)^9}{(-2)^2} =$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^4 \div \left(\frac{1}{9}\right) =$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^6 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2 =$$

$$(-\frac{1}{3})^5 \div (-\frac{1}{3})^2 =$$

$$\frac{7^5}{7} =$$

۲- جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$\frac{2^{15}}{(2^3)^{\circ}} = 1$$

$$3^5 \div 3^{\circ} = 3^4$$

$$14^5 \div (\quad)^2 = 14^2$$

$$\frac{7^3}{7^5} = \frac{7^3}{7^3 \times 7^2} = \frac{1}{\quad}$$

۳- حاصل را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

$$a^{12} \div a^5 =$$

$$(xy)^9 \div (xy)^4 =$$

$$(-x)^9 \div (-x)^2 =$$

تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی

فعالیت



مثال‌های داده شده را مطالعه کنید و با پر کردن جاهای خالی توضیح دهید که پاسخ

هر یک از تقسیم‌ها چگونه به دست آمده است.

$$12^4 \div 6^4 = \frac{12^4}{6^4} = \frac{12 \times 12 \times \dots \times \dots}{6 \times 6 \times \dots \times \dots} = \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = (\quad)^4 = 2^4$$

$$3^5 \div 7^5 = \frac{3^5}{7^5} = \frac{\quad}{\quad} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\circ}$$

$$(-4)^3 \div 6^3 = \frac{(-4)^3}{6^3} = \frac{\quad}{\quad} = (\quad) \times (\quad) \times (\quad) = (\quad)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$12^4 \div 6^4 = \frac{12^4}{6^4} = \frac{2^4 \times 6^4}{6^4} = 2^{\circ}$$

با توجه به مثال‌های صفحه قبل، توضیح دهید تساوی $4^5 = 2^5 \div 8^5$ چگونه به دست آمده است. اکنون، برای تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی، قانون زیر را کامل کنید.

در تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی

به کمک قانونی که نوشته‌اید، حاصل تقسیم‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$6^8 \div 3^8 = \quad \quad \quad (-2)^4 \div (-3)^4 =$$

اکنون قانون فوق را با نمادهای ریاضی هم نشان دهید.

$$a^m \div b^m = ()^{()} \quad b \neq 0 \quad \text{و} \quad m \text{ یک عدد طبیعی}$$

کار در کلاس



۱- حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$5^7 \div 3^7 = \quad \quad \quad 14^2 \div 7^2 =$$

$$(-8)^5 \div (-2)^5 = \quad \quad \quad 9^2 \div 27^2 =$$

۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید و در صورت امکان، پاسخ را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$5^7 \times 3^4 \times 2^7 \times 3^2 = \quad \quad \quad \left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 =$$

$$\frac{3^7 \times 3^5}{6^1 \times 5^1} =$$

$$\frac{(a^3)^4}{a^3} =$$

$$\frac{(x^2)^5 \times x^7}{x^{11}} =$$

تمرین



۱- هر یک از عددهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$$81 = \quad -8 = \quad 1024 = \quad -\frac{125}{729} = \quad \frac{1}{512} = \quad -\frac{1}{32} =$$

۲- کدام عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟ توضیح دهید.

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4}$$

$$\left(\frac{5}{11}\right)^0 = 0$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \left(\frac{2}{7}\right)^4$$

$$10^3 \times 10^4 = 10^{12}$$

$$(-2)^3 \times (-2) = 16$$

۳- حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times 3^{10} = \quad \frac{5^6 \times 6^3}{5^4 \times 6^5} = \quad \frac{x^7 \times y^4}{x^5 \times y^2} =$$

۴- در جاهای خالی عدد مناسب بگذارید.

$$3^5 \times 3^{\bigcirc} = 3^9 \quad (7^4)^{\bigcirc} = 7^8 \quad \frac{7^{\bigcirc} \times 7^2}{7^3} = 7^5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\bigcirc} \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \frac{(-6)^8}{(-6)^{\bigcirc}} = (-6)^3$$

۵- عددهای زیر را از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید.

$$65, 1^{12}, -4^3, (-1)^5, 0, \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

۶- کدام تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

$$(\sqrt{5})^2 = 25 \quad (\sqrt{5})^2 = 5 \quad (\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})^2 \quad +\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-1 \circ 2)^3 = \quad [(-1 \circ)^2]^3 = \quad (x^2 y^3)^4 = \quad \left(\frac{x^y}{x^3}\right)^5 =$$

$$[3^6 \div (-3)^5] \div [(-2)^5 \times (-3)^5] =$$

۸- نصف 2^4 و ربع 4^7 را به صورت عددهای توان‌دار بنویسید.

خواندنی

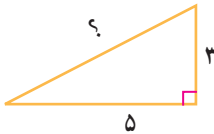
رشد باکتری‌ها به شرایط مناسب محیطی و وجود مواد غذایی بستگی دارد. باکتری‌ها در وضعیت مطلوب در هر 20° دقیقه به دو نیم تقسیم می‌شوند، سپس در 20° دقیقه دیگر رشد می‌کنند و دوباره هر کدام به دو قسمت تقسیم می‌شوند. تکثیر باکتری‌ها تا جایی ادامه پیدا می‌کند که مواد غذایی لازم موجود باشد؛ برای مثال اگر در حال حاضر ۲ باکتری داشته باشیم در 20° دقیقه دیگر $2 \times 2 = 2^2 = 4$ باکتری و در 60° دقیقه دیگر $2^3 = 8$ باکتری خواهیم داشت. به نظر شما اگر مواد غذایی لازم موجود باشد، پس از گذشت ۲۴ ساعت چند باکتری خواهیم داشت؟

فعّالیت



آزاده، نرگس و نسیم هنگام گردش علمی به یک آب گذر (کانال) به عرض ۵ متر رسیدند. در طرف دیگر آب گذر دیواره‌ای به ارتفاع ۳ متر وجود داشت. آنها می‌خواهند بدانند اگر پلی برای رفتن به طرف دیگر آب ساخته شود، طول آن چقدر خواهد بود؟

در ادامه، گفت‌وگوی این سه دانش‌آموز را می‌خوانید که برای حل این مسئله صورت گرفته است. با دقت در این گفت‌وگو سعی کنید نظر هر دانش‌آموز را توضیح دهید.



آزاده: به نظر من این مسئله مانند آن است که یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۳ و ۵ متر داشته باشیم و وتر آن را به دست آوریم.

نرگس: پس می‌توانیم از رابطه فیثاغورس استفاده کنیم.

نسیم: یعنی رابطه مقابل را داریم: $۵^2 + ۳^2 = ۳۴$ مربع وتر

آزاده: درست است. اکنون برای به دست آوردن طول وتر باید جذر عدد ۳۴ را به دست آوریم.

نرگس: چون $۲۵ < ۳۴ < ۳۶$ پس $\sqrt{۳۴}$ بین دو عدد ۵ و ۶ قرار دارد.

یعنی داریم: $۵ < \sqrt{۳۴} < ۶$



نسیم: اگر فاصله ۵ تا ۶ را روی محور نصف کنیم، عدد ۵/۵ به دست می‌آید و چون $(۵/۵)^2 = ۳۰/۲۵$ ، پس حتماً جذر ۳۴ از ۵/۵ بیشتر است.

آزاده: می‌توانیم چند عدد بزرگ‌تر از ۵/۵ را بررسی کنیم؛ مثلاً ۵/۷ و ۵/۸ و ۵/۹.



سپس آنها به کمک ماشین حساب جدول زیر را تکمیل کردند.

عدد	۵/۷	۵/۸	۵/۹	۶
مجذور	۳۲/۴۹	۳۳/۶۴	۳۴/۸۱	۳۶

در نتیجه با توجه به جدول بالا، مقدار $\sqrt{۳۴}$ تقریباً برابر ۵/۸ است.

آخرین جمله فعالیت بالا را معمولاً به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: $\sqrt{۳۴} \approx ۵/۸$
اگر این دانش‌آموزان بخواهند به کمک روش بالا مقدار $\sqrt{۳۴}$ را تا دو رقم اعشار حساب کنند، چگونه باید این کار را انجام دهند؟

مقدار $\sqrt{۳۴}$ تا پنج رقم اعشار به کمک ماشین حساب چنین به دست می‌آید:
 $\sqrt{۳۴} \approx ۵/۸۳۰۹۵$

کار در کلاس



۱- با پرکردن جاهای خالی، مقدار $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲۰۰}$ را به صورت تقریبی تا یک رقم اعشار به دست آورید. نتیجه را با آنچه ماشین حساب به دست می‌آورد، مقایسه کنید.

$$\sqrt{۱} < \sqrt{۲} < \sqrt{۴} \quad \text{(الف)}$$

$$۱ < \sqrt{۲} < \bigcirc \quad \text{پس:}$$

اکنون با نصف کردن فاصله ۱ تا ۲ روی محور، عدد ۱/۵ را آزمایش می‌کنیم.
چون $(۱/۵)^۲ = ۲/۲۵$ ، پس مقدار $\sqrt{۲}$ حتماً کمتر از ————— است.

عدد	۱/۳	۱/۴	۱/۵
مجذور	۱/۶۹	۱/۹۶	۲/۲۵

به کمک جدول بالا می‌توان نوشت: $\sqrt{۲} \approx$ —————

$$\sqrt{۱۹۶} < \sqrt{۲۰۰} < \bigcirc \quad \text{(ب)}$$

$$\bigcirc < \sqrt{۲۰۰} < ۱۵ \quad \text{بنابراین:}$$

اکنون با نصف کردن فاصله ————— تا ۱۵ روی محور اعداد، عدد $۱۴/۵$ را آزمایش می‌کنیم. چون $۲۱۰/۲۵ = (۱۴/۵)^2$ ، بنابراین $\sqrt{۲۱۰}$ حتماً کمتر از $۱۴/۵$ است.

بنابراین $\sqrt{۲۱۰} \approx$ —————

عدد	۱۴/۱	۱۴/۲	۱۴/۳	۱۴/۴
مجذور	۱۹۸/۸۱	۲۰۱/۶۴		

۲- ابتدا مقدار تقریبی هر عددی را که در جدول آمده است، حدس بزنید؛ سپس به کمک ماشین حساب، حاصل را تا دو رقم اعشار پیدا کنید و با مقداری که حدس زده‌اید، مقایسه کنید.

