بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات

۱

سال اوّل دبیرستان

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف: دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

نام کتاب: ریاضیات (۱) سال اوّل دبیرستان ـ ۲۱۱/۱

اعضای شورای برنامه‌ریزی ریاضی به ترتیب حروف الفبا: بهمن اصلاح پذیر، دکترعلی ایرانمنش، دکتر ناصر بروجردیان، شهرناز بخشعلی‌زاده، محسن جمالی، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، دکتر اسدالله رضوی، حمیدرضا ربیعی، مینو رحیمی، حسین رودسری، محمدهاشم رستمی، دکتر ابراهیم ریحانی، وحیدسیاری، دکتر احمد شاهورانی، دکتر وحید عالمیان، مازیار عطاری، سعید قریشی، دکتر حمید مسگرانی و دکتر سیدمحمدکاظم نائینی

مؤلفان به ترتیب حروف الفبا: شهرناز بخشعلی‌زاده، دکتر ناصر بروجردیان، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، دکتر فرزاد دیده‌ور، محمدتقی طاهری‌تنجانی، دکتر وحید عالمیان و دکتر حمید مسگرانی

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: ادارهٔ کلّ چاپ و توزیع کتاب‌های درسی

تهران : خیابان ایرانشهرشمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱ ، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت : www.chap.sch.ir

مدیر هنری: فریبرز سیامک نژاد

رسام: محمّدامین شهیدی ، امیرحسین سیامک نژاد، پیمان حبیب‌پور و هدیه بندار

صفحه‌آرا: مریم نصرتی، خالد قهرمانی‌دهبکری

طراح جلد: طاهره حسن زاده

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادّهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)

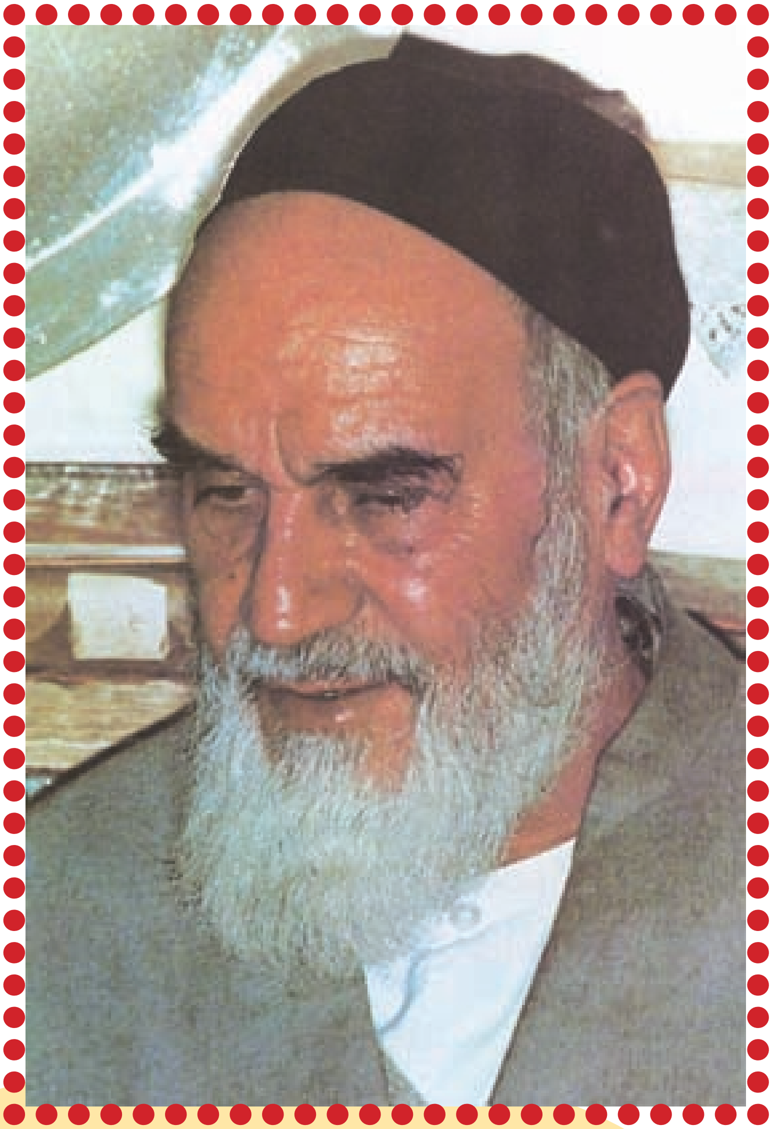
تلفن : ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۴۴۵/۶۸۴

چاپخانه: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ چهارم ۱۳۹۰

شابک ۵-۱۵۸۲-۰۵-۹۶۴ ISBN 964-05-1582-5

۱۳۹۰



اول باید اخلاصتان را قوی بکنید، ایمانتان را قوی بکنید، ... و این اخلاص و ایمان، شما را تقویت می‌کند و روحیّه‌ی شما را بالا می‌برد و نیروی شما جوری می‌شود که هیچ قدرتی نمی‌تواند (با شما) مقابله کند.

امام خمینی(ره)

فهرست مندرجات

سخنی با دانش‌آموزان

به اعتقاد ریاضی‌دانان، ریاضی علمی شیرین است. امیدواریم کتاب حاضر بتواند شیرینی ریاضی را برای شما به‌وجود آورد. یکی از اهداف این کتاب آن است که شما بتوانید ریاضی را به شکلی معنادار درک کنید و توانایی به‌کارگیری آن را در حل مسائل روزمره پیدا کنید. برای استفاده بهتر از این کتاب خوب است که به نکات زیر توجه کنید :

۱ــ شما با دیدن شنای شناگران، نمی‌توانید شنا یاد بگیرید. برای شناگر شدن باید وارد آب شوید و خودتان مستقیماً عمل کنید. برای یادگیری ریاضی نیز صرفاً خواندن و شنیدن مطالب ریاضی کافی نیست. شما باید با مفاهیم ریاضی کار عملی و ذهنی انجام دهید.

کتاب حاضر به گونه‌ای طراحی شده است که شما را درگیر انجام فعالیت و حل مسئله و انجام تمریناتی در کلاس می‌کند. سعی کنید تمامی این عملیات را انجام دهید و مطمئن باشید خواهید توانست مفاهیم را به خوبی یاد بگیرید ونهایتاً مسائل پایانی هر بخش را حل کنید.

۲ــ هر کسی می‌تواند ریاضی را یاد بگیرد. توانایی یادگیری ریاضی ارتباط مستقیم با توانایی خوب و صحیح سخن گفتن دارد. به همین خاطر در قسمت‌هایی از کتاب، از شما خواسته شده است مطالب ریاضی را به زبان فارسی بیان کنید یا دلیل درستی اعمال ریاضی خودتان را توضیح دهید.

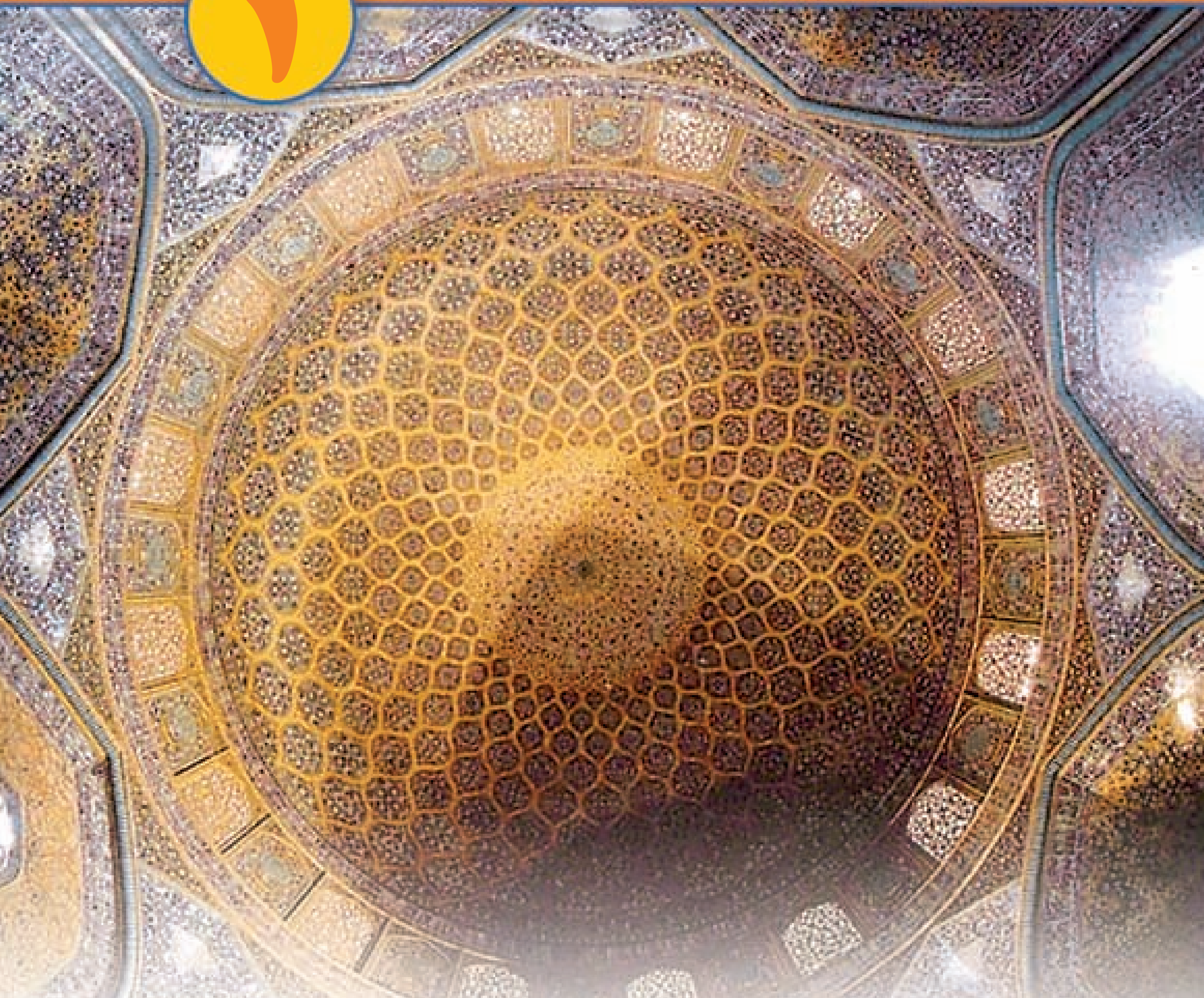
سخن گفتن در مورد مطالب ریاضی و بحث روی مفاهیم و راه‌حل‌ها یکی از روش‌های خوب برای یادگیری ریاضی است. بسیار مناسب است که در مورد افکار خود درباره‌ی ریاضی و کارهایی که به نظرتان می‌رسد با دیگران و معلم خود مباحثه کنید. با این عمل درک عمیق‌تری نسبت به مفاهیم ریاضی پیدا خواهید کرد. در این کتاب قسمت‌هایی تحت عنوان «بیندیشیم» وجود دارد که می‌تواند موضوعات مناسبی برای بحث باشند.

۳ــ ریاضی صرفاً علمی برای محاسبات روی اعداد نیست. ریاضی زبان علم است و کار اصلی آن بیان پدیده‌های واقعی محیط اطراف خود ما است. شما باید بتوانید مفاهیم ریاضی را در محیط اطراف خود ببینید و پدیده‌های ساده را به زبان ریاضی بیان کنید. این عمل مسائل مطرح شده در محیط واقعی را به مسئله‌ای ریاضی تبدیل می‌کند. پس از حل مسئله در ریاضی باید به محیط واقعی برگردید و جواب‌های به‌دست آمده را به درستی تفسیر کنید. در هر جای کتاب که امکان‌پذیر بوده است، چنین روندی ازحل یک مسئله واقعی انجام شده است و شما با حل این مسائل خواهید دید که چگونه می‌توانید آموخته‌های ریاضی خود را به کار برید و مسائل مهمی را حل کنید.

در خاتمه لازم است از همه‌ی کسانی که در تألیف این کتاب همکاری کرده‌اند، تشکر نماییم. به ویژه از دبیران مجرب منتخب مناطق شهر تهران و نمایندگان گروه‌های آموزشی ریاضی استان‌ها که در اصلاح کتاب کمک‌های شایان توجهی نموده‌اند.

۱

اعداد و نمادها



عدد، هندسه، تقارن و تعالی

ریاضیات و کاربردهای آن بر دو پایه اساسی اعداد و هندسه و ارتباط بین این دو استوار است. علاوه بر استفاده‌های بی‌شمار اعداد و هندسه در علوم تجربی و علوم نظری، این مفاهیم در معماری و هنر نیز به کار می‌آیند. جایی که عظمت و ظرافت در هم می‌آمیزند و ما را به تعالی می‌رسانند.

اعداد طبیعی

عدد یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است. تعداد افراد، میزان سود و زیان، حجم اشیاء، وزن اجسام، مساحت زمین، طول قد، درجه‌ی حرارت و بسیاری چیزهای دیگر همگی با اعداد نشان داده می‌شوند. شناخت بشر از اعداد و نمایش آن‌ها، از ابتدا به‌گونه‌ای که امروز می‌بینیم نبوده است.

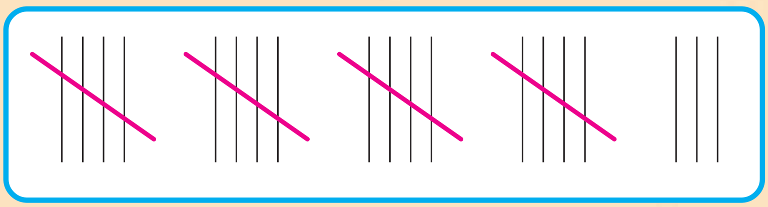
خواندنی‌ها

شمارش یکی از اولین نیازهای بشر بوده است. برخی از انسان‌های قبایل بدوی فقط اعداد ۱ و ۲ و ۳ را می‌شناختند و اعداد بزرگ‌تر از ۳ را «خیلی» می‌گفتند.

با گذشت زمان، شناخت بشر از اعداد بیشتر شد و او راه‌هایی برای نمایش اعداد بزرگ‌تر کشف کرد.

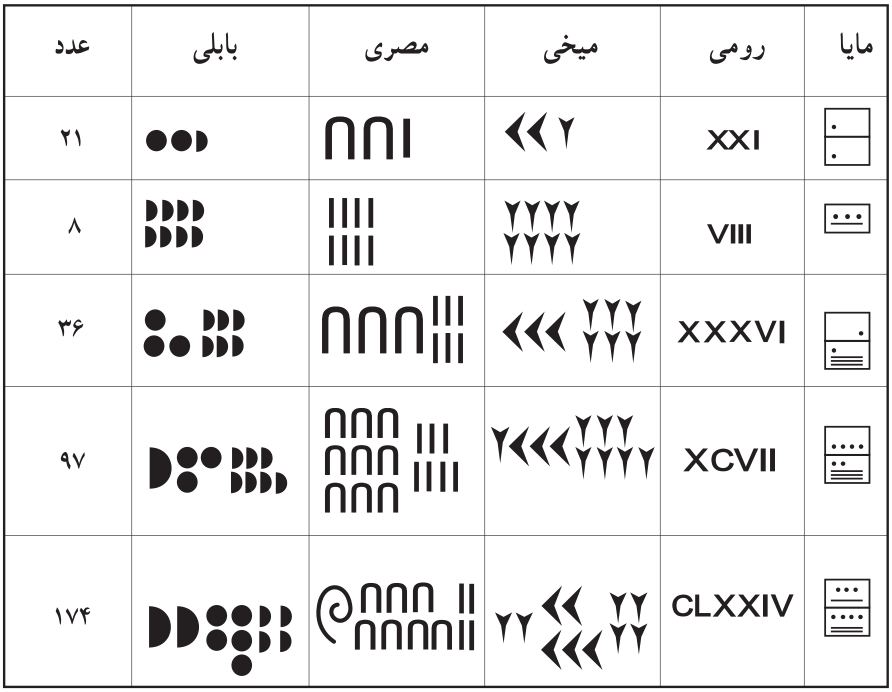
به‌نظر شما، اگر فردی تعداد زیادی گوسفند می‌داشت، چگونه می‌توانست تعداد آن‌ها را به‌دست آورد و آن را در جایی ثبت کند؟ یک فرد چگونه می‌توانست تعداد روزهایی که در محلی حضور داشته است را ثبت کند؟

می‌توان گفت، احتمالاً او تعداد گوسفندان خود را با تعداد سنگ‌ریزه‌هایی که در تناظر با گوسفندان بودند نگهداری می‌کرد، به این شکل که با هر بار ورود یک گوسفند به آغل یا خروج یک گوسفند از آغل، یک سنگ‌ریزه را از یک کیسه به کیسه‌ی دیگر وارد می‌کرد. در مورد تعداد روزها هم از روش شیارکشیدن روی یک سنگ یا چوب استفاده می‌کرد. این روش امروزه نیز برای نمایش تعداد اشیاء به‌کار می‌رود.



شیارهای بالا عدد ۲۳ را نشان می‌دهند.

در حساب کردن، مسئله فقط ثبت و نمایش اعداد نبود، بلکه مسائل پیچیده‌تری مانند جمع و ضرب اعداد، در محاسبه‌ی محیط و مساحت زمین‌ها مطرح شد. جدول صفحه‌ی بعد نمونه‌هایی از شیوه‌های نمایش اعداد، توسط اقوام و تمدن‌های مختلف را نشان می‌دهد.



مایا	رومی	میخی	مصری	بابلی	عدد
	XXI				۲۱
	VIII				۸
	XXXVI				۳۶
	XCVII				۹۷
	CLXXIV				۱۷۴

آیا می‌توانید قواعدی که برای نمایش اعداد طبیعی با این روش‌ها به‌کار رفته است را کشف کنید؟ اگر قواعد عددنویسی رومی را کشف کردید، از یک تا بیست را با این روش بنویسید.

باید دانست که در تمام شیوه‌های عددنویسی اولیه، اعداد ۵ و ۱۰ و ۲۰ نقش اساسی داشتند. این سه عدد، به‌ترتیب تعداد انگشتان یک دست، دو دست، و دو دست و دو پا هستند.

همان‌گونه که در جدول بالا می‌بینید تعدادی از این شیوه‌های نمایش اعداد، شبیه شیوه نمایش دهدهی مرسوم خودمان است، با این تفاوت که در این شیوه‌ها، نمایشی برای صفر وجود ندارد. همین موضوع باعث شده است که برای نمایش اعداد تعداد زیادی نماد وارد شود و کار در این شیوه‌ها را مشکل سازد.

وارد شدن صفر در اعداد یک انقلاب بود که ریاضیات را وارد مرحله‌ی جدیدی کرد. اولین بار هندیان بودند که صفر و نمایشی برای صفر را وارد نظام اعداد کردند و پس از آن مسلمانان آن را به جهانیان معرفی کردند. پیشگام این کار ریاضیدان بزرگ ایرانی محمدبن موسی خوارزمی بود.

با ورود صفر به نظام اعداد و قبول آن به‌عنوان یک عدد، نمایش دهدهی اعداد امکان‌پذیر شد. نمایش دهدهی اعداد، انجام چهار عملی اصلی را به شکل بسیار ساده‌ای درآورد. شما این اعمال را در دبستان فرا گرفته‌اید و خوب است توجه داشته باشید که صدها سال طول کشید تا نمایش اعداد و انجام چهار عمل اصلی روی آن‌ها به‌صورت کنونی آن درآید.

شیوه‌ای که امروزه برای نمایش اعداد به‌کار می‌رود، نمایش دهدهی اعداد نام دارد. در این شیوه‌ی نمایش، برای اعداد از صفر تا نُه، نمادهایی به‌عنوان نشانه‌ی این اعداد انتخاب می‌شود. در زبان فارسی این نمادها عبارتند از :

۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹

در زبان‌های دیگر نمادهای دیگری انتخاب شده است. به کمک این نمادها، با استفاده از قاعده دسته‌بندی‌های ده‌تایی، بقیه اعداد نیز نمایش داده می‌شوند. مثلاً، «۱۳۵» نشان‌دهنده تعداد یک دسته صدتایی و سه دسته ده‌تایی و پنج یکی است.

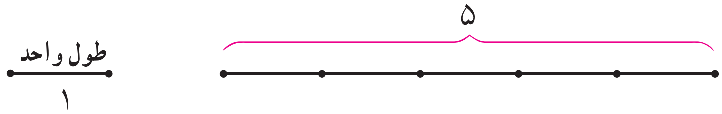
خوب است بدانید که بسیار طول کشید تا صفر کشف و به‌عنوان عدد شناخته شود، به‌همین خاطر، صفر را جزء اعداد طبیعی به‌حساب نمی‌آورند، اگرچه در نمایش دهدهی اعداد طبیعی، صفر نقش مهمی دارد.

ملامحمدباقر یزدی

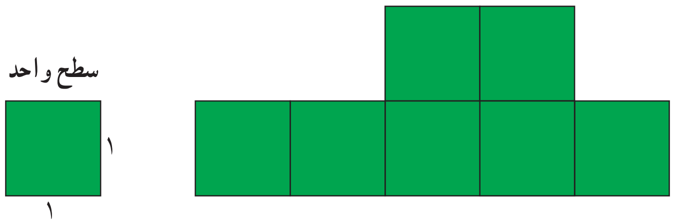
دانشمند، ریاضی‌دان، منجم وعالم دینی دوره‌ی صفویه بوده است. او در علوم متداول روزگار خود ازجمله جبر، هندسه و نجوم مهارت داشت به خصوص در علم ریاضی قواعد جدیدی ابداع کرد. ازجمله آثار او می‌توان به کتاب عیون‌الحساب اشاره نمود که در فصلی از این کتاب به محاسبه اعداد متحابه پرداخت (دو عدد را متحابه هم گویند هرگاه مجموع مقسوم‌علیه‌های هریک با دیگری برابر باشد. برای مثال ۲۲۰ و ۲۸۴ دو عدد متحابه‌اند). یزدی قبل از دکارت به این نتیجه رسید که دو عدد ۹۳۶۳۵۸۴ و ۹۴۳۷۰۵۶ متحابه‌اند. از آثار دیگر او می‌توان به حاشیه بر تحریر مخروطات آپولونیوس و شرح کتاب الاشکال الکنزیه و شرح المقالة العاشر من (تحریر) اصول اقلیدس اشاره نمود. او در سال ۱۰۵۶ ق در اصفهان درگذشت.

اندازه گیری با اعداد طبیعی

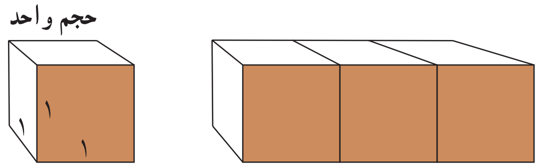
شمارش، یک نوع اندازه‌گیری است که تعداد اشیاء یا چیزها را معلوم می‌کند. هر نوع شمارشی با داشتن یک واحد آغاز می‌شود. به‌عنوان مثال، با انتخاب یک پاره‌خط به‌عنوان پاره‌خط واحد، طول آن را طول واحد درنظر می‌گیریم. با به‌دنبال هم قرار دادن چند پاره‌خط واحد، پاره‌خطی ساخته می‌شود که اندازه‌ی آن با یک عدد طبیعی بیان می‌شود. مثلاً، اندازه‌ی پاره‌خط زیر، با توجه به پاره‌خط واحد انتخاب شده، ۵ واحد طول می‌باشد.



با انتخاب یک طول واحد، مساحت مربعی که طول هر ضلع آن برابر طول واحد است، سطح واحد درنظر گرفته می‌شود و آن را مربع واحد می‌نامند. شکل‌هایی که با کنار هم گذاردن مربع واحد ساخته می‌شوند دارای مساحتی هستند که با اعداد طبیعی قابل اندازه‌گیری هستند. مثلاً، مساحت شکل زیر ۷ واحد سطح است.



با انتخاب طول واحد، حجم مکعبی که طول هر ضلع آن برابر طول واحد است، حجم واحد درنظر گرفته می‌شود. اجسامی که با کنار هم گذاردن مکعب واحد ساخته می‌شوند دارای حجمی هستند که با اعداد طبیعی قابل اندازه‌گیری هستند. مثلاً، حجم جسم زیر ۳ واحد حجم است.



تمرین در کلاس

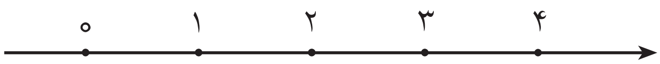
۱ــ کلیه‌ی مستطیل‌هایی که اندازه‌ی محیط آن‌ها ۲۰ سانتی‌متر است و طول و عرض آن‌ها برحسب سانتی‌متر، اعداد طبیعی هستند را رسم کنید.

۲ــ چند مستطیل رسم کردید؟ مساحت هرکدام چقدر است؟

۳ــ کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟

اعداد صحیح

یک خط افقی به شکل زیر رسم و نقطه‌ای به عنوان مبدأ روی آن انتخاب می‌کنیم. یک جهت روی این خط انتخاب می‌کنیم و آن را جهت مثبت[1] می‌نامیم. روی این خط، نیم‌خط به ابتدای مبدأ در جهت مثبت را **نیم‌خط مثبت** و نیم‌خط مقابل آن را **نیم‌خط منفی** می‌نامیم. یک پاره‌خط واحد انتخاب می‌کنیم و آن را روی نیم‌خط مثبت، از مبدأ رسم می‌کنیم. با پشت سر هم قرار دادن پاره‌خط‌های واحد، نقاطی به‌دست می‌آیند که آن‌ها را نقاط نظیر اعداد طبیعی می‌نامند.



خطی که روی آن، یک مبدأ، یک جهت و یک پاره‌خط واحد انتخاب شده است را یک محور اعداد می‌نامند.

تمرین در کلاس

A و B دو نقطه روی نیم‌خط مثبت هستند. A نظیر عدد ۴ و طول پاره‌خط AB برابر ۶ است. B نظیر کدام عدد طبیعی است؟

اگر پاره‌خط واحد را روی نیم‌خط منفی، از مبدأ رسم کنیم و این رسم را به‌دنبال هم تکرار کنیم، نقاطی به‌دست می‌آیند که آن‌ها را نقاط نظیرِ اعدادِ صحیح منفی می‌نامند. پس، به‌ازای هر عدد طبیعی، یک عدد صحیح منفی نیز وجود دارد که فاصله‌ی نقاط نظیر آن‌ها تا مبدأ با هم مساوی است. این اعداد را قرینه‌ی هم می‌نامند و قرینه‌ی هر عدد طبیعی به‌صورت همان عدد که علامت منفی «−»، پشت آن قرار گرفته است، نمایش داده می‌شود. مثلاً، قرینه ۲ عدد «۲−» است و نقاط نظیر آن‌ها، تا مبدأ فاصله مساوی دارند.

۱ـ در خط‌هایی که به‌صورت افقی رسم می‌شوند معمولاً جهت سمت راست را به عنوان جهت مثبت انتخاب می‌کنند.

اعداد طبیعی، صفر و قرینه‌ی اعداد طبیعی با هم را اعداد صحیح می‌نامند. اعداد صحیح مثبت، همان اعداد طبیعی هستند و اعداد صحیح نامنفی همان اعداد طبیعی به همراه صفر هستند. اعداد صحیح نامنفی را اعداد حسابی نیز می‌نامند.

مسائل

۱ــ عملیات ریاضی زیر را انجام دهید.

الف) $۵-۶=$

ب) $۲\times(-۷+۵)=$

ج) $-(-۳)-۵=$

د) $(-۳)\times(-۶-۳)=$

هـ) $(-۳\times۲)\div(۴-۶)=$

۲ــ درآمد ماهیانه خانواده‌ای ۳۵۰،۰۰۰ تومان است، اگر مخارج سالانه‌ی این خانواده ۴،۰۰۰،۰۰۰ تومان باشد، آیا این خانواده می‌تواند پولی را پس‌انداز کند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

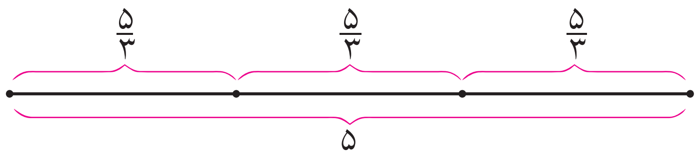
ابوجعفر محمدبن ایوب طبری

ریاضیدان ایرانی (متوفّی پس از ۴۸۵ هـ.ق) از مردم طبرستان (مازندران کنونی) بود. طبری در علم حساب به‌ویژه در تألیفات خود معتقد به معرفی جامع‌نگر فصل‌های گوناگون علم حساب و هندسه بوده است و از این کار هدف تعلیماتی داشته است. از آثار وی می‌توان به شمارنامه و مفتاح‌المعاملات اشاره کرد.
یک نسخه خطی از کتاب مفتاح‌المعاملات در کتاب‌خانه ایاصوفیای استانبول موجود است.

اعداد گویا

در بسیاری از اندازه‌گیری‌ها، اعداد صحیح کافی نیستند. به‌عنوان مثال، در اندازه‌گیری وزن، وزن بسیاری از اجسام را نمی‌توان با یک عدد طبیعی نشان داد.

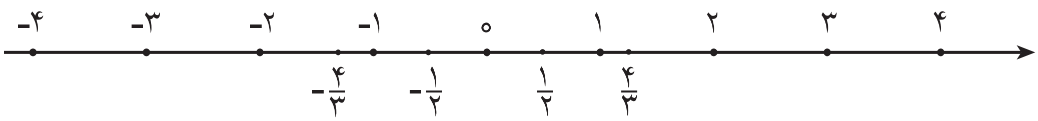
اگر پاره‌خط واحد را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم، طول هریک از دو پاره‌خط به‌دست آمده چقدر است؟ روشن است که طول این پاره‌خط‌ها برابر یک عدد طبیعی نیست و شما قبلاً آن را با $\frac{۱}{۲}$ نشان داده‌اید که نشان‌دهنده‌ی تقسیم ۱ بر ۲ است. همین‌طور اگر پاره‌خطی به طول ۵ را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم، سه پاره‌خط به‌دست می‌آید که طول هریک $\frac{۵}{۳}$ است.



اگر روی محور اعداد، پاره‌خط‌هایی به ابتدای مبدأ و انتهای یک عدد صحیح را درنظر بگیریم و آن‌ها را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم، نقاط تازه‌ای به‌دست می‌آیند که آن‌ها را **نقاط نظیرِ اعدادِ گویا** می‌نامند.

اعداد گویا را می‌توان به‌صورت تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی نمایش داد.

تقسیم دو عدد بر هم را به‌صورت کسری نشان می‌دهند.



اگر به مکان دو عدد گویا روی محور اعداد توجه کنید، می‌بینید عددی که بزرگ‌تر است، سمت راست عدد کوچک‌تر قرار می‌گیرد. برای آن‌که تشخیص دهیم، از دو عدد گویای مثبت، کدام‌یک بزرگ‌تر است، کافی است آن‌ها را به شکلی بنویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. سپس، صورت هرکدام که بزرگ‌تر بود، آن عددِ بزرگ‌تر است.

مثال: از دو عدد $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۳}{۵}$ کدام بزرگ‌تر است؟

این اعداد گویا را به شکلی می‌نویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. برای انجام این کار، کافی است

صورت و مخرج هرکدام را در مخرج دیگری ضرب کنیم.

$$\frac{۳}{۵}=\frac{۳\times۷}{۵\times۷}=\frac{۲۱}{۳۵} \qquad \frac{۴}{۷}=\frac{۴\times۵}{۷\times۵}=\frac{۲۰}{۳۵}$$

با مقایسه بین صورت کسرها نتیجه می‌شود که $\frac{۲۱}{۳۵}<\frac{۲۰}{۳۵}$ ، پس $\frac{۳}{۵}<\frac{۴}{۷}$.

تمرین در کلاس

الف) دو عدد $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۷}{۴}$ را روی محور اعداد مشخص کنید. کدام‌یک بزرگ‌ترند؟

ب) این دو عدد را به‌گونه‌ای بنویسید که مخرج مساوی داشته باشند و سپس تعیین کنید، کدام‌یک بزرگ‌ترند.

ج) از طریق نمایش روی محور اعداد و هم مخرج کردن، تعیین کنید که کدام‌یک از دو عدد $-\frac{۵}{۳}$ و $-\frac{۷}{۵}$ بزرگ‌ترند.

در فعالیت زیر می‌خواهیم نشان دهیم که بین هر دو عدد گویا می‌توان یک عدد گویای دیگر معرفی کرد.

فعالیت

۱ــ یک عدد گویا بین $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۵}{۷}$ نام ببرید.

۲ــ آیا می‌توانید یک عدد گویا بین $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۵}{۷}$ نام ببرید؟ آیا با ضرب صورت و مخرج هر دو کسر در ۲ می‌توان یک عدد گویا بین آن‌ها معرفی کرد؟ بررسی کنید.

۳ــ یک عدد گویا بین $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۵}{۷}$ نام ببرید.

(**راهنمایی:** ابتدا این دو عدد را به‌گونه‌ای بنویسید که مخرج مساوی پیدا کنند.)

از این فعالیت نتیجه می‌شود که :

بین هر دو عدد گویای متمایز حداقل یک عدد گویای دیگر وجود دارد.

مثال: دو عدد گویا بین عددهای $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۲}{۵}$ بیابید.

صورت و مخرج این کسرها را در ۳ ضرب می‌کنیم. پس، باید بین $\frac{۹}{۱۵}$ و $\frac{۶}{۱۵}$ دو عدد گویا بیابیم. اعداد زیر بین $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۲}{۵}$ می‌باشند.

$$\frac{۸}{۱۵} \,،\, \frac{۷}{۱۵}$$

مثال: سه عدد گویا بین عددهای $\frac{۴}{۱۱}$ و $\frac{۵}{۱۱}$ بیابید.

صورت و مخرج این کسرها را در ۴ ضرب می‌کنیم. پس، باید بین $\frac{۱۶}{۴۴}$ و $\frac{۲۰}{۴۴}$ سه عدد گویا بیابیم. اعداد زیر بین $\frac{۴}{۱۱}$ و $\frac{۵}{۱۱}$ می‌باشند.

$$\frac{۱۹}{۴۴} \,،\, \frac{۱۸}{۴۴} \,،\, \frac{۱۷}{۴۴}$$

بیندیشیم

بین دو عدد گویای متمایز چند عدد گویا می‌توان پیدا کرد؟

مسائل

۱ــ عملیات زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{۲}{۵}-\frac{۳}{۵}=$

ب) $\frac{۴}{۳}+\frac{۲}{۵}=$

ج) $\frac{۵}{۶}-\frac{۵}{۴}=$

د) $۳\frac{۱}{۲}-۲\frac{۲}{۳}=$

هـ) $(۲\frac{۳}{۴})\times(-۳\frac{۱}{۳})=$

و) $(\frac{-۷}{۴}+\frac{۳}{۵})\div\frac{۲۰}{۳۷}=$

۲ــ $\frac{۲}{۵}$ از نصف یک میله‌ی یک متری چند سانتی‌متر است؟

۳ــ حمید دانش‌آموز منظمی است و برای خود برنامه‌ی روزانه دارد. او $\frac{۱}{۳}$ از شبانه‌روز را استراحت می‌کند، ۶ ساعت در مدرسه است، $\frac{۱}{۴}$ شبانه‌روز را به مطالعه‌ی درس‌های خود اختصاص می‌دهد و $\frac{۱}{۸}$ شبانه‌روز را به کارهای پیش‌آمده اختصاص داده است و بقیه‌ی زمان را هم به فعالیت‌های ورزشی می‌پردازد. حمید در یک شبانه‌روز چند ساعت فعالیت‌های ورزشی انجام می‌دهد؟

۴ــ بین هر دو عدد از عددهای گویای زیر، چهار عدد گویای دیگر به‌دست آورید.

الف) $\frac{۳}{۵} \,،\, \frac{۲}{۵}$

ب) $\frac{۱}{۲} \,،\, \frac{۱}{۳}$

ج) $-\frac{۳}{۴} \,،\, -\frac{۲}{۳}$

۵ــ اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{۳}{۷} \,،\, \frac{۵}{۲۴} \,،\, \frac{۱}{۳}$$

نمایش اعشاری و اعداد اعشاری

امروزه برای نوشتن اعداد طبیعی از دستگاه دهدهی استفاده می‌شود. این شیوه از نمایش اعداد طبیعی را نمایش اعشاری اعداد طبیعی نیز می‌نامند. در این شیوه نمایش، هر رقم دارای ارزش مکانی است. مثلاً در عدد ۲۳۷، رقم ۷ در مرتبه یکان و رقم ۳ در مرتبه دهگان و رقم ۲ در مرتبه صدگان است. این به‌معنای آن است که

$$۲۳۷=۲\times ۱۰^۲+۳\times ۱۰+۷\times ۱$$

در این شیوه نمایش، همه اعداد طبیعی را می‌توان نمایش داد. برای نوشتن (به نمایش درآوردن) اعداد کمتر از ۱ می‌توانیم ارزش‌های مکانی به اندازه $\frac{۱}{۱۰}$، $\frac{۱}{۱۰^۲}$، $\frac{۱}{۱۰^۳}$ و... را نیز درنظر بگیریم. برای مشخص کردن رقم‌هایی که در مرتبه $\frac{۱}{۱۰}$، $\frac{۱}{۱۰^۲}$،... دارند از علامت ممیز «/» استفاده می‌شود. مثلاً در عدد ۳/۴، رقم ۳ در مرتبه یکان و رقم ۴ در مرتبه $\frac{۱}{۱۰}$ است، یعنی

$$۳/۴=۳+۴\times\frac{۱}{۱۰}$$

به‌عنوان مثالی دیگر در عدد ۳۵/۴۲، رقم ۳ در مرتبه دهگان و رقم ۵ در مرتبه یکان و رقم ۴ در مرتبه $\frac{۱}{۱۰}$ و رقم ۲ در مرتبه $\frac{۱}{۱۰۰}$ است، یعنی

$$۳۵/۴۲=۳\times ۱۰+۵\times ۱+۴\times\frac{۱}{۱۰}+۲\times\frac{۱}{۱۰۰}$$

اعدادی را که بتوانیم با این شیوه نمایش بنویسیم اعداد اعشاری مثبت می‌نامیم. این اعداد و قرینه آن‌ها را اعداد اعشاری می‌نامند.

اعداد اعشاری بخشی مهم از اعداد گویا هستند. یک عدد اعشاری مثل ۲۵۷۳/۶۳ را می‌توان به‌عنوان عدد گویا به‌صورت زیر نوشت :

$$۲۵۷۳/۶۳=۲۵۷۳+۶\times\frac{۱}{۱۰}+۳\times\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۲۵۷۳۶۳}{۱۰۰}$$

در عدد اعشاری ۲۵۷۳/۶۳، ۲۵۷۳ را قسمت صحیح و ۰/۶۳ را قسمت اعشاری این عدد می‌نامند. به‌طور کلی، در یک عدد اعشاری مثبت، عدد حسابی قبل از ممیز را قسمت صحیح آن عدد اعشاری می‌نامند و با قرار دادن صفر به‌جای قسمت صحیح، عدد اعشاری ساخته شده را قسمت اعشاری آن عدد می‌نامند.

به‌عنوان مثال، در عدد اعشاری ۲۱/۵۶۴، قسمت صحیح آن ۲۱ و قسمت اعشاری آن ۰/۵۶۴ است.

توجه داشته باشید که اعداد طبیعی هم، از یک نظر، عدد اعشاری محسوب می‌شوند. به‌عنوان مثال، عدد طبیعی ۳۵ را می‌توانید به‌صورت ۳۵/۰۰ درنظر بگیرید. قسمت اعشاری اعداد طبیعی صفر است. در تمرین زیر با چند خاصیت مهم اعداد اعشاری آشنا می‌شوید.

تمرین در کلاس

۱ــ قسمت صحیح و قسمت اعشاریِ اعداد زیر را بیابید و هرکدام را به‌صورت یک عدد گویا بنویسید.

د) ۱۲/۱   ج) ۰/۰۲۳   ب) ۴۵۲/۵۰۰   الف) ۸۶/۰۰۰

۲ــ چه ویژگی مشترکی بین مخرج‌های اعداد گویای به‌دست آمده در بالا که یک عدد اعشاری هستند می‌یابید؟

۳ــ در زیر جاهای خالی را با یک عمل ضرب یا تقسیم، مانند نمونه، پر کنید.

۰/۰۳۲۷ [×۱۰] = ۰/۳۲۷	۵۶۲۹۴ [÷۱۰] = ۵۶۲۹/۴
۰/۰۳۲۷ [ ] = ۳۲/۷	۵۶۲۹۴ [ ] = ۵۶/۲۹۴
۰/۰۳۲۷ [ ] = ۳/۲۷	۵۶۲۹۴ [ ] = ۵۶۲/۹۴
۰/۰۳۲۷ [ ] = ۳۲۷	۵۶۲۹۴ [ ] = ۵/۶۲۹۴

۴ــ اعداد ۲۴/۳۷، ۲۴/۳۷۰، ۲۴/۳۷۰۰، ۲۴/۳۷۰۰۰ و ۲۴/۳۷۰۰۰۰ را با هم مقایسه کنید. آیا تفاوتی با هم دارند؟ به‌طور کلی در یک عدد اعشاری، در مورد رقم‌های صفر بعد از ممیز که بعد از آن‌ها رقم غیرصفر دیگری قرار ندارد، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

می‌دانید که برای جمع دو عدد اعشاری، آن دو عدد را به‌گونه‌ای زیر هم می‌نویسیم که ممیزهای این اعداد زیر هم قرار بگیرند؛ سپس، طبق قواعد جمع اعداد طبیعی، با حفظ ممیز در جای خود، عمل جمع را انجام می‌دهیم. مثلاً، برای جمع دو عدد اعشاری ۲۳/۶۷۲ و ۵/۰۸ داریم:

```
   ۲۳/۶۷۲
+   ۵/۰۸۰
---------
   ۲۸/۷۵۲
```

با نوشتن این دو عدد اعشاری به‌صورت اعدادی گویا با مخرج‌های مساوی که توانی از ۱۰ باشند، درستی روش بالا را می‌توان نشان داد.

تمرین در کلاس

می‌خواهیم حاصل‌ضرب دو عدد اعشاری ۲/۰۷۲ و ۴۶/۳۴ را به‌دست آوریم.

۱ــ دو عدد بالا را به‌صورت اعداد گویایی که مخرج آن‌ها توانی از ۱۰ است بنویسید و به‌صورت دو عدد گویا در یکدیگر ضرب کنید.

۳ــ حاصل‌ضرب به‌دست آمده در بالا را به‌صورت یک عدد اعشاری بنویسید.

۴ــ یک روش برای ضرب اعداد اعشاری پیشنهاد کنید.

در ضرب دو عدد اعشاری کافی است نخست ممیز این اعداد را نادیده بگیریم و آن‌ها را مانند دو عدد طبیعی در هم ضرب کنیم. سپس، به اندازه‌ی مجموع تعداد ارقام بعد از ممیز آن‌ها، در عدد به‌دست آمده، رقم‌های سمت راست را بعد از ممیز قرار دهیم.

مثال: حاصل‌ضرب ۱۴/۱×۳۲/۰۲۵ را به‌دست آورید.

ممیزها را در این اعداد نادیده می‌گیریم و حاصل‌ضرب زیر را حساب می‌کنیم.

$$۳۲۰۲۵ \times ۱۴۱ = ۴۵۱۵۵۲۵$$

با توجه به آن‌که اولین عدد، سه رقم و دومین عدد، یک رقم اعشار (بعد از ممیز) دارد برای حاصل‌ضرب به‌دست آمده چهار رقم اعشار درنظر می‌گیریم. پس،

$$۳۲/۰۲۵ \times ۱۴/۱ = ۴۵۱/۵۵۲۵$$

در کتاب مفتاح‌المعاملات، مراحل ضرب دو عدد مخلوط، $۲\frac{۱}{۴}$ و $۳\frac{۱}{۳}$ به شکل زیر بیان شده است:

$$۲\frac{۱}{۴} \times ۳\frac{۱}{۳}$$

$$۲\frac{۱}{۴} \times ۳ = ۶\frac{۳}{۴}$$

$$۲ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$۶\frac{۳}{۴} + \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۱۲} = ۷\frac{۱}{۲}$$

آیا می‌توانید دلیل درستی این روش را بیان کنید؟

مسائل

۱ــ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$۹۸\times۱۰^{۳} \quad ، \quad ۱\times۱۰^{۵} \quad ، \quad ۹۹۰۰۰ \quad ، \quad ۹/۸۹\times۱۰^{۴}$$

۲ــ اعداد زیر را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

$$\frac{۵۰۵}{۱۰۰۰} \ , \ ۰/۴۸۸ \ , \ \frac{-۱}{۲} \ , \ ۰/۴۷ \ , \ \frac{-۲۶}{۵۰} \ , \ ۰/۴۶$$

۳ــ محاسبات زیر را بدون استفاده از ماشین‌حساب انجام دهید. درستی محاسبات خود را با ماشین‌حساب کنترل کنید. (در صورت داشتن ماشین‌حساب)

۱) $۰/۵۵-۰/۱۹=$

۲) $۰/۹۳-۰/۶۸=$

۳) $۰/۱-۰/۰۱=$

۴) $۰/۸۴-۰/۰۰۳=$

۵) $-۲+۰/۴=$

۶) $۸/۲۰-۳/۶۵=$

۷) $۰/۰۴\times۱۲=$

۸) $۲/۵۵\times۱/۲=$

۹) $۰/۳۳\times۰/۰۰۱۵=$

۱۰) $۲۲۰\div۰/۰۵=$

۱۱) $(۱۲\div۰/۰۰۱)\times(۱/۹)=$

۱۲) $(۰/۰۰۱\div۰/۰۵)+۲/۹۵=$

۱۳) $۳/۶\times۱۰^{۲}-۲/۵\times۱۰^{۲}=$

۱۴) $۸/۶۵\times۱۰^{۳}+۲/۹۲\times۱۰^{۳}=$

۱۵) $۳/۱۵\times۱۰^{۳}-۳/۱۵\times۱۰^{۲}=$

اعداد حقیقی

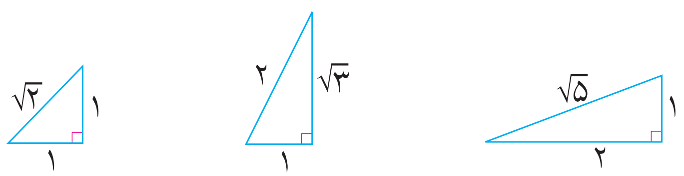
نزدیک به ۲۵۰۰ سال پیش، فیثاغورس، دانشمند یونانی، مکتبی را بنیان نهاد که برای اعداد صحیح اهمیت بسیاری قائل می‌شد. بنا به اعتقاد فیثاغورسیان طول هر پاره‌خطی باید یک عدد گویا باشد. روزی یکی از آن‌ها متوجه شد که طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول دو ضلع دیگر آن ۱ است، طبق قضیه‌ی فیثاغورس $\sqrt{۲}$ است که عددی گویا نیست. این برای فیثاغورسیان ابداً خوشایند نبود، با این‌حال $\sqrt{۲}$ طول یک پاره‌خط بود.

نظیر هر عدد گویا نقطه‌ای روی محور اعداد می‌توان یافت. آیا هر نقطه روی محور اعداد نظیر یک عدد گویا است؟ بر روی محور اعداد نقاطی وجود دارند که نظیر هیچ عدد گویایی نیستند. این‌گونه نقاط، اعدادی را نشان می‌دهند که آن‌ها را **اعداد گنگ** می‌نامند. اعداد گنگ و اعداد گویا را با هم، «**اعداد حقیقی**» می‌نامند.

با استفاده از نماد $\sqrt{\ }$ (رادیکال) که به معنای جذرگیری است، اعداد گنگ بسیاری را می‌توان معرفی کرد. برای مثال، $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ اعدادی گنگ هستند. π نیز عددی گنگ است.

تمرین در کلاس

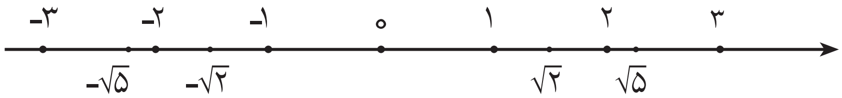
۱ــ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر را رسم کرد و پاره‌خط‌هایی با طول‌های $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ ساخت.



۲ــ با استفاده از رسم‌های بالا، روی محور اعداد، نقاط نظیر اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ را بیابید.

اگر دو نقطه، یکی روی نیم‌خط مثبت و یکی روی نیم‌خط منفی انتخاب کنیم به‌طوری که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدأ مساوی باشند، اعداد نظیر این نقاط را دو عدد قرینه هم می‌نامند. هر نقطه روی نیم‌خط منفی نشان‌دهنده‌ی یک عدد حقیقی منفی است و قرینه‌ی یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد. قرینه هر عدد حقیقی

را مانند اعداد گویا با گذاشتن علامت منفی «−»، در سمت چپ آن نشان می‌دهند. اعداد حقیقی مثبت را به همراه صفر، اعداد حقیقی نامنفی می‌نامند.



در تمرین زیر می‌خواهیم با محور اعداد حقیقی بیشتر آشنا شویم.

تمرین در کلاس

۱ـ یک محور اعداد حقیقی رسم کنید و روی آن، نقاط متناظر اعداد ۱، ۲، ۳، $\frac{1}{2}$، $1+\sqrt{5}$، $\sqrt{5}-1$، $-1-\sqrt{5}$ و $1-\sqrt{5}$ را بیابید.

۲ـ اگر عددی از عدد دیگری بزرگ‌تر باشد، مکان هریک از آن دو روی محور اعداد نسبت به دیگری چگونه است؟ اگر عددی را با عدد مثبتی جمع کنیم، مکان آن روی محور اعداد چه تغییری می‌کند؟ حاصل از عدد قبلی بزرگ‌تر می‌شود یا کوچک‌تر؟

۳ـ اعداد بند اول همین تمرین را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

برای بیان این‌که یک عدد از عدد دیگر کوچک‌تر است از علامت «$<$» یا «$>$» استفاده می‌کنیم. برای مثال برای بیان این‌که ۲ از ۳ کوچک‌تر است، می‌نویسیم $3>2$. این مطلب را به‌صورت $2<3$ نیز می‌توانیم بنویسیم.

گاهی اوقات برای سادگی در نوشتن دو نامساوی مانند $5>4$ و $4>1$، هر دوی آن‌ها را همزمان به‌صورت $5>4>1$ نیز می‌نویسیم.

فعالیت

۱ـ نقاط نظیر اعداد ۳ و ۵ و ۱۲ را روی محور اعداد درنظر بگیرید. فاصله‌ی این نقاط تا مبدأ چقدر است؟

۲ـ چه رابطه‌ای بین فاصله‌ی این اعداد تا مبدأ و خود این اعداد مشاهده می‌کنید؟

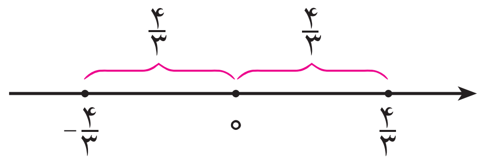
۳ـ نقاط نظیر اعداد (۳−) و (۵−) و (۱۲−) را روی محور اعداد درنظر بگیرید. فاصله‌ی این نقاط تا مبدأ چقدر است؟

۴ــ چه رابطه‌ای بین فاصله‌ی این اعداد تا مبدأ و خود این اعداد مشاهده می‌کنید؟

۵ــ نتیجه‌ای که به‌دست آورده‌اید را برای یک عدد دلخواه مثبت و یک عدد منفی دلخواه جداگانه بیان کنید.

فاصله‌ی نقطه‌ی نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد تا مبدأ را **قدرمطلق** آن عدد می‌نامند.

مثال: فاصله‌ی نقاط نظیر دو عدد $\frac{۴}{۳}$ و $(-\frac{۴}{۳})$ تا مبدأ برابر $\frac{۴}{۳}$ است، پس قدرمطلق هر دو عدد $\frac{۴}{۳}$ و $(-\frac{۴}{۳})$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است.



قدرمطلق را با استفاده از نماد | | نشان می‌دهند.

به‌عنوان مثال، قدرمطلق $(-\frac{۴}{۳})$ را با $\left|-\frac{۴}{۳}\right|$ و قدرمطلق $\frac{۴}{۳}$ را با $\left|\frac{۴}{۳}\right|$ نشان می‌دهند که هر دو، برابر $\frac{۴}{۳}$ هستند.

مثال: قدرمطلق اعداد $-\frac{۴}{۳}$ ، -۴ ، $-\pi$ ، $-\sqrt{۷}$ و قرینه‌ی آن‌ها به شکل زیر است.

$$\left|-\sqrt{۷}\right| = \left|\sqrt{۷}\right| = \sqrt{۷} \,, \qquad \left|-\pi\right| = \left|\pi\right| = \pi \,, \qquad \left|-۴\right| = \left|۴\right| = ۴ \,, \qquad \left|-\frac{۴}{۳}\right| = \left|\frac{۴}{۳}\right| = \frac{۴}{۳}$$

قدرمطلق اعداد مثبت برابر خود آن اعداد است زیرا فاصله‌ی یک عدد مثبت تا مبدأ برابر همان عدد است و قدرمطلق هر عدد منفی، قرینه‌ی آن است. درحالت کلی، قدرمطلق هر عددی، عددی نامنفی است.

مثال: $\sqrt{۲}-۱$ عددی منفی است، پس $\left|۱-\sqrt{۲}\right| = -(۱-\sqrt{۲}) = \sqrt{۲}-۱$، همچنین $\sqrt{۳}-\sqrt{۵}$ عددی منفی است، پس $\left|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}\right| = \sqrt{۵}-\sqrt{۳}$

تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی

$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است، ولی می‌توانیم اعدادی اعشاری را که نزدیک به آن باشد، بیابیم. برای مثال، ۱/۴ به $\sqrt{۲}$ نزدیک است و ۱/۴۱ به $\sqrt{۲}$ نزدیک‌تر است و ۱/۴۱۴ به $\sqrt{۲}$ بیشتر نزدیک است. این اعداد اعشاری را تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۲}$ می‌نامند. برای هر عدد حقیقی می‌توان از این تقریب‌های اعشاری یافت و هرچه عدد اعشاری به عدد حقیقی نزدیک‌تر باشد، دقت تقریب بالاتر است.

مثال: $\frac{۱}{۳}$ برابر هیچ عدد اعشاری نیست، ولی می‌توانیم تقریب‌های اعشاری آن را به‌دست آوریم. $\frac{۱}{۳}$ با دقت یک رقم اعشار برابر است با ۰/۳ و با دقت دو رقم اعشار برابر است با ۰/۳۳ و با دقت سه رقم اعشار برابر است با ۰/۳۳۳. دقت این تقریب‌ها را هر چقدر که لازم باشد می‌توانیم بالا ببریم.

مثال ۱: تقریب اعشاری $\frac{۲}{۷}$ تا سه رقم اعشار چیست؟

۲ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و خارج‌قسمت را تا سه رقم اعشار محاسبه می‌کنیم. $\frac{۲}{۷}$ با دقت یک رقم اعشار برابر است با ۰/۲، با دقت دو رقم اعشار برابر است با ۰/۲۸، و با دقت سه رقم اعشار برابر است با ۰/۲۸۵.

مثال ۲: $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ دو عدد گنگ هستند و $\sqrt{۲}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر است با ۱/۴۱۴۲ و $\sqrt{۳}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر است با ۱/۷۳۲۰.

مثال ۳: π یک عدد گنگ است و با دقت دو رقم اعشار برابر است با ۳/۱۴. دقت این تقریب را تا هر قدر که بخواهیم می‌توانیم بالا ببریم. مثلاً، π با دقت ده رقم اعشار برابر است با ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵.

توجه کنید که تقریب‌هایی که در این‌جا از آن صحبت کرده‌ایم، تقریب زدن با روش قطع کردن بوده است که در دوره‌ی راهنمایی با آن آشنا شده‌اید. در این روش تقریب زدن، مقدار تقریبی از مقدار واقعی کمتر است. می‌توان دید اگر به آخرین رقم آن یک واحد اضافه کنیم از مقدار واقعی بیشتر می‌شود. برای مثال، وقتی می‌گوییم $\sqrt{۲}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر ۱/۴۱۴۲ است، یعنی $۱/۴۱۴۲ < \sqrt{۲} < ۱/۴۱۴۳$

تمرین در کلاس

۱ــ با توجه به تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ که در بالا داده شده است، مجموع $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ را با یک رقم اعشار حساب کنید و حاصل را با π که با دقت یک رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

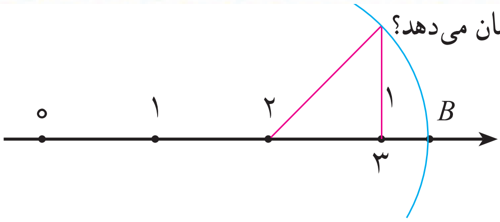
۲ــ $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ را با دو رقم اعشار حساب کنید و آن‌را با عدد π که با دقت دو رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

۳ــ آیا عدد π با مجموع $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ مساوی است؟

۴ـ $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ را با سه رقم اعشار حساب کنید و آن‌را با عدد π که با دقت سه رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

مسائل

۱ـ روی محور اعداد زیر، نقطه‌ی B چه عددی را نشان می‌دهد؟



۲ـ بر روی محور اعداد زیر، مکان هریک از اعداد $\frac{۲}{۳}$، $\frac{-۱}{۴}$، $-۲/۴$ و $\frac{۵}{۴}$ را مشخص کنید.

۳ـ اعداد $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۳}-۱$ را روی محور بیابید.

۴ـ جدول زیر را کامل کنید و علامت اعداد مخالف صفر را تعیین کنید.

صفر	مثبت	منفی	عدد
			$-۲/۷$
			$-۱\frac{۲}{۳}$
			$\frac{۱}{۲}$
			$۱-\sqrt{۲}$
			$(۲\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۲})$
			$\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$
			$-(۲-\sqrt{۳})$

۵ـ مقدار عبارت‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید و بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

$|۲-۳\times(۱-۲)|$ ، $|۱-\sqrt{۲}|$ ، $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|$ ، $|-۲\times(۳-۴)|$

۶ـ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

درصد	کسر	عدد اعشاری
۵۵	$\frac{۵۵}{۱۰۰}$	۰/۵۵
		۱/۲۵
	$۲\frac{۱}{۲}$	
	$\frac{۳}{۴}$	
	$\frac{۴}{۵}$	
۸/۵		
۴۸		

۷ــ در بین عددهای گویای زیر، عددهایی که اعشاری هستند را مشخص کنید و قسمت صحیح و قسمت اعشاری آن‌ها را بنویسید.

$$\frac{۲}{۳}\ ،\ \frac{۸}{۵}\ ،\ \frac{۱۵}{۶}\ ،\ \frac{۳}{۷}$$

۸ــ حاصل هریک از عملیات زیر را به‌طور تقریبی به‌دست آورید. قبل از انجام عملیات، در صورت نیاز به نزدیک‌ترین عدد مناسب، اعداد را گرد کنید.

الف) $۳/۹ \div ۴۰/۹$

ب) $۶۹/۳ \div ۱/۹$

ج) $(۹/۴ + ۲/۳۵) \times ۸۷/۳$

د) $\dfrac{\sqrt{۱۴۵} \times ۷/۹۶}{\sqrt{۲۴}}$

۹ــ یک لکه روغن روی آب افتاده و به‌صورت دایره‌ای بزرگ می‌شود. لحظه‌ای می‌رسد که شعاع دایره برابر با ۴ سانتی‌متر شده و در لحظه‌ای بعد شعاع ۰/۲ سانتی‌متر افزایش می‌یابد. مساحت لکه چقدر افزایش می‌یابد؟ (مقدار π را برابر ۳/۱۴ بگیرید.)

۱۰ــ دانش‌آموزی گفت: در جایی خوانده‌ام که برای حفظ تقریب اعشاری π تا ده رقم، می‌توان جمله زیر را حفظ کرد.

«خرد و بینش و آگاهی دانشمندان ره سرمنزل مقصود بما آموزد»

به‌نظر شما چه ارتباطی بین این جمله و عدد π وجود دارد؟

ابوالحسن علی‌بن احمد نسوی

حکیم و ریاضی‌دان ایرانی است که در سال ۳۹۳ق. در ری متولد شد. از خصوصیات او نقل می‌کنند که سیرتی نیکو داشت و به علم و هنر عشق می‌ورزید و مردی کریم، مهمان‌نواز، خوان‌گشاده، علم دوست و دانش‌گستر بود و در میان شاگردان و بزرگان زمان خود به استاد مختص معروف بود. از او ۱۱ اثر ریاضی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به اثرالمقنع فی‌الحساب الهندی اشاره کرد که در آن به روش محاسبه با دستگاه شمارش اعشاری می‌پردازد که در آن هریک از ارقام بسته به مکانی که در آن قرار گرفته‌اند دارای ارزش‌اند و ارزش مکانی هر رقم نسبت به رقم سمت راست خود ده برابر است. مثلاً در دستگاه اعشاری ۵۲/۴، ۴ دارای ارزش‌مکانی دهم، ۲ دارای ارزش مکانی یکان و ۵ دهگان است که ارزش هر کدام ده برابر دیگری است. ایشان در زمینه‌ی هندسه و مثلثات نیز کارهای بسیار زیادی انجام داده‌اند. وی در سال ۴۷۲ ق. درگذشت.

نمادها و زبان ریاضی

برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده می‌شود. مثلاً، تمام اعداد طبیعی را با کنار هم گذاردن نمادهایی که برای اعداد صفر تا نه انتخاب کرده‌ایم نمایش داده‌ایم. تمام اعداد صحیح را با استفاده از نمایش دهدهی اعداد طبیعی و علامت منفی «$-$»، نمایش داده‌ایم. تمام اعداد گویا را با استفاده از نمایش اعداد طبیعی و علامت منفی و خط کسری نمایش داده‌ایم. اعمال جمع و ضرب را هم با نمادهای «$+$» و «$\times$» و رابطهٔ کوچک‌تری و بزرگ‌تری را با «$<$» و «$>$» نشان داده‌ایم.

سخن گفتن با استفاده از این نمادها را زبان ریاضی می‌نامیم. جملات در زبان ریاضی را به زبان فارسی نیز می‌توان بیان کرد. برای مثال، جملهٔ فارسی زیر، خبری را در ریاضی بیان می‌کند :

«اگر به عدد پانزده، عدد دو را اضافه کنیم، حاصل آن هفده می‌شود.»

همین جمله را با استفاده از نمادها، به زبان ریاضی به شکل زیر می‌نویسیم :

$$۱۵+۲=۱۷$$

عبارت بالا یک جمله‌ی ریاضی است که خبری را در مورد سه عدد ۱۵، ۲ و ۱۷ بیان می‌کند.

تمرین در کلاس

۱ــ جمله‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) حاصل‌جمع منفی دوازده و هجده، برابر شش است.

ب) حاصل‌ضرب یک سوم در خودش برابر یک نهم است.

ج) حاصل‌ضرب منفی یک در منفی سه به اضافه پنجاه، از پنجاه بزرگ‌تر است.

۲ــ جمله‌های ریاضی زیر را به زبان فارسی بنویسید.

الف) $(-۱۲-۳)\times ۲=-۳۰$

ب) $\frac{۲}{۵}-۲=-\frac{۸}{۵}$

ج) $-\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۱۵}+۱<\frac{۱۳}{۱۵}$

برای سخن گفتن در مورد اعداد مشخص، از نمایش آن‌ها استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، برای گفتن این‌که جمع یک دوم با خودش برابر یک است می‌نویسیم :

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

اما اگر بخواهیم در مورد دسته‌ای از اعداد سخن بگوییم، آن را چگونه بنویسیم؟ فرض کنید می‌خواهیم بگوییم :

«دو برابر هر عدد برابر است با جمع آن عدد با خودش.»

این جمله به معنای آن است که :

$$\begin{array}{ccc} ۱+۱ & = & ۲\times ۱ \\ ۲+۲ & = & ۲\times ۲ \\ ۳+۳ & = & ۲\times ۳ \\ ۴+۴ & = & ۲\times ۴ \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

همان‌طور که می‌بینید، این خاصیت مربوط به عدد خاصی نیست و برای همه‌ی اعداد برقرار است. اگر $\square$ نشانه‌ی یک عدد دلخواه باشد، خاصیت بالا را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم :

$$\square+\square=۲\times\square$$

اگر به‌جای $\square$، هر عدد دلخواهی بگذاریم تساوی بالا برقرار می‌شود. در ریاضی معمولاً به‌جای استفاده از علامت $\square$ از نمادهای حروف انگلیسی مانند a، b، c،... استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال، برای گفتن جمله‌ی «جمع هر عدد با خودش، مساوی با دو برابر همان عدد است.» می‌گوییم : عدد دلخواهی انتخاب کنید و آن را a بنامید، در این‌صورت :

$$a+a=۲\times a$$

در جمله‌ی بالا، به‌جای حرف a از هر حرف دیگری هم می‌توانیم استفاده کنیم. برای مثال بالا می‌توانیم بگوییم : عدد دلخواهی انتخاب کنید و آن را x بنامید، در این‌صورت :

$$x+x=۲\times x$$

هر دو این جملات یک چیز می‌گویند : جمع هر عدد با خودش، مساوی با دو برابر همان عدد است.

بنا به قرارداد، ضرب یک عدد خاص مانند ۲ در یک عدد دلخواه را که با یک نماد مانند a نشان داده شده است، به‌جای $۲\times a$ با $۲a$ نشان می‌دهیم. این کار موجب سادگی نوشتن خواهد شد. به‌عنوان مثال :

$$۳\times a=۳a \qquad (-۱۲)\times x=-۱۲x \qquad ۱/۷\times z=۱/۷z$$

به کمک نمادهایی که نشان‌دهنده‌ی یک عدد دلخواه هستند می‌توانیم خواصی از اعداد را که برای همه‌ی اعداد برقرارند راحت‌تر بیان کنیم.

مثال: برای بیان این‌که «حاصل‌جمع هر عدد با صفر برابر همان عدد می‌شود.»، می‌گوییم : عدد دلخواهی

را انتخاب کنید و آن را z بنامید، در این‌صورت

$$z+۰=z$$

مثال: برای بیان این‌که «هر عددی که با یک جمع شود از آن عدد بزرگ‌تر می‌شود.» می‌گوییم : عدد دلخواهی را انتخاب کنید و آن را w بنامید، در این‌صورت :

$$w+۱>w$$

تمرین در کلاس

۱ــ جمله‌های زیر را با استفاده از حروف انگلیسی که به‌عنوان نمادهای حرفی و نمادهای ریاضی به‌کار برده می‌شوند، بنویسید.

الف) سه برابر هر عددی برابر است با سه بار جمع آن عدد با خودش.

ب) ضرب هر عددی در صفر، صفر می‌شود.

ج) تفاضل هر عدد از خودش برابر صفر می‌شود.

۲ــ جمله‌های ریاضی زیر را به زبان فارسی بنویسید.

الف) $a\times a>۰$ یا $a\times a=۰$

ب) $x\times ۱=x$

ج) $۴\times(۱+w)=۴+۴w$

د) $x\times x+۱>x$

در بسیاری اوقات، می‌خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم. در این موارد لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هرکدام نشان‌دهنده عدد دلخواهی باشند.

مثال: برای بیان این‌که : «در جمع دو عدد، جمع اولی با دومی برابر است با جمع دومی با اولی»، می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این صورت :

$$x+y=y+x$$

بنا به قرارداد برای نشان دادن ضرب دو عدد که با نمادهایی مانند a و b نشان داده شده‌اند، به‌جای $a\times b$ از ab استفاده می‌کنیم که ساده‌تر است.

ضرب یک عدد در خودش را **مربع** یا **مجذور** آن عدد می‌نامند.

مربع عدد a را با $a^۲$ نشان می‌دهند. یعنی :

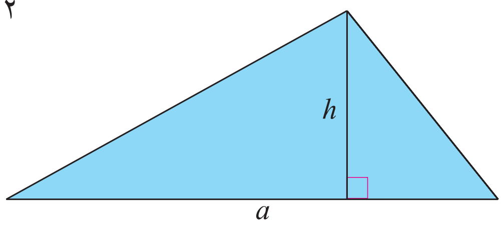
$$a\times a=aa=a^۲$$

مثال: برای بیان این‌که : «در ضرب دو عدد، حاصل‌ضرب اولی در دومی برابر است با حاصل‌ضرب دومی در اولی.» می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این‌صورت :

$$xy = yx$$

مثال: برای بیان این‌که : «مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول یک قاعده آن در ارتفاع نظیر آن قاعده.»، می‌گوییم : یک مثلث دلخواه درنظر بگیرید و طول یک قاعده‌ی آن را a و ارتفاع نظیر آن قاعده را h بنامید، در این‌صورت :

مساحت مثلث $= \frac{۱}{۲}ah$



مثال: برای بیان این‌که : «حاصل ضرب دو عدد مثبت، عددی مثبت است.»، می‌گوییم : دو عدد دلخواه مثبت انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این‌صورت :

$$xy > ۰$$

مثال: برای بیان این‌که : «حاصل جمع یک عدد مثبت با یک عدد دیگر، عددی بزرگ‌تر از عدد دوم می‌سازد»، می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را z و w بنامید، فرض کنید $z > ۰$ ، در این صورت :

$$z + w > w$$

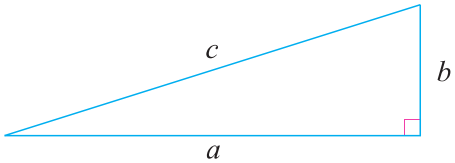
در موارد بسیاری لازم می‌شود که مطلبی را درباره‌ی سه عدد دلخواه بیان کنیم. در این حالت باید از سه نماد برای نشان دادن سه عدد دلخواه استفاده کنیم.

مثال: برای بیان این‌که «در جمع سه عدد، ترتیب جمع کردن به‌صورت جمع عدد اول با عدد دوم و سپس جمع با عدد سوم، یا جمع عدد دوم با عدد سوم و سپس جمع با عدد اول تغییری در نتیجه ایجاد نمی‌کند.» می‌گوییم : برای سه عدد x، y و z، داریم :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

مثال: طبق قضیه‌ی فیثاغورس «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول وتر برابر است با مجموع مربعات طول دو ضلع دیگر.»، برای بیان این قضیه به زبان ریاضی، می‌گوییم : اگر طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را با a و b و c نشان دهیم و c طول وتر باشد، داریم :

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$



به تساوی زیر توجه کنید :

$$۱۲\times(۵+۲۳)=(۱۲\times۵)+(۱۲\times۲۳)$$

این تساوی نشان می‌دهد که برای محاسبه‌ی حاصل‌ضرب ۱۲ در مجموع دو عدد ۵ و ۲۳ می‌توانستیم ابتدا ضرب ۱۲ در ۵ و سپس ضرب ۱۲ در ۲۳ را انجام دهیم و حاصل‌ها را با هم جمع کنیم. این ویژگی خاص اعداد ۱۲، ۵ و ۲۳ نیست و برای اعداد دیگر هم می‌توانیم این عمل را انجام دهیم. این ویژگی را «خاصیت پخشی» عمل ضرب نسبت به عمل جمع می‌نامند. در فعالیت زیر درستی این ویژگی را به‌طور هندسی بررسی می‌کنیم.

فعالیت

۱ــ مستطیلی رسم کنید و طول و عرض آن را با x و y نشان دهید.

۲ــ مستطیل دیگری رسم کنید که طول آن همان x ولی عرض آن عدد دیگری مانند z باشد.

۳ــ دو مستطیل بالا را به‌گونه‌ای کنار هم قرار دهید که یک مستطیل بزرگ‌تر ساخته شود.

۴ــ مساحت هریک از این دو مستطیل و مستطیل بزرگ‌تر ساخته شده را برحسب نمادهای انتخاب شده بنویسید.

۵ــ مساحت مستطیل بزرگ‌تر ساخته شده برابر مجموع مساحت‌های دو مستطیل اول است. این مطلب را با استفاده از نمادهای انتخاب شده بنویسید.

۶ــ رابطه‌ی به‌دست آمده بین اعداد مثبت x و y و z را به زبان فارسی بیان کنید.

برای سه عدد x، y و z داریم : $x(y+z)=xy+xz$

اگر هر طرف تساوی بالا را داشته باشیم، می‌توانیم طرف دیگر را به‌دست آوریم. اگر ابتدا سمت چپ تساوی را داشته باشیم و سپس سمت راست تساوی را به‌دست آوریم، آن را «پخش کردن عمل ضرب روی عمل جمع» می‌نامند. اگر برعکس، ابتدا سمت راست تساوی را داشته باشیم، سپس سمت چپ تساوی را به‌دست آوریم، آن را «**فاکتورگیری**» می‌نامند و در این حالت در تساوی بالا می‌گوییم از x فاکتور گرفته‌ایم.

تمرین در کلاس

مستطیلی رسم کنید و روی طول آن یک نقطه انتخاب کنید. این نقطه، طول مستطیل را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند. طول این پاره‌خط‌ها را x و y و عرض این مستطیل را z بنامید.

۱ــ تساوی $z(x+y)=zx+zy$ را روی شکل نشان دهید.

۲ــ روی عرض این مستطیل نیز نقطه‌ای انتخاب کنید. این نقطه هم، عرض مستطیل را به دو قسمت تقسیم می‌کند. طول این دو قسمت را با a و b نشان دهید و رابطه‌ی بین a، b و z را بنویسید.

۳ــ تساوی $z(x+y)=zx+zy$ را برحسب a و b بنویسید.

۴ــ درستی تساوی‌های زیر را در مستطیل رسم شده نشان دهید.

$$(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)=(a+b)x+(a+b)y=ax+ay+bx+by$$

بنا به قرارداد، در عبارت‌هایی که عملیات جمع و ضرب انجام می‌شود، اگر ترتیب عملیات با پرانتز مشخص نشده باشد، ابتدا عملیات ضرب و تقسیم به‌ترتیب از چپ به راست انجام می‌شود، سپس عملیات جمع یا تفریق به‌ترتیب از چپ به راست انجام خواهد شد.

مثال: در عبارت $۴\times۳-۲۳+۴۱\times۲$ ابتدا ضرب ۴ در ۳ و سپس ضرب ۴۱ در ۲ انجام می‌شود و درپی آن عبارت $۱۲-۲۳+۸۲$ ساخته می‌شود. سپس تفریق $۱۲-۲۳$ انجام می‌شود و حاصل آن با ۸۲ جمع می‌شود.

مثال: در عبارت $-۱۲-۴\times۵\div۲-۱$ ، ابتدا ضرب ۴ در ۵ محاسبه و حاصل آن بر ۲ تقسیم می‌شود که برابر ۱۰ است. سپس تفریق ۱۰ از (۱۲−) انجام می‌شود که حاصل (۲۲−) است و آخر، تفریق ۱ از (۲۲−) انجام می‌شود که حاصل (۲۳−) است.

تمرین در کلاس

ترتیب عملیات را در عبارت‌های زیر تعیین کنید.

۱) $۲-۳+۵$

۲) $۱-۴\times۶+۳-۵\times۱۲$

۳) $-۵+۴\div۲+۱۴\div۲\times۷$

۴) $x-yz$

۵) $a-bx+c(x+a)$

۶) $ab-cd+۲(x+۱)$

مسائل

۱ــ در جمله‌های زیر، حروف a، x و w، نشان‌دهنده‌ی اعداد دلخواهی هستند. این جمله‌ها را به کوتاه‌ترین شکل به فارسی بنویسید.

الف) $(a+x)(a-x)=a^{۲}-x^{۲}$

ب) $(aw)^{۲}=a^{۲}w^{۲}$

ج) فرض کنید $a>۱$، در این‌صورت $a^{۲}>۱$.

د) فرض کنید $a>۰$ و $x>۰$ و $a^{۲}=x^{۲}$، در این‌صورت $a=x$.

هـ) فرض کنید $aw=۰$، در این‌صورت $a=۰$ یا $w=۰$.

۲ــ برای مقادیر زیر که برحسب اعداد دلخواه a و b نوشته شده‌اند، مثال هندسی بیاورید.

الف) $a^{۲}$

ب) $۲a+۲b$

ج) $a^{۲}+b^{۲}+۲ab$

د) $\frac{۱}{۲}(a+b)$

۳ــ چهار عدد مثبت دلخواه را با z، a، b و c نشان داده‌ایم، با رسم یک شکل نشان دهید $z(a+b+c)=za+zb+zc$. بدون استفاده از شکل نیز درستی همین تساوی را نشان دهید.

۴ــ عبارت‌های زیر را با فاکتورگیری به شکل حاصل ضرب درآورید.

$$xa+xb \quad , \quad x^{۲}a+x^{۲}b \quad , \quad zy+xy \quad , \quad ab^{۲}+cb^{۲} \quad , \quad a^{۲}x^{۲}+ax^{۲} \quad , \quad x^{۲}+x$$

۵ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

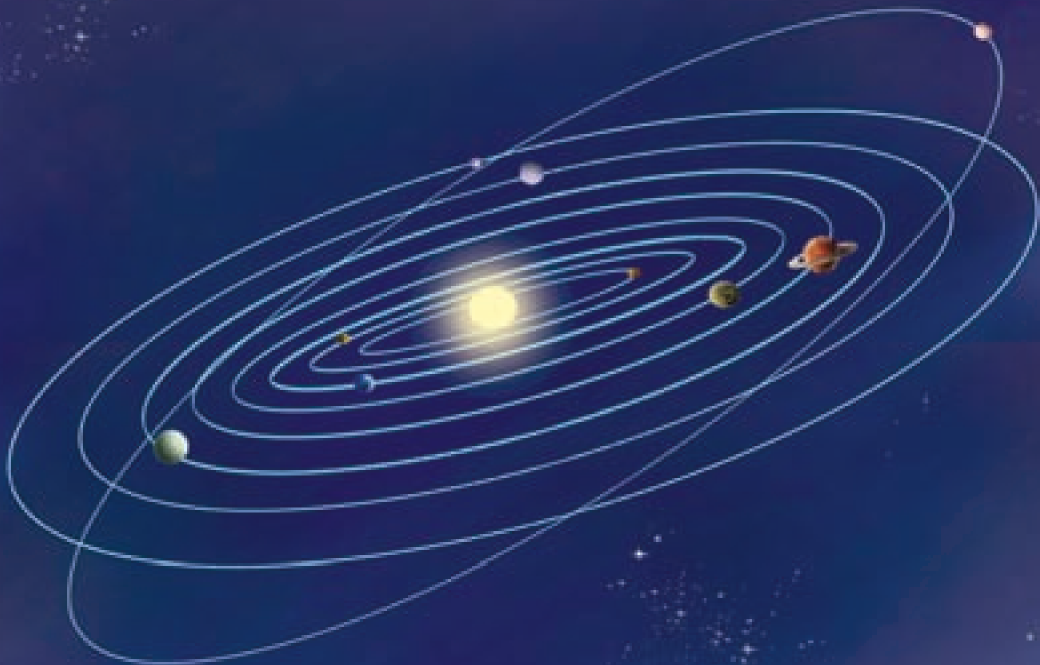
$$-۶\div۲\times۳=$$

$$۶-۶(۳-۳\times۲)=$$

$$\frac{۴\frac{۱}{۳}-۲\frac{۲}{۲}}{۲+\frac{-۲}{۳}-۲\frac{۱}{۳}}=$$

۲

مجموعه ها



سال ها تصور می شد پلوتون جزء سیارات منظومه شمسی است. اخیراً انجمن جهانی نجوم اعلام نموده است که پلوتون عضوی از مجموعه سیارات منظومه شمسی نیست. با دقت در شکل بالا چه دلیلی برای توجیه این نقطه نظر می‌توان ارائه کرد؟

مسئله گروه‌های دانش‌آموزی

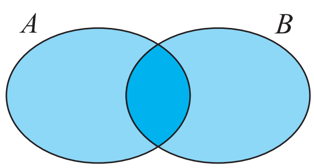
بسیاری از مفاهیم ریاضی از طریق حل مسائلی که بشر با آن روبه‌رو شده است به‌وجود آمده‌اند. شما نیز با حل مسائلی که با آن‌ها روبه‌رو می‌شوید می‌توانید مفاهیم جدید ریاضی را کشف کنید. محمد، دانش‌آموزی است که با حل مسئله‌ای که با آن روبه‌رو شده بود توانست نخست مفهوم مجموعه‌ها و سپس مطالب دیگر وابسته به مجموعه‌ها را به‌دست آورد.

محمد مدرسه‌ی خود را عوض کرده بود و وقتی وارد کلاس جدید شد، متوجه شد که در این کلاس دو گروه ورزشی یکی فوتبال و دیگری والیبال، تشکیل شده است. او فهمید، شرکت در این گروه‌ها داوطلبانه بوده و هرکس با میل خود می‌توانست عضو هرکدام از این دو گروه بشود یا نشود.

این گروه‌ها A و B نام‌گذاری شده بودند و هر گروهی با اعضایش مشخص می‌شد. محمد علاقه داشت بداند که هرکدام از این گروه‌ها چند عضو دارند. او با شمارش تعداد دانش‌آموزان کلاس فهمید که کلاس آن‌ها بدون خودش، ۳۶ دانش‌آموز دارد. ابتدا فکر کرد که تعداد اعضای گروه‌های A و B روی‌هم، همان ۳۶ نفر است، ولی زود متوجه شد که ممکن است برخی دانش‌آموزان در هیچ گروهی شرکت نکرده باشند.

او در زمان تمرین این گروه‌ها متوجه شد که ۴ نفر در هیچ کدام از این گروه‌ها شرکت نمی‌کنند و نتیجه گرفت تعداد اعضای گروه‌های A و B روی هم برابر ۳۲ = ۴ − ۳۶ است. محمد با شرکت در یکی از تمرین‌های گروه A فهمید تعداد اعضای گروه A ، ۲۱ نفر است. او فکر کرد چون تعداد اعضای این دو گروه روی هم ۳۲ نفر است، پس گروه B ، ۲۱ − ۳۲ یعنی ۱۱ عضو دارد.

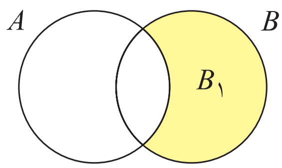
اما، یکی از افراد گروه B به محمد گفت که نتیجه‌گیری او اشتباه است و تعداد اعضای گروه B بیشتر از ۱۱ نفر است. محمد با کمی تأمل دریافت که نتیجه‌گیری او بر مبنای این فرض بوده است که دو گروه A و B عضو مشترکی ندارند در حالی که ممکن است برخی دانش‌آموزان خواسته باشند در هر دو گروه عضویت داشته باشند. محمد برای تشخیص وضعیت این دو گروه شکل زیر را رسم کرد.



محمد از روی این شکل نتیجه گرفت، اطلاعات او برای یافتن تعداد اعضای گروه B کافی نیست و او باید تعداد اعضای مشترک بین این دو گروه را بداند.

محمد با شرکت مجدد در یکی از تمرین‌های گروه A فهمید ۶ نفر از آن‌ها عضو گروه B هم هستند. برای

حل این مسئله، محمد فکر کرد که می‌توانیم مسئله را به حالتی برگردانیم که دو گروه عضو مشترکی نداشته باشند و از راه حل قبلی استفاده کنیم. اعضای مشترک بین دو گروه را موقتاً از گروه B خارج می‌کنیم و گروه $B_۱$ را می‌سازیم.