عدد	$\sqrt{۳}$	$\sqrt{۵}$	$\sqrt{۱۰/۳}$	$\sqrt{۱۸/۵}$	$\sqrt{۶۸}$	$\sqrt{۹۹}$	$\sqrt{۱۴۰}$
مقدار حدس زده شده							
ماشین حساب							



۱- به کمک روشی که در درس یاد گرفته‌اید، مقدار هر یک از عددهای زیر را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

$$\sqrt{۱۹}, \sqrt{۴۰}, \sqrt{۱۵۰}, \sqrt{۳۸۵}$$

۲- در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید. از ماشین حساب کمک بگیرید.

$$\sqrt{۱۱} \bigcirc ۳\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{۱۷} \bigcirc ۴/۰۳$$

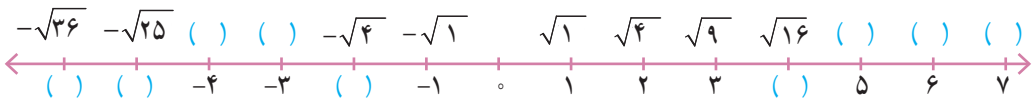
$$\sqrt{۶/۲۵} \bigcirc ۲\frac{1}{۲}$$

$$۱ + \sqrt{۱۵} \bigcirc ۴$$

$$\sqrt{۲۰} - ۲ \bigcirc \sqrt{۱۸}$$

$$(\sqrt{۳})^2 \bigcirc ۳$$

۳- جاهای خالی روی محور را با عددهای مناسب پر کنید.



۴- در هر یک از تمرین‌های زیر، یک محور اعداد رسم، و نقطه‌ای روی آن مشخص شده است (نقاط A, B, C). نقطه مشخص شده روی محور به کدام یک از عددهای داده شده نزدیک‌تر است؟ دلیل بیاورید.



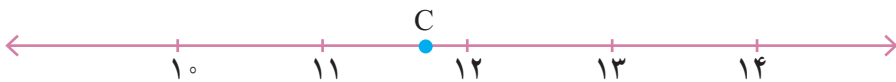
$$\sqrt{79}, \sqrt{98}, \sqrt{81}, \sqrt{85}$$

دلیل :



$$-\sqrt{12}, -\sqrt{17}, -\sqrt{15}, -\sqrt{28}$$

دلیل :



$$\sqrt{140}, \sqrt{116}, \sqrt{121}, \sqrt{126}$$

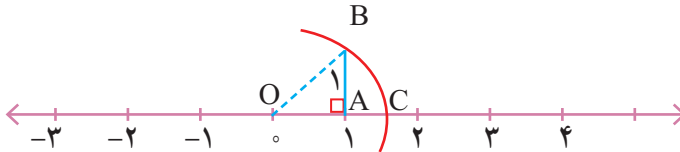
دلیل :

فعالیت

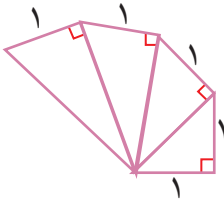


در درس گذشته مقدار $\sqrt{2}$ را هم به صورت تقریبی و هم به کمک ماشین حساب محاسبه کردید.

در این فعالیت با نمایش $\sqrt{2}$ روی محور اعداد آشنا می‌شویم. محور عددهای زیر را در نظر بگیرید. مثلث OAB یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به ضلع ۱ است. به مرکز O و شعاع OB کمانی می‌زنیم تا محور اعداد را در نقطه C قطع کند. طول پاره خط OC چقدر است؟ _____ چرا نقطه C، عدد $\sqrt{2}$ را نمایش می‌دهد؟



به همین روش، نقطه‌ای را روی محور بالا معین کنید که عدد $-\sqrt{2}$ را نمایش دهد. در شکل زیر، تعدادی مثلث قائم الزاویه رسم شده است. در هر یک از این مثلث‌ها طول یک ضلع زاویه قائمه ۱ واحد است. طول وترهای این مثلث‌ها به ترتیب $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$ است. چرا؟



آیا می‌توانید به همین ترتیب پاره‌خطی به طول $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ رسم کنید؟ چگونه؟

از شکل داده شده استفاده کنید. دهانه پرگار را به اندازه $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ باز کنید و عددهای $1 + \sqrt{3}$ و $2 + \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.



کار در کلاس



عدد $\sqrt{3} - 2$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

برای نمایش عدد $\sqrt{3} - 2$ روی محور از تساوی $\sqrt{3} - 2 = -2 + \sqrt{3}$ استفاده کنید.

خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

فعالیت



با توجه به عددهای داده شده a و b ، مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

a	$\sqrt{a}$	b	$\sqrt{b}$	ab	$\sqrt{ab}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
۴	۲	۹	۳	۳۶	۶	۶
۹		۱۶				
۴		۱۶				
۲۵		۴				

آیا می‌توانید حدس خود را به صورت یک عبارت کلامی بیان کنید؟

اگر a و b دو عدد مثبت باشند، داریم: $\sqrt{ab} = () ()$

به کمک جدول بالا، درستی یا نادرستی رابطه را بررسی کنید.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

کار در کلاس



۱- در تساوی‌های زیر، جاهای خالی را پر کنید.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \square$$

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \square$$

$$\sqrt{14} = \sqrt{7} \times \square$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100} \times \square$$

$$\sqrt{16 \times 25} = \sqrt{16} \times \sqrt{25} = \square \times \square$$

۲- کدام یک از عبارت‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟

$$\sqrt{50} = 25$$

$$\sqrt{50} = 5 \times \sqrt{2}$$

۳- مانند نمونه، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{8} =$$

$$\sqrt{18} =$$

$$\sqrt{12} =$$

$$\sqrt{75} =$$

فعالیت



جدول زیر را برای عددهای مثبت a و b کامل کنید. مقدارهای دو سطر آخر را با هم مقایسه کنید و تساوی به دست آمده را به شکل یک قانون کلی بنویسید.

a	۱۶	۲۵	۱	
b	۹	۳۶	۱۰۰	
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\frac{۱۶}{۹}} = \frac{۴}{۳}$			$\sqrt{\frac{۴۹}{۶۴}}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{۱۶}}{\sqrt{۹}} = \frac{۴}{۳}$			

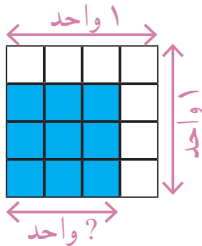
کاردرکلاس



۱- با استفاده از شکل روبه‌رو، درستی رابطه

$$\sqrt{\frac{۹}{۱۶}} = \frac{۳}{۴}$$

را بررسی کنید.



۲- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید.

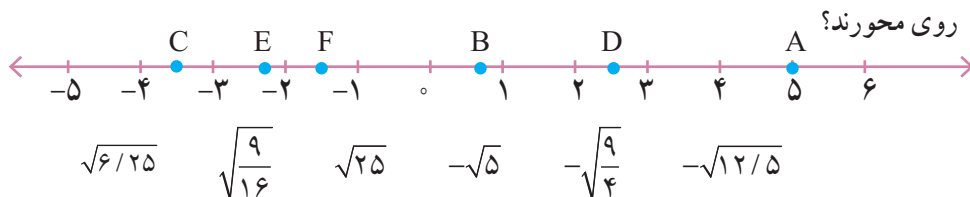
$$-\sqrt{\frac{۱}{۱۴۴}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{\frac{۴۹}{۱۶}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{\underline{\hspace{2cm}}} = \frac{۳}{۵}$$

$$-\sqrt{\underline{\hspace{2cm}}} = -\frac{۱}{۷}$$

۳- به صورت تقریبی مشخص کنید که عددهای داده شده نظیر کدام یک از نقاط مشخص شده



تمرین



۱- نزدیک ترین عدد طبیعی به هر یک از عددهای زیر را پیدا کنید.

$$\sqrt{401}$$

$$\sqrt{310}$$

$$\sqrt{9999}$$

$$\sqrt{280}$$

$$\sqrt{175}$$

درستی پاسخ خود را به کمک ماشین حساب بیازمایید.

۲- یک محور اعداد رسم کنید و عددهای زیر را به صورت تقریبی روی آن مشخص کنید.

$$\sqrt{14}, \sqrt{10}, \sqrt{24}, -\sqrt{3}, -\sqrt{8}, -\sqrt{17}$$

۳- مجموع عددهای واقع بر هر سطر، هر ستون و نیز هر قطر مربع زیر ۶- است.

جاهای خالی را با چه عددهایی می توان پر کرد؟

	$-(\sqrt{4}+2^2)$	-5°
-2^2		5°
$-\sqrt{9}$	1^5+1^2	

۴- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(a^5 \times a^4) \times (b^{17} \div b^3) =$$

$$\sqrt{\frac{49 \times 25}{36}}$$

۵- جذر 700 را تا یک رقم اعشار به دست آورید و نتیجه را به کمک ماشین حساب بررسی کنید.

۶- دو عدد طبیعی بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ پیدا کنید.

۷- پنج عدد بین $\sqrt{3}$ و $\sqrt{8}$ پیدا کنید.

۸- اعداد رادیکالی زیر را به صورت ضرب یک عدد طبیعی در یک رادیکال بنویسید.

$$\sqrt{27}$$

$$\sqrt{50}$$

$$\sqrt{200}$$

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

● توان ● جذر تقریبی ● ریشه‌های دوم یک عدد ● جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- محاسبه حاصل یک عدد توان‌دار به توان عدد دیگر
- محاسبه تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی
- محاسبه تقریبی تقسیم دو عدد توان‌دار با نماهای مساوی
- محاسبه جذر یک عدد
- محاسبه یک عبارت توان‌دار
- ساده کردن یک عبارت توان‌دار
- محاسبه جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم
- پیدا کردن عددهای رادیکالی روی محور

کاربرد

کاربرد این درس علاوه بر درس‌های دیگر ریاضی مثل جبر در بیان عددهای بسیار بزرگ و با بسیار کوچک است. نماد علمی نحوه‌ای از بیان این عددها به صورت توان‌دار است.

تمرین‌های ترکیبی

۱- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{(-3)^5 \times 2^4 \times 8}{-2^7 \times (-9)^2 \times 18}$$

۲- حاصل تقسیم مقابل را به دست آورید.

$$\left[3^{10} \times \left(\frac{1}{27}\right)^3 \right]^2 \div \left[5^4 \times \left(\frac{1}{25}\right)^2 \right]^3$$

۳- با تهیه جدول مناسب، جذر عدد ۹۳ را تا دورقم اعشار به دست آورید.