گروه $B_۱$ و گروه A عضو مشترکی ندارند و اعضای گروه‌های $B_۱$ و A روی هم، اعضای گروه A و B روی هم هستند. پس گروه $B_۱$ به اندازه‌ی ۳۲−۲۱=۱۱ عضو دارد. بنابراین، گروه B به اندازه‌ی ۱۱+۶=۱۷ عضو دارد.

راه دیگری هم برای حل این مسئله به نظر محمد رسید. او تعداد اعضای گروه B را x نامید و گفت در شمارش تعداد اعضای دو گروه، اگر اعضای مشترک را یک بار به عنوان عضو A و یک بار به عنوان عضو B بشماریم، حاصل ۲۱+x است. اما، چون در این شمارش ۶ نفر دوبار شمرده شده‌اند، تعداد واقعی ۲۱+x−۶ است. ولی تعداد واقعی اعضای دو گروه روی هم برابر ۳۲ بود، پس ۲۱+x−۶=۳۲. از این تساوی نتیجه می‌شود x=۱۷.

تمرین در کلاس

احمد و اکبر دانش‌آموزان یک مدرسه‌اند و هرکدام دوستانی در مدرسه دارند.

۱ــ تعداد دانش‌آموزان مدرسه ۱۴۲ نفر است که ۹۴ نفر از آنان نه دوست احمد هستند و نه دوست اکبر. دوستان احمد و دوستان اکبر روی هم چند نفرند؟

۲ــ اگر بدانید احمد ۲۳ دوست دارد، آیا می‌توانید بگویید اکبر چند دوست دارد؟

۳ــ اگر تعداد دوستان مشترک احمد و اکبر ۴ نفر باشد، آیا می‌توانید بگویید اکبر چند دوست دارد؟

مجموعه‌ها

در حل مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی با دسته‌هایی از دانش‌آموزان روبه‌رو شدیم. در مسائل دیگر نیز دسته‌های دیگری از اشیا دیده می‌شوند. این دسته‌های مشخص شده از اشیاء را مجموعه می‌نامند.

هر دسته‌ی مشخص شده از اشیا را یک **مجموعه** و آن اشیا را **اعضای** آن مجموعه می‌نامند.

مثال: در مسئله گروه‌های دانش‌آموزی، گروه‌های A و B هرکدام یک مجموعه بوده‌اند.

مثال: اعداد طبیعی یک رقمی یک مجموعه را تشکیل می‌دهند که آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$

مثال: دوستان حمید با هم یک مجموعه را می‌سازند که به آن مجموعه‌ی دوستان حمید می‌گوییم.

در زیر نمونه‌های دیگری از مجموعه‌ها را می‌بینید.

{ علی، رضا، احمد، جواد، کریم، اصغر}= تیم فوتبال مدرسه

{۲، ۴، ۸، ۶ }= مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی زوج

{ا،ی،م،ک،گ،ل.س،ص،ع،هـ،ح،ط،ر،د،و}= مجموعه‌ی حروف الفبای فارسی بی‌نقطه

{عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل، اورانوس،نپتون}= مجموعه‌ی سیارات منظومه شمسی

لازم نیست که اعضای یک مجموعه ارتباط خاصی با هم داشته باشند. برای مثال به مجموعه‌ی زیر توجه کنید :

{سعدی، حافظ، ۴، ۲، ۳۵، a، x، تهران}

مثال: عبارت «انسان‌های قد بلند» مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند، زیرا چنین انسان‌هایی به‌طور دقیق مشخص نشده‌اند و برای برخی انسان‌ها نمی‌توانیم بگوییم قد بلند هستند یا نه.

معمولاً، برای هر مجموعه‌ای نامی انتخاب می‌شود تا بهتر بتوان در مورد آن صحبت کرد.

مثال: در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی نام‌های انتخاب شده برای دو گروه ورزشی، A و B بود.

مثال: اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی را D بنامیم، می‌نویسیم : $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

برای برخی از مجموعه‌های اعداد نیز نام‌های خاصی انتخاب شده است. مثلاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهند ؛ یعنی :

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\cdots\}$$

توجه داشته باشید که در بالا منظور از «...» ادامه اعداد طبیعی هستند که انتها ندارند. برای مجموعه‌ی اعداد صحیح نیز نام $\mathbb{Z}$ انتخاب شده است ؛ یعنی :

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$$

مجموعه‌ی اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ و مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهند.
عضویت یک شیء در یک مجموعه را با استفاده از نماد «$\in$» بیان می‌کنند. مثلاً برای بیان این که ۲ یکی از اعضای $\mathbb{N}$ است می‌نویسیم : $۲\in\mathbb{N}$ و این جمله را به صورت «۲ عضو $\mathbb{N}$ است» می‌خوانیم. مثلاً :

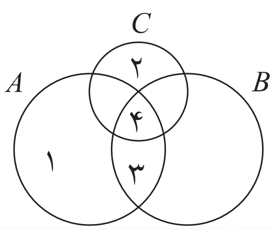
$$۱۲\in\mathbb{N} \ , \ -۵\in\mathbb{Z} \ , \ -\frac{۳}{۷}\in\mathbb{Q} \ , \ \sqrt{۱۱}\in\mathbb{R}$$

برای بیان این که شیئی عضو مجموعه‌ای نیست، از نماد $\notin$ استفاده می‌شود. مثلاً، برای بیان این که «-۳» یک عدد طبیعی نیست، می‌نویسیم $-۳\notin\mathbb{N}$ و آن را به صورت «(-۳) عضو $\mathbb{N}$ نیست» می‌خوانیم. مثلاً :

$$\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{Z} \ , \ \sqrt{۵}\notin\mathbb{Q} \ , \ -۸\notin\mathbb{N} \ , \ \pi\notin\mathbb{Q}$$

تمرین در کلاس

در شکل زیر وضعیت عضو بودن یا نبودن عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را نسبت به مجموعه‌های A، B و C مشخص کنید.



آیا مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضوی نداشته باشد؟ بلی، ریاضیدانان وجود چنین مجموعه‌ای را پذیرفته‌اند و آن را مجموعه‌ی تهی نامیده‌اند و آن را با نماد $\varnothing$ نشان می‌دهند.
مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۳۰ و ۴۰ که بر ۲۱ بخش‌پذیرند، مجموعه‌ی تهی است.

تساوی مجموعه‌ها

برای مشخص کردن مجموعه‌ها راه‌های مختلفی وجود دارد. ممکن است دو مجموعه با دو روش مختلف مشخص شده باشند ولی اعضای یکسانی داشته باشند، در این حالت گوییم دو **مجموعه مساوی‌اند**.
مثال: فرض کنید علی و حسن با یکدیگر دوست هستند. هر یک از آن‌ها تا امروز انواعی از غذاها را خورده‌اند. مجموعه‌ی غذاهایی را که علی خورده است A و مجموعه‌ی غذاهایی را که حسن خورده است B می‌نامیم. اگر بررسی کنیم و متوجه شویم که هر غذایی که علی خورده است، حسن هم خورده است و هر غذایی که حسن خورده است، علی هم خورده است، دو مجموعه‌ی A و B اعضای یکسانی

خواهند داشت و این دو مجموعه مساوی‌اند و می‌نویسیم A=B.
در این مثال، اگر چه شیوه‌ی مشخص کردن اعضای دو مجموعه‌ی A و B با هم فرق داشت، ولی چون این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند با هم مساوی‌اند.

اگر هر عضو مجموعه‌ی A عضوی از مجموعه‌ی B و هر عضو مجموعه‌ی B عضوی از مجموعه‌ی A باشد، این دو مجموعه را مساوی می‌نامیم و می‌نویسیم A=B.

مثال: دو مجموعه‌ی A و B را به شکل زیر در نظر بگیرید :

$$\{۱,۲,۶\} = \{۱,۲,۲,۶,۶,۶\}$$

در مجموعه سمت راست بالا، برای مشخص کردن اعضای مجموعه، برخی اعضا چند بار نوشته شده‌اند. این عمل عضو جدیدی به مجموعه اضافه نمی‌کند و مجموعه‌ی سمت راست با مجموعه‌ی سمت چپ مساوی است.

مثال:

$$A = \{۱,۲,۶,۸,۱۲,۱۹\}$$

$$B = \{۱۹,۶,۱,۲,۸,۱۲\}$$

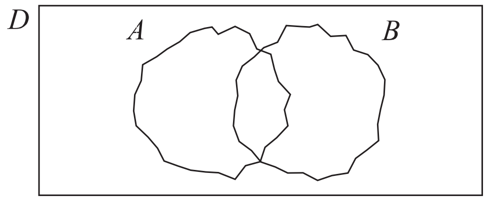
اعضای مجموعه‌های بالا با ترتیب‌های مختلفی نوشته شده‌اند. با این حال چون این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند با یکدیگر مساوی‌اند ؛ یعنی A=B.

تمرین در کلاس

۱ــ جواد و حسین هر دو در یک مدرسه و در یک کلاس درس می‌خوانند، آیا مجموعه‌ی معلمین جواد با مجموعه‌ی معلمین حسین مساوی است؟
۲ــ آیا مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی با مجموعه‌ی اعداد فرد یک رقمی مساوی است؟
۳ــ مجموعه‌ی انسان‌هایی که در کره‌ی ماه زندگی می‌کنند، مساوی کدام مجموعه است؟

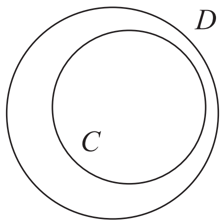
زیر مجموعه

در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی، اگر مجموعه‌ی کلیه افراد کلاس را با D نشان دهیم، وضعیت گروه‌های A و B نسبت به D چگونه است؟



هر عضو گروه یا مجموعه‌ی A یک دانش‌آموز کلاس است، پس عضوی از D است. در چنین حالتی گوییم A زیرمجموعه‌ی D است. به همین ترتیب هرعضو B نیز عضوی از D است، پس B نیز زیرمجموعه‌ای از D است.

اگر C و D دو مجموعه باشند به‌طوری که هر عضو C، عضو D نیز باشد، در این صورت گوییم C یک **زیرمجموعه‌ی** D است.



برای بیان این که مجموعه‌ی C زیرمجموعه‌ی D است، می‌نویسیم «$C \subset D$» و آن را چنین می‌خوانیم : « C زیرمجموعه‌ی D است».

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد یک رقمی زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۱۰ است.

$$\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\} \subset \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

مثال: مجموعه‌ی دانش‌آموزان کلاس شما، زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی دانش‌آموزان مدرسه‌ی شما است.

مثال: مجموعه‌ی افرادی که در روستاهای ایران زندگی می‌کنند، زیرمجموعه‌ای است از مجموعه‌ی همه افرادی که در ایران زندگی می‌کنند.

تمرین در کلاس

۱ــ یک مجموعه‌ی ۳ عضوی بسازید و آن را A بنامید.
۲ــ از A یک عضو را حذف کنید و مجموعه‌ی جدید را B بنامید. وضعیت A و B نسبت به هم چگونه است؟
۳ــ عضو دیگری را به B اضافه کنید و مجموعه‌ی به دست آمده را C بنامید. وضعیت B و C نسبت به هم چگونه است؟ وضعیت A و C نسبت به هم چگونه است؟
۴ــ آیا ممکن است دو مجموعه، هرکدام زیر مجموعه‌ی دیگری باشد؟ چه وقت این اتفاق می‌افتد؟
۵ــ آیا ممکن است از دو مجموعه، هیچ کدام زیرمجموعه دیگری نباشد؟ مثال بزنید.
۶ــ آیا هر عدد طبیعی یک عدد صحیح است؟ وضعیت $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ نسبت به هم چگونه است؟
۷ــ آیا هر عدد صحیح یک عدد گویا است؟ وضعیت $\mathbb{Z}$ و Q نسبت به هم چگونه است؟
۸ــ آیا هر عدد گویا یک عدد حقیقی است؟ وضعیت Q و $\mathbb{R}$ نسبت به هم چگونه است؟

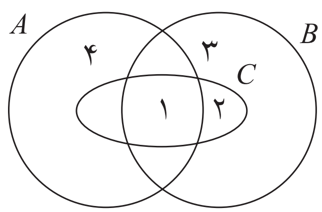
مثال: کلیه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ را تعیین کنید.
برای به دست آوردن زیرمجموعه‌های یک مجموعه، می‌توانیم با شروع از خود مجموعه و حذف یک یک اعضای آن، در کلیه‌ی حالاتی که امکان‌پذیر است، تمام زیرمجموعه‌های آن مجموعه را به‌دست آوریم.
برای مثال، تمام زیرمجموعه‌های $A=\{a,b,c\}$ عبارت‌اند از :

$$\{a,b,c\}\ ,\ \{b,c\}\ ,\ \{a,c\}\ ,\ \{a,b\}\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{c\}\ ,\varnothing$$

مسائل

۱ ــ در یک کلاس ۳۲ نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامه‌های ورزشی و ۲۳ نفر در فوق برنامه‌های علمی شرکت کرده‌اند. اگر دو نفر در هیچ یک از دو فوق برنامه ورزشی و علمی شرکت نکنند، تعیین کنید چند نفر :
الف : در هر دو برنامه شرکت می‌کنند.
ب :فقط در یک فوق برنامه شرکت می‌کنند.
۲ــ با توجه به شکل زیر درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $۲\in B$
ب) $۴\notin C$
ج) $\{۳\}\subset B$
د) $\{۳,۴\}\subset A$
هـ) $C\subset B$



۳ــ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ($\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی، Q مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح و $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی)

$$-۲\in\mathbb{N} \quad , \quad \frac{۲}{۳}\in Q \qquad ۲\in\mathbb{Z} \qquad \sqrt{۲}\in Q \qquad Q\subset Z \quad , \quad Z\subset R$$

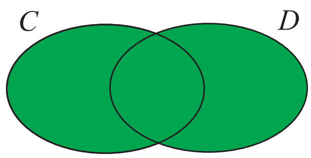
۴ــ دو مجموعه $A=\{۷,x,-y\}$ و $B=\{۷,-۲,۵\}$ مساوی هستند. مقدار xy را به‌دست آورید.

۵ــ معلم پرسید : آیا عبارت «چهار عدد زوج متوالی» یک مجموعه را نشان می‌دهد؟ دانش‌آموزی گفت بله، مثلاً $\{۲,۴,۶,۸\}$. به‌نظر شما آیا پاسخ او صحیح بوده است؟ در صورت اشتباه بودن، علت اشتباه را توضیح دهید.

اجتماع مجموعه ها

در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی، اگر دو گروه A و B جلسه‌ی مشترکی تشکیل دهند، مجموعه‌ای از دانش‌آموزان تشکیل می‌شود که آن را اجتماع دو مجموعه A و B می‌نامند.

اگر C و D دو مجموعه باشند، مجموعه‌ی جدیدی را که اعضای آن متشکل از اعضای این دو مجموعه با هم است، **اجتماع** C و D می‌نامند و با **C∪D** نشان می‌دهند.



C∪D

C∪D ، مجموعه اشیایی است که عضو C یا عضو D هستند.

مثال: معلم جغرافی از رضا و احمد خواست درباره‌ی شهرهایی که به آن سفر کرده‌اند گزارشی بنویسند. اگر رضا به شهرهای اصفهان، زنجان، اردبیل، اهواز و تهران سفر کرده باشد و احمد شهرهای اصفهان، خرم‌آباد، تبریز، سنندج و اهواز را دیده باشد، معلم جغرافی در مورد کدام شهرها از این دو نفر گزارش دریافت کرده است؟ جواب این سؤال، اجتماع مجموعه‌ی شهرهایی است که رضا و احمد به آن‌ها سفر کرده‌اند. اگر مجموعه‌ی شهرهایی که رضا دیده است را با A و مجموعه‌ی شهرهایی که احمد دیده است را با B نشان دهیم، خواهیم داشت :

A∪B = { اصفهان , زنجان , اردبیل , اهواز, تهران }∪{ اصفهان , خرم‌آباد , تبریز , سنندج , اهواز }

= { اصفهان , زنجان , اردبیل , اهواز , تهران , خرم‌آباد , تبریز , سنندج }

مثال: اجتماع مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی زوج و مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ را که بر ۳ بخش‌پذیرند به دست آورید.

{۲,۴,۶,۸}∪{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸} = {۲,۴,۶,۸,۳,۹,۱۲,۱۵,۱۸}

تمرین در کلاس

۱ــ اگر A = {۱,۵,۹} و B = {۵,۷,۹} ، درستی جملات زیر را نشان دهید.

الف) A∪A = A .

ب) A∪B = B∪A .

ج) A⊂(A∪B) و B⊂(A∪B) .

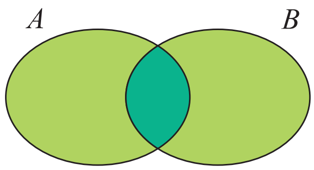
۲ــ یک مجموعه C معرفی کنید به طوری که A⊂C و B⊂C . نشان دهید (A∪B)⊂C .

۳ــ اگر به‌جای مجموعه‌های بالا، مجموعه‌های دیگری قرار می‌دادیم، آیا باز هم روابط بالا درست بودند؟ درستی پاسخ خود را با رسم شکل نشان دهید.

اشتراک مجموعه‌ها

در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی دیدیم که افراد مشترک بین دو گروه A و B نقش مهمی در حل مسئله داشتند. مجموعه‌ی این افراد مشترک را اشتراک آن دو مجموعه می‌نامند.

برای دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ی اشیایی را که هم عضو A و هم عضو B هستند، اشتراک A و B می‌نامند و با $A \cap B$ نشان می‌دهند.



$A \cap B$

مثال: اشتراک مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی و اعداد طبیعی زوج یک رقمی، {۲} است.

$$\{۲,۳,۵,۷\} \cap \{۲,۴,۶,۸\} = \{۲\}$$

مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌ها و B مجموعه‌ی همه‌ی ریاضی‌دانان جهان باشد، $A \cap B$ مجموعه همه ایرانی‌های ریاضی‌دان است.

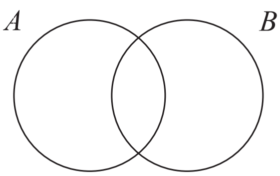
مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی انسان‌ها و B مجموعه‌ی همه‌ی موجودات آبزی باشد، $A \cap B$ هیچ عضوی ندارد و برابر مجموعه تهی است، یعنی $A \cap B = \varnothing$.

دو مجموعه‌ی ناتهی را که اشتراک آن‌ها مجموعه‌ی تهی است، دو **مجموعه‌ی مجزا** یا **جدا از هم** می‌نامند.

مثال: مجموعه‌ی دانش‌آموزان کلاس اول ابتدایی و مجموعه‌ی دانش‌آموزان دبیرستانی، دو مجموعه‌ی مجزا هستند.

تمرین در کلاس

۱ــ با توجه به شکل زیر، درستی یا نادرستی هر یک از جملات ریاضی زیر را تعیین کنید.



$A \subset (A \cap B)$ ☐	$(A \cap B) = (B \cap A)$ ☐	$(A \cap B) \subset A$ ☐
$(A \cap A) = A$ ☐	$(A \cap B) \subset (A \cup B)$ ☐	$A \subset (A \cup B)$ ☐

۲ــ برای هر یک از جملات ریاضی زیر یک شکل رسم کنید.

الف) $A \cap B = \varnothing$

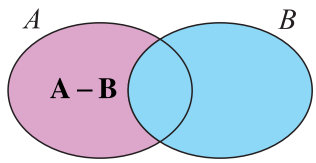
ب) $A \subset B \subset C$

ج) $B \cap C \neq \varnothing$, $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$

تفاضل مجموعه‌ها

مجموعه‌ی دانش‌آموزان سال اول یک دبیرستان را با A و مجموعه‌ی دانش‌آموزان آن دبیرستان که قد آن‌ها بلندتر از ۱۷۰ سانتی‌متر است، را با B نشان داده‌اند. یک روز برای انتخاب اعضای تیم بسکتبال، مربی ورزش همه‌ی دانش‌آموزان با قد بیش از ۱۷۰ سانتی‌متر را در حیاط نگه داشت. بنابراین،
دانش‌آموزانی که آن روز در کلاس اول دبیرستان حاضر بودند، آن‌هایی بودند که عضو مجموعه‌ی A بودند ولی عضو مجموعه‌ی B نبودند. مجموعه‌ای را که به این شکل ساخته می‌شود تفاضل B از A می‌نامند.

برای دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ی اشیایی را که در A هستند، ولی در B نیستند، **تفاضل** B از A می‌نامند و با **A − B** نشان می‌دهند.



مثال: به یاد دارید که در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی، برای محاسبه‌ی تعداد اعضای گروه B، آن دسته از اعضای A را که در B بودند، از گروه B حذف کردیم و گروه B_1 را ساختیم. این عمل همان تفاضل مجموعه A از مجموعه B بود و $B_1 = B - A$.

مثال:

$$\{a,b\}-\{b\}=\{a\}\ ,\qquad \{x,y,z\}-\{a,b\}=\{x,y,z\}\ ,\qquad \{b\}-\{b\}=\varnothing$$

مثال: سه مجموعه A، B و C را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$A=\{a,c,d,f,q\}\quad ,\quad B=\{a,f,t,w,z\}\quad ,\quad C=\{۱,۴,۷\}$$

چند نمونه از تفاضل این مجموعه‌ها به شکل زیر است :

$$A-B=\{c,d,q\}$$

$$B-A=\{t,w,z\}$$

$$A-C=\{a,c,d,f,q\}=A$$

مثال: اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ باشد که بر ۲ بخش‌پذیرند و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ باشد که بر ۴ بخش‌پذیرند، آن‌گاه $A-B$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ است که زوج هستند ولی بر ۴ بخش‌پذیر نیستند.

$$A-B=\{۲,۶,۱۰,۱۴,۱۸\}$$

مثال: اگر A مجموعه‌ی دانش‌آموزان دبیرستان شما و B مجموعه‌ی دانش‌آموزان دبیرستانی در ایران باشد، $A-B$ مجموعه‌ی تهی است و $B-A$ مجموعه‌ی همه دانش‌آموزان دبیرستانی خارج از مدرسه شما است.

مثال: اگر A مجموعه‌ی ایرانی‌هایی باشد که تحصیلات آن‌ها بالای دیپلم است و B مجموعه‌ی کارگران ایرانی باشد، $A-B$ مجموعه‌ی ایرانی‌های با تحصیلات بالای دیپلم است که کارگر نیستند و $B-A$ مجموعه‌ی کارگران ایرانی با تحصیلات دیپلم یا زیر دیپلم است.

مثال: $\mathbb{R}-Q$ مجموعه‌ی اعداد گنگ است. $\mathbb{R}-\{\}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مخالف صفر است.

توجه کنید $\mathbb{R}-\{\}$ را به‌صورت $\mathbb{R}-۰$ ننویسید.

مسائل

۱ــ مجموعه‌های زیر را درنظر بگیرید.

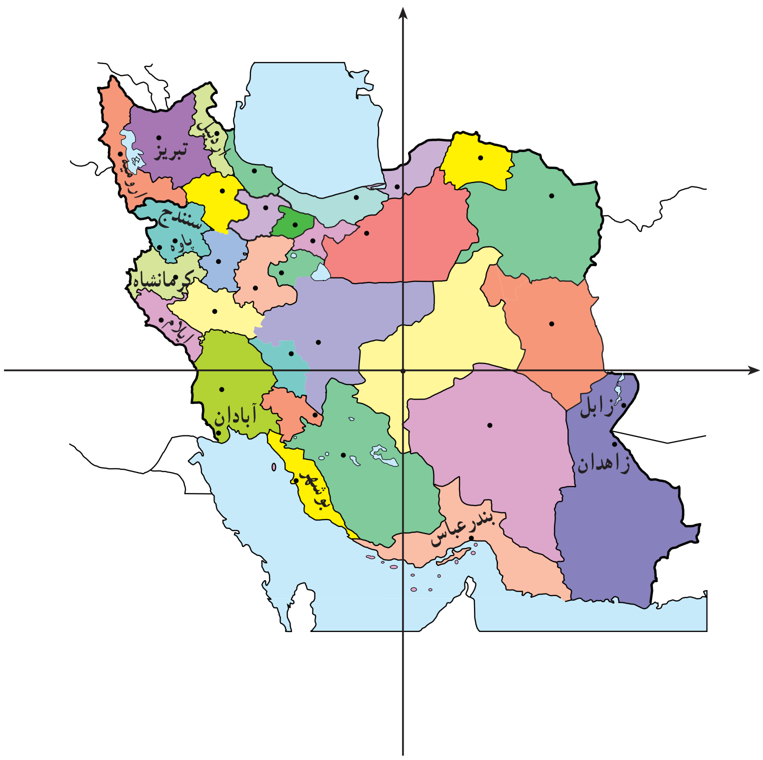
$X=\{$ ایلام، پاوه، اردبیل، سنندج، کرمانشاه، آبادان، زابل، زاهدان، تبریز، ارومیه، بوشهر، بندرعباس $\}$

مجموعه شهرهای شمال غربی ایران $=A$ مجموعه شهرهای جنوب شرقی ایران $=B$

مجموعه شهرهای جنوب غربی ایران $=C$ مجموعه شهرهای غربی ایران $=D$

مجموعه شهرهای جنوبی ایران $=E$

مجموعه‌های $A\cap X$، $B\cap X$، $C\cap X$، $D\cap X$ و $E\cap X$ را با اعضای آن‌ها مشخص کنید.

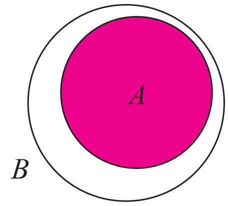


۲ــ اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶\}$ حاصل هریک از عبارات زیر را به‌دست آورید.

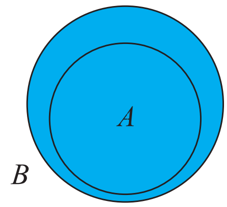
الف) $A\cup B$ ب) $A\cap B$ ج) $A-B$ د) $B-A$

هـ) $(A\cup B)-(A\cap B)$ و) $[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)$

۳ــ هریک از مجموعه‌های داده شده در سمت چپ را در صورت وجود نمودار نظیر برای آن، به نمودار نظیرش وصل کنید.

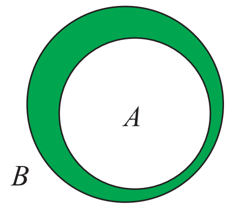


$A\cap B$



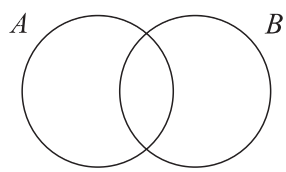
$A\cup B$

$A-B$

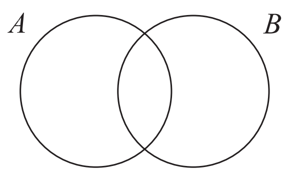


$B-A$

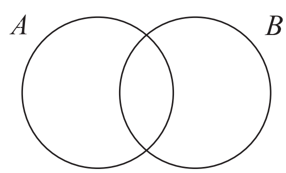
۴ــ مجموعه‌های داده شده را با هاشور زدن مشخص کنید.



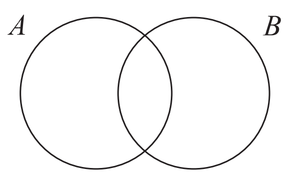
$A-B$



$(A-B)\cup(B-A)$



$(A\cup B)-A$



$A-(A\cap B)$

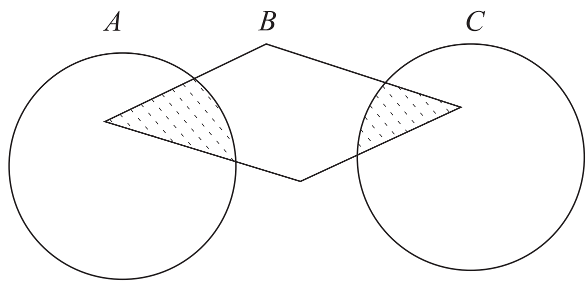
۵ــ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، قسمت‌های هاشور خورده‌ی شکل را نشان می‌دهد؟

☐ $A \cap B \cap C$

☐ $(A-B) \cup (C-B)$

☐ $(A \cup C)-B$

☐ $B \cap (A \cup C)$

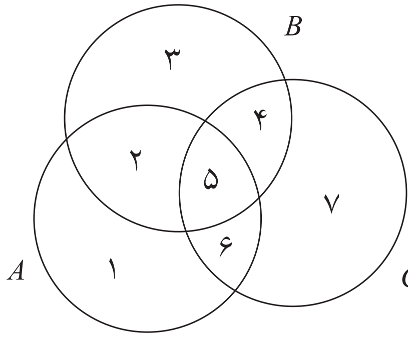


۶ــ با توجه به شکل بگویید کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نشان‌دهنده‌ی $(A-B) \cup (B \cap C)$ است.

☐ {۱,۶}

☐ {۱,۲,۳,۴,۶}

☐ {۱,۶,۵,۴}



۷ــ اگر داشته باشیم {۲,۷,۱۱,۱۳,۱۷}=A و {۳,۶,۱۱,۱۳,۱۷}=B ، مجموعه‌ی $A-B$ را بنویسید.

دانش‌آموزی این مسئله را چنین حل کرده است :

A−B={۲,۷,~~۱~~۱,~~۱~~۳,~~۱~~۷}−{۳,۶,~~۱~~۱,~~۱~~۳,~~۱~~۷}={۲,۳,۶,۷}

در حل این مسئله چه اشتباهی رخ داده است؟ پاسخ درست چیست؟

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

$\{a\}$ یک عضو و $\{۱,۵\}$ دو عضو دارد. مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی ۹ عضو دارد. مجموعه حروف الفبای فارسی ۳۲ عضو دارد. اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد و عمل شمارش آن‌ها سرانجام به انتها برسد، گوییم آن مجموعه متناهی است ؛ در غیر این‌صورت گوییم آن مجموعه نامتناهی است.

مثال: مجموعه‌ی سیارات منظومه‌ی شمسی متناهی است و تعداد اعضای آن ۸ است.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج کمتر از ۹ متناهی است و تعداد اعضای آن ۴ است.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی زوج متناهی نیست.

مجموعه‌ی تهی نیز متناهی محسوب می‌شود و تعداد اعضای آن صفر است. برخی مجموعه‌ها، اگرچه متناهی هستند، ولی تعداد اعضای آن‌ها را نمی‌دانیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی مورچگان کره‌ی زمین، یا مجموعه‌ی اتم‌های موجود در جو متناهی هستند، اما مجموعه‌های بزرگی هستند و تعداد اعضای آن‌ها را نمی‌دانیم.

توجه داشته باشید که ملاک متناهی بودن یک مجموعه توانایی عملی ما برای شمارش تعداد اعضای آن‌ها نیست. برای تشخیص متناهی بودن یک مجموعه کافی است بدانیم که اگر امکان شمارش اعضای آن مجموعه را داشته باشیم و به اندازه‌ی کافی وقت صرف کنیم، می‌توانیم کل اعضای آن مجموعه را شمارش کنیم. مثلاً اگر امکان شمارش مورچه‌های کره‌ی زمین را داشته باشیم، پس از صرف قرن‌ها، حتماً تمام مورچه‌ها را می‌توانیم بشماریم.

مجموعه‌های نامتناهی مجموعه‌هایی هستند که اگر یکی یکی اعضای آن‌ها را از مجموعه خارج کنیم، این عمل هیچ‌گاه به آخر نمی‌رسد. به‌عنوان مثال، $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند. مثلاً، اگر از مجموعه $\mathbb{N}$ یکی یکی اعضای آن را خارج کنیم، هر چه‌قدر هم که وقت صرف کنیم، نهایتاً تعداد محدودی از اعضای $\mathbb{N}$ را خارج کرده‌ایم و هنوز تعداد بسیار دیگری از اعضای $\mathbb{N}$ باقی می‌مانند.

تمرین در کلاس

۱ــ اگر n یک عدد طبیعی و A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از n باشد، A متناهی است یا نامتناهی؟ دلیل خود را بیان کنید.

۲ــ اگر A مجموعه‌ای متناهی و $B \subset A$، آیا B متناهی است یا نامتناهی؟ دلیل خود را بیان کنید.

۳ــ مجموعه اعداد گویای بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ متناهی است و یا نامتناهی؟ دلیل خود را بیان کنید.

مشخص کردن مجموعه‌ها

برای مشخص کردن یک مجموعه باید عضوهای آن مجموعه را معرفی کنیم. درصورتی که تعداد عضوهای یک مجموعه کم باشد، می‌توان اعضای آن مجموعه را یکی یکی معرفی کرد. این عمل با نوشتن اعضای آن مجموعه بین $\{\}$ انجام می‌شود. مثلاً، مجموعه‌های زیر با همین روش معرفی شده‌اند :

$$A=\{a,b,c\} \quad و \quad B=\{\text{رودکی، سعدی، مولوی، فردوسی}\} \quad و \quad C=\{۰,-۴,۸,\sqrt{۲۳}\}$$

اما اگر یک مجموعه نامتناهی باشد، یا تعداد اعضای مجموعه‌ای بسیار زیاد باشد، نمی‌توان از روش بالا استفاده کرد. در این صورت یک روش دیگر برای مشخص کردن اعضای یک مجموعه، پیدا کردن یک ویژگی مشترک بین اعضای آن مجموعه است تا از طریق آن، اعضای آن مجموعه مشخص شوند.

برای مثال، برای مشخص کردن مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی، می‌توانیم آن‌ها را مجموعه‌ای از اعداد طبیعی درنظر بگیریم که از ۱۰۰ کوچک‌تر و از ۹ بزرگ‌ترند. اگر این مجموعه را E بنامیم این مطلب را به دو صورت زیر می‌توانیم بنویسیم :

$$E=\{x\in\mathbb{N}|x>۹ \text{ و } x<۱۰۰\}=\{x|۹<x<۱۰۰ \text{ و } x\in\mathbb{N}\}$$

جمله‌ی بالا به این صورت خوانده می‌شود : «E مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است که از ۹ بزرگ‌تر و از ۱۰۰ کوچک‌ترند.»

مثال: مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت را می‌توانیم به‌صورت $\{x\in\mathbb{R}|۰<x\}$ بنویسیم.

مثال: اگر مجموعه‌ی اعداد گویایی را که قدرمطلق آن‌ها از ۵ کم‌تر است با D نشان دهیم، داریم :

$$D=\{r\in Q||r|<۵\}$$

یک روش دیگر برای مشخص کردن مجموعه‌ها، معرفی شکل کلی عضوهای آن مجموعه است. برای مثال، هر عدد طبیعی زوج به شکل $۲k$ است، که k یک عدد طبیعی است. با این روش مجموعه اعداد طبیعی زوج را به شکل زیر می‌نویسیم :

$$\{۲k|k\in\mathbb{N}\}$$

عبارت بالا به‌صورت «مجموعه‌ی اعداد به‌شکل $۲k$ که k در $\mathbb{N}$ قرار دارد» خوانده می‌شود.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد عبارت است از $\{۲k-۱|k\in\mathbb{N}\}=\{x|x=۲k-۱ \ , \ k\in\mathbb{N}\}$.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجذور کامل عبارت است از $\{n^۲|n\in\mathbb{N}\}$.

مسائل

۱ــ متناهی بودن یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A=\{۴n | n\in\mathbb{N}\}$.

ب) مجموعه اعداد طبیعی ۱۰۰ رقمی.

ج) مجموعه اعداد اول.

د) مجموعه اعداد اعشاری بین ۰/۱ و ۰/۳ .

هـ) مجموعه اعداد صحیح بین ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰− .

۲ــ هریک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

الف) $A=\left\{\frac{۱}{x} | x\in\mathbb{N}, x<۵\right\}$

ب) $B=\{۴x | x\in\mathbb{Z}, -۲<x<۲\}$

ج) $C=\left\{\frac{x^۲}{۱+x^۲} | x\in\mathbb{Z}, -۱<x<۳\right\}$

۳ــ هریک از مجموعه‌های زیر را با نماد (علائم) ریاضی بنویسید.

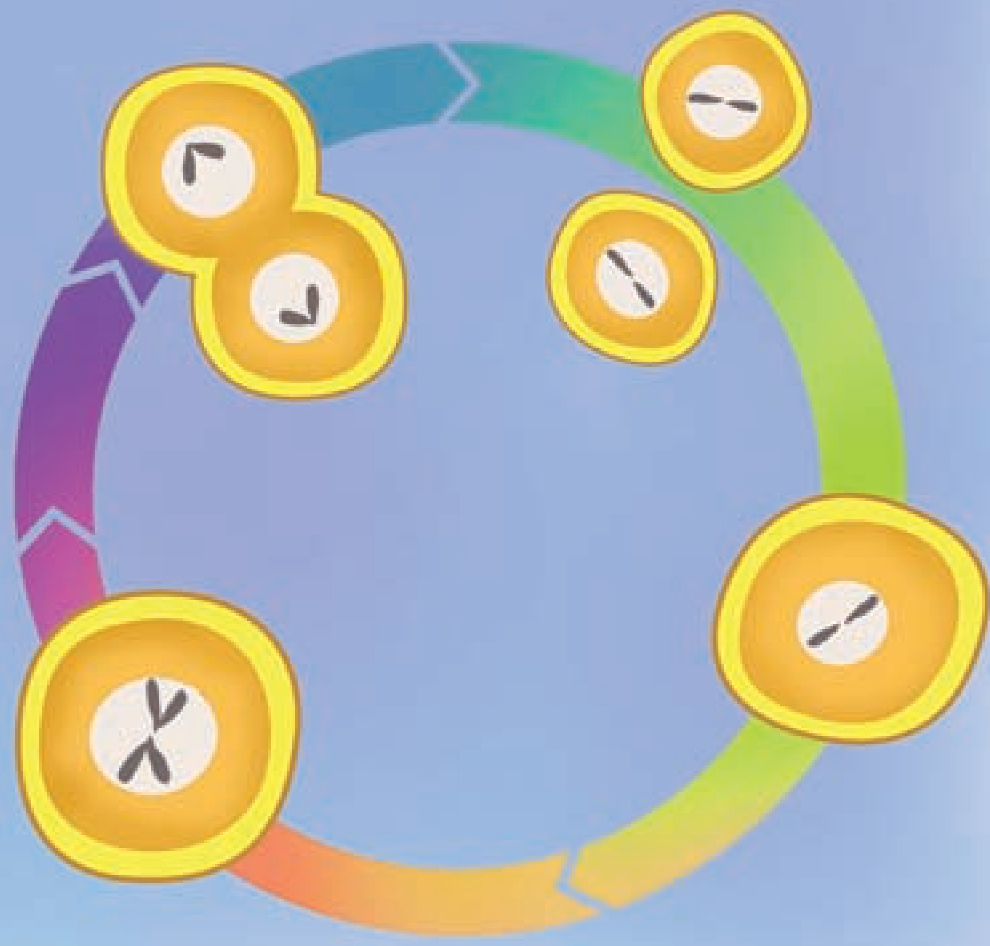
الف) $A=\{۲,۴,۸,۱۶,۳۲,...\}$ ب) $B=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸\}$

۴ــ هر یک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید و با نوشتن اعضای آن، آن‌ها را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد صحیحی که دو برابر آن‌ها بزرگ‌تر از ۴− و کوچک‌تر از ۵ است.

ب) مجموعه اعداد صحیحی که قدرمطلق آن‌ها برابر ۲ است.

۳
توان رسانی و ریشه گیری



سلول ها با تقسیمات متوالی خود، جانداران را شکل می دهند. یک جاندار کوچک از میلیاردها سلول تشکیل شده است.

فکر می کنید چه قدر طول می کشد تا از یک سلول یک جاندار کوچک به وجود آید؟

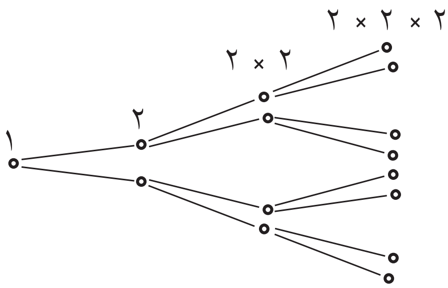
توان رسانی و قواعد آن

شما با توان و به توان رساندن اعداد در دوره‌ی راهنمایی آشنا شده‌اید. در این بخش، علاوه بر یادآوری مطالب قبلی با نکات جدیدی در توان، آشنا خواهید شد.

فعالیت

در علوم و زیست‌شناسی خوانده‌اید که رشد موجودات تک سلولی به گونه‌ای است که در یک واحد زمانی هر موجود تک سلولی به دو سلول تقسیم می‌شود و این تقسیم‌شدن ادامه پیدا می‌کند. شکل و جدول زیر با شروع از یک تک سلول، تعداد این سلول‌ها را پس از چند واحد زمانی نشان می‌دهد.

واحد زمانی	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد	۱	۲	۴	?	?



۱ــ جدول بالا را تکمیل کنید.

۲ ــ پس از ۷ واحد زمانی چند موجود تک سلولی تولید می‌شود؟ این تعداد را به صورت عدد توان‌دار نشان دهید.

۳ــ پس از چند واحد زمانی تعداد موجودات تک سلولی به ۳۲ عدد می‌رسد؟ روش یافتن جواب خود را توضیح دهید.

اگر بخواهیم عددی را چند بار در خود ضرب کنیم، برای خلاصه‌نویسی این عمل ضرب، از نماد توان استفاده می‌کنیم. برای مثال :

$$۳\times۳\times۳\times۳\times۳=۳^{۵}$$

$$۱/۲\times۱/۲\times۱/۲\times۱/۲=(۱/۲)^{۴}$$

$$\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}=(\sqrt{۵})^{۳}$$

اگر a یک عدد حقیقی و $n>۱$ یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$a^n=\overbrace{a\times\ldots\times a}^{n\text{ تا}}$$

بنا به تعریف $a^{1}=a$.

قسمت (۳) فعالیت صفحه‌ی قبل نشان می‌دهد که نمایش اعداد به صورت توانی علاوه بر ساده‌نویسی مزایای دیگری هم در حل مسائل دارد. در نمایش توانی اعداد، عددی که در خودش ضرب می‌شود را **پایه** و تعداد دفعاتی که آن عدد در عمل ضرب نوشته می‌شود را **توان** می‌نامند.

فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید.

$$۵^{۶}=۵\times ۵\times ۵\times ۵\times ۵\times ۵=(۵\times ۵\times ۵\times ۵\times ۵)\times ۵=۵^{۵}\times ۵^{۱}$$

$$۵^{۶}=(۵\times ۵\times ۵\times ۵)\times (۵\times ۵)=۵^{۴}\times ۵^{۲}$$

۱ــ با توجه به تساوی‌های بالا به جای نقطه‌چین عدد مناسب بنویسید.

$$۵^{۶}=۵^{۵}\times ...=۵^{۴}\times ...=۵^{۳}\times ...=۵^{۲}\times ...=۵^{۱}\times ...$$

۲ــ تساوی‌های بالا را برای عدد $۷^{۴}$ بنویسید.

۳ــ در زیر، به جای نقطه‌چین مقدار مناسب قرار دهید.

$$۸^{۵}=۸^{۳}\times ۸^{۲}=۸^{۴}\times ...=...\times ۸^{۲}=...\times ۸^{۱}$$

$$...=۳^{۴}\times ...=۳^{۵}\times ۳^{۳}=۳^{۲}\times ...=...\times ۳^{۱}$$

$$...=(\frac{۲}{۵})^{۲}\times (\frac{۲}{۵})^{۸}=(\frac{۲}{۵})^{۳}\times ...=(\frac{۲}{۵})^{۴}\times ...=(۰/۴)^{۵}\times ...$$

$$a^{۷}=a^{۶}\times ...=...\times a^{۳}=a^{۵}\times ...=...\times a^{۴}$$

$$...=b^{۴}\times b^{۵}=b^{۲}\times ...=...\times b^{۶}=...\times b^{۱}$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که اگر n و m دو عدد طبیعی و a یک عدد حقیقی باشد داریم :

$$\boxed{a^{n+m}=a^{n}\times a^{m}}$$

توجه کنید

در حالت کلی $a^{n}+a^{m}\neq a^{n+m}$

تمرین در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $\overbrace{۴\times ۴\times \cdots \times ۴}^{۵۰}$ ب) $۲^{۶}\times ۲^{۷}$ ج) ۹×۳^{۴}

د) $(\frac{۱}{۲})^{۳}\times (۰/۵)^{۴}$ هـ) $۳^{۲}\times ۳^{۴}\times ۳^{۵}=(۳^{۲}\times ۳^{۴})\times ۳^{۵}$

و) $a^{۲}\times a^{۳}\times a^{۴}$ ز) $a^{m}\times a^{n}\times a^{k}$

اگر یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بنویسیم، گوییم آن عدد را تجزیه کرده‌ایم. برای مثال، **۲۴** را می‌توانیم به شکل‌های زیر تجزیه کنیم :

$$۲۴ = ۳ \times ۸ = ۶ \times ۴ = ۱۲ \times ۲ = ۳ \times ۲^{۳}$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$۴^{۵} \div ۴^{۲} = \frac{۴^{۵}}{۴^{۲}} = \frac{۴^{۳} \times ۴^{۲}}{۴^{۲}} = ۴^{۳} = ۴^{۵-۲}$$

$$۹^{۱۲} \div ۹^{۷} = \frac{۹^{۱۲}}{۹^{۷}} = \frac{۹^{۵} \times ۹^{۷}}{۹^{۷}} = ۹^{۵} = ۹^{۱۲-۷}$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. برای یک عدد مخالف صفر a و دو عدد طبیعی m و n که $m > n$ ، در تقسیم a^m بر a^n داریم :

$$\boxed{a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$۳۰^{۳} = (۶ \times ۵)^{۳} = (۶ \times ۵) \times (۶ \times ۵) \times (۶ \times ۵) = (۶ \times ۶ \times ۶) \times (۵ \times ۵ \times ۵) = ۶^{۳} \times ۵^{۳}$$

$$۳۰^{۳} = (۱۰ \times ۳)^{۳} = (۱۰ \times ۳) \times (۱۰ \times ۳) \times (۱۰ \times ۳) = (۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰) \times (۳ \times ۳ \times ۳)$$
$$= ۱۰^{۳} \times ۳^{۳}$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد داریم :

$$\boxed{(ab)^n = a^n \times b^n}$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$۱۲^{۳} \div ۴^{۳} = \frac{۱۲^{۳}}{۴^{۳}} = \frac{۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲}{۴ \times ۴ \times ۴} = \frac{۱۲}{۴} \times \frac{۱۲}{۴} \times \frac{۱۲}{۴} = (\frac{۱۲}{۴})^{۳}$$

$$۲۵^{۴} \div ۱۶^{۴} = \frac{۲۵^{۴}}{۱۶^{۴}} = \frac{۲۵ \times ۲۵ \times ۲۵ \times ۲۵}{۱۶ \times ۱۶ \times ۱۶ \times ۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \times \frac{۲۵}{۱۶} \times \frac{۲۵}{۱۶} \times \frac{۲۵}{۱۶} = (\frac{۲۵}{۱۶})^{۴}$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. برای دو عدد a و b (b مخالف صفر است) و عدد طبیعی n، در تقسیم a^n بر b^n داریم :

$$\boxed{a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n}$$

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$۱)\ ۶^{۱۵} \div ۶^{۸}$ $\quad$ $۲)\ (\frac{۱}{۴})^{۷} \div (۰/۲۵)^{۳}$ $\quad$ $۳)\ a^{۵} \div a^{۳}$

$۴)\ ۴^{۳} \times ۵^{۳}$ $\quad$ $۵)\ (\frac{۱}{۲})^{۴} \times ۵^{۴}$ $\quad$ $۶)\ ۸a^{۳}$

$۷)\ ۲۷ \times ۵^{۳}$ $\quad$ $۸)\ ۶^{۳} \div ۲^{۳}$ $\quad$ $۹)\ ۲^{۷} \div (\frac{۱}{۳})^{۷}$

$۱۰)\ \frac{۴^{۵} \times ۲^{۵}}{۸^{۲}}$ $\quad$ $۱۱)\ \frac{۱۶a^{۴}}{۳^{۴}}$ $\quad$ $۱۲)\ a^{۳} \times \frac{۸b^{۳}}{۲۷}$

توجه کنید

در حالت کلی
$a^{۲} + b^{۲} \neq (a+b)^{۲}$
و
$a^{۲} - b^{۲} \neq (a-b)^{۲}$

۲ــ در هر یک از دو عبارت $۳^{۲} + ۴^{۲}$ و $(۳+۴)^{۲}$ مشخص کنید، آیا ابتدا عمل جمع انجام می‌شود یا عمل به توان رساندن.

۳ــ با به دست‌آوردن مقدارهای $۳^{۲} + ۴^{۲}$ و $(۳+۴)^{۲}$ مشخص کنید که این دو مقدار مساوی‌اند یا نه.

۴ــ دو سؤال بالا را برای دو عبارت $۳^{۲} - ۴^{۲}$ و $(۳-۴)^{۲}$ نیز جواب دهید.

فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$(۵^{۳})^{۲} = ۵^{۳} \times ۵^{۳} = ۵^{۳+۳} = ۵^{۲\times۳}$$

$$(۱۴^{۹})^{۴} = ۱۴^{۹} \times ۱۴^{۹} \times ۱۴^{۹} \times ۱۴^{۹} = ۱۴^{۹+۹+۹+۹} = ۱۴^{۴\times۹}$$

۱ــ با توجه به تساوی‌های بالا، در زیر، به جای نقطه چین‌ها مقدار مناسب قرار دهید.

$$(۲^{۳})^{۴} = ۲^{۳} \times \ldots \times \ldots \times \ldots = ۲^{۳+\ldots+\ldots+\ldots} = ۲^{۳\times\ldots}$$

$$(a^{۴})^{۳} = a^{۴} \times \ldots \times \ldots = a^{۴+\ldots+\ldots} = a^{\ldots\times۳}$$

$$(a^{n})^{۴} = a^{n} \times \ldots \times \ldots \times \ldots = a^{n+\ldots+\ldots+\ldots} = a^{\ldots\times\ldots}$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود برای عدد a و دو عدد طبیعی n و m، اگر a^{n} را به توان m برسانیم داریم :

$$\boxed{(a^{n})^{m} = a^{nm}}$$

تمرین در کلاس

۱ــ عدد $۲۷^{۵}$ را به صورت یک عدد توان‌دار با پایه‌ی ۳ بنویسید.

۲ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $۲^{۶} \times (۲^{۳})^{۴}$ ب) $۳^{۵} \times ۲۷^{۲}$ ج) $(a^{۵})^{۳} \times (b^{۳})^{۵}$

۳ــ حاصل عبارت‌های $(۲^{۲})^{۳}$ و $۲^{(۲^{۳})}$ را به دست‌آورید و با هم مقایسه کنید.

توجه کنید

در حالت کلی

$(a^{n})^{m} \neq a^{(n^{m})}$

فعالیت

۱ــ اعداد $۲^{۲}$ ، $۲^{۳}$ ، $۲^{۴}$ و $۲^{۵}$ را حساب کنید و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۲ــ هرچه توان‌های بالاتری از ۲ را حساب کنیم، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود یا کوچک‌تر؟ دلیل خود را بیان کنید.

۳ــ اعداد $۲^{۲}$ ، $۳^{۲}$ و $۴^{۲}$ را حساب کنید و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۴ــ برای هر عدد طبیعی n، حدس می‌زنید کدام‌یک از دو عدد ۲^{n} و ۳^{n} بزرگ‌ترند؟ حدس خود را به‌ازای $n=۴$ و $n=۵$ بیازمایید.

به‌طور کلی اگر a عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، هرچه توان‌های بالاتری از آن را حساب کنیم، حاصل بزرگ‌تر می‌شود. برای مثال :

$$a < a^{۲} < a^{۳} < a^{۴} \ , \ a^{n} < a^{n+۱}$$

هم‌چنین، اگر a و b دو عدد مثبت باشند که $a < b$ ، با محاسبه توان‌های یکسان از a و b داریم

$$a^{۲} < b^{۲} \ , \ a^{۳} < b^{۳} \ , \ a^{۴} < b^{۴} \ , \ a^{n} < b^{n}$$

مثال: اعداد $۸^{۴}$ و $۲^{۱۱}$ و $۱۶^{۳}$ را با هم مقایسه کنید.

تمام این اعداد را می‌توانیم به صورت توانی از ۲ بنویسیم :

$$۱۶^{۳} = (۲^{۴})^{۳} = ۲^{۱۲} \ , \ ۸^{۴} = (۲^{۳})^{۴} = ۲^{۱۲}$$

بنابراین :

$$۱۶^{۳} = ۸^{۴} = ۲^{۱۲} > ۲^{۱۱}$$

مثال: از دو عدد $۸^{۴}$ و $۸۱^{۳}$ کدام یک بزرگ‌تر است؟

این دو عدد را می‌توان به صورت دو عدد توان‌دار با توان‌های یکسان نوشت :

$$۸۱^{۳} = (۳^{۴})^{۳} = ۳^{۱۲} \ ، ۸^{۴} = (۲^{۳})^{۴} = ۲^{۱۲}$$

بنابراین :

$$۸^{۴} = ۲^{۱۲} < ۳^{۱۲} = ۸۱^{۳}$$

مسائل

۱ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $(-۴)\times(-۴)\times(-۴)=$

ب) $(-۰/۰۳)\times(-۰/۰۳)\times(-۰/۰۳)=$

ج) $\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}=$

د) $\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=$

هـ) $\frac{a}{۲}\times\frac{a}{۲}\times\frac{a}{۲}\times\frac{a}{۲}\times\frac{a}{۲}=$

و) $(a+b)(a+b)(a+b)=$

ز) $(a^۲+۱)(a^۲+۱)(a^۲+۱)(a^۲+۱)=$

۲ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $(\frac{۱}{۲})^۷\times(\frac{۷}{۳})^۷\times(\frac{۱}{۴})^۷=$

ب) $۰/۰۴\times۵^۲=$

ج) $x^۲x^۳x^۵=$

د) $x^۴y^۴z^۴=$

هـ) $۲/۵^۷\div۵^۷=$

و) $۳^۳\times۳^۲\times۴^۵\times۱۲^۴=$

ز) $a^۶\div۲^۶=$

ح) $(۲^۳)^۵\times(۳^۵)^۳\times۶^{۱۵}=$

ط) $\frac{۳^۲\times۴^۲\times۱۲^۵}{۲^۴\times۶^۴}=$

۳ــ عدد $۸^۶$ را به صورت حاصل‌ضرب‌های زیر بنویسید.

الف) دو عدد توان دار مساوی

ب) دو عدد توان‌دار با توان ۶

ج) دو عدد توان‌دار که یکی ۶۴ برابر دیگری باشد.

د) سه عدد توان‌دار مساوی با پایه ۸

هـ) سه عدد توان‌دار مساوی با توان ۲

۴ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $۳\times۳^۲+۳^۳+۳^۳=$

ب) $\frac{۳^۵\times(۴^۶+۴^۶+۴^۶)}{۶^۶}=$

ج) $۸^۳\times۹^۲\times۲۵^۵\times(۳^۶+۳^۶)=$

د) $a^۴\times b^۴\times(ab)^۵=$

هـ) $\frac{x^۵y^۴}{x^۲yz^۳}=$ $\qquad (x,y,z\neq۰)$

بیندیشیم

اگر a عددی مثبت و $a<۱$، با مقایسه‌ی توان‌های a با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۵ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۲+۳\times ۴^{۲}=$

ب) $۲-۴\times (\frac{۱}{۲})^{۳}=$

ج) $\frac{۱-(\frac{۱}{۲^{۴}})\times ۳\times ۴^{۲}}{۲-(\frac{۱}{۳})\times ۶^{۲}}=$

۶ــ اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

$$۲۵^{۳},\ ۲^{۱۲},\ ۳۶^{۳}$$

در باب چهل و چهارم از کتاب مفتاح‌المعاملات مسئله‌ی زیر مطرح شده است :

سؤال: به شخصی گفتند که وارد این بوستان شو که در آن هفت دهلیز متوالی است و از درختان آن به تعدادی میوه بچین که هنگام بیرون آمدن در کنار هر دهلیز نصف میوه‌ها را بگذاری و هنگامی که از آخرین دهلیزخارج شدی تنها یک میوه برایت بماند. حال چند میوه باید بچیند؟

توان صفر و توان منفی

فعالیت

۱ــ جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان‌دار	$۳^{۴}$	$۳^{۳}$	$۳^{۲}$	$۳^{۱}$
حاصل	۸۱			

۲ــ چه رابطه‌ای بین اعداد سطر دوم جدول می‌یابید؟

۳ــ سطر اول را ادامه دهید و عدد بعدی را $۳^{۰}$ قرار دهید. با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه عددی را برای $۳^{۰}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۴ــ جدول بالا را برای پایه‌های ۲ و ۶ با همان توان‌ها نیز تشکیل دهید. چه عددی را برای $۲^{۰}$ و $۶^{۰}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۵ــ برای عدد مخالف صفر a، جدول بالا را برای توان‌های a بنویسید. چه عددی را برای $a^{۰}$ پیشنهاد می‌کنید؟

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که مناسب است برای هر عدد مخالف صفر a، تعریف کنیم :

$$\boxed{a^{۰}=۱}$$

فعالیت

۱ــ جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان‌دار	$۳^۳$	$۳^۲$	$۳^۱$	$۳^۰$
حاصل	۲۷			

۲ــ چه رابطه‌ای بین اعداد سطر دوم جدول می‌یابید؟

۳ــ سطر اول را ادامه دهید و عدد توان‌دار بعدی را $۳^{-۱}$ قرار دهید. اکنون با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه عددی را برای $۳^{-۱}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۴ــ جدول بالا را برای پایه‌های ۲ و ۶ با همان توان‌ها نیز تشکیل دهید. چه عددی را برای $۲^{-۱}$ و $۶^{-۱}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۵ــ برای عدد مخالف صفر a، جدول بالا را برای توان‌های a بنویسید. چه عددی را برای $a^{-۱}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۶ــ سطر اول را ادامه دهید و اعداد بعدی را $a^{-۲}$ و $a^{-۳}$ قرار دهید. با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه اعدادی را برای $a^{-۲}$ و $a^{-۳}$ پیشنهاد می‌کنید؟

از این فعالیت نتیجه می‌شود که مناسب است برای هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند a، تعریف کنیم:

$a^{-۱}=\frac{۱}{a}$ و $a^{-۲}=\frac{۱}{a^۲}$. در حالت کلی برای یک عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{a^{-n}=\frac{۱}{a^n}}$$

مثال:

$$۴^{-۱}=\frac{۱}{۴}\ ,\ (۰/۱)^{-۷}=\frac{۱}{(۰/۱)^۷}\ ,\ (۱/۲)^۳=\frac{۱}{(۱/۲)^{-۳}}\ ,\ (-۵)^{-۲۱}=\frac{۱}{(-۵)^{۲۱}}$$

تمرین در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت با توان منفی بنویسید.

الف) ۰/۰۰۱ ب) $\frac{۱}{۴^۵}$ ج) ۰/۲۵ د) $\frac{۱}{b}$ هـ) $\frac{۱}{b^۳}$

۲ــ عبارت‌های زیر را با توان مثبت بنویسید.

الف) $۵^{-۲}$ ب) $(\sqrt{۷})^{-۵}$ ج) $(\frac{۱}{۲})^{-۳}$ د) $۲\pi^{-۳}$

۳ــ عبارت‌های زیر را به صورتی بنویسید که کسری نباشند.

الف) $\frac{۱}{a^{۳}}$ ب) $\frac{۱}{b^{-۲}}$ ج) $\frac{-۱}{b^{۲}}$ د) $\frac{\pi^{۲}}{\pi^{-۳}}$

۴ــ حاصل اعداد $۴^{-۲}$، $(۴^{-۱})^{۲}$ و $(۴^{۲})^{-۱}$ را بنویسید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ اعداد $(۰/۱۲۵)^{۳}$، $(۰/۲۵)^{۴}$ و $(۰/۵)^{۳}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

با چنین تعریفی از توان‌های مثبت و منفی اعداد حقیقی مخالف صفر، می‌توان نشان داد که اگر a و b دو عدد مخالف صفر و p و q دو عدد صحیح باشند، خواص مهم توان رسانی به شکل زیر برقرارند:

$\frac{a^{p}}{a^{q}}=a^{p-q}$	$a^{p+q}=a^{p}\times a^{q}$
$(\frac{a}{b})^{p}=\frac{a^{p}}{b^{p}}$	$(ab)^{p}=a^{p}\times b^{p}$
$a^{-p}=\frac{۱}{a^{p}}$	$(a^{p})^{q}=a^{pq}$

مثال:

$$(۵\times۷)^{-۴}=۵^{-۴}\times۷^{-۴}$$

$$(۶^{۳})^{-۲}=۶^{-۲\times۳}$$

$$\frac{۴^{-۲}}{۴^{-۷}}=۴^{-۲-(-۷)}=۴^{۵}$$

$$(\frac{۲}{۳})^{-۷}=\frac{۲^{-۷}}{۳^{-۷}}$$

$$۷^{-۳}=\frac{۱}{۷^{۳}}$$

مسائل

۱ــ هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عبارت با توان منفی بنویسید.

الف) ۰/۰۰۰۰۱ ب) $\frac{۱}{bc}$ ج) ۰/۰۰۸ د) $\frac{۱}{۳^{۱۱}}$

۲ــ هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت با توان مثبت بنویسید.

الف) $۳^{-۵}$ ب) $(\frac{۱}{۵})^{-۴}$ ج) $(\frac{۲}{۳})^{-۳}\times(\frac{۲}{۳})^{-۴}$

د) $a^{-۲}\times b^{-۲}$ هـ) $a^{-۳}\times b^{۳}\times(c^{۳})^{-۲}$

۳ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۲^{-۳}+۳^{-۲}$ ب) $(۴^{۲})^{-۱}+(۲^{-۳})^{۲}$ ج) $۲+۳\times ۴^{-۱}-۲\times ۵^{-۱}$

۴ــ با استفاده از تعریف توان‌های منفی، ثابت کنید که برای هر عدد حقیقی مخالف صفر a و هر عدد طبیعی n داریم :

$$a^{-n}=(a^{-۱})^{n}=(a^{n})^{-۱}$$

نماد علمی

آیا می‌دانید دور کره‌ی زمین در استوا چند متر است؟ اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهدکه این طول تقریباً ۴۰,۰۰۰,۰۰۰ متر است. اگر طول هر مورچه یک میلی‌متر باشد، چند مورچه لازم است تا با هم دور کره‌ی زمین در استوا را بپوشانند؟ چون هر متر ۱۰۰۰ میلی‌متر است، پس ۴۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مورچه برای این کار لازم است. آیا می‌توانید این عدد را بخوانید؟ این عدد چند صفر دارد؟ در عمل به عددهای بزرگ‌تر از این هم برخورد می‌کنیم. مثلاً قطر کهکشان راه شیری چند متر است؟ آیا می‌توان چنین اعدادی را روی کاغذ نوشت؟ روشن است که این شیوه نوشتن برای اعداد بزرگ مناسب نیست. با این شیوه، نمی‌توان آن‌ها را روی کاغذ نوشت و اگر هم بنویسیم نمی‌توانیم متوجه میزان بزرگی آن‌ها شویم و محاسبه‌ای روی آن‌ها انجام دهیم.

یکی از کاربردهای توان اعداد، نوشتن اعداد بسیار بزرگ و اعداد بسیار کوچک به صورت توانی است[1]. مثلاً توان‌های مثبت ۱۰ را به صورت ۱۰، $۱۰^{۲}$، $۱۰^{۳}$، $۱۰^{۴}$ و ... حساب کنید. این اعداد رفته رفته بزرگ می‌شوند به گونه‌ای که حتی نمی‌توان آن‌ها را روی کاغذ نوشت. آیا می‌توانید عدد $۱۰^{۵۰۰۰}$ را در نمایش دهدهی آن روی کاغذ بنویسید؟ توان‌های منفی ۱۰ را به صورت $۱۰^{-۱}$، $۱۰^{-۲}$، $۱۰^{-۳}$ ، $۱۰^{-۴}$و ... حساب کنید. این اعداد رفته‌رفته کوچک می‌شوند و میزان کوچکی آن‌ها به قدری است که نمی‌توان نمایش اعشاری آن‌ها را روی کاغذ نوشت. استفاده از توان به ما کمک می‌کند که اعداد بسیار بزرگ و بسیار کوچکی را که با آن‌ها برخورد می‌کنیم به راحتی بنویسیم و روی آن‌ها محاسبه انجام دهیم.

یکی از شیوه‌های نوشتن اعداد بزرگ، استفاده از توان‌های مثبت ۱۰ است. مثلاً، $۱۰^{۴۰}$ عدد بسیار بزرگی است و اگر بخواهیم با شیوه‌های معمولی آن را بنویسیم، می‌بایست چهل صفر جلوی ۱ بگذاریم. هیچ کس با یک نگاه نمی‌تواند تعداد این صفرها را بشمارد و مقدار واقعی این عدد را تشخیص دهد. اما، نمایش آن به صورت $۱۰^{۴۰}$، به خوبی اندازه‌ی این عدد را نشان می‌دهد و کار محاسباتی با آن را عملی می‌کند.

هر عدد مثبت اعشاری را می‌توان به شکل‌های گوناگونی به صورت ضرب یک عدد اعشاری در توان مثبتی از ۱۰، نوشت.

۱ــ این مبحث بیشتر در فیزیک، شیمی و نجوم کاربرد دارد و مربوط به نمایش اعداد است.

مثال:

$$۲۴۰۸۷/۶۴=۲۴۰۸/۷۶۴\times ۱۰^{۱}=۲۴۰/۸۷۶۴\times ۱۰^{۲}=۲۴/۰۸۷۶۴\times ۱۰^{۳}=۲/۴۰۸۷۶۴\times ۱۰^{۴}$$

$$۵۴۳۲\times ۱۰^{۱۲}=۵/۴۳۲\times ۱۰^{۱۵}$$

$$۱۰۲۳۴۵۶۰۰۰۰۰=۱/۰۲۳۴۵۶\times ۱۰^{۱۱}$$

$$۰/۰۶۷۲\times ۱۰^{۱۴}=۶/۷۲\times ۱۰^{۱۲}$$

اعداد سمت راست تساوی‌ها، همان نماد علمی اعداد سمت چپ تساوی‌ها هستند.

از طریق نماد علمی، به خوبی می‌توان میزان بزرگی آن عدد را فهمید و آن را با دیگر اعداد مقایسه کرد.

مثال: جرم زمین تقریباً $۶/۰\times ۱۰^{۲۴}$ و جرم ماه تقریباً $۷/۳۴\times ۱۰^{۲۲}$ و جرم خورشید تقریباً $۲/۰\times ۱۰^{۳۰}$ کیلوگرم است. جرم زمین چند برابر جرم ماه است؟ جرم خورشید چند برابر جرم زمین است؟

$$\frac{\text{جرم زمین}}{\text{جرم ماه}}=\frac{۶/۰\times ۱۰^{۲۴}}{۷/۳۴\times ۱۰^{۲۲}}\simeq ۸/۱۷\times ۱۰$$

$$\frac{\text{جرم خورشید}}{\text{جرم زمین}}=\frac{۲/۰\times ۱۰^{۳۰}}{۶/۰\times ۱۰^{۲۴}}\simeq ۳/۳۳\times ۱۰^{۵}$$

مشکل نمایش معمولی اعداد بسیار بزرگ، برای اعداد بسیار کوچک هم وجود دارد. برای نمایش اعداد بسیار کوچک، می‌توان از توان‌های منفی ۱۰ استفاده کرد. به عنوان مثال، جرم یک ذره غبار تقریباً ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۶۷ کیلوگرم است. آیا میزان کوچکی این عدد را می‌توانید درک کنید؟ اعداد اعشاری بسیار کوچک را می‌توان به صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر در یک توان منفی از ۱۰ نمایش داد. برای مثال :

$$۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۶۷=۶/۷\times \frac{۱}{۱۰^{۹}}=۶/۷\times ۱۰^{-۹}$$

اگر یک عدد اعشاری مثبت را به صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر، در توان صحیحی از ۱۰ بنویسیم، این نمایش را نماد **علمی آن** عدد می‌نامند.

هر عدد اعشاری کوچکی را نیز می‌توان با این روش نوشت، مثلاً :

$$۰/۰۰۰۰۴۵۶۷=۴/۵۶۷\times ۱۰^{-۵}$$

$$۰/۰۰۰۱۰۲۳\times ۱۰^{-۷}=۱/۰۲۳\times ۱۰^{-۱۱}$$

$$۶۷۲\times ۱۰^{-۱۷}=۶/۷۲\times ۱۰^{-۱۵}$$

مثال: جرم یک الکترون تقریباً $۹/۱\times ۱۰^{-۲۸}$ کیلوگرم و جرم اتم هیدروژن تقریباً $۱/۷\times ۱۰^{-۲۴}$ کیلوگرم است. آیا می‌توانید میزان کوچکی این اعداد را تصور کنید؟ کدام یک جرم بیشتری دارد و جرم آن چند برابر دیگری است؟

در نماد علمی جرم اتم هیدروژن، توان ۱۰، عدد (۲۴−) و در نماد علمی جرم الکترون، توان ۱۰، عدد (۲۸−) است که نشان می‌دهد جرم این ذرات بسیار کوچک است. هر قدر توان منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ‌تر باشد، عدد کوچک‌تر است، پس جرم اتم هیدروژن بیشتر از جرم الکترون است. با تقسیم جرم اتم هیدروژن بر جرم الکترون، عددی به دست می‌آید که نشان می‌دهد جرم اتم هیدروژن چند برابر بیشتر است.

$$\frac{\text{جرم اتم هیدروژن}}{\text{جرم الکترون}}=\frac{۱/۷\times ۱۰^{-۲۴}}{۹/۱\times ۱۰^{-۲۸}}=\frac{۱/۷}{۹/۱}\times ۱۰^{-۲۴}\times\frac{۱}{۱۰^{-۲۸}}=\frac{۱/۷}{۹/۱}\times\frac{۱}{۱۰^{۲۴}}\times ۱۰^{۲۸}$$

$$=\frac{۱/۷}{۹/۱}\times ۱۰^{۴}\simeq ۰/۱۸۶۸\times ۱۰^{۴}=۱/۸۶۸\times ۱۰^{۳}$$

مسائل

۱ــ نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۲۶۴۷۸۹۱۴   ب) ۰/۰۰۰۴۸۹۲   ج) ۱۲×۱۵۰۰۰۰ د) $۲۰۰\times ۴۲۳+۲$

هـ) $۱۲/۸\times ۱۰^{۴}\times ۵^{۶}$ و) $\frac{۳۲\times ۱۱\times ۱۰^{۱۲}}{۴۴\times ۸۰}$ ز) $\frac{۱}{۲۰۰۰۰}$

۲ــ نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

الف) $۱/۴۳\times ۱۰^{۵}$ ب) $۲/۵۴۳\times ۱۰^{-۳}$

ج) $۱/۲۳\times ۱۰^{۶}$ د) $۰/۰۰۴۲۱\times ۱۰^{-۴}$

۳ــ جرم یک الکترون تقریباً $۹/۱\times ۱۰^{-۲۵}$ گرم است. جرم یک جسم **۲۵۴۹** تنی چند برابر جرم یک الکترون است؟ حاصل را به صورت نماد علمی بنویسید. (هر تن برابر ۱۰۰۰ کیلوگرم است.)

ریشه گیری

کشاورزی، یک قطعه زمین به شکل مربع دارد. او برای کاشت و کار در زمین خود در هر مترمربع ۵۰ گرم بذر مصرف کرده است. اگر این کشاورز برای کاشتن در همه‌ی زمین خود ۵ کیلوگرم بذر مصرف کرده باشد، محیط زمین او چقدر است؟

برای حل این مسئله ابتدا مساحت زمین را به دست می‌آوریم. مساحت زمین بر حسب متر مربع برابر است با $\frac{۵۰۰۰}{۵۰}=۱۰۰$. طول زمین عددی است که مربع آن ۱۰۰ می‌شود.

اگر طول ضلع مربعی x باشد، می‌دانیدکه مساحت آن $x^۲$ است. اگر مساحت مربعی ۱۰۰ متر مربع باشد، طول یک ضلع آن چند متر است؟ باید دنبال عدد مثبتی بگردیم که مربع آن ۱۰۰ باشد. این عدد ۱۰ است، زیرا $۱۰۰=۱۰^۲$.

پس محیط آن : $۴×۱۰=۴۰$ متر خواهد بود.

برای مثال می‌دانید $۹=۳^۲=(-۳)^۲$. هر دو عدد ۳ و (-۳) ریشه‌ی دوم ۹ نامیده می‌شوند. اما، بنا به تعریف $\sqrt{۹}$، آن ریشه‌ی دوم ۹ است که مثبت هم باشد، بنابراین $\sqrt{۹}=۳$.

فرض کنید a عددی مثبت باشد و $a^۲=b$، در این صورت $(-a)^۲=a^۲=b$ و a و $-a$ را **ریشه‌های دوم** b می‌نامند.

برای یک عدد حقیقی مثبت b، بنا به تعریف $\sqrt{b}$ آن ریشه‌ی دوم b است که مثبت هم باشد.

مثال:

$$\sqrt{۶۴}=۸\ ,\ \sqrt{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲}{۵}\ ,\ \sqrt{۰/۰۱}=۰/۱$$

ریشه‌ی دوم صفر، همان صفر است و $\sqrt{۰}=۰$.

توجه کنید

$$\sqrt{۹}=۳\ ,\ \sqrt{۹}\neq -۳\ ,\ -\sqrt{۹}=-۳$$

بیندیشیم

آیا همه‌ی اعداد ریشه‌ی دوم دارند؟ کدام اعداد ریشه‌ی دوم دارند؟

فعالیت

۱ــ درستی تساوی‌های زیر را با محاسبه‌ی طرفین تساوی توضیح دهید.

$$\sqrt{(-۳)^۲}=|-۳|\ ,\ \sqrt{۵^۲}=|۵|\ ,\ \sqrt{۴^۲}=\sqrt{(-۴)^۲}=|-۴|=|۴|$$

۲ــ درستی تساوی $\sqrt{a^۲}=|a|$ را به ازای چند مقدار مثبت یا منفی که برای a انتخاب می‌کنید بررسی کنید.

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که برای هر عدد a داریم:

$$\boxed{\sqrt{a^۲}=|a|}$$

مثال:

$$\sqrt{(-۶)^۲}=|-۶|=۶\ ,\ \sqrt{۶^۲}=|۶|=۶\ ,\ \sqrt{(-\pi)^۲}=|-\pi|=\pi$$

مثال: $\sqrt{c^۴}=c^۲$، زیرا $c^۲$ نامنفی است و $|c^۲|=c^۲$ و $(c^۲)^۲=c^۴$.

توجه داشته باشید که

> هر وقت عبارت $\sqrt{b}$ را به کار می‌بریم، فرض بر آن است که b عددی نامنفی است، زیرا فقط اعداد نامنفی ریشه‌ی دوم دارند.

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(-۶)^۲}\ ,\ \sqrt{b^۴c^۴}\ ,\ \sqrt{a^۸}$$

۲ــ با استفاده از تعریف $\sqrt{b}$ درستی تساوی $(\sqrt{b})^۲=b$ را توضیح دهید.

اگر اندازه‌ی حجم مکعبی را بدانید، اندازه‌ی طول ضلع آن را چگونه به دست می‌آورید؟
اگر طول ضلع مکعبی x باشد، می‌دانید که حجم آن $x^۳$ است. برای مثال، اگر حجم مکعبی ۶۴ باشد، برای یافتن طول ضلع آن، باید دنبال عددی بگردیم که توان سوم آن ۶۴ باشد. این عدد ۴ است، زیرا $۴^۳=۶۴$. بنا به تعریف ۴ را کعب یا ریشه‌ی سوم ۶۴ می‌نامند و با $\sqrt[۳]{۶۴}$ نشان می‌دهند، یعنی $\sqrt[۳]{۶۴}=۴$.

> به طور کلی، اگر a و b دو عدد باشند به طوری که $a^۳=b$، a را **ریشه‌ی سوم b** می‌نامند و آن را با $\sqrt[۳]{b}$ نشان می‌دهند.

توجه داشته باشید که هر عدد فقط یک ریشه‌ی سوم دارد.

مثال:

$$\sqrt[۳]{۲۷}=\sqrt[۳]{۳\times۳\times۳}=۳$$

$$\sqrt[۳]{\frac{۸}{۱۲۵}}=\sqrt[۳]{\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۵}}=\frac{۲}{۵}$$

$$\sqrt[۳]{-۰/۰۰۱}=\sqrt[۳]{(-۰/۱)\times(-۰/۱)\times(-۰/۱)}=-۰/۱$$

بیندیشیم

آیا همه‌ی اعداد ریشه‌ی سوم دارند؟
علامت ریشه‌ی سوم اعداد مثبت چیست؟
علامت ریشه‌ی سوم اعداد منفی چیست؟

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt[۳]{-۱۲۵}\ ,\ \sqrt[۳]{a^۳}\ ,\ \sqrt[۳]{b^۶}\ ,\ \sqrt[۳]{x^۴x^۵}$$

۲ــ با استفاده از تعریف $\sqrt[۳]{b}$ درستی تساوی $(\sqrt[۳]{b})^۳ = b$ را توضیح دهید.

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

فعالیت

۱ــ جدول زیر را کامل کنید.

a	۹	۲۵	$\frac{۱}{۴}$
b	۴	۴	۱۰۰
$\sqrt{a}\sqrt{b}$			
$\sqrt{ab}$			

۲ــ چه رابطه‌ای بین اعداد سطر سوم و چهارم می‌بینید؟

۳ــ با انتخاب چند عدد دیگر برای a و b که مربع یک عدد گویا هستند، درستی نتیجه‌ای را که گرفته‌اید بررسی کنید.

از فعالیت بالا می‌توان نتیجه گرفت که برای هر دو عدد نامنفی مانند a و b داریم :

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}}$$

توجه کنید که در تساوی بالا هر دو عدد a و b باید مثبت باشند. اگر a و b هر دو منفی باشند، سمت چپ تساوی معنا دارد، ولی سمت راست تساوی معنا ندارد.

به طور مشابه برای ریشه‌ی سوم‌گیری نیز برای هر دو عدد a و b، داریم :

$$\boxed{\sqrt[۳]{ab} = \sqrt[۳]{a}\sqrt[۳]{b}}$$

مثال:

$$\sqrt{۲}\times\sqrt{۳۲}=\sqrt{۲\times۳۲}=\sqrt{۶۴}=۸$$

$$\sqrt[۳]{-۹}\times\sqrt[۳]{۳}=\sqrt[۳]{-۹\times۳}=\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$$

$$\sqrt[۳]{ba^{۲}}\times\sqrt[۳]{ab^{۲}}=\sqrt[۳]{ba^{۲}ab^{۲}}=\sqrt[۳]{a^{۳}b^{۳}}=\sqrt[۳]{(ab)^{۳}}=ab$$

$$(\sqrt[۳]{a})^{۲}=\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۳]{a}=\sqrt[۳]{a\times a}=\sqrt[۳]{a^{۲}}$$

تمرین در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\sqrt{۲۸}\times\sqrt{۷}$$

$$\sqrt[۳]{۰/۰۱}\times\sqrt[۳]{۰/۸}$$

$$\sqrt[۳]{۲b^{۲}}\times\sqrt[۳]{۴b^{۴}}$$

$$\sqrt[۳]{abc}\times\sqrt[۳]{a^{۲}b^{۵}c^{۸}}$$

در محاسبات با رادیکال‌ها، برای نشان‌دادن ضرب یک عدد در یک رادیکال و ضرب چند رادیکال در یکدیگر از علامت «×» استفاده نمی‌کنیم. برای مثال ضرب $۲\times\sqrt{۳}$ را به صورت $۲\sqrt{۳}$ و ضرب $۵\times\sqrt[۳]{۱۴}$ را به صورت $۵\sqrt[۳]{۱۴}$ می‌نویسیم.

با انجام عملیات روی رادیکال‌ها سعی می‌کنیم عبارت‌های ساده‌تری به دست آوریم. این عمل را ساده‌کردن می‌نامند.

مثال: $\sqrt{۷۵}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{۷۵}=\sqrt{۲۵\times۳}=\sqrt{۲۵}\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}$$

مثال: عبارت $\sqrt{۱۶۲b^{۵}c^{۴}}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{۱۶۲b^{۵}c^{۴}}=\sqrt{۸۱b^{۴}c^{۴}\times(۲b)}=\sqrt{(۹b^{۲}c^{۲})^{۲}}\sqrt{۲b}=۹b^{۲}c^{۲}\sqrt{۲b}$$

مثال: عبارت $\sqrt[۳]{۵۴b^{۴}c^{۶}}$ را ساده کنید.

$$\sqrt[۳]{۵۴b^{۴}c^{۶}}=\sqrt[۳]{۲۷b^{۳}c^{۶}\times(۲b)}=\sqrt[۳]{(۳bc^{۲})^{۳}}\sqrt[۳]{۲b}=۳bc^{۲}\sqrt[۳]{۲b}$$

تمرین در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\sqrt[۳]{۲۵۰a^{۷}b^{۳}}\ ,\ \sqrt[۳]{۰/۰۰۳}\ ,\ \sqrt[۳]{۵۴}\ ,\ \sqrt{۱۲۸a^{۵}}\ ,\ ۲\sqrt{۱۵۰}$$

مشابه قانون ضرب رادیکال‌ها، در تقسیم رادیکال‌ها نیز برای هر دو عدد a و b، که $b \neq ۰$ ، روابط زیر برقرارند :

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ ,\ \frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{b}}=\sqrt[۳]{\frac{a}{b}}}$$

مثال:

$$\sqrt{\frac{۱۸}{۲۵}}=\frac{\sqrt{۹\times ۲}}{\sqrt{۲۵}}=\frac{\sqrt{۹}\times\sqrt{۲}}{۵}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}=\frac{۳}{۵}\sqrt{۲}$$

مثال:

$$\sqrt[۳]{\frac{۸۱a^{۵}}{۱۲۵c^{۶}}}=\frac{\sqrt[۳]{۸۱a^{۵}}}{\sqrt[۳]{۱۲۵c^{۶}}}=\frac{\sqrt[۳]{۳^{۳}a^{۳}\times ۳a^{۲}}}{\sqrt[۳]{۵^{۳}(c^{۲})^{۳}}}=\frac{۳a\sqrt[۳]{۳a^{۲}}}{۵c^{۲}}=\frac{۳a}{۵c^{۲}}\sqrt[۳]{۳a^{۲}}$$

گویا کردن مخرج کسرها

عدد $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ را در نظر بگیرید. برای درک بهتر این‌گونه اعداد و میزان بزرگی آن‌ها می‌توانیم آن‌ها را به گونه‌ای بنویسیم که در مخرج کسر، اعداد رادیکالی نداشته باشیم. برای مثال عدد $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۱\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

این عمل را گویا کردن مخرج کسر می‌نامند.

مثال: مخرج کسر $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}$ را گویا کنید و آن را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۲\times(\sqrt[۳]{۵})^{۲}}{\sqrt[۳]{۵}\times(\sqrt[۳]{۵})^{۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۵^{۲}}}{(\sqrt[۳]{۵})^{۳}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۲۵}}{۵}=\frac{۲}{۵}\sqrt[۳]{۲۵}$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$۶\sqrt{۳}=(۲+۴)\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}$$

$$۷\sqrt[۳]{۴}=(۲+۵)\sqrt[۳]{۴}=۲\sqrt[۳]{۴}+۵\sqrt[۳]{۴}$$

۱ــ در تساوی‌های بالا از کدام خاصیت ضرب استفاده شده است؟

۲ــ در عبارت‌های $۵\sqrt{۱۱}$ و $۵\sqrt[۳]{۶}$ ، به جای ۵ عبارت $(۲-۷)$ را قرار دهید و مشابه محاسبه‌ی بالا را انجام دهید.

در جمع و تفریق عبارت‌های رادیکالی، در صورت وجود رادیکال‌های یکسان، می‌توان با فاکتورگیری از آن، ضرایب آن‌ها را با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

مثال:

$$۵\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}-۹\sqrt{۲}+\frac{۵\sqrt{۲}}{۳}=(۵+۳-۹+\frac{۵}{۳})\sqrt{۲}=\frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$$

مثال: عبارت $۳\sqrt{۳۲}-۵\sqrt{۲}$ را ساده کنید.

$$۳\sqrt{۳۲}-۵\sqrt{۲}=۳\sqrt{۱۶\times۲}-۵\sqrt{۲}=۳\sqrt{۱۶}\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}=۳\times۴\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}=۷\sqrt{۲}$$

مثال: عبارت $\sqrt{۴۵}-۳\sqrt{۲۰}+۲\sqrt{۵}+\sqrt{۷}-\sqrt{۶۳}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{۴۵}-۳\sqrt{۲۰}+۲\sqrt{۵}+\sqrt{۷}-\sqrt{۶۳}=\sqrt{۹\times۵}-۳\sqrt{۴\times۵}+۲\sqrt{۵}+\sqrt{۷}-\sqrt{۹\times۷}$$

$$=۳\sqrt{۵}-۶\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}+\sqrt{۷}-۳\sqrt{۷}=-\sqrt{۵}-۲\sqrt{۷}$$

مثال: عبارت $\sqrt[۳]{۸۱}+\sqrt[۳]{-۲۴}-\sqrt[۳]{۰/۰۰۳}$ را ساده کنید.

$$\sqrt[۳]{۸۱}+\sqrt[۳]{-۲۴}-\sqrt[۳]{۰/۰۰۳}=\sqrt[۳]{۲۷\times۳}+\sqrt[۳]{(-۸)\times۳}-\sqrt[۳]{\frac{۳}{۱۰۰۰}}$$

$$=۳\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt[۳]{۳}-\frac{\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۱۰۰۰}}=(۳-۲-\frac{۱}{۱۰})\sqrt[۳]{۳}$$

$$=\frac{۹}{۱۰}\sqrt[۳]{۳}$$

تمرین در کلاس

۱ــ دو مقدار $\sqrt{۱۶}+\sqrt{۹}$ و $\sqrt{۱۶+۹}$ را به دست آورید. آیا این دو مقدار مساوی‌اند؟

۲ــ دو مقدار $\sqrt{۳۶}-\sqrt{۱۰۰}$ و $\sqrt{۱۰۰-۳۶}$ را به دست آورید. آیا این دو مقدار مساوی‌اند؟

توجه کنید

در حالت کلی

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

و

$$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

مسائل

۱ــ ریشه‌های دوم اعداد زیر را به دست آورید.

الف) ۳۶ ب) $\frac{۱}{۴۹}$ ج) ۰/۰۴ د) $۱۰^{۴}$

هـ) $b^{۴}$ و) $\frac{۱}{a^{۸}}$ ز) $a^{۴}b^{۱۲}$ ح) $۹a^{۲}$

۲ــ ریشه‌ی سوم اعداد زیر را محاسبه کنید.

الف) ۲۷ ب) $-\frac{۱}{۸}$ ج) ۰/۰۰۸

د) $a^{۳}$ هـ) $۶۴b^{۳}$ و) $\frac{a^{۶}}{b^{۹}}$

۳ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$\sqrt{۰/۰۴}$ $\sqrt{\frac{۳۶}{۴۹}}$ $\sqrt{۲۵}$ $\sqrt{۳۶}$

$\sqrt{۴x^{۲}}$ $\sqrt[۳]{۶۴}$ $\sqrt[۳]{-۸}$ $\sqrt[۳]{۲۷}$

$\sqrt[۳]{\frac{b^{۶}}{c^{۳}}}$ $\sqrt[۳]{a^{۳}b^{۶}}$ $\sqrt[۳]{-۰/۱۲۵}$

۴ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{۳۰۰}$

ب) $\sqrt{۲\frac{۱}{۴}}$

ج) $\sqrt[۳]{-۱۶}$

د) $\sqrt[۳]{\frac{-۶۴}{۲۷}}$

هـ) $\sqrt{۱۸a^{۳}}$

و) $\sqrt[۳]{۵۴}$

ز) $\sqrt[۳]{\frac{a^{۷}b^{۲}}{۲۴c^{۳}}}$

۵ــ حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید و آن‌ها را ساده کنید.

الف) $\sqrt{۲۷}\times\sqrt{۳}$

ب) $۳\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۳}$

ج) $-۳\sqrt{۵}\times(-۲\sqrt{۲۰})$

د) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}\times\sqrt{\frac{۸}{۲۷}}$

هـ) $-۵\sqrt{۶}\times(-۲)\sqrt{۱۸}$

و) $\sqrt{۰/۲}\times\sqrt{۰/۱۸}$

ز) $\sqrt[۳]{۳۶}\times\sqrt[۳]{۶}$

ح) $۲\sqrt{a^{۴}b}\times۳\sqrt{a^{۲}b^{۳}}$

ط) $۲\sqrt[۳]{a^{۴}b^{۳}}\times\sqrt[۳]{a^{۲}b}$

ی) $۲\sqrt[۳]{۴}\times(-۳)\sqrt[۳]{۲}$

۶ــ مخرج اعداد و عبارت‌های زیر را گویا کنید و آن‌ها را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

ب) $\sqrt{\frac{۵}{۶}}$

ج) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}$

د) $\frac{۴}{\sqrt[۳]{۱۶}}$

هـ) $\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}$

و) $\frac{۱}{\sqrt{a}}$

ز) $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$

ح) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

ط) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4x}}$

ی) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4a}}$

ک) $\sqrt[3]{\dfrac{4a}{3b^3c}}$

۷ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$

۲) $4\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

۳) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

۴) $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}+4\sqrt{5}$

۵) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$

۶) $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}$

۷) $4\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{40}$

۸) $\sqrt[3]{\dfrac{16}{81}}-\sqrt[3]{\dfrac{250}{3}}$

۹) $4\sqrt{2^2+3^2}+\sqrt{52}$

۱۰) $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}-2\sqrt{3}}$

۱۱) $\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{4}$

۱۲) $5\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{6}$

۱۳) $a\sqrt{b}+c\sqrt{b}$

۱۴) $4\sqrt{x}-5\sqrt{x}$

۱۵) $\sqrt[3]{8y}-\sqrt[3]{y^4}$

۱۶) $\sqrt{a^2b^4}-\sqrt{a^2c}$

۱۷) $3\sqrt[3]{y}-2\sqrt[3]{y}$

۸ــ به جای $\square$ عدد مناسب قرار دهید.

۱) $\square-\sqrt{6}=5\sqrt{6}$

۲) $-2\sqrt{7}-\square=-3\sqrt{7}$

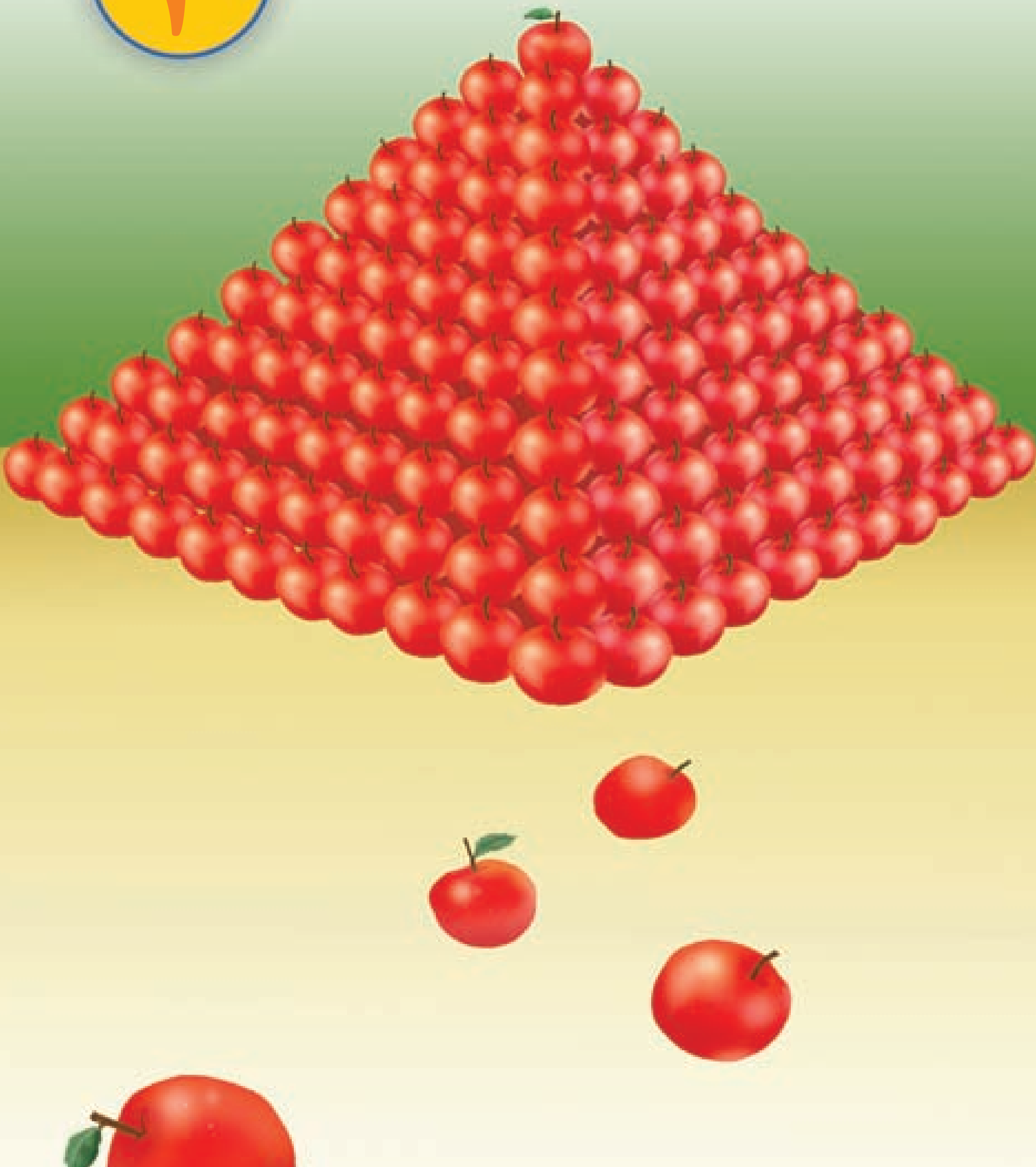
۳) $\sqrt[3]{2}-\square=2\sqrt[3]{2}$

۴) $\sqrt{5}+\sqrt{20}+\square=7\sqrt{5}$

۵) $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{96}-\square=-3\sqrt[3]{12}$

۴

چندجمله‌ای‌ها و اتحادها



تعدادی سیب به شکل هرمی روی هم چیده شده است. در هر لایه چند سیب قرار دارد؟ روی هم چند سیب در شکل وجود دارد؟

تفریق و قرینه‌ی اعداد

تفریق عمل متقابل عمل جمع است. در یک عمل جمع، مانند ۱۵=۴+۱۱، گوییم، اگر ۴ را به ۱۱ اضافه کنیم حاصل ۱۵ می‌شود، پس اگر ۴ را از ۱۵ کم کنیم، حاصل ۱۱ می‌شود : ۱۱=۴−۱۵.
این قاعده به‌طور کلی برای دو عدد a و b نیز صادق است. اگر $a+b=c$ ، گوییم حاصل تفریق b از c برابر a است و می‌نویسیم $c-b=a$.

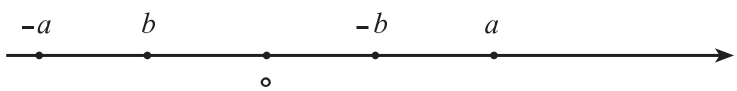
تمرین در کلاس

۱ــ اگر داشته باشیم $z=x+y$ ، دو تفریق از روی آن بنویسید.
۲ــ پاره‌خطی را به طول z رسم کنید و یک نقطه روی آن درنظر بگیرید. طول یکی از پاره‌خط‌ها را y بنامید و نشان دهید که طول پاره‌خط باقی مانده برابر $z-y$ است.

هر عدد قرینه‌ای دارد که شما در فصل اول با آن آشنا شدید. قرینه یک عدد دلخواه مانند a را با $-a$ نشان می‌دهند.

$-a$ نیز قرینه‌ای دارد که آن را با $-(-a)$ نشان می‌دهند.

تمرین در کلاس



۱ــ با توجه به شکل بالا علامت (مثبت یا منفی بودن) a و b را تعیین کنید.
۲ــ درستی تساوی $-(-a)=a$ را از روی شکل نشان دهید.
۳ــ قرینه‌ی یک عدد مثبت چه علامتی دارد؟
۴ــ اگر $b=-۳$ ، $(-b)$ چه مقداری دارد؟ علامت $(-b)$ چیست؟ قرینه‌ی یک عدد منفی چه علامتی دارد؟

جمع هر عدد با قرینه‌ی خود صفر است، یعنی برای هر عدد a داریم $a+(-a)=۰$. برای دو عدد a و b می‌توان نشان داد $a-b=a+(-b)$.

تمرین در کلاس

الف) درستی تساوی‌های زیر را با ذکر چند مثال بررسی کنید.

۱) $-(a-۴)=-a+۴$

۲) $-(a-b)=-a+b$

۳) $x-(۲+z)=(x-۲)-z$

۴) $x-(y+z)=(x-y)-z$

۵) $x(y-z)=xy-xz$

۶) $(x-y)^۲=(y-x)^۲$

ب) تساوی‌های زیر را با زبان فارسی توضیح دهید.

۱) $-(a+b)=-a-b$

۲) $(-x)y=x(-y)=-xy$

۳) $(-x)(-y)=xy$

۴) $(-a)^۲=a^۲$

ج) تفاوت دو عبارت $-a^۲$ و $(-a)^۲$ را توضیح دهید.

تقسیم و معکوس اعداد

تقسیم، یکی دیگر از اعمال بین اعداد حقیقی است که متقابل عمل ضرب است. در یک عمل ضرب مانند $۴۸=۴\times۱۲$ ، گوییم اگر ۴ را در ۱۲ ضرب کنیم ۴۸ می‌شود، پس اگر ۴۸ را بر ۴ تقسیم کنیم حاصل ۱۲ می‌شود و می‌نویسیم : $۱۲=\frac{۴۸}{۴}$.

در تقسیم عدد a بر عدد b، به دنبال عددی می‌گردیم که اگر آن را در b ضرب کنیم حاصل برابر a شود.
اگر b مخالف صفر باشد چنین عددی وجود دارد و آن را با استفاده از خط کسری به صورت $\frac{a}{b}$ نشان می‌دهیم. بنابراین، اگر $\frac{a}{b}=c$ ، این به معنای آن است که $bc=a$.

تقسیم a بر b را به صورت $a\div b$ نیز نشان می‌دهیم، پس $a\div b=\frac{a}{b}$. هر وقت از تقسیم برعددی سخن می‌گوییم فرض بر آن است که آن عدد مخالف صفر است.

معکوس یک عدد، عددی است که اگر در آن ضرب شود، حاصل ۱ شود. برای مثال، معکوس عدد ۴، عدد $\frac{۱}{۴}$ است، زیرا $۴\times\frac{۱}{۴}=۱$. معکوس عدد (-۳) ، عدد $(-\frac{۱}{۳})$ است، زیرا $(-۳)\times(-\frac{۱}{۳})=۱$.

صفر معکوس ندارد و معکوس یک عدد مخالف صفر a، عدد $\frac{۱}{a}$ است.

$$\boxed{a\times\frac{۱}{a}=۱}$$

تمرین در کلاس

الف) تساوی‌های زیر را به زبان فارسی توضیح دهید. در عبارت‌های زیر فرض بر آن است که مخرج‌ها مخالف صفر هستند.

۱) $\frac{a}{b}=a\times\frac{۱}{b}$

۲) $c\times\frac{a}{b}=\frac{ca}{b}$

۳) $\frac{a}{b}=\frac{ca}{cb}$

۴) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

۵) $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$

۶) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

ب) عبارت‌های زیر را به صورت یک کسر بنویسید.

۱) $۲+\frac{۱}{a}$

۲) $\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}$

۳) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

۴) $۲-\frac{۱}{x-۱}$

یکی از روش‌های بررسی تساوی دو عدد گویا، مانند $\frac{۶}{۹}$ و $\frac{۱۰}{۱۵}$، این است که مخرج هر کسر را در صورت کسر دیگر ضرب کنیم. با این عمل دو عدد به‌دست می‌آید که اگر مساوی بودند می‌توان نتیجه گرفت که این کسرها مساویند، در غیر این‌صورت این کسرها مساوی نیستند. در این مثال، چون $۶\times۱۵=۱۰\times۹$ این دو کسر مساویند.

به‌طور کلی این مطلب برای دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برقرار است، یعنی اگر $ad=bc$ ، این دو کسر مساوی‌اند و در غیراین‌صورت مساوی نیستند.

مثال: دو کسر $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ برابرند زیرا حاصل‌ضرب صورت هر کسر در مخرج کسر دیگر، مقدارهایی مساویند.

مسائل

۱ــ اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند و c مخالف صفر باشد، ثابت کنید $c(\frac{a}{c}+\frac{b}{c})=a+b$. از این تساوی نتیجه بگیرید که : $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

۲ــ اگر a و b دو عدد مخالف صفر باشند، نشان دهید معکوس $\frac{a}{b}$ عدد $\frac{b}{a}$ است.

۳ــ اگر a و b و c و d چهار عدد باشند و b و c و d مخالف صفر باشند، با استفاده از مسئله (۲) نشان دهید که :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

۴ــ اگر a و b و c و d چهار عدد حقیقی باشند که b و d مخالف صفر باشند، نشان دهید که :

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

عبارت‌های جبری

فعالیت

مستطیلی رسم کنید و طول و عرض آن را x و y بنامید.

۱ــ مساحت و محیط این مستطیل را برحسب x و y بنویسید.

۲ــ طول قطر این مستطیل را برحسب x و y بنویسید.

۳ــ قطر مستطیل، مستطیل را به دو مثلث مساوی تقسیم می‌کند. محیط و مساحت این مثلث‌ها را بنویسید.

در عبارت‌هایی که در بالا به دست آورده‌اید، نمادهای x و y به کار رفته‌اند که هر یک نشان‌دهنده‌ی عدد دلخواهی هستند.

نمادهایی که اعداد دلخواهی را نشان می‌دهند، متغیر می‌نامند، زیرا به جای آن‌ها هر عددی می‌توان قرار داد.

هرکدام ازعبارت‌هایی که در فعالیت بالا به‌دست آورده‌اید، به صورت محاسباتی روی متغیرهای x و y، از طریق اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و توان رسانی و ریشه‌گیری بوده است. این اعمال را **اعمال جبری** و عبارت‌های به‌دست آمده را **عبارت‌های جبری** می‌نامند. در حالت خاص، یک عدد را هم به عنوان یک عبارت جبری می‌پذیریم.

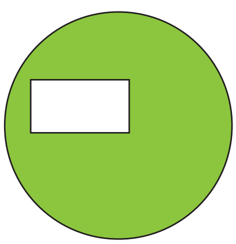
مثال: هریک ازعبارت‌های زیر، یک عبارت جبری هستند.

$$x+y \quad , \quad 2x+5a \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2}x-4x^2$$

$$\pi r^2-xy \quad , \quad \sqrt{3} \quad , \quad -3y+\sqrt{3}x^2 \quad , \quad a+b+\sqrt{a^2+b^2}$$

هر عبارت جبری نشان‌دهنده عددی است که با جایگذاری مقدار متغیرهایش معین خواهد شد.

مثال: عبارت جبری $2(a+b)$ دارای دو متغیر a و b است. اگر به جای a و b اعداد مثبتی قرار دهیم، مقدار این عبارت جبری نشان‌دهنده‌ی محیط مستطیلی است به طول a و عرض b. مقدار این عبارت جبری به ازای $a=3$ و $b=5$ برابر است با $2\times(3+5)=16$ و مقدار این عبارت جبری به ازای $a=6$ و $b=12$ برابر است با $2\times(6+12)=36$.



مثال: در شکل روبرو از سطح دایره‌ای به شعاع r، سطح مستطیلی به طول x و عرض y برداشته شده است. مساحت قسمت رنگی یک

عبارت جبری با متغیرهای x و y و r به صورت $\pi r^۲ - xy$ است. توجه داشته باشید که π یک عدد مشخص است و متغیر نیست.

مقدار این عبارت جبری به ازای $x=۲$ و $y=۵$ و $r=۱۰$ برابر است با $\pi \times ۱۰^۲ - ۲\times ۵ = ۱۰۰\pi - ۱۰$.

مثال: $a+b+\sqrt{a^۲+b^۲}$ یک عبارت جبری با متغیرهای a و b است. به ازای مقادیر مثبت برای a و b، این عبارت جبری، محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای را نشان می‌دهد که طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی آن a و b است. مقدار این عبارت جبری به ازای $a=۴$ و $b=۳$ برابر است با $۴+۳+\sqrt{۴^۲+۳^۲} = ۷+\sqrt{۲۵} = ۱۲$.

مثال: $x^۲ - y^۲ + z - ۲$ یک عبارت جبری است و به ازای $x=۱$ و $y=\sqrt{۲}$ و $z=-۳$ مقدار آن برابر است با $۱^۲ - (\sqrt{۲})^۲ - ۳ - ۲ = -۶$.

یک جمله‌ای ها

ساده‌ترین نوع عبارت‌های جبری، آن‌هایی هستند که به صورت ضرب یک عدد در توان‌های صحیح نامنفی (عدد حسابی) از یک یا چند متغیر هستند. این‌گونه عبارت‌ها را **یک جمله‌ای** می‌نامند. برای مثال، عبارت‌های زیر یک جمله‌ای هستند.

$$xy \quad , \quad ۳ab^۲ \quad , \quad -۵y^۲z^۳ \quad , \quad \frac{۲}{۵}a^۳x^۲y \quad , \quad -\sqrt{۷}aby^۲ \quad , \quad ۶$$

توجه داشته باشید که یک عدد نیز به تنهایی یک جمله‌ای محسوب می‌شود.

برای مثال، عبارت‌های جبری زیر یک جمله‌ای نیستند.

$$۲x^۲+y \quad , \quad x\sqrt{y} \quad , \quad ۳x^۳y^{-۱} \quad , \quad ۲+x\sqrt{x^۲+۱} \quad , \quad \frac{x^۴y^۲}{z}$$

در یک جمله‌ای‌ها، عددی که در متغیرها ضرب شده است را **ضریب عددی** آن یک جمله‌ای می‌نامند.

در یک جمله‌ای $۲x^۳y^۴$ توان متغیر x عدد ۳ است، به همین خاطر گوییم درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر x عدد ۳ است. همچنین درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر y عدد ۴ است.

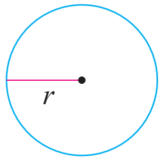
به‌طور کلی، توان متغیری را که در یک جمله‌ای وجود دارد درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر می‌نامند.

مثال: اگر شعاع دایره‌ای را r بنامیم، مساحت این دایره $\pi r^۲$ است که یک، یک جمله‌ای با متغیر r و ضریب عددی π است. درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به r عدد ۲ است.

> در یک جمله‌ای‌هایی که فقط یک متغیر وجود دارد، توان آن متغیر را درجه‌ی آن یک جمله‌ای می‌گویند و نیازی به ذکر نام متغیر نیست.

محیط این دایره نیز برابر $۲\pi r$ است که آن هم یک جمله‌ای با متغیر r و ضریب عددی ۲π است. درجه‌ی

این یک جمله‌ای برابر ۱ است.



توجه کنید

اعداد مخالف صفر یک جمله‌ای‌های درجه صفر هستند.

تمرین در کلاس

۱ــ کدام یک ازعبارت‌های زیر یک‌جمله‌ای هستند. ضریب عددی و درجه هر یک‌جمله‌ای را برحسب متغیر x تعیین کنید. نمادهای حرفی، همگی متغیر هستند.

$$\frac{ab}{x} \quad , \quad \frac{ab}{۲} \quad , \quad a\sqrt{b} \quad , \quad ۲\sqrt{۲}xy \quad , \quad ۵y^{-۱}x \quad , \quad ۴x^{۲}y$$

۲ــ جدول زیر را کامل کنید.

عبارت جبری	آیا یک جمله‌ای است؟	متغیرها	درجه نسبت به x	ضریب عددی
$\sqrt{۳}x^{۲}yz^{۳}$	بله	x,y,z	۲	$\sqrt{۳}$
$۴xy^{۳}$				
$-a^{۲}x$				
$۴\frac{xy}{a}$				
$\frac{۴}{۷}xa^{۲}b$				
$۶y\sqrt{x}$				

جمع و تفریق یک جمله‌ای ها

در فعالیت زیر می‌خواهیم چگونگی جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.

فعالیت

به تساوی زیر توجه کنید :

$$۵ax = (۳+۲)ax = ۳ax + ۲ax$$

۱ــ در تساوی بالا کدام خاصیت عمل ضرب مورد استفاده قرار گرفته است؟

۲ــ در طرف راست تساوی بالا، دو یک جمله‌ای وجود دارد. اختلاف این دو یک جمله‌ای در چیست؟

۳ــ طرف راست تساوی‌های زیر را مانند تساوی بالا بنویسید.

$$۹ma^۲x = (۷+۲)ma^۲x = \cdots$$

$$۴axy^۲ = (۹-۵)axy^۲ = \cdots$$

$$۱۲ab^۲x = (۸+۳+۱)ab^۲x = \cdots$$

۴ــ شباهت‌ها و تفاوت‌های یک جمله‌ای‌هایی را که در طرف راست تساوی‌ها به‌وجود می‌آیند مشخص کنید.

یک جمله‌ای‌هایی که قسمت نمادهای حرفی و توان‌های متناظر آن‌ها یکسان است، یک جمله‌ای‌های متشابه می‌نامند.

مثال: یک جمله‌ای‌های زیر متشابه‌اند.

$$۹yzx^۲ \quad , \quad -x^۲yz \quad , \quad \sqrt{۳}zx^۲y \quad , \quad -\frac{۵}{۹}x^۲zy$$

مثال: یک جمله‌ای‌های زیر متشابه نیستند.

$$۲xy \quad , \quad ۵xz \quad , \quad -xya \quad , \quad ۵ab$$

فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید.

$$۴a+۶a=(۴+۶)a=۱۰a$$

$$۷xy^۲-۳xy^۲=(۷-۳)xy^۲=۴xy^۲$$

$$-\frac{۳}{۵}x^۲+x^۲=(-\frac{۳}{۵}+۱)x^۲=\frac{۲}{۵}x^۲$$

۱ــ از کدام خاصیت جمع و ضرب در محاسبات بالا استفاده شده است؟

۲ــ آیا در هر تساوی، یک‌جمله‌ای‌های آن متشابه‌اند؟

۳ــ چه رابطه‌ای بین ضرایب یک‌جمله‌ای‌هایی که در طرفین تساوی‌ها می‌بینید وجود دارد؟

۴ــ با توجه به عملیات بالا، محاسبات مشابهی را برای عبارت‌های زیر انجام دهید.

$$۵x+۲x= \cdots$$

$$۹ab-۳ba= \cdots$$

$$۳xy^۲-۴xy^۲= \cdots$$

$$\frac{۱}{۵}y^۲-\frac{۲}{۷}y^۲= \cdots$$

$$۴xyz+۲yxz-yzx= \cdots$$

۵ــ آیا عبارت $۳ab+۲a$ را می‌توان به شکل یک جمله‌ای نوشت؟ چرا؟

از فعالیت‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت :

- دو یا چند یک جمله‌ای متشابه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد.
- برای جمع یا تفریق یک جمله‌ای‌های متشابه، کافی است ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع یا از هم کم کنیم.
- بین یک جمله‌ای‌هایی که متشابه نیستند نمی‌توان جمع و تفریق انجام داد.

توجه کنید

$$\boxed{3x+5x\neq 8x^2 \quad , \quad 3x+5y\neq 8xy}$$

ضرب یک جمله‌ای‌ها

فعالیت

به تساوی زیر توجه کنید :

$$4xy^3z\times 5x^2ya^3=(4\times 5)xx^2y^3zya^3=20x^{1+2}y^{3+1}za^3$$

۱ــ در این حاصل ضرب از کدام خاصیت عمل ضرب و قاعده‌ی توان‌رسانی استفاده شده است؟

۲ــ ضرایب عددی یک جمله‌ای‌های طرف چپ تساوی و ضریب عددی یک جمله‌ای طرف راست تساوی چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳ــ توان‌های هریک از متغیرهای یک جمله‌ای‌های طرف چپ تساوی با توان همان متغیر در طرف راست تساوی چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴ــ محاسبات بالا را برای عبارت‌های زیر نیز انجام دهید.

$$4x^2y^3z^2\times 2xy^4w=\cdots$$

$$-3x^2a\times\frac{1}{5}ya^2=\cdots$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که :

در ضرب یک جمله‌ای‌ها، باید ضرایب عددی آن‌ها را در هم ضرب کنیم و توان‌های متغیرهای یکسان آن‌ها را با هم جمع کنیم و متغیرهای غیریکسان را در هم ضرب کنیم.

تمرین در کلاس

عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت خلاصه کنید.

۱) $-۳x^۲ \times ۵y^۲ =$

۲) $۴x^۲y \times \frac{۱}{۲}xy^۲ =$

۳) $۶xy \times ۲y^۲ \times \frac{۱}{۳}x^۲y =$

مسائل

۱ــ در عبارت‌های زیر تعیین کنید کدام عبارت یک جمله‌ای است و ضریب عددی آن و درجه‌ی آن را نسبت به هرکدام از متغیرهایش تعیین کنید.

الف) $۴ab^۲$ ، ب) $\frac{۲x}{yz}$ ، ج) $۴x^۲a\sqrt{y}$ ، د) $-\frac{۴}{۵}xyz$ ، هـ) $\frac{x^۲yz^۳}{۲}$

۲ــ در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) $۹a^۲ = ۴a^۲ + \square$ ب) $۱۲ax = ۱۶ax + \square$

ج) $۲ax + \square = ax$ د) $\frac{ab}{۲} + \square = \frac{۳ab}{۲}$

۳ــ عبارت‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید.

الف) $۴x^۲ - ۲x^۲$ ب) $۰/۵t - ۳/۵t$ ج) $۲xy^۲ - xy^۲ + ۵y^۲x$

د) $\frac{ab}{۲} - \frac{ba}{۳}$ هـ) $a^۲b + ۳b^۲a$ و) $۲xyz - ۰/۴yxz - ۱/۶zyx$

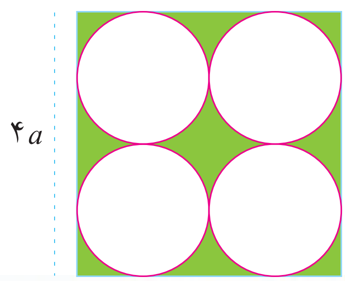
۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۴xy \times ۵x^۲y^۳$ ب) $۲xy \times \frac{۱}{۳}x^۲yz^۲$ ج) $(-\frac{۱}{۲}xy^۲)(-\frac{۱}{۳}x^۲y)^۲$

د) $۴x(۲y - ۳)$ هـ) $(۲x + ۴y)x$ و) $\frac{x}{۴}(a + b^۲)$

۵ــ اگر a و b اعدادی باشند به‌طوری که $a + ۲b = ۵$ و $c = ۳$ ، مقدار $a + ۲(b + c)$ چقدر خواهد بود؟

۶ــ از سطح مربع روبرو چهار دایره مساوی خارج شده است، نشان دهید که مساحت قسمت رنگی، به صورت یک‌جمله‌ای با متغیر a است. درجه و ضریب عددی این یک‌جمله‌ای را تعیین کنید.



چندجمله‌ای‌ها

آن دسته از عبارت‌های جبری که به صورت جمع چند یک جمله‌ای غیرمتشابه هستند را **چندجمله‌ای** می‌نامند. یک جمله‌ای‌ها نیز چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.

مثال: عبارت‌های زیر چندجمله‌ای هستند.

$$۱۲z^۲ - xy^۵ + \frac{\sqrt{۳}}{۵}yz^۳ - ۱ \quad , \quad -x + yz + ۵x^۲z^۲ + ۳ \quad , \quad ۳x^۲y + ۸xyz - \sqrt{۶}y^۳ + ۱$$

اگر متغیری مانند x در یک چندجمله‌ای وجود داشته باشد، بزرگ‌ترین توانی از x را که در آن چندجمله‌ای وجود دارد درجه‌ی آن چندجمله‌ای نسبت به x می‌نامند.

مثال: چندجمله‌ای‌های $x+۲$ ، $۲xy - y^۲ + z - ۹$ و $\sqrt{۵}z^۳ - \frac{x}{۴}y^۲$ نسبت به x از درجه ۱ هستند.

چندجمله‌ای‌های $xy - x^۲ + ۲$ ، $x^۲ + y^۳ + z^۵ + ۵$ ، $۶zx^۲ + yx - ۳$ نسبت به x از درجه ۲ هستند.

چندجمله‌ای‌های $-۳x^۲y + yx^۳ + xyz + ۵$ ، $x^۳z^۲ - x - y^۲$ نسبت به x از درجه ۳ هستند.

برای نوشتن چندجمله‌ای‌های یک متغیره، روش استاندارد آن است که یک جمله‌ای‌هایی که درچندجمله‌ای‌وجود دارند به ترتیب از بزرگ‌ترین توان تا کوچک‌ترین توان نوشته شوند. این شیوه نوشتن چند جمله‌ای‌های یک متغیره را نمایش استاندارد چندجمله‌ای‌ها می‌نامند. برای مثال، نمایش استاندارد برخی چندجمله‌ای‌ها در زیر آمده است.

چندجمله‌ای	نمایش استاندارد
$-۵x + ۱۰ + ۳x^۲$	$۳x^۲ - ۵x + ۱۰$
$۴y^۳ - ۳ - y^۵ + y$	$-y^۵ + ۴y^۳ + y - ۳$
$۱۵ - a^۲ + ۲a^۶ + ۸a^۵$	$۲a^۶ + ۸a^۵ - a^۲ + ۱۵$

جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها

از آن‌جا که چندجمله‌ای‌ها به‌صورت جمع چند یک جمله‌ای هستند، برای جمع چندجمله‌ای‌ها، کافی است جمله‌های متشابه آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال: جمع دو چندجمله‌ای $xy^۲ + ۴yz - ۸$ و $-۵xy^۲ + z + ۶yz + ۵$ را بنویسید.

$$(xy^۲ + ۴yz - ۸) + (-۵xy^۲ + z + ۶yz + ۵) = xy^۲ - ۵xy^۲ + ۴yz + ۶yz + z - ۸ + ۵$$
$$= -۴xy^۲ + ۱۰yz + z - ۳$$

مثال: جمع دو چندجمله‌ای $۴a^۳b^۲ + ۴b - ۱۵$ و $-۴a^۳b^۲ - ۳b + ۷$ را بنویسید.

$$(۴a^۳b^۲ + ۴b - ۱۵) + (-۴a^۳b^۲ - ۳b + ۷) = ۴a^۳b^۲ - ۴a^۳b^۲ + ۴b - ۳b - ۱۵ + ۷ = b - ۸$$

برای ضرب چندجمله‌ای‌ها، ابتدا ضرب یک‌جمله‌ای‌ها در چندجمله‌ای‌ها را بررسی می‌کنیم.

مثال: حاصل ضرب یک جمله‌ای $۲xy$ درچندجمله‌ای $x^۲y + ۳xy^۳$ را حساب کنید.

$$۲xy(x^۲y + ۳xy^۳) = ۲xy \times x^۲y + ۲xy \times ۳xy^۳ = ۲x^۳y^۲ + ۶x^۲y^۴$$

در محاسبه‌ی بالا، ابتدا با استفاده از خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع، عبارت به صورت ضرب بین یک‌جمله‌ای‌ها در آمده است، سپس از قاعده‌ی ضرب یک جمله‌ای‌ها استفاده شده است.

مثال: حاصل ضرب یک جمله‌ای $-5a^2x$ در چندجمله‌ای x^2-a^2 را حساب کنید.

$$-5ax^2(x^2-a^2)=(-5ax^2)\times x^2+(-5ax^2)\times(-a^2)=-5ax^4+5a^3x^2$$

برای ضرب دو چندجمله‌ای در یکدیگر، تک‌تک جمله‌های یکی از چندجمله‌ای‌ها را درچند جمله‌ای دیگر ضرب می‌کنیم.

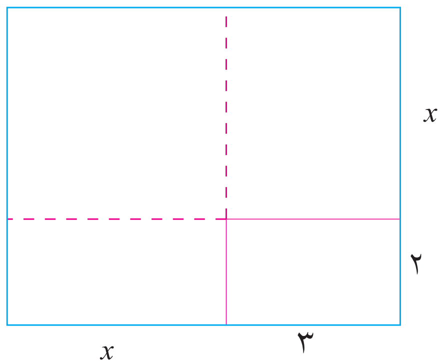
مثال: حاصل ضرب چندجمله‌ای $x+2$ در چندجمله‌ای $x-1$ را به‌دست آورید.

$$(x+2)(x-1)=x(x-1)+2(x-1)=x^2-x+2x-2=x^2+x-2$$

علت درستی محاسبه‌ی بالا، خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع است. $(x-1)$ مانند یک عدد درنظر گرفته شده است و در $x+2$ ضرب شده است.

مثال: مستطیلی با طول ۳ و عرض ۲ را درنظر بگیرید.

اگر طول و عرض این مستطیل را x واحد افزایش دهیم، مساحت آن چقدر می‌شود؟



طول و عرض مستطیل جدید عبارت است از $x+3$ و $x+2$. پس مساحت مستطیل جدید برابر است با $(x+3)(x+2)$ که ضرب دوچند جمله‌ای است.

$$(x+3)(x+2)=x(x+2)+3(x+2)=x^2+2x+3x+6=x^2+5x+6$$

مثال: حاصل ضرب چندجمله‌ای $xy+yz-2$ در چند جمله‌ای x^2+y^3-1 را به‌دست آورید.

$$(xy+yz-2)(x^2+y^3-1)=xy(x^2+y^3-1)+yz(x^2+y^3-1)-2(x^2+y^3-1)$$
$$=x^3y+xy^4-xy+x^2yz+y^4z-yz-2x^2-2y^3+2$$

ابوبکر محمدبن حسین کرجی

ریاضیدان مسلمان (نیمه‌ی دوم قرن چهارم قمری)، از نخستین کسانی بود که عملیات حسابی مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ریشه‌یابی را برای ساختن و ساده کردن عبارات جبری به‌کار برد. او عبارات جبری هم‌چون «مال مال و چهارمکعب و شش کمتر» (x^4+4x^3-6) را ساخت. کرجی توان‌های مختلف مجهولات در عبارات جبری را «مراتب» می‌نامید که ما نیز امروزه همین کار را می‌کنیم. کرجی دریافت که حاصل‌ضرب x^n در $\frac{1}{x^n}$ یک می‌شود. با این‌که او می‌دانست $a-(-b)=a+b$ ولی از قانون $-a-(-b)=-(a-b)$ بی‌خبر بود.

مسائل

۱ــ طول ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را a نامیده‌ایم. محیط این مثلث را برحسب a حساب کنید. آیا این عبارت یک جمله‌ای است؟ در این صورت ضریب عددی و درجه آن را مشخص کنید.

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(x+y)+(2x+3y)$

ب) $(x^2-y^2)+(x^2+2y^2)$

ج) $(2x^2+5y)-(x^2+y^2)$

د) $(4y+ax)+(x+y)$

هـ) $2x^2+xy+3x^2+yx$

و) $\frac{1}{2}x^2-4x-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}x-1$

ز) $(10k^2-3kt+4k^2)-(3k^2+5kt)$

۳ــ اگر داشته باشیم $A=1-2x^2$ و $B=3x^2-4x+1$ و $C=x^2-x$، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $A-B$ ب) $A+B$ ج) $(A+B)-3C$

د) C^2 هـ) A^2 و) C^2-A^2

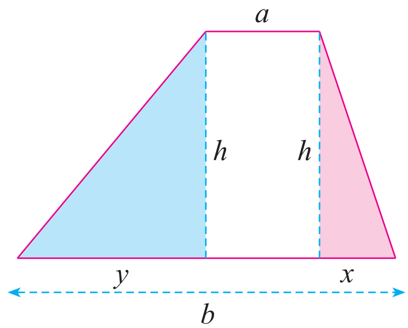
۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۱) $4(x+y)$ ۲) $3x(y-z)$ ۳) $4x^3(x+y+1)$

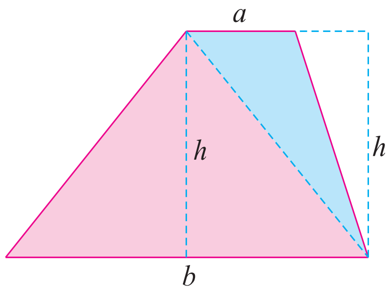
۴) $2x(x+3)+9x(x-4)$ ۵) $(a+b)(x+y)$ ۶) $(a+b)(a+c)$

۷) $(x+1)(x^2-x+1)$

۵ ــ با استفاده از شکل زیر و استفاده از مساحت مثلث‌ها و مستطیل، فرمول مساحت ذوزنقه را که به‌صورت $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ است، پیدا کنید.



۶ــ با استفاده از شکل روبرو فرمول مساحت ذوزنقه را از طریق مساحت مثلث‌ها به‌دست آورید.