۴- عددهای زیر را به ترتیب صعودی و از چپ به راست مرتب کنید.

$$-2^4 \text{ و } 2^3 \text{ و } \sqrt{25} \text{ و } \sqrt{47} \text{ و } 6 \text{ و } (-2/5)^4 \text{ و } (-2)^4$$

۵- به کمک رسم، مکان متناظر با عددهای زیر را روی محور اعداد مشخص کنید.

$$\sqrt{10} \text{ و } \sqrt{13} \text{ و } \sqrt{20} - \sqrt{16}$$

۶- مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $x = -2$ و $y = 6$ و $a = -1$ و $b = \frac{1}{4}$ به دست آورید.

$$\frac{ax^2 - b(x - y^2)}{2axy + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3}{b^2}}$$



۸

فصل

آمار و احتمال



بررسی خواص هر گاز با استفاده از آمار و احتمال، هم کاری ساده است و هم به نتایج قابل قبول و عملی منجر می‌شود؛ مثلاً با استفاده از آمار و احتمال می‌توان تعداد دفعاتی را برآورد کرد که باید مقداری گاز دارای اورانیوم را غنی کنیم تا به درجه خلوص مورد نیاز برسد.

در سال‌های پیش با **علم آمار**، که علم جمع‌آوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده‌ها) است، آشنا شدید. **داده‌ها** را با چوب خط، سرشماری و در جدول سازماندهی کردید؛ سپس، با توجه به موضوع و هدف آمارگیری، نمودار آن اطلاعات را رسم کردید. در زیر، چهار نوع نمودار و کاربرد هر کدام یادآوری شده است.



اگر داده‌های جمع‌آوری شده زیاد و پراکنده باشند، بررسی آنها طولانی می‌شود. برای اینکه بتوانیم آسان‌تر و بهتر نتیجه بگیریم، داده‌ها را متناسب با موضوع آماری **دسته‌بندی** و سازماندهی می‌کنیم.



در زیر، داده‌های جمع‌آوری شده دربارهٔ اندازهٔ قد ۴۰ نفر از مردان ساکن یک

شهر کوچک برحسب ساتی متر مشخص شده است. ($n=40$)

۱۶۴ ۱۶۸ ۱۷۳ ۱۸۵ ۱۵۳ ۱۷۴ ۱۷۸ ۱۹۲ ۱۵۰ ۱۷۵ ۱۶۷ ۱۸۴ ۱۴۷ ۱۸۱
۱۵۱ ۱۶۲ ۱۶۷ ۱۷۳ ۱۴۲ ۱۶۳ ۱۳۸ ۱۶۵ ۱۳۷ ۱۷۱ ۱۹۳ ۱۶۸ ۱۷۰ ۱۳۰
۱۶۵ ۱۸۳ ۱۵۷ ۱۷۹ ۱۷۶ ۱۵۹ ۱۷۰ ۲۰۵ ۱۵۸ ۱۷۳ ۱۹۰ ۱۴۳

کمترین و بیشترین داده را مشخص کنید.

به فاصلهٔ بین این دو عدد **دامنهٔ تغییرات** می‌گویند. دامنهٔ تغییرات داده‌ها را پیدا کنید.

در یک تولیدی شلوار مردانه می‌خواهیم با توجه به داده‌های جمع‌آوری شده بالا اندازه‌های مختلف را طراحی کنیم. برای این کار، داده‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم. هر دسته یک معنای مشخصی دارد؛ برای مثال، افراد مختلف را می‌توانیم به صورت زیر تقسیم‌بندی کنیم:

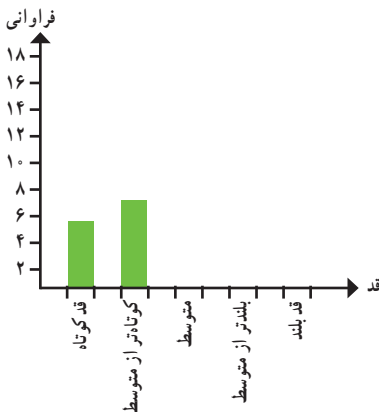
قد بلند، بلندتر از متوسط، متوسط، کوتاه‌تر از متوسط و قد کوتاه

به این ترتیب، داده‌های ما به ۵ دسته تقسیم می‌شوند. می‌توانیم طول این دسته‌ها را مساوی در نظر بگیریم؛ به همین دلیل، برای رسیدن به حدود دسته‌ها دامنهٔ تغییرات را بر ۵ تقسیم می‌کنیم تا طول دسته‌ها به طور تقریبی معلوم شود. به این ترتیب، می‌توانیم محدودهٔ دسته‌ها را مشخص کنیم و در یک جدول بنویسیم.

در جدول زیر معنای $130 \leq x < 145$ را توضیح دهید. $<$ و $\leq$ چه تفاوتی دارند؟

با توجه به حدود دسته‌ها با استفاده از چوب خط، تعداد داده‌های هر دسته را که به آن **فراوانی**

می‌گویند، تعیین کنید.



حدود دسته‌ها	چوب خط	فراوانی
$130 \leq x < 145$		
$145 \leq x < 160$		
$160 \leq x < 175$		
$175 \leq x < 190$		
$190 \leq x \leq 205$		

با توجه به فعالیت صفحه قبل به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

- ۱- قد بیشتر افراد در چه محدوده‌ای است؟
- ۲- با توجه به نمودار میله‌ای، متوجه چه چیزی می‌شوید؟
- ۳- فکر می‌کنید میانگین قد مردان این شهر در کدام دسته قرار می‌گیرد؟
- ۴- به نظر شما این آمار و اطلاعات و نمودار چه کاربردهای دیگری دارد؟



۱- میانگین دمای هوا در روزهای مختلف یک منطقه به صورت زیر گزارش شده است.

+۲	+۲	+۴	+۵	+۶	۰	-۱	-۲	۰	-۳	-۷	-۲	-۱	۰	۰
-۱	-۳	-۶	-۷	-۸	+۸	+۷	+۸	+۷	+۶	+۳	+۱	+۲	+۳	+۴
+۲	+۲	-۴	-۲	-۱	۰	-۵	-۳	۰	۰	+۱	+۱	+۴	+۶	+۷

جدول فراوانی داده‌ها را براساس سؤال‌های زیر مشخص، و نموداری میله‌ای رسم کنید.

- دامنه تغییرات چقدر است؟
- داده‌ها را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم؛ طول هر دسته چقدر است؟

۲- نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس به صورت زیر است. با توجه به دامنه تغییرات، آنها را به ۵ دسته با طول مساوی دسته‌بندی کنید. پس از رسم جدول، نمودار میله‌ای را رسم کنید و با توجه به نمودار، وضعیت این کلاس را توصیف کنید.

۱۶	۱۸	۱۵	۹/۵	۱۲/۵	۱۳	۱۲	۱۳/۵	۱۴	۱۱	۱۳	۹	۸
۱۵	۱۴	۱۹	۱۸/۵	۱۷	۱۵/۵	۱۶/۵	۱۱	۸/۵	۷	۵	۱۳	۱۵
۱۴	۱۰/۵	۱۱/۵	۱۵	۱۸	۱۷	۱۴	۶	۱۲/۵	۲۰			

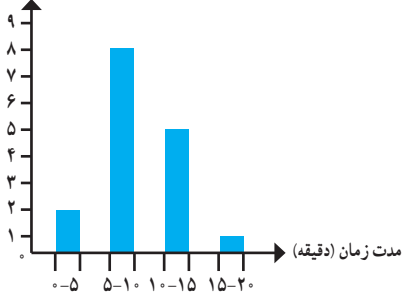
تمرین



۱- در یک کارگاه تولید لامپ، ۳۰ لامپ به صورت تصادفی انتخاب، و طول عمر آنها بر حسب ساعت اندازه گیری شده است. داده ها را به ۵ دسته تقسیم، و جدول فراوانی و نمودار میله ای آن را رسم کنید.

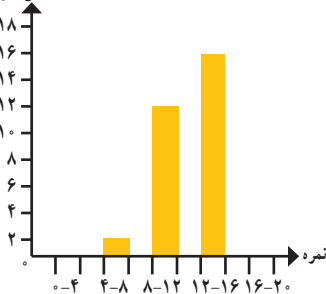
۱۵۶	۱۵۹	۱۶۵	۱۶۳	۱۶۱	۱۵۷	۱۵۴	۱۵۷	۱۶۸	۱۷۲	۱۶۳	۱۵۸	۱۵۷	۱۶۱	۱۷۱
۱۶۳	۱۶۸	۱۶۷	۱۵۹	۱۵۲	۱۵۳	۱۵۸	۱۵۷	۱۶۹	۱۷۰	۱۵۳	۱۶۹	۱۵۸	۱۶۵	۱۵۶

تعداد دانش آموزان



۲- از دانش آموزان یک کلاس درباره مدت زمانی که طول می کشد تا آنها از خانه به مدرسه بروند، سؤال شده و پس از دسته بندی این داده ها نمودار میله ای مقابل، رسم شده است. چند دانش آموز فاصله خانه تا مدرسه را در ۱۰ یا بیشتر از ۱۰ دقیقه طی می کنند؟ این کلاس چند دانش آموز دارد؟

تعداد دانش آموزان



۳- در اینجا نمودار نمره های دانش آموزان یک کلاس را می بینید.

- این کلاس چند دانش آموز دارد؟
- آیا این دسته بندی مناسب است؟ چرا؟
- آیا این کلاس وضعیت خوبی دارد؟ چرا؟



پس از اینکه داده‌های آماری در جدول سازماندهی می‌شوند و به کمک نمودارها درک بهتری از داده‌ها به دست می‌آید، می‌توان از میانگین داده‌ها نیز برای کامل‌تر شدن نتایج داده‌ها و تحلیل و تفسیر بهتر آنها استفاده کرد. شما در دوره ابتدایی با میانگین گرفتن آشنا شده‌اید. میانگین تعدادی داده عددی از تقسیم مجموع آنها بر تعدادشان به دست می‌آید.

فعالیت



۱- نمره‌های ریاضی یک دانش‌آموز ۱۷، ۱۸، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ است. میانگین نمره‌های او را حساب کنید.

$$\bar{x} = \frac{S}{n} \quad \text{یا به صورت جبری} \quad \text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}$$

۲- نمره‌های یک دانش‌آموز به صورت زیر است :

۱۶ ۱۵/۵ ۱۶ ۱۵ ۱۷ ۱۹ ۱۸/۵ ۱۴ ۱۶/۵ ۱۷/۵

میانگین نمره‌های او را پیدا کنید. چند نمره بالاتر از میانگین و چند نمره پایین‌تر از میانگین قرار می‌گیرند؟ آیا این دو تعداد مساوی است؟

اختلاف نمره‌های بالای میانگین را با میانگین حساب کنید. حاصل جمع آنها را پیدا کنید؛ به همین ترتیب، مجموع اختلاف نمره‌های پایین‌تر از میانگین با میانگین را هم پیدا کنید. نتایج بالا را با هم مقایسه کنید.