اتحادها و تجزیه

فعالیت

۱ــ به ازای مقادیر داده شده برای x جدول را کامل کنید.

x	$x^{۲}$	$۶x$	$x^{۲}+۶x+۹$	$(x+۳)^{۲}$
-۳				
-۲				
۰				
$\frac{۱}{۲}$				

۲ــ با مقایسه دو ستون آخر جدول چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر جدول را به ازای چند مقدار دیگر برای x ادامه دهیم، چه حدسی برای رابطه‌ی بین دو ستون آخر می‌زنید؟

۳ــ به دلخواه خود چند مقدار دیگر برای x درنظر بگیرید و حدس خود را آزمایش کنید.

۴ــ $(x+۳)^{۲}$ همان حاصل‌ضرب $(x+۳)(x+۳)$ است. این عمل ضرب را انجام دهید و حاصل را با چندجمله‌ای $x^{۲}+۶x+۹$ مقایسه کنید. آیا این بررسی، حدس شما را تأیید می‌کند؟

تساوی $x^{۲}+۶x+۹=(x+۳)^{۲}$ به ازای هر مقداری از x برقرار است. این‌گونه تساوی‌ها را اتحاد می‌نامند.

> اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدارهای یکسانی داشته باشند، عبارت حاصل از تساوی بین آن‌ها را اتحاد می‌نامند.

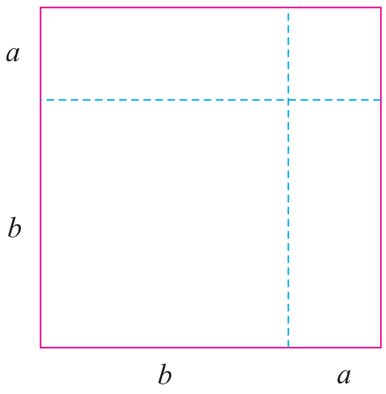
تمرین در کلاس

۱ــ توان رسانی را در عبارت $(x+۵)^{۲}$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۲ــ توان رسانی را در عبارت $(۲x-۶)^{۲}$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۳ــ توان رسانی را در عبارت $(a+b)^{۲}$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

فعالیت



یک مربع رسم کنید و ضلع آن را به دو پاره‌خط تقسیم کنید و طول این پاره‌خط‌ها را a و b بنامید.
مساحت این مربع را یک‌بار مستقیماً از طریق طول ضلع آن، و بار دیگر به صورت مجموع مساحت‌های مربع‌ها و مستطیل‌های کوچک‌تر محاسبه کنید و آن‌ها را مساوی یکدیگر قرار دهید.
چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟

برای هر دو عدد a و b، با محاسبه $(a+b)(a+b)$ نتیجه می‌شود تساوی زیر به ازای هر مقداری برای a و b برقرار است.

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

تساوی بالا یک اتحاد است و آن را اتحاد «مربع دوجمله‌ای» می‌نامند.
از آن‌جا که در یک اتحاد، تساوی به ازای هر مقداری ازمتغیرها برقرار است، اگر به جای متغیرها، عبارت‌های جبری نیز قرار دهیم باز هم تساوی برقرار خواهد بود. این عمل را **جایگذاری** می‌نامند.
مثال: در اتحاد $(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$، به جای a ، xy و به جای b، ۳ قرار می‌دهیم. در نتیجه :

$$(xy+۳)^۲ = (xy)^۲ + ۲(xy)\times ۳ + ۳^۲$$

پس از ساده کردن، تساوی بالا به شکل $(xy+۳)^۲ = x^۲y^۲ + ۶xy + ۹$ درمی‌آید. این تساوی نیز یک اتحاد است.

تمرین در کلاس

اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$ را درنظر بگیرید.

۱ــ در طرفین تساوی، به جای a عبارت ۲x و به جای b عبارت ۳y قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.

۲ــ در طرفین تساوی، به جای a مقدار (-۱) و به‌جای b عبارت $y^۲$ قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.

۳ــ در طرفین تساوی، به‌جای a عبارت xz و به جای b عبارت $(-y)$ قراردهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.

اگر در اتحاد مربع دوجمله‌ای $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$ به جای b ، $(-b)$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود :

$$(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$$

این تساوی نیز یک اتحاد است و آن را نیز اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نامند.

با جایگذاری عبارت‌های دلخواه روی متغیرهای یک اتحاد، اتحادهای دیگری ساخته می‌شوند که آن‌ها را نمونه‌ای از اتحاد اولیه می‌نامند. برای مثال، اتحادهای زیر همگی نمونه‌ای از اتحاد مربع دوجمله‌ای هستند.

$$(x-۱)^۲=x^۲-۲x+۱ \quad , \quad (xy+۴z)^۲=x^۲y^۲+۸xyz+۱۶z^۲ \quad , \quad (\sqrt{۵}-۲t)^۲=۵-۴\sqrt{۵}t+۴t^۲$$

تمرین در کلاس

الف) با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای محل‌های نقطه‌چین را با عبارت مناسب پرکنید.

$(a+۱)^۲=a^۲+\cdots+۱$

$(۱+b)^۲=\cdots+۲b+\cdots$

$(x-۶y)^۲=\cdots$

$(ax-۳)^۲=\cdots-۶ax+\cdots$

$(x^۲-yz)^۲=\cdots$

ب) محاسبه زیر را درنظر بگیرید و درستی هر مرحله را توضیح دهید.

$(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)=ax+ay+bx+by$

ج) محاسبه بالا را از آخرین تساوی به اولین تساوی مجدداً بنویسید و درستی هر مرحله را توضیح دهید.

اگر اتحاد مربع دوجمله‌ای را به صورت $a^۲+۲ab+b^۲=(a+b)^۲$ بنویسیم، مانند آن است که یک چندجمله‌ای را که به صورت مجموعی از یک جمله‌ای‌هاست به صورت ضرب دو چندجمله‌ای درآورده‌ایم.

اگر بتوان یک چندجمله‌ای را به صورت ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای نوشت به‌طوری که درجه آن‌ها کمتر باشد، گوییم آن چندجمله‌ای را تجزیه کرده‌ایم.

تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها عکس عمل ضرب چندجمله‌ای‌ها است. در عمل ضرب، عبارت‌هایی را که به صورت حاصل ضرب هستند، با انجام عمل ضرب، به صورت جمع چند یک جمله‌ای درمی‌آوریم. ولی در تجزیه، یک چندجمله‌ای را که به صورت جمع چند یک جمله‌ای است، به صورت حاصل ضرب دو یا چند، چند جمله‌ای دیگر درمی‌آوریم.

اگرچه عمل ضرب ساده است ولی عمل تجزیه آسان نیست و فقط در حالت‌های خاص می‌توان آن را انجام داد.

مثال: عبارت $x^۲-۸x+۱۶$ را تجزیه کنید.

این عبارت نمونه‌ای از اتحاد مربع دو جمله‌ای است و داریم $x^۲-۸x+۱۶=(x-۴)^۲$.

اتحادها نقش مهمی در تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها دارند. هر اتحادی در واقع نشان‌دهنده‌ی یک عمل تجزیه است و با استفاده از نمونه‌های این اتحادها می‌توان برخی از تجزیه‌ها را انجام داد.

تمرین در کلاس

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^۲+۱۰x+۲۵$ ، $۴a^۲+۴ax+x^۲$ ، $x^۲y^۲-۸xy+۱۶$ ، $x^۴-۲x^۲yz+y^۲z^۲$

مسائل

۱ــ با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$(x+۱)^۲=$ $\qquad$ $(x-۱)^۲=$ $\qquad$ $(۲a+b)^۲=$

$(a-۳b)^۲=$ $\qquad$ $(۲a-۳b)^۲=$ $\qquad$ $(۴a-۲)^۲=$

$(۲x+\frac{۱}{۲})^۲=$ $\qquad$ $(x+۲)^۲-(x-۱)^۲=$

۲ــ عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسید.

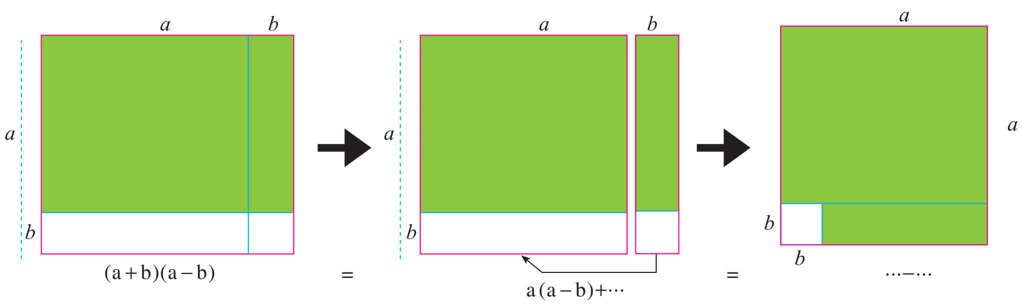
$a^۲+۴a+۴=$ $\qquad$ $y^۲-۶y+۹=$

$۹x^۲-۶x+۱=$ $\qquad$ $x^۲+۲xy+y^۲=$

فعالیت

دو عدد مثبت a و b را با شرط $b<a$ درنظر بگیرید.

۱ــ از روی شکل زیر در محل‌های نقطه‌چین مساحت قسمت‌های رنگی را بنویسید.



۲ــ اتحادی را که به دست آورده‌اید، بنویسید.

۳ــ عمل ضرب $(a+b)(a-b)$ را انجام دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید. اتحادهای به‌دست آمده را با هم مقایسه کنید.

با محاسبه‌ی مستقیم نتیجه می‌شود :

$$(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$$

این یک اتحاد است و آن را «اتحاد مزدوج» می‌نامند. از این اتحاد نیز در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری استفاده می‌شود.

مثال:

$$x^۲-۴=x^۲-۲^۲=(x+۲)(x-۲)$$

$$-۲a^۲+۹b^۲=(۳b)^۲-(\sqrt{۲}a)^۲=(۳b-\sqrt{۲}a)(۳b+\sqrt{۲}a)$$

توجه داشته باشید که در تجزیه چندجمله‌ای‌ها، رادیکالی شدن ضرایب عددی اشکالی ندارد و در تجزیه فقط باید چندجمله‌ای‌های با درجه کوچک‌تر به‌دست آوریم.

تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از اتحاد مزدوج در محل‌های نقطه‌چین عبارت‌های مناسب بگذارید.

$$(x+۴)(x-۴)=x^۲-\cdots$$

$$(۲x+۳)(۲x-۳)=\cdots-۹$$

$$(ab+x)(ab-x)=\cdots$$

$$(x+\cdots)(x-\cdots)=x^۲-\frac{۱}{۴}$$

۲ــ با استفاده از اتحاد مزدوج چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^۲-۹\quad,\quad ۴x^۲-y^۲\quad,\quad \frac{x^۲}{۴}-\frac{z^۲}{۹}\quad,\quad x^۲y^۴-۹z^۲$$

استفاده از اتحادها برخی محاسبات با اعداد بزرگ را ساده‌تر می‌کند.

مثال: مقدار $۹۹۹^۲$ را حساب کنید.

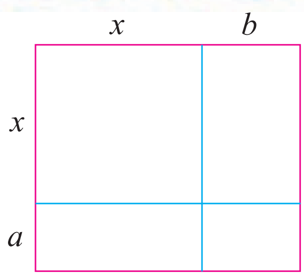
$$۹۹۹^۲=(۱۰۰۰-۱)^۲=(۱۰۰۰)^۲+۱-۲\times۱۰۰۰=۱۰۰۰۰۰۱-۲۰۰۰=۹۹۸۰۰۱$$

مثال: مقدار ۹۹۸×۱۰۰۲ را حساب کنید.

$$۹۹۸\times۱۰۰۲=(۱۰۰۰-۲)(۱۰۰۰+۲)=(۱۰۰۰)^۲-۲^۲=۱۰۰۰۰۰۰-۴=۹۹۹۹۹۶$$

فعالیت

برای سه عدد مثبت x و a و b ، مستطیلی به طول x + a و عرض x + b مانند روبه‌رو رسم شده است.



۱ــ مساحت این مستطیل را یک بار از طریق طول و عرض آن و یک بار از طریق مساحت مربع و مستطیل‌های داخل آن حساب کنید و مساحت‌های به‌دست آمده را مساوی قرار دهید. اتحاد

به‌دست آمده را بنویسید.

۲ــ عمل ضرب $(x+a)(x+b)$ را انجام دهید و اتحاد به‌دست آمده را بنویسید. این اتحاد را با اتحاد به‌دست آمده در بالا مقایسه کنید.

با انجام عمل ضرب $(x+a)(x+b)$ نتیجه می‌شود :

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

این یک اتحاد است و آن را اتحاد «یک جمله‌ی مشترک» می‌نامند.

مثال: چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2+5x+4=x^2+(4+1)x+4\times1$$
$$=(x+4)(x+1)$$
$$x^2-5x+6=x^2+(-2+(-3))x+(-2)\times(-3)$$
$$=(x-2)(x-3)$$

مثال: چندجمله‌ای $2x^2-5x-3$ را تجزیه کنید.

با بررسی این چندجمله‌ای می‌توان فهمید که دو برابر این چندجمله‌ای را راحت‌تر می‌توان تجزیه کرد. اگر این چندجمله‌ای را A بنامیم، داریم :

$$2A=4x^2-10x-6=(2x)^2-5(2x)-6=(2x+1)(2x-6)$$
$$A=\frac{(2x+1)(2x-6)}{2}=(2x+1)(x-3)$$

تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$(x+1)(x+2)=$

$(2x-1)(2x+4)=$

$(ax+5)(ax+b)=$

$(x-a)(x-b)=$

۲ــ با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^2+4x+3 \quad , \quad x^2+x-2 \quad , \quad x^2-6x+8$

۳ــ چندجمله‌ای زیر را تجزیه کنید.

$3x^2+5x-2$

فعالیت

۱ــ محاسبه‌ی زیر را انجام دهید و از طریق آن یک اتحاد بنویسید.

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=$$

۲ــ در اتحاد به‌دست آمده در بند (۱) به‌جای b، $(-b)$ قرار دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۳ــ محاسبه‌ی زیر را تکمیل کنید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

$$(a+b)^۳=(a+b)^۲(a+b)=$$

۴ــ در اتحاد به‌دست آمده در بند (۳) به‌جای b، $(-b)$ قرار دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

تساوی‌های زیر به‌ازای هر مقداری از a و b برقرارند و آن‌ها را اتحادهای تفاضل و مجموع مکعب دو جمله می‌نامند.

$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$$
$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$$

تساوی‌های زیر به‌ازای هر مقداری از a و b برقرارند و آن‌ها را اتحاد مکعب دوجمله‌ای می‌نامند.

$$(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$$
$$(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$$

مثال ۱: $(۲x-۱)(۴x^۲+۲x+۱)=(۲x)^۳-۱^۳=۸x^۳-۱$

مثال ۲: $(a+۲b)(a^۲-۲ab+۴b^۲)=a^۳+(۲b)^۳=a^۳+۸b^۳$

مثال ۳:
$$(۲a-۳b)^۳=(۲a)^۳+۳(۲a)^۲(-۳b)+۳(۲a)(-۳b)^۲+(-۳b)^۳$$
$$=۸a^۳-۳۶a^۲b+۵۴ab^۲-۲۷b^۳$$

مثال ۴:
$$(\frac{a}{۳}-\frac{b}{۲})^۳=(\frac{a}{۳})^۳-۳(\frac{a}{۳})^۲(\frac{b}{۲})+۳(\frac{a}{۳})(\frac{b}{۲})^۲-(\frac{b}{۲})^۳$$
$$=\frac{a^۳}{۲۷}-\frac{a^۲b}{۶}+\frac{ab^۲}{۴}-\frac{b^۳}{۸}$$

مثال ۵: عبارت $x^۶-۱$ را تجزیه کنید.

$$x^۶-۱=(x^۲)^۳-۱$$
$$=(x^۲-۱)(x^۴+x^۲+۱)$$
$$=(x-۱)(x+۱)(x^۴+x^۲+۱)$$

تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$(x+۲)(x^۲-۲x+۴)=$

$(۲x-۳y)(۴x^۲+۶xy+۹y^۲)=$

$(x+۵)^۳=$

۲ــ با استفاده از اتحادها چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^۳+۸ \ , \ ۲۷x^۳-\frac{۱}{۸} \ , \ a^۶-۶۴b^۶$

مسائل

۱ــ کدام یک از تساوی‌های زیر اتحاد هستند؟

$x+x=x^۲$, $x+x=۲x$

$x^۴-x^۲=x^۲(x-۱)(x+۱)$, $۳x+y=x+۳y$

$y^۲+۱=y$, $(x+۱)(x-۱)(x^۴+x^۲+۱)=x^۶-۱$

۲ــ با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$(۲x-۴)(۲x+۳)=$, $(x-۱)(x+۵)=$, $(x+۱)(x+۲)=$

$(a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲)=$, $(۲a-۳)(۲a+۳)=$, $(x-\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲})=$

$(\frac{۱}{۳}-۲x)(\frac{۱}{۳}-x)=$, $(\frac{۱}{۲}-x)(\frac{۱}{۲}+x)=$, $(۴x+۵)(۴x+۳)=$

۳ــ به کمک اتحادها عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$۴x^۲-۹=$, $۲-a^۲=$, $x^۲-a^۲=$

$a^۲x^۲-b^۲y^۲=$, $۱۶x^۲-۳۶y^۲=$, $\frac{x^۲}{۴}-\frac{۱}{۲۵}=$

$x^۲+۸x+۱۵=$, $x^۲-۷x+۱۲=$, $x^۲-(a+b)x+ab=$

$x^۲+۲\sqrt{۲}\,x+۲=$, $x^۲+۲x-۸=$, $x^۲+x+\frac{۱}{۴}=$

۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

$(x-\frac{۱}{۲})(x^۲+\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴})=$, $(x-۲)(x^۲+۲x+۴)=$

$(۲a-۳b)(۴a^۲+۶ab+۹b^۲)=$, $(x+۳)(x^۲-۳x+۹)=$

$(۲x+۱)(۴x^۲-۲x+۱)=$, $(x+\frac{۱}{۳})^۳=$

$(۲a+۱)^۳=$, $(x+۱)^۳=$

$(ax-۱)^۳=$, $(a-۲)^۳=$

۵ــ به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را به صورت ضرب دو یا چند عبارت بنویسید.

$x^۳+۱=$ $\qquad$ $x^۳-۲۷=$

$۲۷x^۳-y^۳=$ $\qquad$ $a^۳+۸b^۳=$

$b^۳+\frac{۸}{۲۷}=$ $\qquad$ $a^۳-\frac{۱}{۸}=$

$y^۳-۶y^۲+۱۲y-۸=$ $\qquad$ $x^۳+۳x^۲+۳x+۱=$

۶ــ چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^۹+۱$ $\qquad$ $x^۸-۱$ $\qquad$ $x^۴-۲x^۲+۱$

$x^۵-x$ $\qquad$ $x^۴+x^۲-۲$ $\qquad$ $x^۶-۳x^۴+۳x^۲-۱$

۷ــ برای اعداد مثبت a ، b و c، با رسم یک شکل ثابت کنید :

$$(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc$$

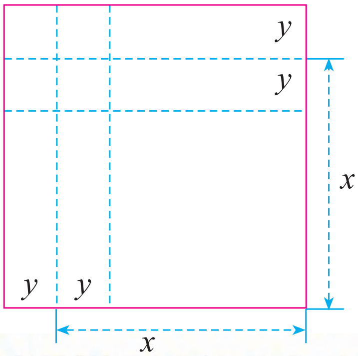
این تساوی را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای ثابت کنید. اگر به جای b ، $(-b)$ قرار دهیم نتیجه بگیرید :

$$(a-b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲-۲ab+۲ac-۲bc$$

۸ــ با استفاده از اتحاد مزدوج، تساوی زیر را ثابت کنید :

$$(x+y)^۲-(x-y)^۲=۴xy$$

تساوی بالا را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای ثابت کنید. در حالتی که x و y اعداد مثبتی باشند، و $x>y$ ، تساوی بالا را به کمک شکل زیر ثابت کنید.



ابوبکر محمدبن حسین کرجی فرمول زیر را اثبات کرده است :

$$\sqrt{A+B}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^۲-B^۲}}{۲}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^۲-B^۲}}{۲}}$$

آیا می‌توانید به کمک اتحادها این فرمول را ثابت کنید؟ (A و B اعدادی مثبت هستند و $B<A$)

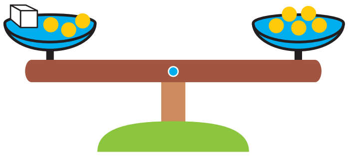
معادلات درجه اول و معادله ی خط

۵

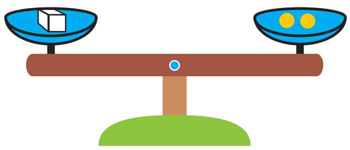
به نظر شما بالا رفتن از پله ای که می بینید آسان تر است یا بالا رفتن از سطح شیب داری که در کنار آن است؟
نسبت بالا رفتن از آن ها به مسافت افقی طی شده در آن ها چه قدر است؟

معادله

شکل زیر یک ترازوی دوکفه‌ای را نشان می‌دهد که در دو طرف آن چند وزنه‌ی یک‌کیلوگرمی و یک جسم با وزن نامعلوم قرار داده شده تا ترازو به حالت تعادل درآید.



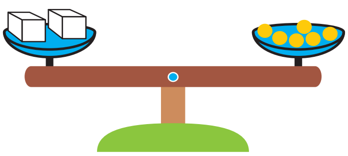
به تعادل درآمدن ترازو به معنای آن است که وزن اجسام قرارگرفته در دوکفه‌ی ترازو مساوی است. پس، اگر وزن نامعلوم جسم را x بنامیم، عبارت ریاضی بیان‌کننده این وضعیت $x + ۳ = ۵$ است. مقدار x چقدر است که این تساوی برقرار شده است؟ برای پاسخ به این سؤال، می‌توانیم از هر دو کفه‌ی ترازو سه وزنه‌ی یک کیلوگرمی را برداریم؛ که در این صورت باز هم ترازو در حالت تعادل باقی می‌ماند.



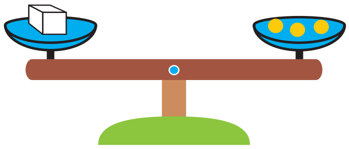
این عمل به معنای آن است که اگر از طرفین تساوی $x + ۳ = ۵$ عدد ۳ را کم کنیم باز هم تساوی برقرار می‌ماند. یعنی $x + ۳ - ۳ = ۵ - ۳$، پس $x = ۲$. ترازو نیز نشان می‌دهد که جسم ۲ کیلوگرم وزن دارد.
از این مشاهدات می‌توان نتیجه گرفت که اگر از طرفین یک تساوی، عدد یکسانی را کم کنیم یا به آن اضافه کنیم باز هم تساوی برقرار می‌ماند. به عبارت دیگر:

اگر $a = b$، آن‌گاه $a + c = b + c$.
اگر $a = b$، آن‌گاه $a - c = b - c$.

شکل روبه‌رو ترازویی را نشان می‌دهد که در یک طرف آن دو جسم یکسان با وزن نامعلوم و در طرف دیگر آن ۶ وزنه‌ی یک‌کیلوگرمی قرار دارد و ترازو به حالت تعادل درآمده است.



اگر وزن نامعلوم جسم را با x نشان دهیم، عبارت ریاضی بیان‌کننده‌ی این وضعیت $2x = 6$ است. اگر وزن‌های هر طرف ترازو را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم و از هر کفه‌ی ترازو، نیمی از وزن آن را برداریم باز هم تعادل برقرار می‌ماند زیرا نصف دو وزن مساوی باز هم مساوی‌اند.



این عمل به معنای آن است که در تساوی $2x = 6$، طرفین را بر ۲ تقسیم کرده‌ایم و باز هم تساوی برقرار مانده است. یعنی $\frac{6}{2} = \frac{2x}{2}$، پس $x = 3$. ترازو نیز نشان می‌دهد وزن جسم ۳ کیلوگرم است.

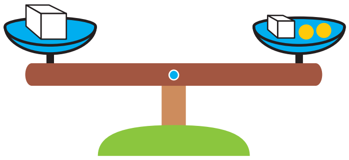
اگر طرفین یک تساوی را در عددی ضرب یا بر عدد مخالف صفری تقسیم کنیم، باز هم تساوی برقرار می‌ماند. به عبارت دیگر:

اگر $a = b$، آن‌گاه $ac = bc$.

اگر $a = b$ و c مخالف صفر باشد، آن‌گاه $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

تمرین در کلاس

محسن آقا مغازه‌دار است. روزی یک مشتری از او نمک خواست. محسن آقا در مغازه دو بسته نمک، یکی کوچک و یکی بزرگ داشت اما وزن آن‌ها را نمی‌دانست؛ فقط می‌دانست که وزن بسته‌ی کوچک‌تر نصف وزن بسته‌ی بزرگ‌تر است. بنابراین بسته‌ی بزرگ‌تر را در یک کفه، و بسته‌ی کوچک‌تر را در کفه‌ی دیگر ترازو قرار داد و در کفه‌ی دوم آن‌قدر وزنه گذاشت تا ترازو به حال تعادل درآمد. وزنه‌های مورد نیاز برای به‌تعادل درآمدن ترازو دو وزنه‌ی یک کیلوگرمی بود.



۱ــ آیا می‌توانید با توجه به شکل توضیح دهید که وزن هریک از بسته‌های نمک چقدر است؟

۲ــ رابطه‌ی ریاضی بین وزن‌هایی را که در دو کفه‌ی ترازو قرار دارند، بنویسید و وزن هربسته را به‌دست آورید.

۳ــ رابطه‌ی ریاضی دیگری برای حل همین مسئله بنویسید و مسئله را حل کنید.

در عملیات بالا، برای یافتن وزن نامعلوم یک جسم، مقدار وزن نامعلوم را با یک نماد مانند x نشان دادیم و یک تساوی برحسب x به‌دست آوردیم. این‌گونه تساوی‌ها را **معادله**، و مقدار نامعلوم را **مجهول معادله** و یافتن مجهول را **حل معادله** می‌نامند. حل یک معادله، با عملیات ریاضی و ساختن یک معادله ساده‌تر انجام می‌شود. معادلاتی نظیر معادلاتی که در این فصل روی آن‌ها کار خواهیم کرد، با عملیات زیر که

آن‌ها را **عملیات جبری ساده** می‌نامند می‌توان حل کرد.

۱ــ جمع طرفین معادله با مقدارهای مساوی،

۲ــ کم‌کردن مقدارهای مساوی از طرفین معادله،

۳ــ ضرب طرفین معادله در مقدارهای مخالف صفر مساوی،

۴ــ تقسیم طرفین معادله بر مقدارهای مساوی مخالف صفر.

با انجام عملیات جبری ساده و محاسبات معمولی می‌توان به معادله‌ای رسید که مجهول معادله در یک طرف و مقادیر معلوم در طرف دیگر قرار گیرند و با این اعمال، معادله حل خواهد شد.

مثال: معادله‌ی $۱۰x-۴=۱$ را حل کنید.

$$۱۰x-۴=۱$$

$$۱۰x-۴+۴=۱+۴$$

$$۱۰x=۵$$

$$\frac{۱۰x}{۱۰}=\frac{۵}{۱۰}$$

$$x=\frac{۵}{۱۰}=۰/۵$$

مثال: معادله‌ی $۲(۳x+۴)=-۱-۳x$ را حل کنید.

$$۲(۳x+۴)=-۱-۳x$$

$$۶x+۸=-۱-۳x$$

$$۶x+۸+۳x=-۱-۳x+۳x$$

$$۹x+۸=-۱$$

$$۹x+۸-۸=-۱-۸$$

$$۹x=-۹$$

$$x=\frac{-۹}{۹}=-۱$$

مثال: معادله‌ی $\frac{۲}{۵}(x-۴)=۲x+۱$ را حل کنید. برای حل یک مسئله معمولاً راه‌های متفاوتی را می‌توان در پیش گرفت. برای مثال این معادله را با دو روش حل می‌کنیم.

روش اول

$$\frac{۲}{۵}(x-۴)=۲x+۱$$

$$\frac{۵}{۲}\times\frac{۲}{۵}(x-۴)=\frac{۵}{۲}\times(۲x+۱)$$

$$x-۴=۵x+۲/۵$$

روش دوم

$$\frac{۲}{۵}(x-۴)=۲x+۱$$

$$\frac{۲}{۵}x-\frac{۸}{۵}=۲x+۱$$

$$\frac{۲}{۵}x-\frac{۸}{۵}-۲x=۱$$

$$\frac{۲}{۵}x-۲x=\frac{۸}{۵}+۱$$
$$-\frac{۸}{۵}x=\frac{۱۳}{۵}$$
$$-\frac{۸}{۵}x\times ۵=\frac{۱۳}{۵}\times ۵$$
$$-۸x=۱۳$$
$$x=\frac{۱۳}{-۸}=-۱/۶۲۵$$

$$x-۴-۵x=۵x+۲/۵-۵x$$
$$-۴x-۴=۲/۵$$
$$-۴x-۴+۴=۴+۲/۵$$
$$-۴x=۶/۵$$
$$x=\frac{۶/۵}{-۴}=-۱/۶۲۵$$

تمرین در کلاس

۱ــ معادله‌ی $۳(۲x-۷)=۸۱$ را حل کنید و در هر مرحله از حل، درستی عملیات خود را با ذکر دلیل توضیح دهید.

۲ــ این معادله را از راه دیگری حل کنید. در هر مرحله، علت درستی عملیات خود را توضیح دهید.

فعالیت

۱ــ چهار معادله‌ی زیر را حل کنید.

الف) $۳x-۶=۱۲+x$ ب) $۲x-۶=۱۲$

ج) $x-۳=۶$ د) $۴x-۱۲=۲۴$

۲ــ جواب این معادلات با هم چه رابطه‌ای دارند؟

۳ــ هرکدام از این معادلات را با اعمال جبری ساده، به‌ترتیب زیر از یک‌دیگر به‌دست آورید.

(الف) ⟵ (د) ⟵ (ج) ⟵ (ب) ⟵ (الف)

معادلاتی را که با عملیات جبری ساده، از روی هم به دست می‌آیند **معادلات هم ارز** می‌نامند.

معادلات هم ارز جواب‌های یکسانی دارند. برای حل یک معادله، سعی می‌کنیم که یک معادله‌ی هم‌ارز با آن به‌دست آوریم که شکل ساده‌ای داشته باشد.

اگر مجهول معادله‌ای را با x نشان داده باشیم و پس از ساده‌کردن به‌صورت $ax+b=۰$ درآید، به‌طوری که $a\neq ۰$، آن را یک معادله‌ی درجه اول می‌نامند.

در معادله‌ی $ax+b=۰$، a و b اعداد مشخصی هستند و برای حل آن، طرفین این معادله را با $-b$ جمع می‌کنیم و به معادله‌ی $ax=-b$ می‌رسیم. سپس با تقسیم طرفین بر a، نتیجه می‌شود $x=-\frac{b}{a}$.

توجه کنید

جواب معادله $۲x=۰$ برابر است با $x=\frac{۰}{۲}=۰$.

جواب معادله $-۲x=۱$ برابر است با $x=\frac{۱}{-۲}=-\frac{۱}{۲}$.

مسائل

۱ــ با یک خط، هر معادله در جدول (۱) را به عبارت فارسی بیان‌کننده همان معادله، در جدول (۲) (در صورت وجود) وصل کنید.

جدول (۱)

$۲-\frac{x}{۳}=-۲$
$\frac{y}{۲}=۳y$
$\frac{x}{۲}+۵=x-۲$
$\frac{a}{۲}=۳a$
$\frac{x}{۳}-۲=-۲$

جدول (۲)

نصف عددی با عدد پنج جمع شده است و برابر تفریق ۲ از آن عدد شده است.
حاصل تقسیم عددی بر ۳ را از ۲ کم کرده‌ایم، حاصل برابر (۲−) شده است.
نصف عددی برابر سه برابر همان عدد است.

۲ــ معادلات زیر را حل کنید.

۱) $۱۶-۴y=۰$ ۲) $۱۰۰=۵۰-۴d$ ۳) $\frac{a-۳}{۴}=۲$

۴) $۷-۲e=۱۹-۴e$ ۵) $۲/۵+۰/۳x=-۱/۱$ ۶) $۴(۵-۲y)=۵/۶y$

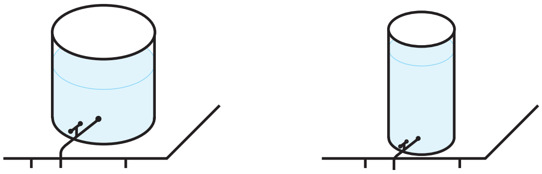
۷) $\frac{۱۲-۵c}{۵}=-\frac{۱}{۱۰}$

۳ــ مجموع سه عدد زوج متوالی ۴۲ می‌باشد. این اعداد را به دست‌آورید.

۴ــ از تعداد بیسکویتی که مریم داشت نیمی را به مادرش و نیم بقیه را به برادرش داد. برای خودش ۵ بیسکویت باقی ماند. تعداد بیسکویت‌های اولیه‌ی او چند تا بوده است؟

۵ــ به ازای چه مقداری از t، تساوی $\frac{۲t+۱}{t-۱}=۰/۲$ برقرار می‌شود.

۶ــ دو منبع آب A و B به شکل زیر در اختیار داریم.



گنجایش منبع A، ۱۲۰ لیتر و گنجایش منبع B، ۷۰ لیتر است. این دو منبع را پر از آب می‌کنیم و در لحظه $t=0$ شیر هر دو را همزمان باز می‌کنیم. در هر ثانیه از شیر منبع A، ۳ لیتر آب و از شیر منبع B، ۲ لیتر آب خارج می‌شود.

الف) کدام منبع زودتر خالی می‌شود و چند ثانیه زودتر خالی می‌شود؟

ب) آیا زمانی می‌رسد که حجم آب در دو منبع مساوی شود؟

ج) آیا زمانی می‌رسد که حجم آب در منبع B نصف حجم آب در منبع A شود؟

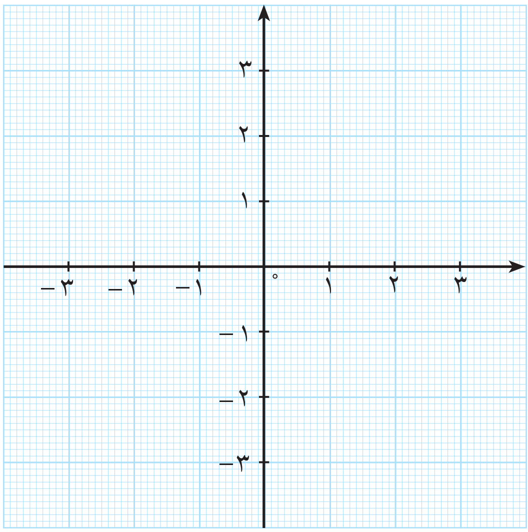
۷ــ دوست شما به دلیل بیماری در جلسه‌ی درس معادلات درجه اول غایب بوده است. در یک برگه‌ی کاغذ چگونگی حل معادله‌ی $۱۷ = ۳x - ۳۲$ را برای او توضیح دهید.

مسئله‌ی زیر در کتاب مفتاح المعاملات باب چهل‌ام آمده است:

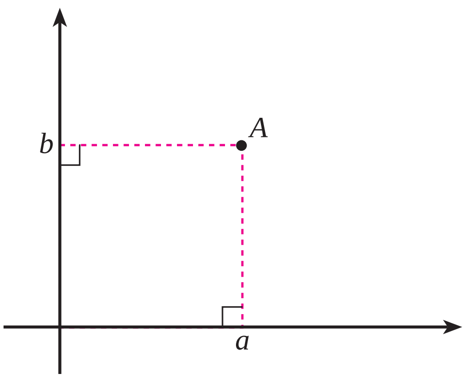
بازرگانی یک درهم به غلامش داد و گفت که به بازار برو و به اندازه یک درهم خربزه بخر و به باربر بده تا بیاورد. هزینه بیست خربزه یک درهم است و باربر شصت خربزه را با یک درهم به مقصد می‌رساند. غلام رفت و خربزه خرید و به همراه باربر آورد. غلام چند خربزه آورده است؟

دستگاه مختصات

دو محور عمود برهم در صفحه رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو محور را مبدأ این محورها در نظر می‌گیریم. پاره خط واحد هر دو محور را یکسان در نظر می‌گیریم. این محورها را یک دستگاه مختصات برای صفحه می‌نامیم.



از یک نقطه دلخواه مانند A در صفحه، خط‌هایی را عمود بر این دو محور رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌ها با محورها اعدادی را نشان می‌دهند که مختصات نقطه‌ی A نامیده می‌شوند.



در شکل بالا زوج $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ مختصات نقطه‌ی A است، a را طول نقطه‌ی A و b را عرض نقطه‌ی A می‌نامند. در این شکل، محور افقی را محور طول‌ها و محور عمودی را محور عرض‌ها می‌نامند.

تمرین در کلاس

۱ــ یک دستگاه مختصات در صفحه رسم کنید.

۲ــ نقاطی در صفحه بیابید که مختصات آن‌ها $\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-۲\\-۲\end{bmatrix}$ باشند و به ترتیب آن‌ها را A، B، C و D بنامید.

۳ــ خط گذرنده از دو نقطه A و D را رسم کنید و بررسی کنید که کدام‌یک از نقاط به مختصات $\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارند.

۴ــ در مورد طول و عرض نقاطی که روی این خط قرار دارند چه حدسی می‌زنید؟

۵ ــ نقاطی که طول آن‌ها مثبت و عرض آن‌ها صفر است را روی شکل مشخص کنید.

۶ــ مختصات نقاطی که روی محور طول‌ها و سمت چپ محور عرض‌ها هستند، چه ویژگی دارند؟

۷ــ نقاطی که عرض‌های آن‌ها منفی و طول آن‌ها صفر است را روی شکل مشخص کنید.

۸ــ مختصات نقاطی که روی محور عرض‌ها و بالای محور طول‌ها هستند، چه ویژگی دارند؟

۹ــ نقاطی از صفحه را که طول و عرض آن‌ها مثبت است روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را **ربع اول** می‌نامند)

۱۰ــ نقاطی از صفحه را که طول آن‌ها منفی و عرض آن‌ها مثبت است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را **ربع دوم** می‌نامند)

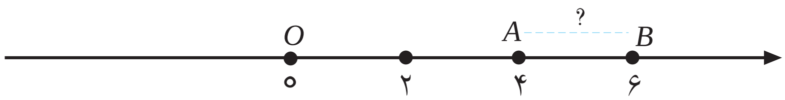
۱۱ــ نقاطی از صفحه را که طول آن‌ها منفی و عرض آن‌ها منفی است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را **ربع سوم** می‌نامند)

۱۲ــ نقاطی از صفحه را که طول آن‌ها مثبت و عرض آن‌ها منفی است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را **ربع چهارم** می‌نامند)

فاصله‌ی بین دو نقطه

فعالیت

روی محور اعداد، مبدأ را O و نقطه‌ی نظیر ۴ را A و نقطه‌ی نظیر ۶ را B بنامید.



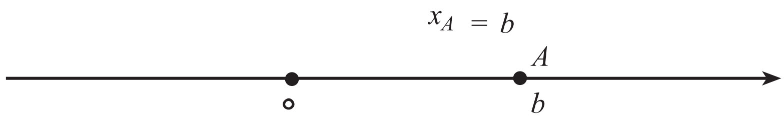
۱ــ طول پاره‌خط‌های OA و OB چقدر است؟

۲ــ طول پاره‌خط AB چقدر است؟ فاصله‌ی دو نقطه نظیر ۴ و ۶ از یکدیگر چقدر است؟

۳ــ دو عدد مثبت دلخواه x و y به‌صورت $x<y$ در نظر بگیرید. نقاط نظیر این دو عدد را روی محور اعداد به ترتیب C و D بنامید. طول پاره‌خط‌های OC و OD چقدر است؟

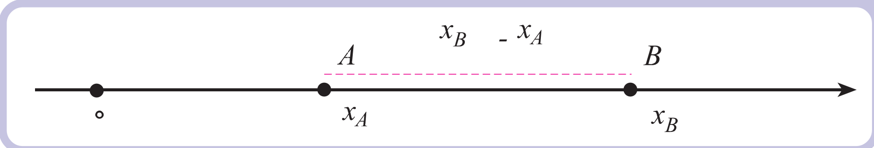
۴ــ طول پاره‌خط CD چقدر است؟ فاصله‌ی نقاط نظیر x و y از یکدیگر چقدر است؟

اگر A یک نقطه روی محور اعداد باشد که نظیر عدد b است، b را طول نقطه‌ی A می‌نامند و آن را با x_A نشان می‌دهند.



اگر A و B دو نقطه روی محور اعداد باشند که A سمت چپ B قرار دارد، داریم :

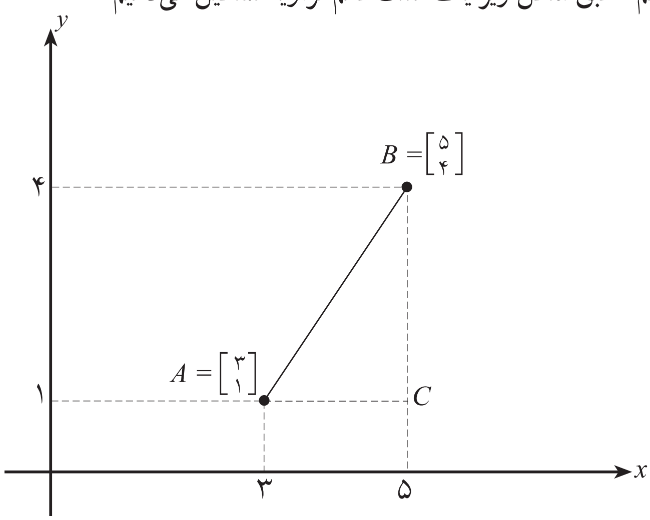
$x_B - x_A =$ فاصله A و B



به‌طورکلی، برای دو نقطه‌ی A و B روی محور اعداد، بدون توجه به آن که کدام نقطه سمت چپ دیگری است، فاصله‌ی بین این دو نقطه برابر است با $|x_A - x_B|$.