۳- میانگین نمره‌های ۷ درس یک دانش‌آموز ۱۶/۵ است. اگر نمره‌های دو درس دیگر او، که ۱۷ و ۱۵ است به این داده‌ها اضافه شود، میانگین جدید را پیدا کنید.

آیا می‌توان میانگین دو نمره ۱۵ و ۱۷ را پیدا کرد (۱۶ می‌شود) و سپس میانگین ۱۶ و ۱۶/۵ را حساب کرد؟ چرا؟

۴- میانگین نمره‌های زیر را به دست آورید. بین این عددها چه رابطه‌ای وجود دارد؟ فاصله هر عدد تا میانگین چقدر است؟

۱۱ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۳ ۱۳ ۱۴ ۱۴ ۱۵

کاردر کلاس



با توجه به رابطه‌ای که پیدا کرده‌اید، میانگین عددهای زیر را به دست آورید.

۱۷ ۱۴ ۱۱ ۱۵ ۱۲ ۱۹ ۱۸ ۱۳ ۱۶

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد و داده‌ها دسته‌بندی شده باشند، می‌توان میانگین داده‌ها را با تقریب بسیار خوب به دست آورد.

فعالیت



۱- به کمک ماشین حساب، میانگین قد 40° نفر را که در درس قبل مطرح شده

است، پیدا کنید.

۲- برای به دست آوردن **مرکز دسته‌ای** مانند دسته $145 > x \geq 130$ ، ابتدا مجموع عددهای 130° و 145° را به دست می‌آوریم و سپس، حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

۳- اکنون تمام داده‌ها را در این قسمت می‌بینید. مرکز هر دسته را به جای داده‌های آن دسته قرار دهید؛ برای مثال، چون عدد ۱۹۲ در دسته $205 \geq x \geq 190$ قرار دارد به جای آن عدد $197/5$ را، که مرکز این دسته است، قرار دهید.

$197/5$

۱۶۴	۱۶۸	۱۷۳	۱۸۵	۱۵۳	۱۷۴	۱۷۸	۱۹۲	۱۵۰	۱۷۵	۱۶۷	۱۸۴	۱۴۷	۱۸۱
۱۵۱	۱۶۲	۱۶۷	۱۷۳	۱۴۲	۱۶۳	۱۳۸	۱۶۵	۱۳۷	۱۷۱	۱۹۳	۱۶۸	۱۷۰	۱۳۰
۱۶۵	۱۸۳	۱۵۷	۱۷۹	۱۷۶	۱۵۹	۱۷۰	۲۰۵	۱۵۸	۱۷۳	۱۹۰	۱۴۳		

۴- چرا در عددهای تغییر یافته ۴ تا $197/5$ وجود دارد؟

۵- با توجه به عددهای بالا، میانگین 40° عدد جدید را پیدا کنید.

چگونه برای پیدا کردن مجموع داده‌ها از ضرب استفاده می‌کنید؟ این ضرب‌ها چه رابطه‌ای با فراوانی‌های جدول دارند؟

۶- میانگین به دست آمده را با میانگین واقعی، که با ماشین حساب پیدا کردید، مقایسه کنید.

مقدار خطای این روش چقدر است؟

کار در کلاس



با توجه به فعالیت صفحه قبل با کامل کردن جدول زیر، میانگین داده‌ها را دوباره محاسبه کنید.

مرکز دسته × فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	حدود دسته‌ها
			$130 \leq x < 145$
			$145 \leq x < 160$
			$160 \leq x < 175$
			$175 \leq x < 190$
			$190 \leq x \leq 205$
			مجموع

میانگین = — = —

تمرین



- ۱- میانگین دمای هوا مربوط به کار در کلاس صفحه ۱۲۲ و میانگین ساعت‌های عمر لامپ مربوط به تمرین ۱ صفحه ۱۲۳ را به دست آورید. از جدول فراوانی استفاده کنید.
- ۲- جدول زیر را کامل و میانگین را حساب کنید.

مرکز × فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	خط نشان	دسته‌ها
			/// /	$0 \leq x < 4$
			////	$4 \leq x < 8$
	۱۰	۸		
				$12 \leq x < 16$
	۱۸		/// ////	
		۴۴		جمع

۳- میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس ۳۰ نفره ۱۷/۲۵ شده است. یکی از دانش‌آموزان در این امتحان نمره ۳/۵ گرفته است؛ در حالی که بقیه آنها نمره بالای ۱۵ گرفته‌اند. الف) اگر نمره این دانش‌آموز را از کلاس کنار بگذاریم، حدس می‌زنید معدل کلاس کمتر می‌شود یا بیشتر؟ حال با محاسبه معدل کلاس پس از حذف نمره این دانش‌آموز حدس خود را بررسی کنید.

ب) حالا فرض کنید همه دانش‌آموزان کلاس نمره کمتر از ۱۴ گرفته‌اند؛ به‌جز یک نفر که ۲۰ گرفته است، معدل این کلاس ۳۰ نفره ۱۰/۲۵ شده است. اگر دانش‌آموزی را که نمره ۲۰ گرفته است کنار بگذاریم، حدس می‌زنید معدل کلاس کمتر می‌شود یا بیشتر. معدل کلاس پس از حذف نمره این دانش‌آموز را به‌دست آورید و حدس خود را بررسی کنید.

خواندنی

فکر اولیه احتمال بر بازی‌های شانسی مبتنی است. این گونه بازی‌ها از زمان‌های بسیار قدیم رایج بوده‌اند؛ زیرا در حفاری‌های باستان‌شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شانسی مشاهده شده‌اند؛ از جمله مکعبی استخوانی که روی وجه‌های آن عددهایی از ۱ تا ۶ نقش شده است.

در روزگار کنونی در مواردی که به‌راحتی نتوان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد از شانس استفاده می‌شود؛ برای مثال در شروع بازی فوتبال از پرتاب سکه استفاده می‌کنند یا برای قبول یا رد یک موضوع از قرعه کمک می‌گیرند. همچنین بانک‌ها برای اختصاص دادن جایزه به مشتریان دارای حساب قرض‌الحسنه از قرعه‌کشی استفاده می‌کنند.

فعالیت



۱- ده کارت هم اندازه و هم شکل داریم و روی آنها عددهای ۱۱ تا ۲۰ را نوشته‌ایم. کارت‌ها را به پشت روی میز قرار می‌دهیم و به‌طور تصادفی، یکی از آنها را برمی‌داریم. احتمال اینکه روی این کارت عددی اول باشد بیشتر است یا احتمال اینکه عددی مرکب باشد؟ چرا؟



وقتی یک سکه را می‌اندازیم، قبل از اینکه به زمین برسد نمی‌دانیم چه پیش می‌آید؛ یعنی روی سکه می‌آید یا پشت آن! اما می‌دانیم که دو حالت ممکن است پیش آید: روی سکه یا پشت سکه! از آنجا که این دو حالت مشابه‌اند، امکان اینکه روی سکه یا پشت آن بیاید، برابر است و چون در یک حالت از این دو حالت ممکن، روی سکه می‌آید، پس احتمال اینکه روی آن بیاید $\frac{1}{2}$ است؛ به همین ترتیب، احتمال اینکه پشت سکه هم بیاید، $\frac{1}{2}$ است.



۲- در هر یک از موارد زیر، حالت‌های هم‌شانس را بنویسید.
(الف) عقربه چرخنده را می‌چرخانیم.
(ب) تاسی را می‌اندازیم.

۳- معلم از دانش‌آموزان پرسید: «یک مهره را به‌طور تصادفی از کیسه‌ای که در آن سه مهره سبز و یک مهره سفید است، بیرون می‌آوریم. چند حالت هم‌شانس می‌تواند رخ دهد؟»



بلافاصله شایان پاسخ داد: «دو حالت: سبز، سفید»
سپس علی برای اینکه بتواند پاسخ سؤال را بدهد، مهره‌های سبز را شماره‌گذاری کرد و پاسخ داد:
«چهار حالت: سبز ۱، سبز ۲، سبز ۳، سفید»
به نظر شما چرا پاسخ علی درست است؟

- ۴- در آزمایش مربوط به فعالیت ۱ با توجه به اینکه ۱۰ کارت داریم، بیرون آمدن هر یک از عددهای روی کارت‌ها هم شانس هستند؛ حالا به سؤال‌ها پاسخ دهید :
- الف) در چند تا از آنها عدد روی کارت، اول است؟ _____
- ب) در چند تا از آنها عدد روی کارت، مرکب است؟ _____
- ج) احتمال هر یک از اتفاق‌ها (پیشامد)های زیر را پیدا کنید :
- _____ = احتمال اینکه عدد روی کارت، اول باشد. _____ = احتمال اینکه عدد روی کارت، مرکب باشد.

برای اینکه احتمال رخ دادن هر پیشامد را بیاییم، تعداد حالت‌های منجر به آن اتفاق را بر تعداد کل حالت‌ها تقسیم می‌کنیم :

$$\text{احتمال رخ دادن هر پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

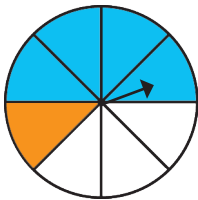


کارد در کلاس

- ۱- پنج توپ کوچک با شماره‌های ۱ تا ۵ را داخل یک جعبه ریخته‌ایم. احمد یکی از آنها را به‌طور تصادفی از جعبه خارج می‌کند. قرار است اگر عدد توپ زوج بود، جایزه بگیرد. احتمال اینکه احمد جایزه بگیرد چقدر است؟
 - ۲- حمید می‌داند دوستش در خرداد به دنیا آمده است اما نمی‌داند چه روزی! احتمال اینکه دوست حمید در روز ۱۵ خرداد به دنیا آمده باشد، چقدر است (خرداد ۳۱ روز دارد)؟
 - ۳- برای هر یک از موارد زیر یک مثال بنویسید.
 - الف) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن صفر باشد.
 - ب) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن از $\frac{1}{4}$ کمتر باشد.
 - ج) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن $\frac{1}{4}$ باشد.
 - د) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن از $\frac{1}{4}$ بیشتر باشد.
 - هـ) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن یک باشد.
- عبارت زیر را بخوانید؛ درستی یا نادرستی آن را مشخص کنید و دلیل این تشخیص را در چند جمله بنویسید.
- «احتمال رخ دادن یک پیشامد برابر با صفر، یک یا عددی بین صفر و یک است.»



۱- الف) عقربه چرخنده زیر را می چرخانیم. احتمال هریک از حالت های زیر را پیدا کنید و در جدول بنویسید.

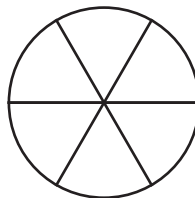
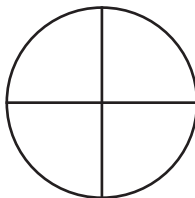
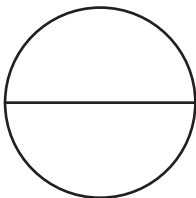


نایستد	بایستد	
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	عقربه روی نارنجی
		عقربه روی آبی
		عقربه روی سفید

ب) حاصل جمع دو عدد هر سطر جدول را به دست آورید. چرا حاصل جمع ها با هم برابرند؟

ج) احتمال رخ دادن یک پیشامد $\frac{3}{10}$ است. احتمال رخ ندادن آن چقدر است؟ چرا؟

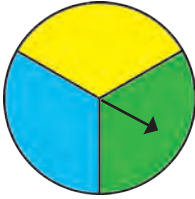
۲- الف) هریک از چرخنده های زیر را طوری رنگ کنید که احتمال ایستادن عقربه روی رنگ سفید برابر $\frac{1}{4}$ باشد.



ب) بین این فعالیت و تساوی کسرها چه ارتباطی وجود دارد؟

۳- از یک کیسه حاوی ۵۰ مهره، مهره ای را به طور تصادفی بیرون می آوریم. احتمال سبز بودن مهره، $\frac{3}{10}$ است. چند تا از مهره ها سبزند؟

تمرین



- ۱- اگر عقربه شکل چرخندهٔ روبه‌رو را ۳۰۰ بار بچرخانیم.
عبارت‌های درست را با $\sqrt{\quad}$ و عبارت‌های نادرست
را با $\times$ مشخص کنید.

(الف) عقربه ۱۰۰ بار روی زرد می‌ایستد.

(ب) انتظار داریم عقربه تقریباً ۱۰۰ بار روی آبی بایستد.

(ج) تعداد دفعاتی که عقربه روی هریک از این سه رنگ می‌ایستد، حتماً برابر است.

۲- تاسی را می‌اندازیم؛ احتمال هریک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

(الف) مضرب ۵ بیاید.

(ب) شمارندهٔ ۶ بیاید.

(ج) ۷ یا بیشتر بیاید.

۳- سی مهره با شماره‌های ۱ تا ۳۰ را در گردونه‌ای ریخته‌ایم. مهره‌ای را به‌طور تصادفی از گردونه خارج می‌کنیم. احتمال هریک از حالت‌های زیر را به‌دست آورید :

(الف) فرد بودن عدد روی مهره

(ب) مضرب ۵ بودن عدد روی مهره

(ج) اول بودن عدد روی مهره

۴- احتمال هریک از پیشامدهای زیر را با توجه به چرخندهٔ زیر به‌دست آورید.



(الف) عقربهٔ چرخنده روی سبز بایستد.

(ب) عقربهٔ چرخنده روی آبی بایستد.

(ج) عقربهٔ چرخنده روی قرمز بایستد.

۵- در یک کیسه تعدادی مهرهٔ رنگی وجود دارد. می‌خواهیم مهره‌ای را به‌طور تصادفی از آن

بیرون بیاوریم. می‌دانیم احتمال سبز بودن مهره $\frac{3}{8}$ است.

(الف) احتمال سبز نبودن مهره را حساب کنید.

(ب) آیا می‌توانید تعداد مهره‌های درون پاکت را پیدا کنید؟ چرا؟

۶- یک سکه در چهار پرتاب پشت سر هم، رو آمده است. فکر می‌کنید اگر بار پنجم آن را

بیندازیم، چه می‌آید؟ چرا؟

فعالیت



۱- سارا، ستاره و محدثه یک بازی طراحی کرده‌اند. آنها دو سکه را هم‌زمان می‌اندازند. اگر هر دو، رو آمد، سارا امتیاز می‌گیرد و اگر هر دو، پشت آمد، ستاره. اگر هم، یکی رو و یکی پشت آمد، محدثه امتیاز می‌گیرد.

فکر می‌کنید این بازی عادلانه است؟ یعنی شانس امتیاز گرفتن بازیکن‌ها با هم مساوی است؟

	هر دو، پشت	هر دو، رو	یکی رو، یکی پشت
در ۲۰ آزمایش			
در ۸۰ آزمایش			

۲- دو سکه بردارید و ۲۰ بار آزمایش کنید.

نتایج ۲۰ آزمایش را با رسم چوب خط در جدول ثبت کنید.

نتایج آزمایش خودتان را با نتایج سه هم‌گروهی‌تان جمع

کنید و با استفاده از نتایج مربوط به ۸۰ آزمایش، درستی فکرتان

را بررسی کنید.

آیا نتیجه آزمایش‌ها، پاسخ شما به فعالیت ۱ را تأیید می‌کند؟

۳- در جدول زیر، حالت‌های ممکن در پرتاب دو سکه نشان داده شده است. با توجه به این

جدول، احتمال امتیاز گرفتن هر کدام از بازیکن‌ها را محاسبه کنید.

سکه دوم سکه اول		
رو - پشت	رو - رو	پشت - پشت
پشت - رو	پشت - رو	پشت - پشت

_____ = احتمال اینکه یک سکه رو بیاید و یک سکه پشت.

_____ = احتمال اینکه هر دو سکه رو بیایند.

_____ = احتمال اینکه هر دو سکه پشت بیایند.

حالا دوباره به سؤال فعالیت ۱ پاسخ دهید و برای پاسختان

دلیل بیاورید.

کار در کلاس



محمد می‌خواست یک شاخه گل رز برای مادرش و یک شاخه هم برای پدرش بخرد. در

گل فروشی تعداد زیادی گل رز به رنگ‌های سفید، قرمز و صورتی بود.

گل مادر گل پدر	سفید	قرمز	صورتی
سفید	س - س	ق - س	
قرمز	س - ق		
صورتی	س - ص		

او دو شاخه گل را به‌طور تصادفی و به‌ترتیب برای مادر

و پدرش برداشت.

الف) همه حالت‌های ممکن را به کمک جدول پیدا کنید.

ب) در چند تا از این حالت‌ها دست کم یکی از گل‌ها سفید است؟

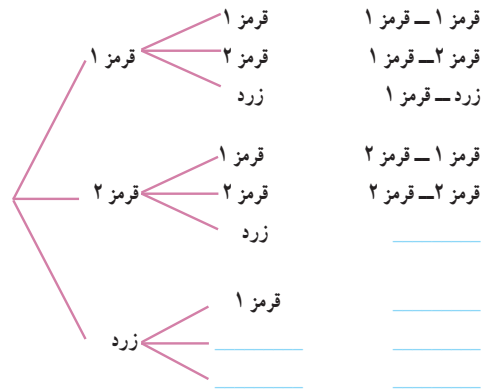
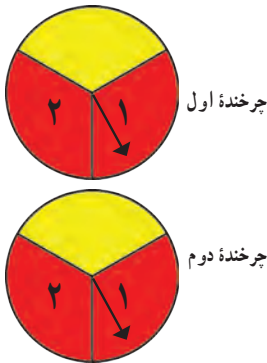
فعالیت



۱- می‌خواهیم عقربه‌های دو چرخنده زیر را بچرخانیم و رنگی را که عقربه‌ها روی آن می‌ایستند، یادداشت کنیم.

الف) با کامل کردن نمودار درختی، همه حالت‌های ممکن را پیدا کنید.

حالت‌های ممکن



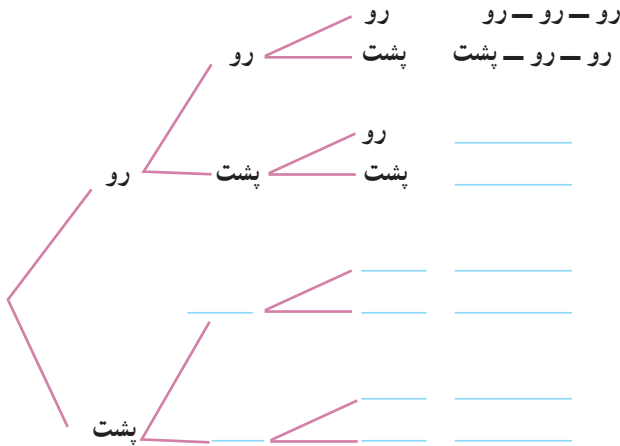
ب) احتمال اینکه هر دو عقربه روی رنگ قرمز بایستند، چقدر است؟

۲- سه سکه را هم‌زمان انداختیم. پارسا و عرفان هر کدام با یک روش، همه حالت‌های ممکن را نوشته، و تعداد حالت‌ها را یافته‌اند.
الف) راه حل هر دو را کامل کنید.

راه حل عرفان

	سکه دوم	سکه اول	

حالت های ممکن سکه سوم سکه دوم سکه اول



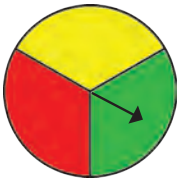
- (ب) شما کدام راه حل را بیشتر دوست دارید؟
 (ج) آیا می توانید روش دیگری برای یافتن تعداد حالت های ممکن پیشنهاد کنید؟
 (د) تعداد حالت های ممکن چند تاست؟
 (ه) احتمال اینکه هر سه سکه رو بیاید، چقدر است؟
 (و) احتمال اینکه دقیقاً دو سکه رو و یکی پشت بیاید، چقدر است؟

تمرین



۱- در یک کارخانه دو چرخه سازی دو مدل دو چرخه تولید می شود : دو چرخه جاده و دو چرخه کوهستان. در این کارخانه هر نوع دو چرخه در سه رنگ زرد، قرمز و آبی و دو اندازه ۲۴ و ۲۶ تولید می شود.

(الف) چند نوع دو چرخه مختلف در این کارخانه تولید می شود؟
 (ب) در نشریه تبلیغاتی این کارخانه، در هر صفحه عکس یکی از این دو چرخه ها آمده است. علی یکی از صفحه ها را به طور تصادفی انتخاب می کند. احتمال اینکه در این صفحه دو چرخه کوهستان آبی رنگ اندازه ۲۶ دیده شود، چقدر است؟



۲- عقربه چرخنده مقابل را می چرخانیم و تاسی را می اندازیم.
الف) با کامل کردن جدول، همه حالت های ممکن را پیدا کنید.

تاس چرخنده	۱	۲	۳	۴	۵	۶
سبز						
قرمز						
زرد						

ب) در چند حالت عقربه روی قرمز ایستاده است و تاس عددی زوج را نشان می دهد؟

۳- فکلی داریم که رمز آن عددی یک رقمی است. (این رقم می تواند ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹ باشد.)

الف) احتمال اینکه با یک حدس بتوانیم رمز قفل را پیدا کنیم، چقدر است؟

ب) اگر رمز دو رقمی شود، این احتمال چه تغییری می کند؟



۴- دو تاس را می اندازیم :

الف) با رسم جدول مناسب، همه ۳۶ حالت ممکن را پیدا کنید.

ب) احتمال اینکه یکی از تاس ها ۳ و تاس دیگر ۵ بیاید، چقدر است؟

ج) احتمال اینکه هر دو تاس ۵ بیاید، چقدر است؟

د) پاسخ قسمت های ب و ج را با هم مقایسه کنید و دلیل تفاوتشان را بنویسید.

۵- دو سکه را می اندازیم. احتمال اینکه دست کم یکی از آنها رو بیاید، چقدر است؟

۶- لوله های انشعاب آب به هر قسمت که برسند، دوشاخه می شوند.

پس از طی کردن ۵ قسمت، چند خروجی خواهیم داشت؟ با عدد توان دار نشان دهید.



مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- دسته‌بندی داده‌ها
- مرکز دسته
- فراوانی
- میانگین
- آمار
- حالت‌های هم‌شانسی
- احتمال
- جدول حالت‌های ممکن
- نمودار درختی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

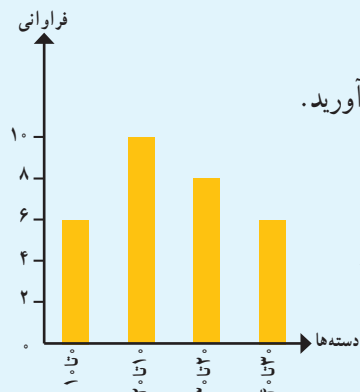
- دسته‌بندی داده‌های زیاد و پراکنده
- محاسبه میانگین داده‌های دسته‌بندی شده
- پیدا کردن احتمال یک پیشامد
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک جدول
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک نمودار درختی

کاربرد

آمار و احتمال در زندگی روزمره کاربرد وسیعی دارد. به کمک اطلاعات آماری و با درک مفهوم احتمال می‌توانیم وقوع رخدادهایی چون بارندگی، سیل و بارش برف را پیش‌بینی کنیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- با توجه به نمودار مقابل، میانگین داده‌ها را به دست آورید.



۲- دو تاس را می‌اندازیم.

(الف) تعدادی از حالت‌های هم‌شانسی ممکن را بنویسید.

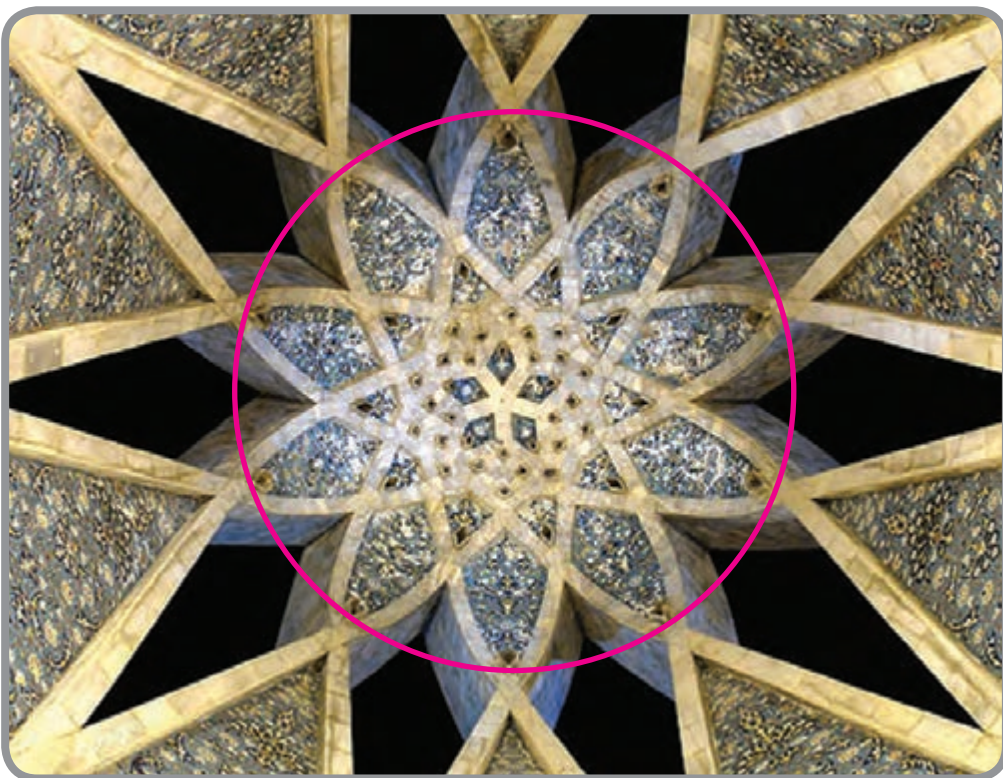
(ب) احتمال اینکه هر دو تاس ۱ بیاید، چقدر است؟



۹

فصل

دایره



زاویه‌های محاطی و مرکزی و ارتباط آنها با کمان‌ها در دایره، کاربرد بسیاری در طراحی نقش فرش‌ها و دیگر صنایع دستی و معماری دارد.

در تصویر بالا نمای داخلی سقف آرامگاه حکیم خیام نیشابوری را مشاهده می‌کنید. خیام، فیلسوف، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و رباعی‌سرای ایرانی قرن پنجم هجری شمسی است. یکی از برجسته‌ترین کارهای وی اصلاح گاهشماری ایران در زمان وزارت خواجه نظام الملک در دوره سلجوقی است.



O.

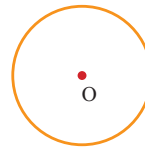
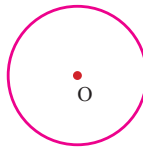
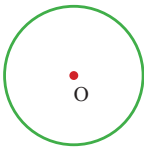
۱- پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه O، ۲ سانتی متر باشد.

اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می‌شود؟

۲- دو خط متمایز در صفحه، یا موازی‌اند یا متقاطع؛ یعنی یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه، یکدیگر را قطع می‌کنند.

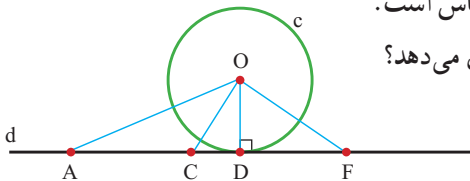


حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.



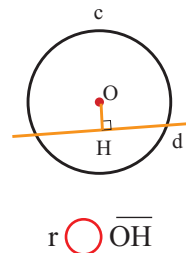
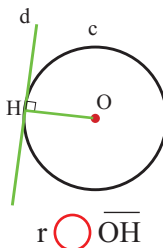
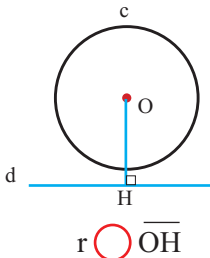
در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

۳- فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند.



خط d بر دایره c به مرکز O و شعاع r مماس است. کدام پاره‌خط فاصله مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟ اندازه این پاره‌خط را با r مقایسه کنید.

۴- در هر یک از شکل‌های زیر، دایره‌ای به شعاع r رسم کرده‌ایم. فاصله مرکز دایره از خط d را $\overline{OH}$ بنامید و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌های زیر را با علامت $>$ ، $=$ یا $<$ کامل کنید.

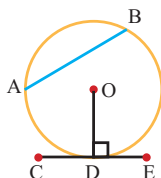
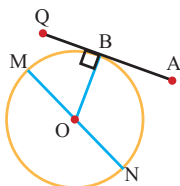


شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

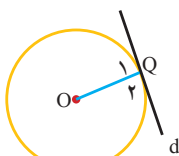
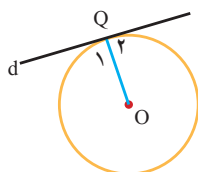
کار در کلاس



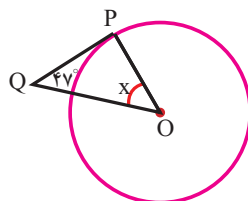
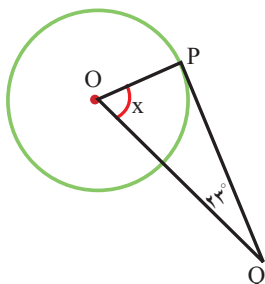
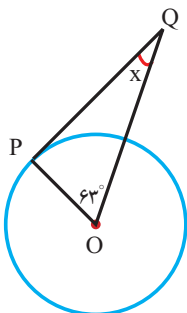
۱- در هر شکل، کدام پاره خط بر دایره مماس است؟



۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است. زاویه Q_1 چه نوع زاویه ای است؟



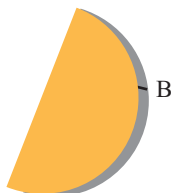
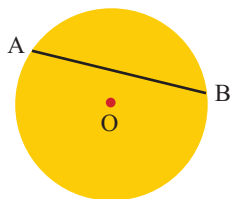
۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



فعالیت

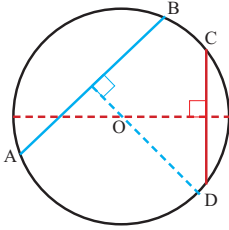


۱- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره ای رسم کنید؛ سپس، صفحه دایره ای شکل را باقیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید. A را به B وصل کنید. این پاره خط **وتر دایره** نامیده می شود. دایره را طوری تا کنید که نقاط A و B روی هم قرار بگیرند. نای کاغذ را باز کنید.



روی خط تا را با مداد پررنگ کنید. در هندسه به این پاره خط چه می گویند؟ روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید. دو پاره خط رسم شده، یکدیگر را در چه نقطه ای قطع می کنند؟

۲- نتیجه فعالیت (۱) را به کمک شکل روبه‌رو توضیح دهید.



۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است.



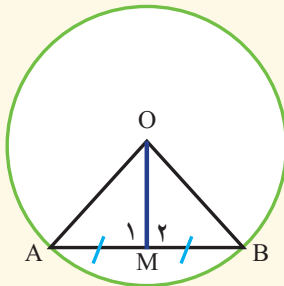
تصویر آن را در شکل روبه‌رو می‌بینید.

با توجه به فعالیت‌های قبل، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم اندازه قطر این بشقاب را مشخص کنیم.

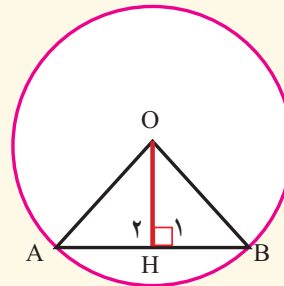
۴- دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجه هر یک از آنها را کامل کنید.