اگر دو نقطه‌ی A و B روی محور y ها قرار داشته باشند، فاصله‌ی A تا B چقدر است؟

اگر بخواهیم فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵\\۴\end{bmatrix}$ را در صفحه بیابیم، ابتدا این نقاط را در صفحه مشخص می‌کنیم. طبق شکل زیر یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهیم.

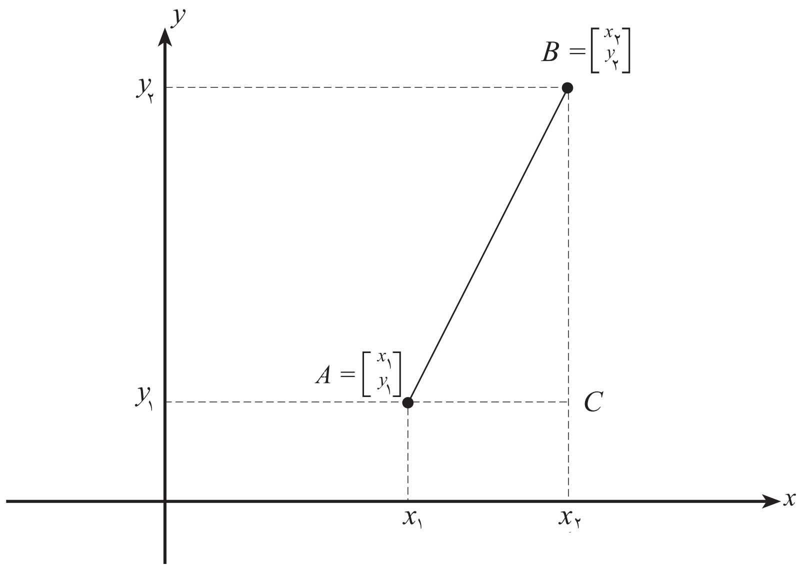


فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی A و B، طول پاره‌خط AB، یعنی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACB است. طول AC برابر $۵-۳=۲$ و طول BC برابر $۴-۱=۳$ است، پس با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم :

$$\text{طول } AB=\sqrt{(۵-۳)^{۲}+(۴-۱)^{۲}}=\sqrt{۲^{۲}+۳^{۲}}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

به‌طورکلی، برای یافتن فاصله‌ی دو نقطه‌ی دلخواه $A=\begin{bmatrix}x_۱\\y_۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x_۲\\y_۲\end{bmatrix}$ می‌توانیم مانند بالا عمل کنیم.

فرض کنید که این دو نقطه در صفحه به شکل زیر باشند و طبق شکل زیر یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهیم.



پاره‌خط AB وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACB است. طول AC برابر $x_۲-x_۱$ و طول BC برابر $y_۲-y_۱$ است، پس داریم :

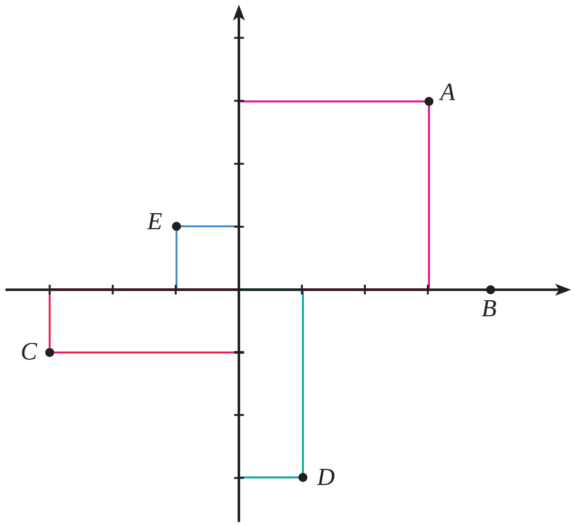
$$\boxed{\text{طول } AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^{۲}+(y_۲-y_۱)^{۲}}}$$

مثال: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-۳\\۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲\\۶\end{bmatrix}$ را بیابید.

با جایگذاری در فرمول فاصله‌ی دو نقطه داریم :

$$\text{فاصله‌ی A و B}=\sqrt{(-۳-۲)^{۲}+(۵-۶)^{۲}}=\sqrt{(-۵)^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۲۵+۱}=\sqrt{۲۶}$$

۱ــ در شکل روبه‌رو مختصات نقاط داده شده را به دست آورید و فاصله‌ی نقطه‌ی A تا هر یک از نقاط دیگر را محاسبه کنید.



۲ــ سه نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix}$ رأس‌های یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع و محیط این مثلث را به‌دست آورید.

ج) نوع این مثلث را از لحاظ متساوی‌الساقین‌بودن یا قائم‌الزاویه‌بودن مشخص کنید.

۳ــ دو نقطه روی محور xها بیابید به طوری که فاصله‌ی آن‌ها چهار باشد و یکی از این نقاط روی نیم‌خط منفی و نقطه‌ی دیگر روی نیم خط مثبت باشد. این مسئله چند جواب دارد؟

۴ــ نقطه‌ی A به عرض ۳ را روی محور yها در نظر بگیرید. دو نقطه‌ی B و C را روی محور xها بیابید به‌طوری که مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین باشد (AB=AC). مسئله چند جواب دارد؟
آیا می‌توانید دو نقطه روی محور xها بیابید که مثلثی ABC متساوی‌الاضلاع باشد؟ مسئله چند جواب دارد؟

رابطه‌ی خطی

برخی پدیده‌ها با هم رابطه دارند. برای مثال، میزان آب رودخانه‌ها با میزان باران آمده رابطه دارد. میزان توانایی جسمانی شما با میزان ورزشی که می‌کنید رابطه دارد. نمره‌ی امتحانی شما با میزان تلاش شما در یادگیری دروس رابطه دارد. پایه‌ی تحصیلی که در آن مشغول تحصیل هستید با سن شما رابطه دارد. به همین ترتیب موارد بسیاری را می‌توانید بیابید که با هم رابطه داشته باشند.

فعالیت

۱ــ در تساوی زیر به جای مربع، علامت یکی از چهار عمل اصلی را قرار دهید.

$$\ldots\ldots \; \square \; \ldots\ldots = ۱۰$$

۲ــ در نقطه‌چین سمت چپ، یک عدد دلخواه قرار دهید، سپس در نقطه‌چین دیگر عددی قرار دهید که تساوی برقرار باشد.

۳ــ آیا برای انتخاب عدد اول محدودیتی وجود دارد؟

۴ــ آیا برای عدد دوم اجباری وجود دارد؟

در فعالیت بالا، هر نقطه‌چین جای یک عدد را نشان می‌داد و می‌توانستیم آن‌ها را با دو نماد مانند x و y نشان دهیم. تساوی بالا نیز یک معادله را نشان می‌دهد، با این تفاوت که در آن دو مجهول وجود دارد که یکی را به انتخاب خود می‌توانستیم تعیین کنیم ولی دیگری از طریق حل معادله مشخص می‌شد.

تشخیص رابطه بین چیزهایی که با آن‌ها سر و کار داریم، نقشی اساسی در زندگی ما دارند. در فعالیت‌های زیر یک نوع ساده از رابطه‌ها مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

فعالیت

سارا و اکرم دو خواهر هستند. وقتی اکرم به دنیا آمد، سارا ۴ ساله بود.

۱ــ وقتی سارا ۷ ساله شود، اکرم چند سال خواهد داشت؟

۲ــ وقتی اکرم ۲۰ ساله شود، سارا چند ساله خواهد شد؟

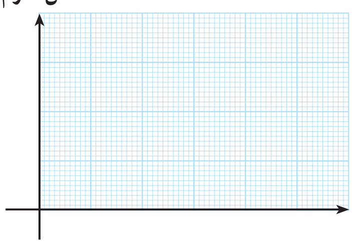
۳ــ اگر سن اکرم را با y و سن سارا را با x نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین این دو مقدار وجود دارد؟

۴ــ اگر اکرم ۵ سال بزرگ‌تر شود، سارا چند سال بزرگ‌تر می‌شود؟ اگر اکرم ۸ سال بزرگ‌تر شود، سارا چند سال بزرگ‌تر می‌شود؟

۵ــ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

سن سارا	۴	۷	□	□	۱۴	□	□
سن اکرم	۰	□	۵	□	□	۱۳	□

۶ــ نقاط این جدول را در شکل مقابل مشخص و به هم وصل کنید. چه شکلی به‌دست می‌آید؟

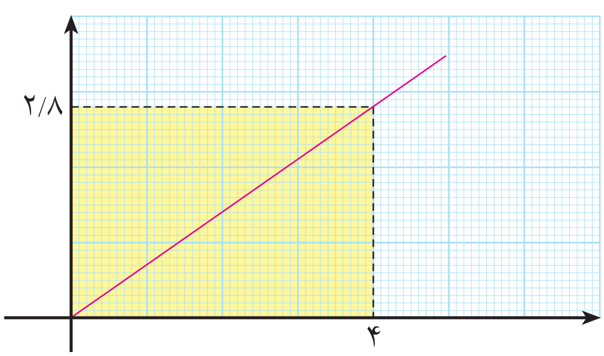


نمودار بالا، رابطه‌ی بین سن سارا و سن اکرم را نشان می‌دهد. از آن جا که این رابطه به‌صورت $y = x + ۴$ می‌باشد، نمودار بالا را نمودار معادله‌ی $y = x + ۴$ نیز می‌نامند.

در فعالیت بالا با تشکیل جدول و یافتن رابطه‌ی بین آن‌ها، نمودار رابطه رسم می‌شد. در فعالیت زیر فرض بر این است که نمودار رابطه داده شده است و از طریق آن می‌خواهیم با بیان ریاضی آن رابطه، و تشکیل جدول آن رابطه، به سؤالات مطرح‌شده پاسخ دهیم.

فعالیت

یک خودرو از زاهدان به طرف کرمان حرکت کرده است. نمودار رابطه بین زمان و مسافتی که خودرو طی می‌کند به شکل زیر است. محور افقی، نشان‌دهنده‌ی زمان و محور عمودی نشان‌دهنده‌ی مسافت طی شده توسط خودرو است. هریک واحد روی محور افقی معادل یک ساعت و هریک واحد روی محور عمودی معادل ۱۰۰ کیلومتر است.



از روی نمودار صفحه‌ی قبل به سؤالات زیر جواب دهید.

۱ــ این خودرو ۴ ساعت پس از حرکت چند کیلومتر با زاهدان فاصله دارد؟

۲ــ جدول زیر را کامل کنید.

ساعت	۰	۲	۴	۶
فاصله تا زاهدان	۰			

۳ــ اگر x نشان‌دهنده‌ی مقدار زمان گذشته (برحسب ساعت) از شروع حرکت و y نشان‌دهنده‌ی مسافت طی‌شده توسط خودرو (برحسب کیلومتر) باشد، چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟ معادله‌ی آن را بنویسید.

۴ــ اگر فاصله‌ی بین زاهدان و کرمان ۵۴۰ کیلومتر باشد، چند ساعت طول می‌کشد تا این خودرو به کرمان برسد؟ درستی جواب خود را از طریق نمودار و معادله‌ای که به‌دست آورده‌اید، نشان دهید. آیا بین این دو جواب تفاوتی وجود دارد؟

۵ــ این خودرو هر ساعت چند کیلومتر راه می‌رود؟ هر دو ساعت چند کیلومتر راه می‌رود؟ نسبت مسافتی که خودرو طی می‌کند به زمان گذرانده شده چقدر است؟ آیا این نسبت ثابت است؟

در تمامی این فعالیت‌ها با مقدارهایی روبه‌رو بوده‌ایم که با یکدیگر رابطه داشته‌اند. اگربین مقادیر دو متغیر رابطه برقرار باشد و یکی از آن‌ها را با x و دیگری را با y نشان دهیم، بیان ریاضی رابطه بین x و y به‌صورت معادله‌ای برحسب x و y است. در مثال سن سارا و اکرم این رابطه به شکل $y = x + ۴$ بود.
در مثال زمان و مسافت طی‌شده، این رابطه به‌صورت $y = ۷۰x$ بود.
نمودار همه‌ی رابطه‌ها در مثال‌های بالا به‌صورت خط بودند. در حالت‌هایی که نمودار رابطه بین دو مقدار به‌صورت خط باشد، گوییم آن دو مقدار به‌طور خطی به هم مرتبط‌اند و با هم **رابطه خطی** دارند.
مثال: کارگری ساعتی ۱۵۰۰ تومان دستمزد می‌گیرد. رابطه‌ی بین ساعت‌های کار این کارگر و دستمزدی که می‌گیرد یک رابطه خطی است. اگر x میزان ساعت کاری و y دستمزد او باشد، این رابطه به‌صورت $y = ۱۵۰۰x$ است.
ویژگی مشترک رابطه‌های خطی آن است که نسبت افزایش یک متغیر به افزایش (یا کاهش) متغیر دیگر مقداری ثابت است. موارد بسیاری هم وجود دارد که رابطه بین دو متغیر، خطی نیست.

فعالیت

رابطه‌ی بین طول ضلع یک مربع و مساحت آن را در نظر بگیرید. طول ضلع مربع را با x و مساحت آن را با y نشان دهید.

۱ــ رابطه‌ی بین x و y را با یک معادله بنویسید.

۲ــ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵
y			۹		

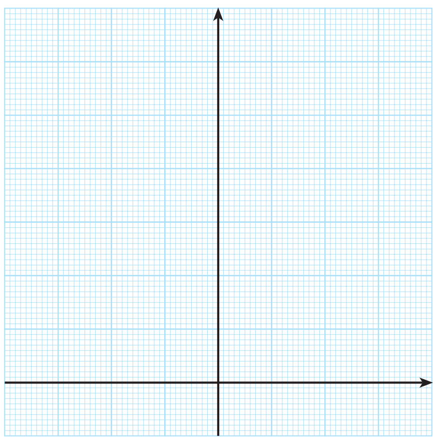
۳ــ در محورهای مختصات، هر واحد روی محور افقی را نمایش طول ضلع مربع برحسب سانتی‌متر و هر واحد روی محور عمودی را نمایش مساحت مربع برحسب سانتی‌مترمربع در نظر بگیرید و نقاط به‌دست‌آمده در جدول را در صفحه معین کنید.

۴ــ میزان افزایش مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به ۲ افزایش می‌یابد حساب کنید. این میزان را وقتی طول ضلع مربع از ۲ به ۳ افزایش می‌یابد حساب کنید. این میزان را وقتی طول ضلع مربع از ۴به۵ افزایش می‌یابد حساب کنید. آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع مربع مقدار ثابتی است؟

۵ــ اگر بخواهیم این نقاط را به هم وصل کنیم، آیا می‌توان با یک خط همه این نقاط را به هم وصل کرد؟

۶ــ با کامل‌کردن جدول زیر، نمودار معادله‌ی $y = x^۲$ را برای مقادیر مثبت x با دقت مناسب رسم کنید.

x	۰	۰/۲	۰/۵	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳
$x^۲$						۱/۴۴		۲/۵۶	۳/۲۴			۵/۷۶		۷/۸۴	



۷ــ از جدول بالا کمک بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

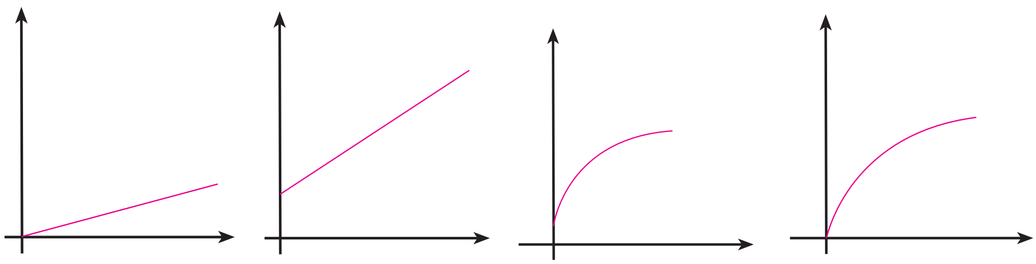
x	−۳	−۲/۸	−۲/۶	−۲/۴	−۲/۲	−۲	−۱/۸	−۱/۶	−۱/۴	−۱/۲	−۱	...
$x^۲$												

۸ــ با استفاده ازجدول بالا، نمودار معادله‌ی $y = x^۲$ را برای مقادیر مثبت و منفی x رسم کنید.

به‌عنوان مثالی دیگر، به رابطه‌ی بین سن و قد یک فرد، از نوزادی تا مرحله‌ی بلوغ و پس از آن، توجه کنید. میزان افزایش قد نوزاد در سال‌های اولیه‌ی زندگی با میزان افزایش قد در سن‌های بالاتر یکسان نیست.

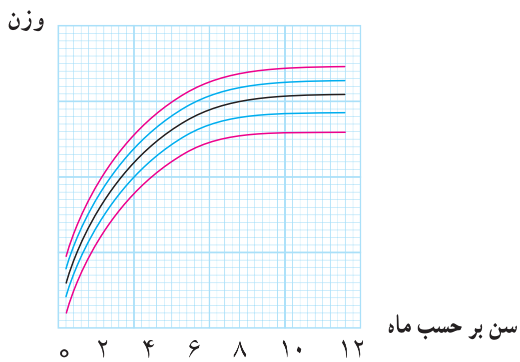
تمرین در کلاس

۱ــ در شکل‌های زیر محور افقی نشان‌دهنده‌ی زمان برحسب ماه و محور عمودی نشان‌دهنده‌ی طول قد یک انسان برحسب متر می‌باشد. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار رشد قد یک انسان در طول زمان باشد؟



۲ــ محل برخورد نمودار با محور y، نشان‌دهنده‌ی چیست؟

محققان با بررسی فرآیند و مراحل رشد کودکان نمودارهایی تنظیم کرده‌اند. پزشکان اطفال از این نمودارها برای بررسی وضعیت رشد کودکان استفاده می‌کنند.



حل یک مسئله

دانش‌آموزان مدرسه‌ای تصمیم گرفتند تا در روز نیکوکاری یک بازار خیریه به نفع نیازمندان برگزار کنند. قرار شد در این بازار یک روزه، شربت بفروشند و سود آن را برای نیازمندان مصرف کنند. آن‌ها یک بسته‌ی صدتایی لیوان یک بار مصرف به مبلغ هزار تومان و مقداری پودر شربت خریدند. هزینه‌ی خود شربت، بدون در نظرگیری قیمت لیوان‌ها، هر لیوان ۹۰ تومان می‌شود و پودر شربت‌های استفاده نشده به فروشگاه پس داده می‌شود.

یکی از دانش‌آموزان پیشنهاد کرد که هر لیوان شربت را ۱۲۵ تومان بفروشیم تا سود کافی ببریم.

دانش‌آموز دیگری گفت : اگر به اندازه کافی شربت نفروشیم ممکن است ضرر کنیم. دانش‌آموزان تصمیم گرفتند برای تشخیص وضعیت سود و ضرر این کار از معلم ریاضی خود کمک بگیرند.

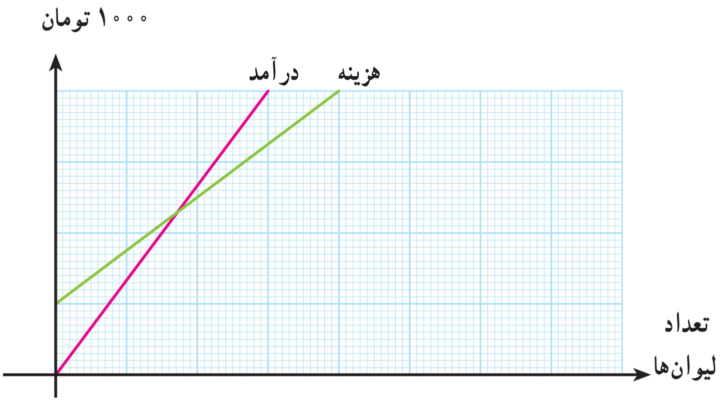
معلم گفت که ابتدا جدولی تشکیل دهید که در آن به‌ازای هر تعداد لیوان فروخته شده، میزان هزینه‌ی مصرف‌شده و درآمد حاصل از فروش و سود (یا ضرر) معلوم شده باشد. جدول زیر را جدول هزینه ــ درآمد می‌نامیم.

جدول

تعداد لیوان‌های فروخته‌شده	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
هزینه‌ی صرف‌شده						
درآمد حاصل از فروش						
سود یا ضرر						

معلم سپس گفت : شما با این جدول می‌توانید تشخیص دهید چه وقت ضرر کرده‌اید و چه وقت سود برده‌اید. آیا می‌توانید از روی این جدول تشخیص دهید با چه میزان فروش نه سود کرده‌اید و نه ضرر؟

معلم گفت : برای تشخیص بهتر وضعیت هزینه و درآمد حاصل از این کار، نمودار مربوط به هزینه و درآمد را مانند نمودار روبه‌رو در یک صفحه رسم کنید. محور افقی را تعداد لیوان‌های فروخته‌شده و محور عمودی را یک بار هزینه و یک بار درآمد در نظر بگیرید. هریک واحد روی محور افقی را معادل ۱۰ لیوان[1] و هریک واحد روی محور عمودی را معادل ۱۰۰۰ تومان در نظر بگیرید.



۱ــ اگرچه تعداد لیوان‌ها عدد حسابی است، و نمودار واقعی گسسته است، ولی برای درک بهتر روابط، مناسب است نمودار را یک خط پیوسته فرض کنیم.

معلم پرسید نقطه‌ی تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

دانش‌آموزان گفتند در این نقطه میزان هزینه و درآمد مساوی خواهد شد.

معلم پرسید : آیا می‌توانید حساب کنید این نقطه، با چه تعداد لیوان فروخته شده، رخ می‌دهد؟

تمرین در کلاس

حل مسئله‌ی بالا را با پاسخ‌گویی به سؤالات زیر کامل کنید.

۱ــ جدول هزینه ــ درآمد را کامل کنید.

۲ــ نمودارهای مربوط به این جدول را رسم کنید.

۳ــ حداقل چند لیوان شربت باید فروخته شود تا سود برده شود؟

۴ــ اگر تمام ۱۰۰ لیوان شربت فروخته شود، چه مقدار سود برده می‌شود؟

۵ــ اگر هر لیوان ۱۵۰ تومان فروخته شود با رسم نمودار درآمد جدید، به سؤالات بالا در این حالت جدید پاسخ دهید.

مسائل

۱ــ قیمت هر بلیط تئاتر ۲۰۰۰ تومان است. اگر x تعداد میهمانان و y مجموع هزینه‌ها باشد :

الف) جدول مقابل را تکمیل کنید.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

ب) چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟

ج) چرا هیچ مقدار کسری در جدول وجود ندارد؟

د) نمودار متناظر جدول فوق را رسم کنید.

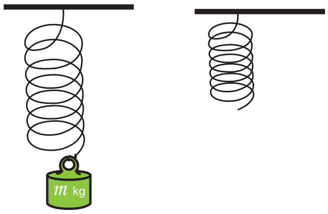
۲ــ در یک مستطیل به طول ۳ و عرض ۲ سانتی‌متر، اگر طول آن را x سانتی‌متر افزایش دهیم مساحت آن از معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید.

مساحت (سانتی‌مترمربع) = ۶ + ۲x

الف) توضیح دهید، اعدادی که در معادله هستند، چه چیزی را نشان می‌دهند.

ب) اگر طول مستطیل را ۳/۲ سانتی‌متر افزایش داده باشیم مساحت مستطیل چه‌قدر می‌شود؟

۳ــ طول یک فنر در حالتی که وزنه‌ای به آن آویزان نشده است، ۸ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم m کیلوگرم به آن آویزان می‌کنیم، طول آن برحسب سانتی‌متر از رابطه‌ی L = ۸+۰/۵m به‌دست می‌آید.

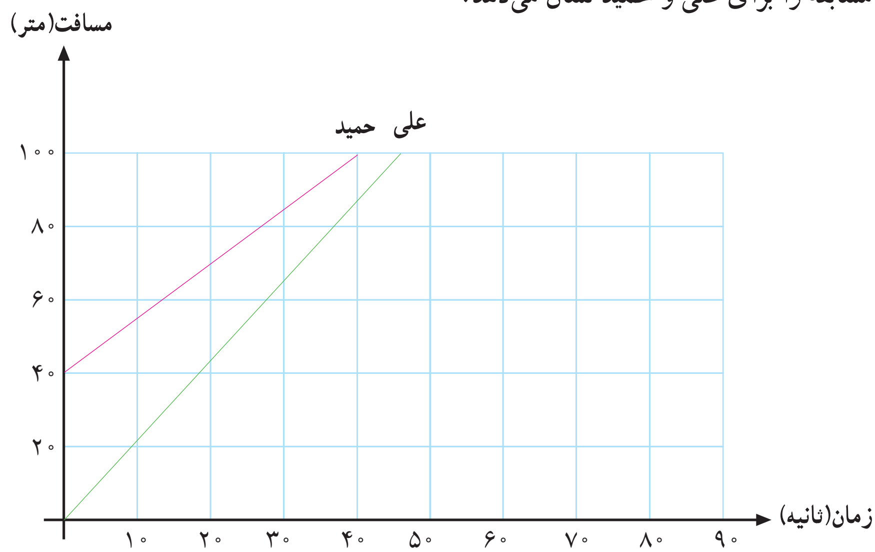


الف) اگر جسمی به جرم ۳/۷۲ کیلوگرم به آن آویزان کنیم، طول فنر چند میلی‌متر افزایش می‌یابد؟

ب) چه وزنه‌ای به فنر آویزان کنیم تا طول آن به ۱۲۳ میلی‌متر برسد؟

۴ــ یک سوسمار در فصل بهار بین ۳۰ تا ۷۰ تخم می‌گذارد و حدود ۹۰ روز طول می‌کشد تا نوزادان سوسمار سر از تخم بیرون آورند. طول هر نوزاد تقریباً ۳۰ سانتی‌متر است. در سال‌های اولیه‌ی زندگی، به‌طور متوسط هر سال ۲۲/۵ سانتی‌متر به طول هر بچه سوسمار اضافه می‌شود. پس از چه مدت طول نوزاد سوسمار به ۸۰ سانتی‌متر می‌رسد؟

۵ــ علی و برادر کوچک‌ترش حمید، با هم یک مسابقه دو ۱۰۰ متر دادند. چون حمید کوچک‌تر بود، علی به او اجازه داد جلوتر بایستد. نمودار زیر چگونگی مسافت طی‌شده نسبت به زمان سپری‌شده از شروع مسابقه را برای علی و حمید نشان می‌دهد.



با توجه به نمودار بالا که پس از پایان مسابقه رسم شده است، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

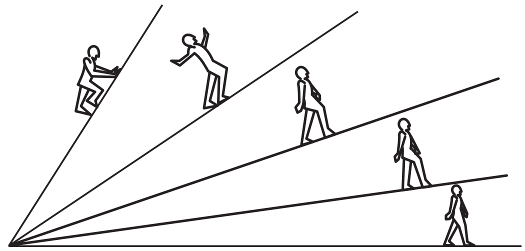
الف) در شروع مسابقه، حمید چند متر جلوتر از علی ایستاده بوده است؟

ب) چند ثانیه طول کشیده است تا علی و حمید به انتهای خط مسابقه برسند؟

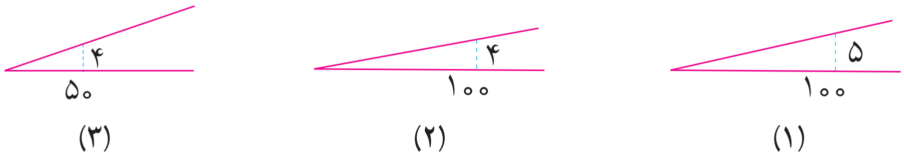
ج) چه کسی برنده شده است؟

د) اگر حمید و علی دویدن را از یک نقطه شروع می‌کردند، چه کسی برنده می‌شد و چند ثانیه زودتر به خط پایان می‌رسید؟

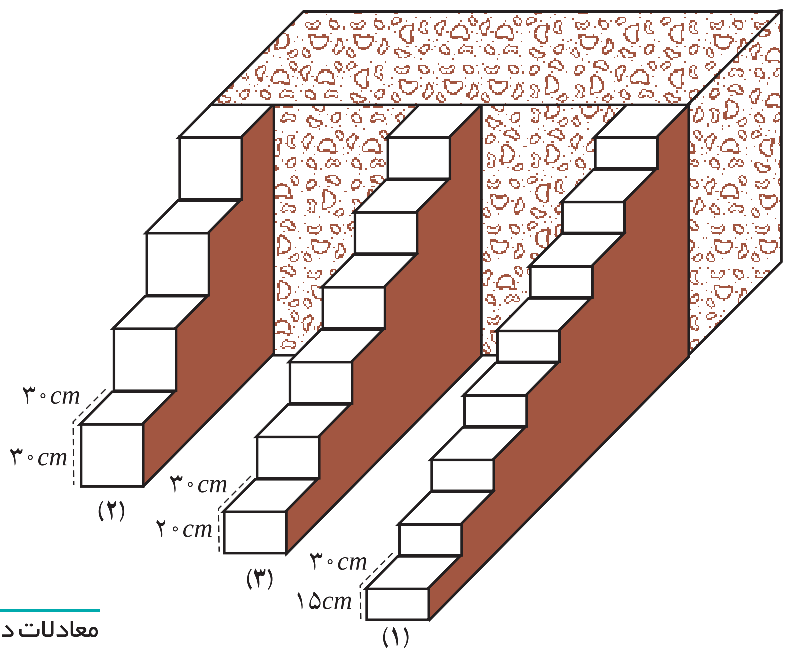
شیب



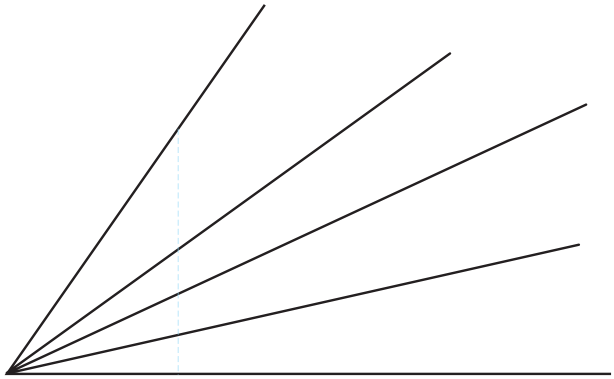
وقتی به کوه می‌روید، از سربالایی‌های متفاوتی بالا می‌روید. بالارفتن از برخی سربالایی‌ها آسان و از برخی دیگر مشکل است. راه‌رفتن روی زمینی که نه سربالایی باشد و نه سرپایینی، از همه آسان‌تر است.
این وضعیت را در بالارفتن از پله‌ها نیز مشاهده می‌کنید، چون همه‌ی پله‌ها مثل هم نیستند. آیا احساس کرده‌اید که بالارفتن از برخی پله‌ها آسان‌تر از بالارفتن از پله‌های دیگر است؟
فرض کنید سه خیابان سربالایی داریم که به هنگام بالارفتن از آن‌ها، در اولی به‌ازای هر ۱۰۰ متر که در راستای افقی جلو می‌رویم،۵ متر ارتفاع ما زیاد می‌شود، و در دومی به‌ازای هر ۱۰۰ متر که در راستای افقی جلو می‌رویم،۴ متر ارتفاع ما زیاد می‌شود، و در سومی به‌ازای هر ۵۰ متر که در راستای افقی جلو می‌رویم،۴ متر ارتفاع ما زیاد می‌شود. بالارفتن از کدام خیابان آسان‌تر است؟



در زیر سه نمونه پله آورده شده است. بالارفتن از کدام یک آسان‌تر است؟



میزان سربالایی بودن یک خیابان را می‌توانیم با **نسبت «مقدار افزایش ارتفاع»** به **«مقدار مسافت افقی طی‌شده»** اندازه‌گیری کنیم. این نسبت را **شیب** می‌نامند.



$$\text{شیب} = \frac{\text{مقدار افزایش ارتفاع}}{\text{مقدار مسافت افقی طی شده}}$$

در مورد مثال خیابان‌ها در صفحه‌ی قبل، شیب آن‌ها را به شکل زیر حساب می‌کنیم:

$$\text{شیب خیابان (۱)} = \frac{۵}{۱۰۰} = ۰/۰۵$$

$$\text{شیب خیابان (۲)} = \frac{۴}{۱۰۰} = ۰/۰۴$$

$$\text{شیب خیابان (۳)} = \frac{۴}{۵۰} = ۰/۰۸$$

با مقایسه‌ی این شیب‌ها به‌سادگی می‌توان تشخیص داد که در کدام خیابان، آسان‌تر می‌توان رو به بالا حرکت کرد. هرچه شیب خیابانی بیشتر باشد بالارفتن از آن مشکل‌تر خواهد بود.

پله‌ها نیز مانند خیابان‌های سربالایی هستند و هر پله نشان می‌دهد که به‌ازای مسافت افقی طی شده، چه مقدار ارتفاع افزایش پیدا می‌کند. شیب پله‌های مثال بالا عبارت است از:

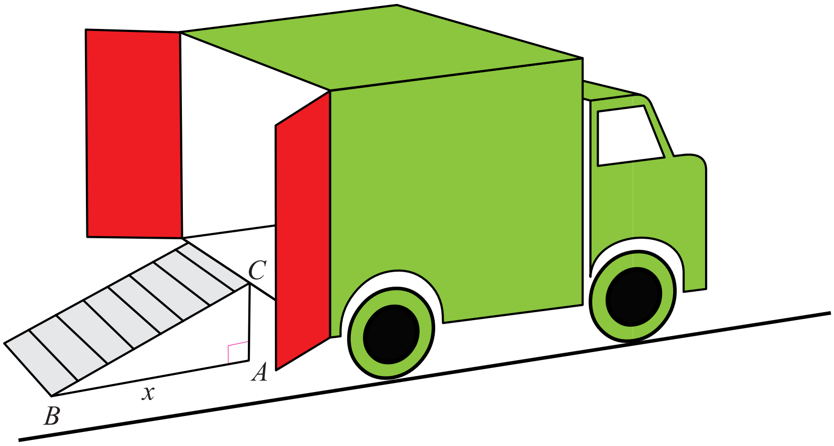
$$\text{شیب پلکان (۱)} = \frac{۱۵}{۳۰} = ۰/۵$$

$$\text{شیب پلکان (۲)} = \frac{۳۰}{۳۰} = ۱$$

$$\text{شیب پلکان (۳)} = \frac{۲۰}{۳۰} \simeq ۰/۶۶$$

پس، بالارفتن از پله‌ی اول آسان‌تر از دو پله‌ی دیگر و بالا رفتن از پله‌ی دوم سخت‌تر از دو پله‌ی دیگر است.

مثال: در یک اسباب‌کشی، برای حمل بارها به داخل کامیون، به کمک یک تخته‌ی الوار سطح شیب‌داری ساخته شده است.



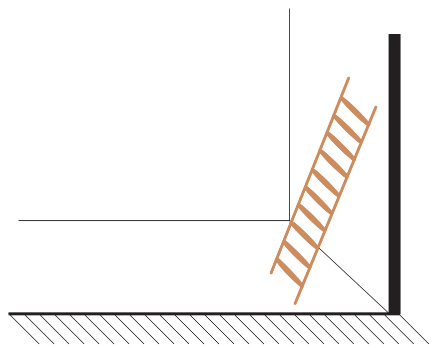
اگر طول الوار ۵ متر و فاصله‌ی لبه‌ی درب کامیون تا سطح زمین ۱ متر باشد، شیب این سطح چقدر است؟

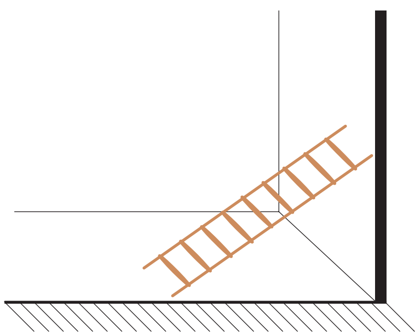
برای یافتن پاسخ، باید فاصله‌ی نقطه‌ی پای الوار تا کامیون را حساب کنیم. اگر این فاصله را x بنامیم، با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که می‌بینید، می‌توانیم بنویسیم : $x^{۲}+۱^{۲}=۵^{۲}$ ، پس $x=\sqrt{۲۴}$. بنابراین

$$\text{شیب}=\frac{۱}{\sqrt{۲۴}}\approx\frac{۱}{۵}=۰/۲$$

تمرین در کلاس

دو نردبان ۴ متری را به شکل‌های (۱) و (۲) به دیوار تکیه داده‌ایم. در شکل (۱) فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار ۱/۲ متر و در شکل (۲) این فاصله ۲/۷ متر است.

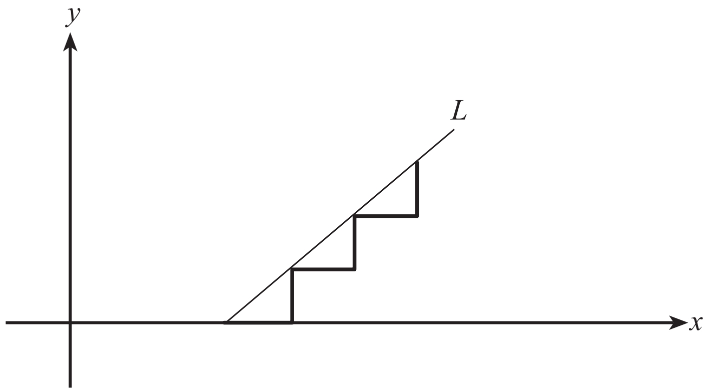

(۱)


(۲)

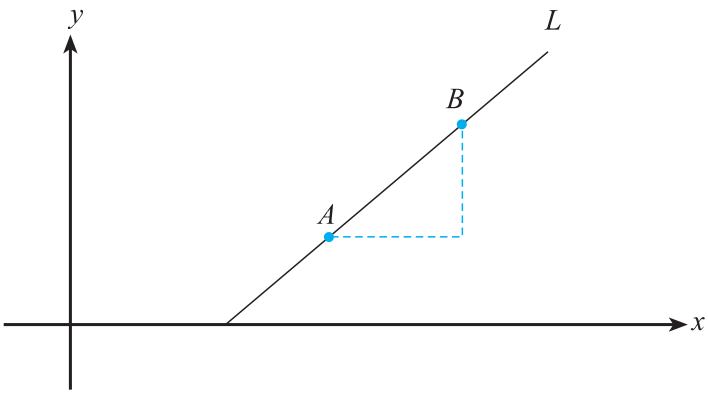
۱ــ شیب نردبان را در این دو حالت به‌طور تقریبی با استفاده از ماشین‌حساب، حساب کنید. کدام یک شیب بیشتری دارد؟

۲ــ اگر نردبان را به گونه‌ای قرار دهیم که بتوانیم تا ارتفاع ۳ متری بالا رویم، شیب نردبان چقدر خواهد شد؟

شیب خط

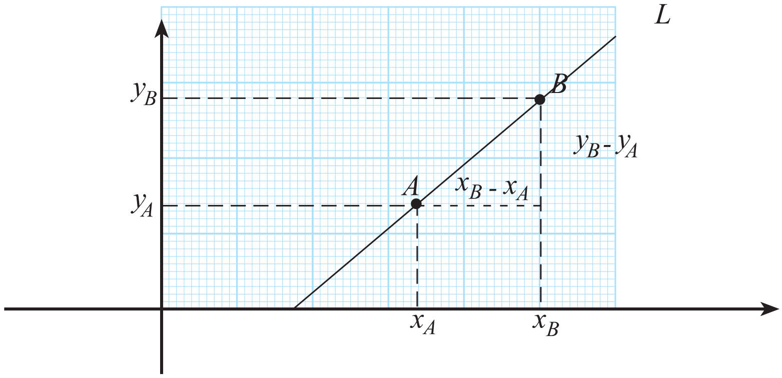


شکل بالا برش عرضیِ یک پلکان را نشان می‌دهد. خط L لبه‌های پله‌ها را به هم وصل می‌کند. شیب خط L را به‌صورت شیب این پلکان تعریف می‌کنند. شیب پلکان به‌صورت نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی شده است.



اگر فقط به خط L توجه کنیم و از یک نقطه‌ی آن مانند A به نقطه‌ی دیگری مانند B حرکت کنیم، نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی‌شده را می‌توانیم به‌صورت نسبت تغییر عرض به تغییر طول در نظر بگیریم. این نسبت را شیب خط L می‌نامند.

نقاط $A=\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ را روی خط L در نظر بگیرید. اگر روی این خط از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B حرکت کنیم، میزان تغییر ارتفاع برابر است با y_B-y_A و میزان مسافت افقی طی‌شده برابر است با x_B-x_A.



پس، اگر شیب خط L را با m نشان دهیم داریم :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

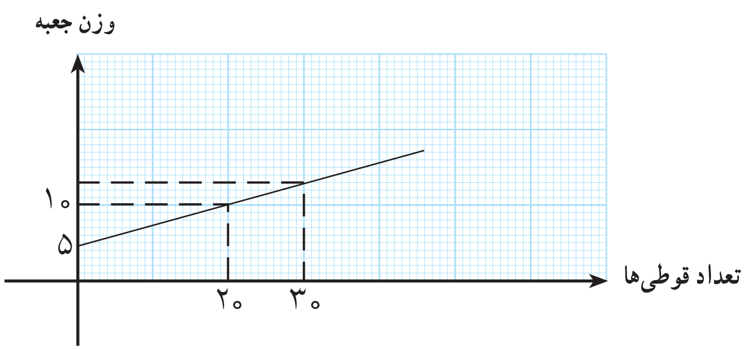
مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط باشند، شیب آن خط چقدر است؟

حل: با حرکت از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B، ۲ واحد به طول نقطه‌ی A و ۳ واحد به عرض آن اضافه می‌شود، پس شیب این خط برابر است با $\frac{۳}{۲}$.