این دو چه تفاوتی دارند؟ درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

وسط AB را M می‌نامیم و O را به M وصل می‌کنیم. پس دو مثلث AOM و BOM در حالت سه ضلع با هم برابرند؛ پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و چون حاصل جمع این دو زاویه 180° درجه است، پس هر کدام از آنها 90° درجه است.



خطی از O بر AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. دو زاویه H_1 و H_2 قائمه‌اند؛ پس دو مثلث قائم‌الزاویه AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛ پس $\overline{AH} = \overline{BH}$



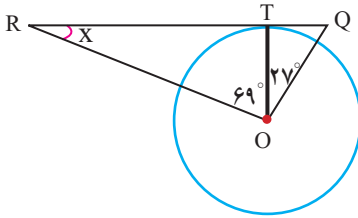
نتیجه: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را

وبرعکس، پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند.

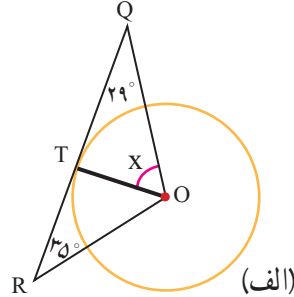
کارد در کلاس



۱- در هر شکل، RQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.

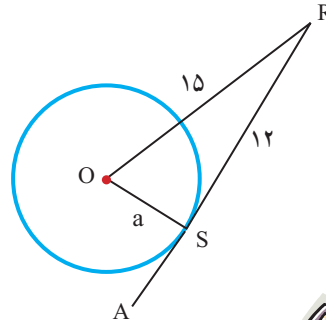
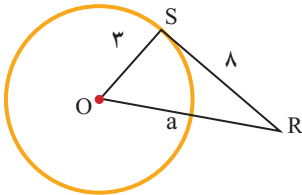


(ب)



(الف)

۲- در هر شکل، SR بر دایره مماس است. مقدار a را به دست آورید.



تمرین

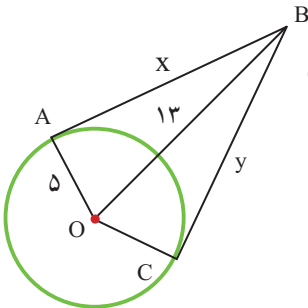


۱- نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری

مرکز دایره ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد.

از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده ایم.

فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.



۲- از نقطه O' خارج دایره ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B

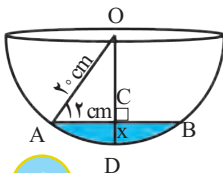
بنامید. شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

(الف) چرا $\overline{O'A} = \overline{O'B}$ ؟

(ب) چرا $\widehat{OO'}$ نیمساز $\widehat{O'}$ است؟

۳- در کاسه کروی روبه رو مقداری آب ریخته ایم،

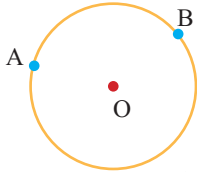
$\overline{AB}$ برابر ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟





۱- ساعت‌های روبه‌رو چه زمانی را نشان می‌دهند؟
پنج دقیقه بعد، هر یک از ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهد؟
در این مدت، عقربه دقیقه‌شمار چند درجه حرکت کرده است؟
در هر یک از ساعت‌ها مسیر حرکت عقربه دقیقه‌شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر

طولانی‌تری را طی کرده است؟



۲- الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده‌اند.

کمان کوچک‌تر را با $\widehat{AB}$ نمایش می‌دهیم و آن را کمان AB می‌نامیم.

آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.

ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه AOB زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان AB نامیده می‌شود.

کمان AB نیز روبه‌رو به زاویه مرکزی AOB است.

۳- شکل روبه‌رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.

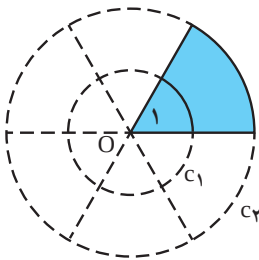
زاویه O_1 چه کسری از 360° درجه است؟

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_1 چه کسری از دایره C_1 است؟

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_2 چه کسری از دایره C_2 است؟

آیا این دو کسر با هم مساوی‌اند؟

آیا طول این دو کمان مساوی است؟



اندازه کمان $\widehat{AB}$ ؛ با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به آن برابر است؛ بنابراین، ممکن است دو

کمان با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوتی داشته باشند.

۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان روبه‌رو به O_1 در هر یک

از دایره‌های C_1 و C_2 برابر 60° درجه است؟

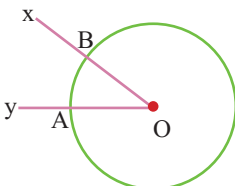
۵- در شکل روبه‌رو زاویه XOY برابر 36° درجه است.

کمان AB چند درجه است؟

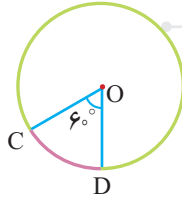
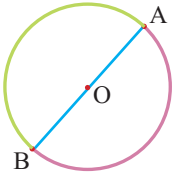
طول کمان AB چه کسری از دایره است؟

برای پاسخ دادن به این پرسش از تساوی روبه‌رو کمک بگیرید.

$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}$$

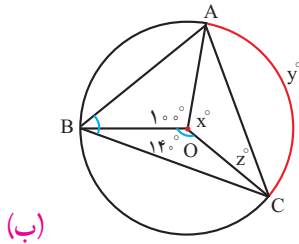


کار در کلاس

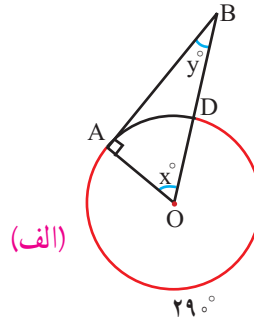


۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است.
اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.

۲- اندازه کمان و زاویه های مجهول را پیدا کنید.

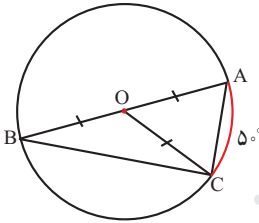


(ب)



(الف)

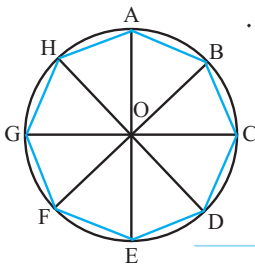
۳- در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است.
زاویه B چند درجه است؟



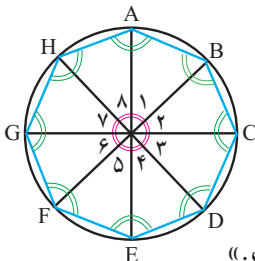
فعالیت



۱- محیط دایره روبه‌رو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده‌ایم.
می‌خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.
رضا برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می‌کند:
«مثلث‌های AOB، BOC، COD و ... متساوی الساقین اند.»

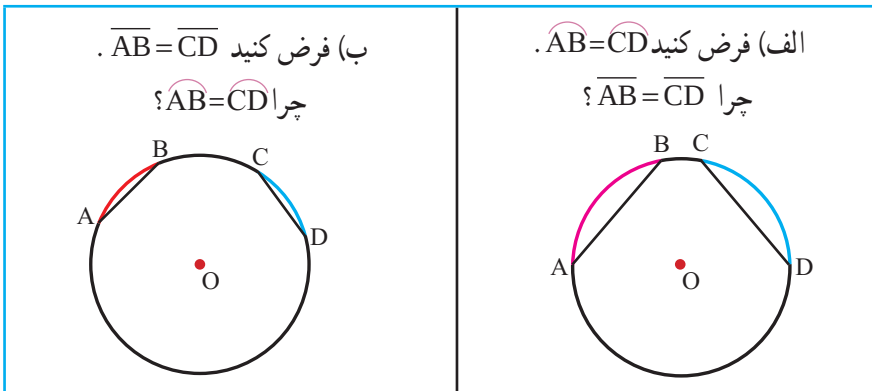


چرا؟
و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots$ پس همه زاویه‌های سبز رنگ با هم برابرند.



چرا؟
پس همه زاویه‌های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟
آرش می‌گوید: «ولی این تنها برابری زاویه‌ها را نشان می‌دهد
و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع‌های هشت ضلعی
پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»

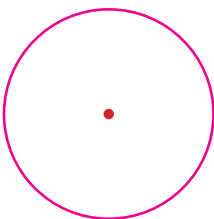
بعد ادامه می‌دهد: «مثلث‌های $\triangle AOB$ ، $\triangle BOC$ ، $\triangle COD$ و ... هم نهشت‌اند؛ در چه حالتی؟
 پس $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$ ؛ یعنی ضلع‌های هشت ضلعی هم مساوی‌اند.»
 هر جا لازم است، توضیحاتی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن هشت ضلعی کامل شود.
 ۲- برای هر مورد دلیل بیاورید.



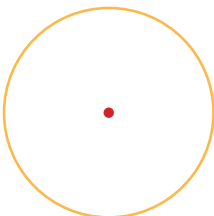
نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.
 اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد،
 به عکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد،



۱- با استفاده از خط کش و نقاله در دایره روبه‌رو
 یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید.

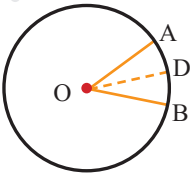


۲- الف) دهانه پیرگار را به اندازه شعاع دایره زیر باز کنید. از یک نقطه دایره، شروع کنید و
 بی‌درپی کمان بزنید.



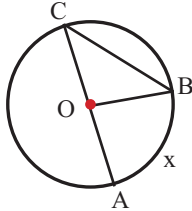
ب) بدین ترتیب، دایره به چند کمان تقسیم می‌شود؟
 ج) چرا این کمان‌ها با هم مساوی‌اند؟
 د) هر کمان چند درجه است؟
 ه) چند کمان 120° درجه در شکل دیده می‌شود؟

تمرین



۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و $\angle AOB = 36^\circ$.

اندازه هر یک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟



۲- کمان AB برابر x درجه است.

اندازه زاویه AOB را بر حسب x به دست آورید.

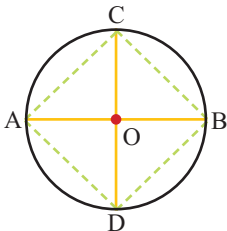
اندازه زاویه ACB را بر حسب x به دست آورید.

۳- متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می‌کند. در هر

شکل، کمان طی شده مشخص شده است. جدول را کامل کنید.

شکل	کسر طی شده از دایره	اندازه کمان طی شده	طول تقریبی کمان طی شده
		180°	$\frac{2\pi}{3}$
		90°	$\frac{2\pi}{4}$
			2π محیط

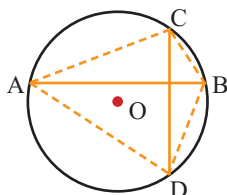
۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند.



الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD و DA با هم مساوی‌اند؟

ب) آیا وترهای AC، CB، BD و DA نیز با هم مساوی‌اند؟

ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ABCD با هم مساوی‌اند؟ چرا؟



۵- در شکل روبه‌رو، وترهای AB و CD بر هم عمودند.

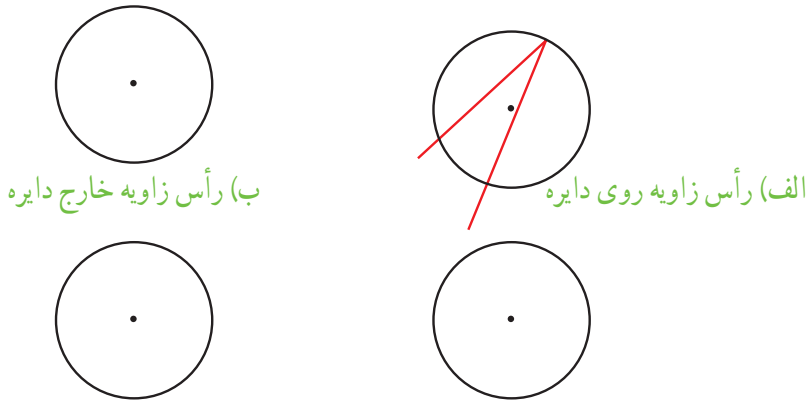
الف) آیا کمان‌های AC، CB، BD و DA با هم مساوی‌اند؟

ب) پاسختان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.

این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟



۱- مانند نمونه رسم شده (الف) در شکل‌های زیر نمونه‌ای از هر یک از وضعیت‌های مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.



(الف) رأس زاویه روی دایره (ب) رأس زاویه خارج دایره (ج) رأس زاویه در مرکز دایره (د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه‌ای غیر از مرکز

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟

به زاویه‌ای که در شکل «الف» مشاهده می‌کنید، زاویه محاطی گفته می‌شود. رأس این زاویه روی دایره است و ضلع‌های آن، دایره را قطع کرده‌اند.

۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را برحسب $\widehat{BC}$ بنویسید : $\widehat{BOC} =$

چرا زاویه‌های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟

چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟

اندازه زاویه محاطی BAC را برحسب $\widehat{BC}$ بنویسید. $\widehat{BAC} =$

۳- با توجه به فعالیت قبل با پر کردن جاهای خالی

اندازه زاویه محاطی DAC را برحسب $\widehat{DC}$ بنویسید.

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

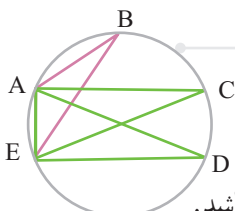
۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC

را هم برحسب $\widehat{EC}$ بنویسید.

$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \quad = \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید. آیا در این سه فعالیت، همهٔ حالت‌های زاویهٔ محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید.
اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با _____

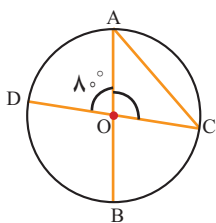
کار در کلاس



۱- با توجه به شکل روبه‌رو،

الف) زاویه‌های محاطی مقابل به $\widehat{AE}$ را پیدا کنید.

ب) دو زاویهٔ محاطی دیگر رسم کنید که $\widehat{AE}$ کمان مقابل به آنها نیز باشد.



فاطمه

$$\hat{O} = 80^\circ \longrightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$$

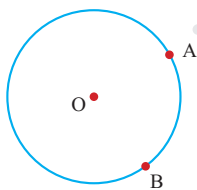
$$\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

زهرا

$$\hat{O}_1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{C} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$



فعالیت

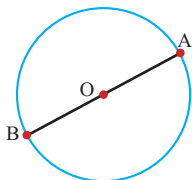


۱- یک زاویهٔ محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

سه زاویهٔ محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

فکر می‌کنید چند زاویهٔ دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

آیا همهٔ این زاویه‌های رسم شده با هم برابرند؟ چرا؟



۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازهٔ هر کمان چند درجه است؟ چرا؟

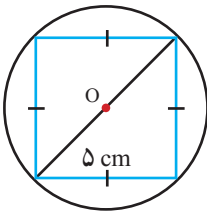
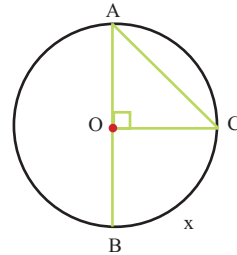
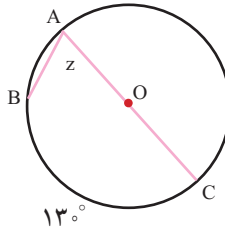
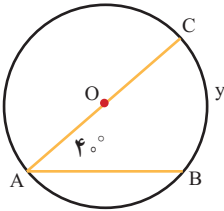
چند زاویهٔ محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویهٔ محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

اندازهٔ این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

کارد در کلاس

۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را پیدا کنید.



۲- در شکل روبه‌رو، همه رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر

روی دایره قرار دارد.

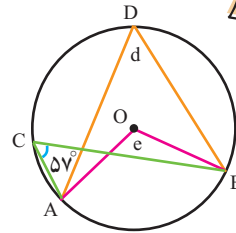
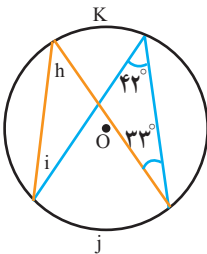
چرا این لوزی، مربع است؟

قطر دایره چند سانتی‌متر است؟



تمرین

۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.

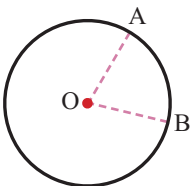


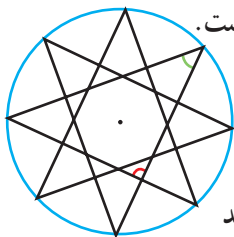
۲- در شکل زیر زاویه مرکزی AOB برابر با ۷۲ درجه است. اندازه کمان AB چند درجه است؟

اگر، دهانه برگار را به اندازه AB باز کنیم و با شروع

از نقطه B، بی‌دری کمان‌هایی بزنیم، چند کمان

مساوی روی دایره جدا می‌شود؟





۳- در شکل روبه‌رو، دایره‌ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.

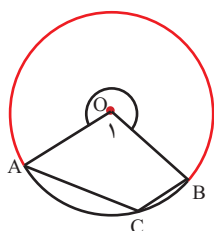
الف) شکل چند خط تقارن دارد؟

(ب) اندازه دو زاویه مشخص شده را روی شکل پیدا کنید و بنویسید.

۴- دایره‌ای بکشید. سپس، چهار ضلعی ABCD را طوری رسم کنید

که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

چرا مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر 180° درجه است؟



۵- در شکل روبه‌رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.

(الف) اندازه زاویه O_1 را بر حسب X بنویسید.

(ب) اندازه کمان قرمز رنگ را بر حسب X بنویسید.

(ج) اندازه زاویه C را بر حسب X بنویسید.

۶- در شکل زیر، پره‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخ ایجاد کرده‌اند.

شعاع چرخ ۳۰ سانتی متر است.

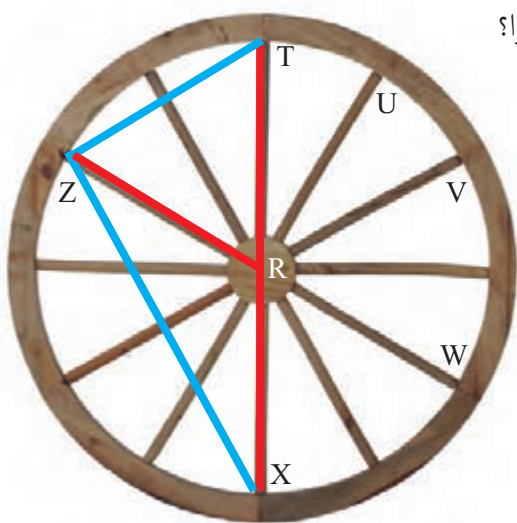
الف) طول TX چقدر است؟

(ب) مثلت ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

(ج) طول ZT چقدر است؟

(د) مثلت XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

(هـ) طول ZX چقدر است؟



مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند، مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- خط مماس
- زاویه مرکزی
- زاویه محاطی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند، با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

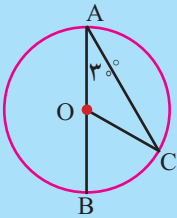
- پیدا کردن مرکز دایره
- تساوی کمان‌ها و وترهای متناظر
- رسم خط مماس بر دایره
- رسم چندضلعی منتظم به کمک زاویه مرکزی
- پیدا کردن زاویه محاطی با توجه به کمان روبه‌روی آن

کاربرد

رسم چندضلعی‌های منتظم به کمک مفاهیم زاویه مرکزی یکی از کاربردهای مهم این درس در طراحی شکل‌های تزئینی و معماری است.

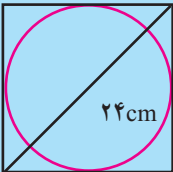
تمرین‌های ترکیبی

۱- با توجه به شکل روبه‌رو، اندازه زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.



$$\hat{C} = \dots\dots\dots, \hat{COB} = \dots\dots\dots, \widehat{BC} = \dots\dots\dots$$

۲- کاغذی مربعی شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید.

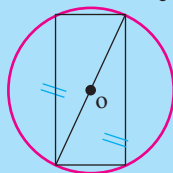


۳- الف) در شکل روبه‌رو، ضلع‌های روبه‌رو به هم در چهارضلعی با هم برابرند.

چرا چهارضلعی مستطیل است؟

ب) شعاع دایره برابر ۵ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{19}$ سانتی‌متر است.

طول مستطیل را به دست آورید.





معلّمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند
نظر اصلاحی خود را درباره مطالب کتاب های درسی از طریق سامانه
«نظرسنجی از محتوای کتاب درسی» به نشانی «nazar.roshd.ir» یا نامه
به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴ - ۱۵۸۷۵ ارسال کنند.

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

معادل مصوب فرهنگستان	معادل در کتاب	واژه بیگانه	ردیف
رمزگذاری	رمزنگاری	enciphering, encryption	۱
پسار	پسا	drag	۲
برآر	برآ	lift	۳
توقفگاه	پارکینگ	parking	۴
نمودار میله‌ای	نمودار ستونی	bar chart, bar graph, bar diagram	۵