اکنون شما شیب این خط را با جایگذاری در فرمول بالا به دست آورید و با مقداری که به‌دست آورده‌ایم مقایسه کنید.

تمرین در کلاس

در یک جعبه تعدادی قوطی با وزن‌های یکسان قرار می‌دهیم. وزن جعبه با قوطی‌هایی که در آن قرار داده‌ایم بستگی به تعداد قوطی‌ها دارد. نمودار زیر رابطه‌ی وزن جعبه را با تعداد قوطی‌هایی که در آن است نشان می‌دهد. محور افقی تعداد قوطی‌ها و محور عمودی وزن جعبه را برحسب کیلوگرم نشان می‌دهد.



۱ــ از روی نمودار تعیین کنید وزن جعبه در حالتی که ۲۰ قوطی در آن قرار دارد، چقدر است؟

۲ــ از روی نمودار تعیین کنید وزن جعبه در حالتی که ۳۰ قوطی در آن قرار دارد، چقدر است؟

۳ــ وزن جعبه‌ی خالی چقدر است؟

۴ــ شیب این خط چقدر است؟

۵ــ اگر تعداد قوطی‌ها را x و وزن جعبه‌ی حاوی x قوطی را y بنامیم، رابطه‌ی بین وزن جعبه و تعداد قوطی‌هایی را که در آن است به‌صورت ریاضی بنویسید.

۶ــ شیب این خط چه ویژگی از قوطی‌ها را نشان می‌دهد؟

فعالیت

۱ــ با رسم محورهای مختصات، دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}$ را در صفحه نشان دهید و خط گذرنده از این دو نقطه را رسم کنید.

۲ــ طول کدام نقطه بیشتر است؟ عرض کدام نقطه بیشتر است؟

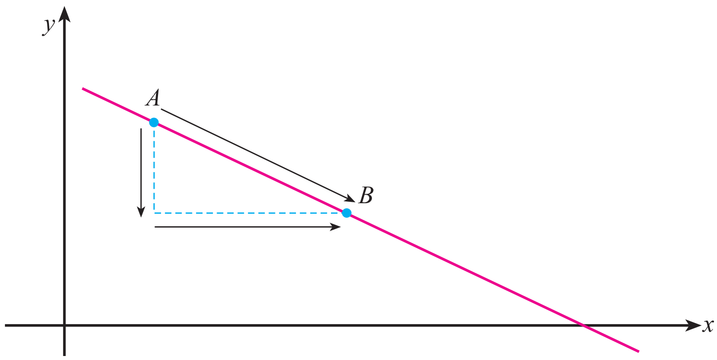
۳ــ با حرکت روی این خط وقتی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برسیم، طول‌ها و عرض‌های نقاط، از لحاظ افزایش یا کاهش، چگونه تغییر می‌کنند؟

۴ــ شیب این خط را طبق فرمول حساب کنید. منفی‌شدن شیب چه چیزی را نشان می‌دهد؟

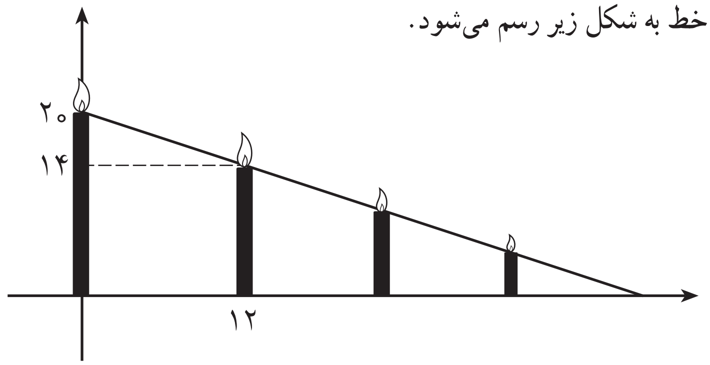
خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آن‌ها، عرض این نقاط کاهش می‌یابد، **شیب منفی** دارند.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۶\\۳\end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط باشند، شیب آن خط چقدر است؟

حل: با حرکت از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B، ۴ واحد به طول نقطه‌ی A اضافه می‌شود ولی ۲ واحد از عرض آن کم می‌شود، پس شیب این خط برابر است با $-\frac{۱}{۲}=\frac{-۲}{۴}$.



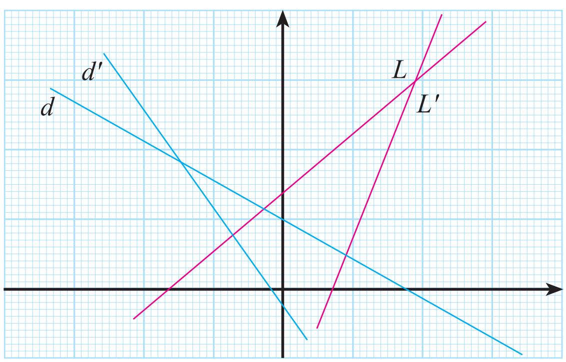
مثال: شمعی به طول ۲۰ سانتی‌متر به‌طور یکنواخت می‌سوزد. طول شمع با گذشت زمان کاهش می‌یابد. با رسم محورهای مختصات، محور افقی را نشان‌دهنده‌ی زمان، برحسب دقیقه، و محور عمودی نشان‌دهنده‌ی طول شمع، برحسب سانتی‌متر، در نظر بگیرید. با وصل کردن نوک شمع در زمان‌های مختلف یک خط به شکل زیر رسم می‌شود.



شیب این خط برابر است با $\frac{۱۴-۲۰}{۱۲-۰}=\frac{-۶}{۱۲}=-۰/۵$. منفی بودن شیب نشان می‌دهد که با افزایش زمان طول شمع کاهش می‌یابد.

تمرین در کلاس

در شکل زیر خط‌های L و L′ شیب مثبت و خط‌های d و d′ شیب منفی دارند. درستی این مطلب را با درنظرگرفتن دو نقطه روی هریک از این خط‌ها و اندازه‌گیری طول و عرض این نقاط و محاسبه‌ی شیب این خط‌ها نشان دهید و جدول زیر را تکمیل کنید.



خط	L	L′	d	d′
شیب خط				

مسائل

۱ــ آقای تبریزی تصمیم گرفت به اتفاق دو تن از دوستانش کارگاه تولید وسایل آموزشی راه‌اندازی کند. آن‌ها تصمیم گرفتند کارگاه را در محلی دورافتاده تأسیس کنند تا هزینه‌ی اجاره‌ی کمتری پرداخت کنند. هزینه‌ی یک ماه آن‌ها (شامل اجاره محل، آبونمان آب، گاز، برق) ۱۵۰۰۰۰۰۰ تومان شد (این مبلغ را **هزینه‌ی ثابت** می‌نامند). هزینه‌ی تولید هر ۱۰۰ قطعه نیز ۵۰۰۰۰۰ تومان برآورد شد. (این هزینه را **هزینه‌ی متغیر** می‌نامند زیرا بستگی به میزان تولید دارد.)

الف) اگر x تعداد بسته‌های صدتایی از قطعات تولیدشده و y هزینه‌ی کارگاه برحسب میلیون تومان برای تولید x بسته باشد، رابطه‌ی بین x و y را بنویسید.

ب) نمودار رابطه‌ی بین x و y را در محورهای مختصات که هر واحد روی محور xها یک بسته‌ی ۱۰۰تایی از قطعات و هر واحد روی محور yها ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان را نشان دهد، رسم کنید.

ج) x و y با هم رابطه‌ی خطی دارند، محل برخورد نمودار رابطه‌ی بین x و y با محور yها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

د) شیب خط نشان‌دهنده‌ی رابطه‌ی بین x و y را به‌دست آورید. شیب، چه چیزی را نشان می‌دهد؟ آیا شیب این خط، در معادله‌ی رابطه‌ی بین x و y مشاهده می‌شود؟

هـ) اگر هزینه‌ی ثابت کارگاه کم یا زیاد شود، چه تغییری در معادله‌ی رابطه‌ی بین x و y و چه تغییری در نمودار این رابطه ایجاد می‌شود؟

۲ــ سه نقطه $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}$ را در صفحه در نظر بگیرید.

الف) شیب خط‌هایی که اضلاع مثلث ABC را می‌سازند حساب کنید.

ب) نقطه‌ی C را طوری تغییر دهید تا شیب همه‌ی اضلاع مثلث ABC مثبت شود.

ج) نقطه‌ی A را طوری تغییر دهید تا شیب همه‌ی اضلاع مثلث ABC منفی شود.

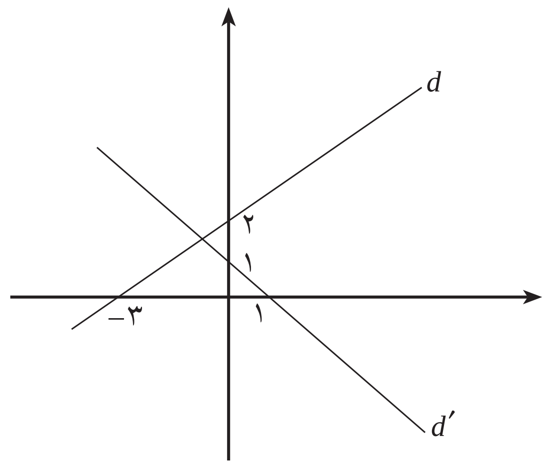
۳ ــ برای خرید یک کالای ۴۸۰,۰۰۰ تومانی قرار شده است بدون پیش پرداخت، ماهیانه ۶۰,۰۰۰ تومان قسط پرداخت کنیم.

الف) اگر x تعداد ماه‌هایی باشد که قسط پرداخته‌ایم و y میزان بدهی ما به فروشنده (برحسب ۱۰۰,۰۰۰ تومان) باشد، رابطه‌ی بین x و y را بنویسید.

ب) شیب خط به دست آمده چه چیزی را نشان می‌دهد؟

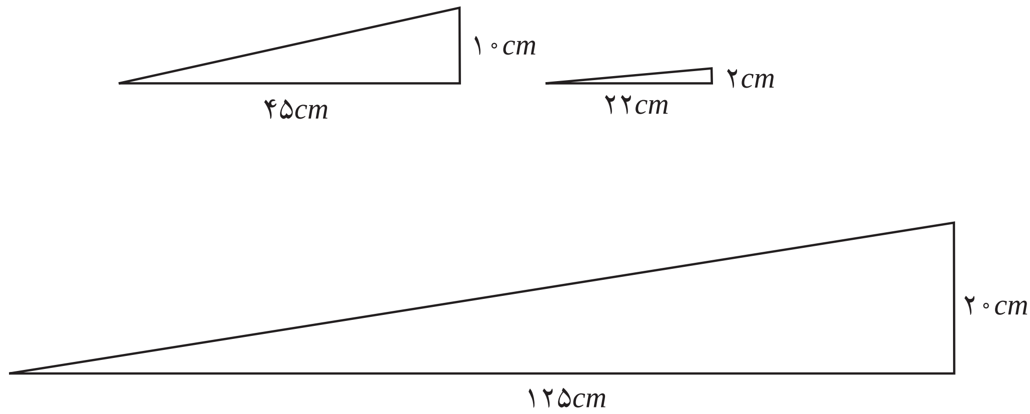
ج) نمودار خط به دست آمده را رسم کنید و مشخص کنید که کدام قسمت از این خط به این رابطه مربوط می‌شود.

۴ــ شیب هر یک از خط‌های زیر را به دست آورید.



۵ــ طبق قوانین شهرسازی، شیب جوی‌هایی که آب باران را هدایت می‌کنند، باید عددی بین ۰/۱ و ۰/۲ باشد.

شیب کدام‌یک از مثلث‌ها می‌تواند به عنوان شیب جوی شهر در نظر گرفته شود؟



۶ــ نردبانی به دیواری تکیه داده شده است. فاصله‌ی سرِنردبان از سطح زمین ۱۰ متر است. فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار چند متر باشد تا شیب نردبان $\frac{4}{3}$ باشد؟

معادله‌ی خط

اگر مقدارهای دو متغیر با هم رابطه‌ی خطی داشته باشند و آن‌ها را با x و y نشان داده باشیم، بیان ریاضی این رابطه به‌صورت $y = mx + b$ است که در آن m و b اعداد ثابتی هستند. نمودار این معادله، یک خط است.

فعالیت

۱ــ خط به معادله‌ی $y = ۳x + ۴$ را رسم کنید.

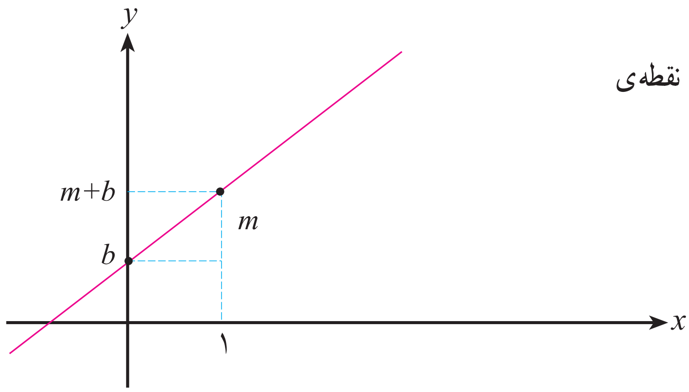
۲ــ هریک از نقاط زیر را در صفحه مشخص کنید و از روی شکل بگویید کدام یک از این نقاط روی خط به معادله‌ی بالا قرار دارند؟

$$\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}۱\\۷\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$$

۳ــ با جایگذاری مختصات هر نقطه در معادله‌ی خط، پاسخ خود را بررسی کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

> اگر نقطه‌ای روی خط قرار داشته باشد، با جایگذاری مختصات آن در معادله‌ی خط، تساوی برقرار می‌شود.

برای به‌دست‌آوردن شیب یک خط کافی است دو نقطه روی آن خط پیدا کنیم. خط به معادله‌ی $y = mx + b$ را در نظر بگیرید. جایی که این خط محور yها را قطع می‌کند، نقطه‌ای است که طول آن صفر است. با جایگذاری $x = ۰$ در معادله این خط نتیجه می‌شود $y = b$ ، b را عرض از مبدأ این خط می‌نامند. پس، $\begin{bmatrix}۰\\b\end{bmatrix}$ یک نقطه از این خط است. با جایگذاری $x = ۱$ در معادله‌ی این خط نتیجه می‌شود $y = m + b$. پس، $\begin{bmatrix}۱\\m + b\end{bmatrix}$ یک نقطه‌ی دیگر از این خط است.



بنابراین شیب این خط برابر است با $m = \frac{m+b-b}{۱-۰}$. توجه کنید که شکل صفحه‌ی قبل برای حالتی رسم شده که $m>۰$ و $b>۰$. برای سایر حالات m و b، خودتان شکل مناسب را رسم کنید.

> اگر معادله‌ی خطی به‌صورت $y = mx + b$ باشد، شیب آن برابر m است.

مثال: معادله‌ی خطی را بیابید که شیب آن ۳ است و از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

اگر شیب خطی برابر m باشد، معادله‌ی آن به‌صورت $y = mx + b$ است. پس، معادله‌ی این خط به‌صورت $y = ۳x + b$ است. با جایگذاری مختصات نقطه‌ی A در معادله، می‌توان مقدار b را پیدا کرد.

$$۲ = ۳ \times ۱ + b$$

$$b = ۲ - ۳ = -۱$$

با جایگذاری مقدار b در معادله خواهیم داشت : $y = ۳x - ۱$.

فعالیت

۱ــ معادله‌ی خطی که شیب آن m است و از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

۲ــ معادله‌ی خطی که شیب آن m است و از نقطه‌ی $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

۳ــ معادله‌ی خطی که شیب آن m است و از نقطه‌ی $C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

۴ــ معادله‌ی خطی که شیب آن m است و از نقطه‌ی $D = \begin{bmatrix} x_۰ \\ y_۰ \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

از این فعالیت نتیجه می‌شود :

> معادله‌ی خطی به شیب m که از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} x_۰ \\ y_۰ \end{bmatrix}$ می‌گذرد به شکل زیر است.
>
> $$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن (-۲) است.

$$y - ۲ = -۲(x - ۳)$$

$$y = -۲x + ۸$$

توجه کنید

درخط به معادله $۲y = x + ۲$ ، شیب برابر ۱ نیست. چرا؟

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

ابتدا شیب این خط را حساب می‌کنیم. چون A و B دو نقطه از این خط هستند، شیب آن برابر است با

$$m = \frac{۳ - ۲}{۵ - (-۱)} = \frac{۱}{۶}$$

پس، معادله‌ی این خط به‌صورت زیر است :

$$y - ۲ = \frac{۱}{۶}(x - (-۱)) = \frac{۱}{۶}(x + ۱)$$

$$y - ۲ = \frac{۱}{۶}x + \frac{۱}{۶}$$

$$y = \frac{x}{۶} + ۲\frac{۱}{۶}$$

بیندیشیم

در مثال روبرو، آیا برای نوشتن معادله خط، می‌توانستیم از نقطه‌ی B استفاده کنیم؟

تمرین در کلاس

الف) خط‌های به معادله‌های $y = ۲x + ۱$ ، $y = ۲x - ۱$ ، $y = ۲x + ۳$ ، $y = ۲x - ۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ب) وضعیت این خط‌ها نسبت به هم چگونه است؟

ج) شیب این خط‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

د) در حالت کلی در ارتباط با توازی چند خط با یکدیگر و رابطه‌ی بین شیب آن‌ها چه حدسی می‌زنید؟

خط‌هایی که شیب یکسان دارند با هم موازی‌اند.

فعالیت

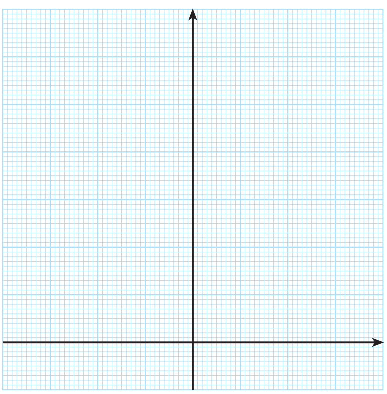
۱ــ خط‌های به معادله‌های زیر را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید.

$y = ۳x + ۲$

$y = ۲x + ۲$

$y = x + ۲$

$y = ۰/۵x + ۲$



۲ــ با بررسی و مقایسه وضعیت خط‌های بالا، در مورد وضعیت خط به معادله‌ی $y = ۰ \times x + ۲ = ۲$ چه حدسی می‌زنید؟

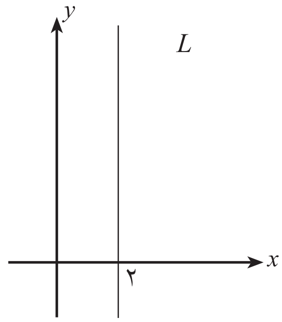
۳ــ پنج نقطه‌ی دلخواه روی خط $y = ۲$ در نظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

	A	B	C	D	E
x					
y					

۴ــ ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

۵ــ با توجه به آن‌چه که انجام داده‌اید، توضیح دهید وضعیت خط $y = b$ (b می‌تواند هر عدد ثابتی باشد) چگونه است و در مورد طول و عرض نقاط روی این خط چه می‌توان گفت؟

۶ــ خط L موازی محور yها به شکل زیر رسم شده است. پنج نقطه‌ی دلخواه روی آن در نظر بگیرید و جدول زیر را تکمیل کنید.



	A	B	C	D	E
x					
y					

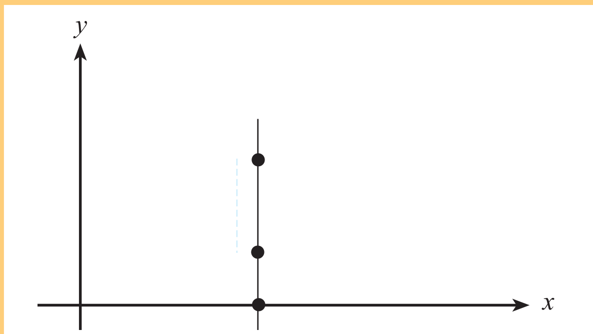
۷ــ ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

دیدیم که تمام نقاطی که عرض آن‌ها ۲ بود خطی را می‌ساختند که معادله‌ی آن $y = ۲$ بود. در این‌جا نیز تمام نقاطی که طول آن‌ها ۲ است خطی را می‌سازند که معادله‌ی آن را $x = ۲$ در نظر می‌گیریم.

در حالت کلی $x = b$ ، معادله‌ی خطی است موازی محور yها که طول همه‌ی نقاط آن برابر b است.

بیندیشیم

آیا می‌توان برای خط‌هایی که بر محور xها عمود هستند، تعریف و فرمول شیب خط را به کار برد؟



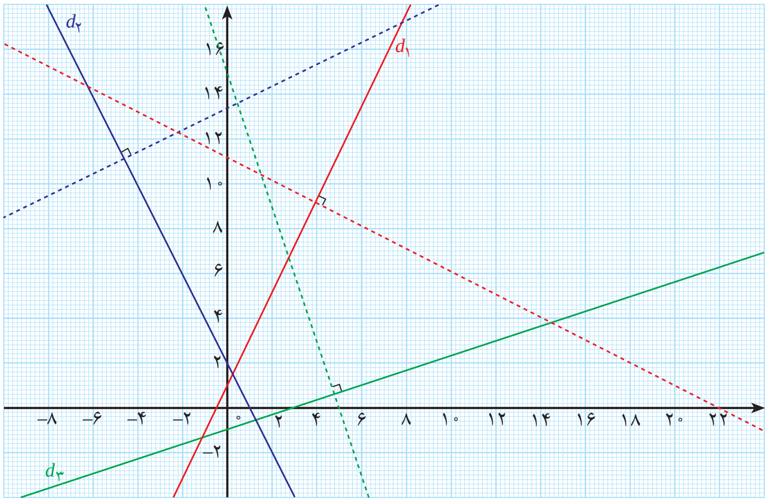
معادله کلی یک خط دلخواه در صفحه را می‌توان به صورت $ax + by + c = ۰$ در نظر گرفت. در حالتی که $b \neq ۰$ ، این معادله را به شکل استاندارد $y = mx + d$ می‌توان نوشت که در آن m شیب این خط است. در حالت $b = ۰$ این معادله به صورت $x = d$ در می‌آید که خطی عمود بر محور xها است.

خط‌های عمود بر هم

دیدیم که موازی‌بودن خط‌ها را می‌توانیم از طریق شیب آن‌ها تشخیص دهیم. در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا عمودبودن دو خط را هم می‌توانیم از طریق شیب آن دو خط تشخیص دهیم.

فعالیت

در شکل زیر سه خط d_1 و d_2 و d_3 و خطوط عمود بر آن‌ها رسم شده‌اند.



۱ــ دو نقطه روی هر خط عمود در نظر بگیرید و به کمک خط‌کش، با اندازه‌گیری طول و عرض این نقاط، شیب هریک از این خط‌ها را به‌دست آورید.

جدول زیر را کامل کنید.

معادله‌ی خط	$d_1: y = 2x + 1$	$d_2: y = 2x + 2$	$d_3: y = \frac{1}{3}x - 1$	$d_4: y = x - 3$
شیب خط				
شیب خط عمود				

۲ــ آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای بین شیب‌های دو خط عمود بر هم وجود دارد؟

شرط عمودبودن دو خط با شیب‌های m و m'، آن است که $mm' = -1$.

مسائل

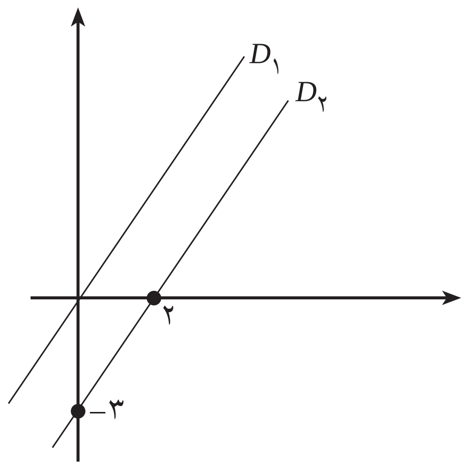
۱ــ معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن ۲ است.

۲ــ معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

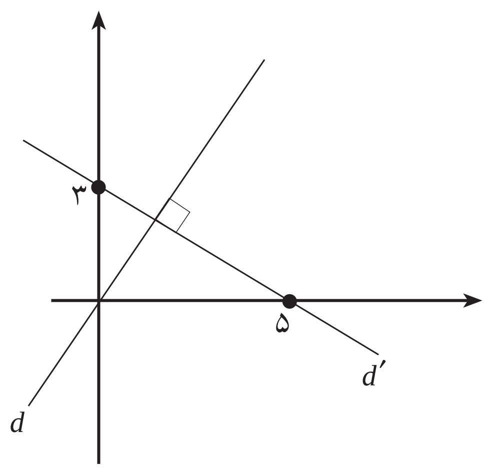
۳ــ معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$ می‌گذرد و با نیمساز ربع اول $(y=x)$ موازی است.

۴ــ وضعیت دو خط به معادله‌های $x+y=۱$ و $۲x+۲y=۵$ نسبت به هم چگونه است؟

۵ــ معادله دو خط موازی $D_۱$ و $D_۲$ را در شکل زیر بنویسید.



۶ــخط d بر d' عمود است. با توجه به شکل زیر معادله‌ی خطوط d و d' را بنویسید.



دستگاه معادلات خطی دومجهولی

معادلاتی که در ابتدای این فصل بررسی کردیم دارای یک مجهول بودند. اما در حل بسیاری از مسائل، بیش از یک مجهول وجود دارد؟ برای یافتن این مجهولات، بیش از یک معادله مورد نیاز است و به همین دلیل معادلات داده‌شده را دستگاه معادلات می‌نامند. در این بخش یک حالت ساده از دستگاه معادلات را که دستگاه معادلات خطی دومجهولی نام دارد توضیح داده خواهد شد.

فعالیت

آقای کریمی می‌خواهد در یک باشگاه ورزشی ثبت‌نام کند. در اطراف خانه‌ی او دو باشگاه وجود دارد که هرکدام یک حق عضویت اولیه دارد و بابت هر جلسه استفاده نیز مبلغی دریافت می‌کند. باشگاه اول ۵۰۰۰ تومان حق عضویت می‌گیرد و برای هر جلسه استفاده ۵۰۰ تومان دریافت می‌کند. باشگاه دوم ۲۰۰۰ تومان حق عضویت می‌گیرد ولی برای هر جلسه استفاده ۷۰۰ تومان دریافت می‌کند.

۱ــ جدول زیر را که در آن، هزینه‌ی استفاده از هر باشگاه به‌ازای تعداد جلسات، آمده است کامل کنید.

تعداد جلسات	۰	۱	۳	۸	۱۲	۱۸
هزینه‌ی کل در باشگاه اول						
هزینه‌ی کل در باشگاه دوم						

۲ــ هزینه‌ی استفاده از یک باشگاه را با y و تعداد جلسات استفاده‌شده از آن را با x نشان دهید و رابطه‌ی بین تعداد جلسات و هزینه‌ی کل را، به‌صورت دو معادله برای این دو باشگاه بنویسید و نمودار هر معادله را رسم کنید.

۳ــ یکی از دوستان آقای کریمی که در یکی از این دو باشگاه ثبت‌نام کرده می‌گوید : من تاکنون ۱۲ جلسه به باشگاه رفته‌ام و ۱۱۰۰۰ تومان پرداخته‌ام. با استفاده از نمودار تعیین کنید که این شخص در کدام باشگاه ثبت‌نام کرده است.

۴ــ با استفاده از معادله‌هایی که به‌دست آورده‌اید، معلوم کنید دوست آقای کریمی در کدام باشگاه ثبت نام کرده است و درستی پاسخ خود به سؤال قبل را بررسی کنید.

۵ــ اگر آقای کریمی بخواهد فقط ۱۰ جلسه از باشگاه استفاده کند، با استفاده از نمودار و معادله‌های به‌دست آمده نشان دهید ثبت نام در کدام باشگاه برای او باصرفه‌تر است؟

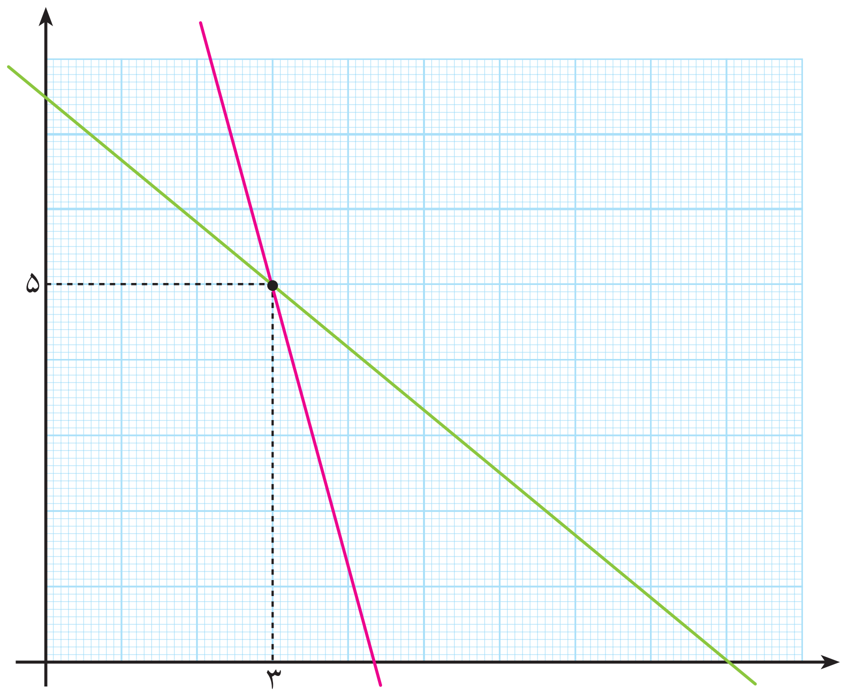
۶ــ برای ۱۵ جلسه استفاده، کدام باشگاه باصرفه‌تر است؟ آیا فرقی می‌کند که آقای کریمی در کدام باشگاه ثبت‌نام کند؟ روی نمودار دو خط، نقطه‌ی مربوط به ۱۵ جلسه استفاده از دو باشگاه، چه نقطه‌ای است؟

در این فعالیت، دو مجهول و دو معادله وجود دارد و این‌گونه مسائل را یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی می‌نامند. جواب این دستگاه اعدادی هستند که اگر به جای x و y قرار دهیم، هر دو معادله هم‌زمان برقرار شوند.

مثال: یک بسته که در آن دو تا از کالای اول و سه تا از کالای دوم قرار دارد را وزن می‌کنیم و حاصل ۲۱ کیلوگرم است. یک بار دیگر بسته‌ی دیگری را که در آن سه تا از کالای اول و یکی از کالای دوم در آن است را وزن می‌کنیم و حاصل ۱۴ کیلوگرم است. آیا می‌توانید بگویید وزن هر کدام از کالاها چقدر است؟

اگر وزن کالای اول را با x و وزن کالای دوم را با y نشان دهیم، وزن اولین بسته نشان می‌دهد که $2x+3y=21$ و وزن دومین بسته نشان می‌دهد که $3x+y=14$.

یکی از روش‌های حل این دستگاه، روش هندسی است. اگر معادلات $2x+3y=21$ و $3x+y=14$ را به عنوان معادلات دو خط در صفحه در نظر بگیریم، محل برخورد این دو خط نقطه‌ای است که مختصات آن هم‌زمان هر دو معادله را برقرار می‌کند.



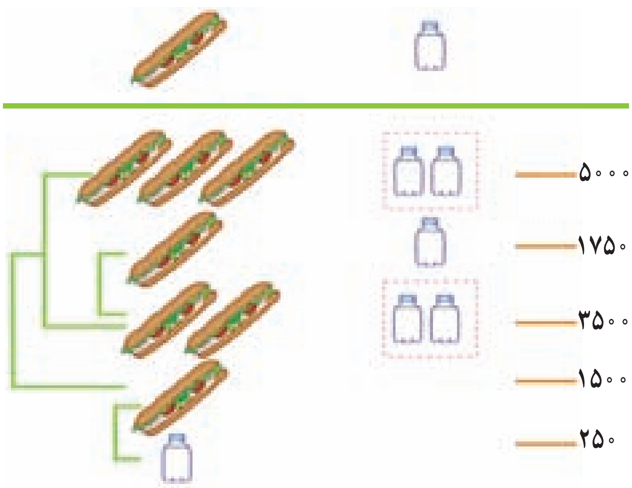
محل برخورد این دو خط در نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ است. پس جواب این دستگاه $x=3$ و $y=5$ است.

اگر معادلات یک دستگاه خطی دومجهولی را به‌عنوان معادله‌های دو خط در نظر بگیریم، مختصات محل برخورد این دو خط، جواب آن دستگاه معادلات است.

با رسم نمودار معادلات، می‌توان تقریب خوبی از جواب دستگاه معادلات به‌دست آورد. برای حل دستگاه معادلات، اغلب با رسم نمودار آن‌ها و یافتن محل برخورد این نمودارها و اندازه‌گیری مختصات نقطه‌ی برخورد، می‌توان تخمینی از جواب دستگاه را به‌دست آورد و سپس با حل جبری دستگاه می‌توان پاسخ دقیق را محاسبه کرد. در ادامه دو روش جبری برای حل دستگاه معادلات خطی دومجهولی معرفی می‌شوند.

روش حذفی

فعالیت



حمید و بهروز برای خرید ساندویچ و نوشابه برای خود و دوستانشان به بوفه رفتند. حمید برای ۳ ساندویچ و ۲ شیشه نوشابه ۵۰۰۰ تومان پرداخت و بهروز برای یک ساندویچ و یک شیشه نوشابه ۱۷۵۰ تومان پرداخت. حمید با نمایش تصویری روبرو کشف کرد که قیمت یک ساندویچ و قیمت یک شیشه نوشابه چقدر است.

هریک از مراحل حل مسئله توسط حمید را توضیح دهید.

روشی را که در فعالیت بالا مورد استفاده قرار گرفته است را **روش حذفی** برای حل دستگاه معادلات می‌نامند.

برای بیان ریاضی این عملیات می‌توانیم قیمت یک ساندویچ را با x و قیمت یک شیشه نوشابه را با y نشان دهیم. در این صورت می‌توانیم بنویسیم :

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۵۰۰۰ \\ x+y=۱۷۵۰ \end{cases}$$

دستگاهی را که از چند معادله و چند مجهول تشکیل می‌شوند را دستگاه معادلات می‌نامند. مقادیری از متغیرهای این معادلات را که هم‌زمان تساوی‌های این معادلات را برقرار می‌کنند، جواب‌های این دستگاه می‌نامند. یافتن جواب‌های یک دستگاه را حل آن دستگاه می‌نامند.

برای حل دستگاه معادلات بالا، برای ایجاد ضریب‌های یکسان از یکی ازمتغیرها، معادله‌ی دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۵۰۰۰ \\ ۲x+۲y=۳۵۰۰ \end{cases}$$

با کم‌کردن این دو معادله از هم خواهیم داشت :

$$(۳x+۲y)-(۲x+۲y)=۵۰۰۰-۳۵۰۰$$
$$۳x-۲x+۲y-۲y=۱۵۰۰$$
$$x=۱۵۰۰$$

با جایگذاری $x=۱۵۰۰$ در هرکدام از معادلات بالا می‌توان y را پیدا کرد.

$$۱۵۰۰+y=۱۷۵۰$$
$$y=۲۵۰$$

با جایگذاری این مقادیر از x و y در معادله‌ی اول می‌توانید درستی حل خود را امتحان کنید.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x-y=۳ \\ ۴x+۳y=۵ \end{cases}$$

برای حل این دستگاه، معادله‌ی اول را در ۳ ضرب می‌کنیم تا به شکل $۳x-۳y=۹$ درآید. با جمع دو معادله می‌توان مجهول y را حذف کرد : $۳x-۳y+۴x+۳y=۵+۹$.

پس از ساده‌کردن این معادله خواهیم داشت $۷x=۱۴$ و نتیجه می‌شود $x=۲$. با جایگذاری در یکی از معادلات نتیجه می‌شود $y=-۱$.

برای حل این دستگاه معادلات، همچنین می‌توانیم ابتدا متغیر x را حذف کنیم و y را بیابیم. بنابراین، معادله‌ی اول را در (-۴) ضرب می‌کنیم : $-۴x+۴y=-۱۲$.

با جمع این معادله با معادله‌ی دوم خواهیم داشت $-۴x+۴y+۴x+۳y=-۱۲+۵$. پس از ساده‌سازی داریم $۷y=-۷$ که نتیجه می‌دهد $y=-۱$. اکنون با جایگذاری در معادله‌ی اول داریم $x-(-۱)=۳$ که نتیجه می‌دهد : $x=۲$.

تمرین در کلاس

دستگاه معادله‌ی زیر را یک بار با حذف x و یک بار با حذف y حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x-۴y=۲۳ \\ -۲x+۷y=-۲۴ \end{cases}$$

روش جایگذاری

فعالیت

معادله‌ی $3x+2y=5000$ را در نظر بگیرید :

۱ــ به‌ازای $y=1000$ مقدار x را بیابید ؛

۲ــ به ازای $y=1750$ مقدار x را بیابید ؛

۳ــ به ازای $y=1750-x$ مقدار x را بیابید.

یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات روش جایگذاری است. در این روش ابتدا به کمک یکی از معادله‌ها یکی از متغیرها برحسب متغیر دیگر حساب می‌شود. سپس همانند بند ۳ فعالیت بالا با جایگذاری آن متغیر در معادله‌ی دیگر، به یک معادله برحسب یک متغیر می‌رسیم، آن‌گاه آن را با روش‌هایی که می‌شناسیم حل می‌کنیم.

مثال: دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$$

از معادله‌ی اول نتیجه می‌شود که $x=y+3$. اگر در معادله‌ی دوم به جای x، مقدار $y+3$ را قرار دهیم به یک معادله برحسب y می‌رسیم و می‌توان آن را حل کرد ؛ پس $4(y+3)+2y=6$.

پس از ساده‌کردن، این معادله به‌صورت $6y+12=6$ درمی‌آید و نتیجه می‌شود $y=-1$.

با استفاده از تساوی $x=y+3$ و این که $y=-1$ ، نتیجه می‌گیریم $x=2$.

در این روش با استفاده از یکی از معادله‌ها، یکی از دو مجهول را برحسب مجهول دیگر به‌دست می‌آوریم. سپس مجهول محاسبه‌شده را در معادله‌ی دیگر جایگذاری می‌کنیم. در مثال بالا با استفاده از معادله‌ی اول، x را برحسب y حساب کردیم، سپس در معادله‌ی دوم روی x جایگذاری کردیم. با این عمل به یک معادله برحسب یک متغیر می‌رسیم و می‌توانیم آن را حل کنیم. این روش را، روش جایگذاری می‌نامند.

مثال: دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2m+3n=15 \\ 3m+2n=15 \end{cases}$$

این دستگاه را یک بار با روش حذفی و یک بار با روش جایگذاری حل می‌کنیم.

روش حذفی: معادله‌ی اول را در (-3) و معادله‌ی دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم و یک دستگاه جدید به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} -6m-9n=-45 \\ 6m+4n=30 \end{cases}$$

بیندیشیم

در روش جایگذاری، آیا فرقی می‌کند که کدام متغیر را برحسب متغیر دیگر به دست آوریم؟

جمع دو معادله‌ی صفحه‌ی قبل معادله‌ی زیر را می‌سازد.

$$-۶m-۹n+۶m+۴n=-۴۵+۳۰$$

$$-۵n=-۱۵$$

$$n=۳$$

در معادله‌ی اول به‌جای n مقدار ۳ را قرار می‌دهیم و به معادله‌ی $۲m+۳\times۳=۱۵$ می‌رسیم، درنتیجه $m=۳$.

روش جایگذاری: از معادله‌ی اول n را برحسب m حساب می‌کنیم.

$$۲m+۳n=۱۵$$

$$۳n=۱۵-۲m$$

$$n=۵-\frac{۲}{۳}m$$

در معادله‌ی دوم جای n قرار می‌دهیم $۵-\frac{۲}{۳}m$، و معادله‌ی به‌دست‌آمده برحسب m را حل می‌کنیم :

$$۳m+۲\times(۵-\frac{۲}{۳}m)=۱۵$$

$$۳m+۱۰-\frac{۴}{۳}m=۱۵$$

$$\frac{۵}{۳}m=۵$$

$$m=۳$$

با جایگذاری $m=۳$ در معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $۲\times۳+۳n=۱۵$ و پس از ساده‌کردن خواهیم داشت : $۳n=۹$ که نتیجه می‌دهد $n=۳$.

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $A=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

قبلاً با استفاده از روش یافتن شیب خط، این گونه مسائل را حل می‌کردیم. اما، در این بخش با استفاده از حل دستگاه‌ها نیز می‌توانیم این مسئله را حل کنیم.

معادله‌ی‌کلی یک خط به‌صورت $y=mx+b$ است. اگر این خط بخواهد از نقطه‌ی A بگذرد باید با جایگذاری طول و عرض آن در معادله این خط تساوی برقرار گردد، یعنی $۲=m(-۱)+b$ و درنتیجه $b-m=۲$. اگر این خط بخواهد از نقطه‌ی B بگذرد باید داشته باشیم $-۳=۲m+b$. با این دو معادله یک دستگاه معادله‌ی خطی دومجهولی تشکیل می‌شود که جواب آن، خط مورد نظر را مشخص می‌کند.

مسئله:باب پنجاه و چهارم از کتاب مفتاح المعاملات

دو نفر در راهی هم سفر بودند. به جایی رسیدند و خواستند که با هم نان بخورند، همراه یکی از آن‌ها ۳ نان بود و همراه دیگری ۲ نان. با هم مشغول خوردن شدند. نفر سومی از راه رسید، تعارف کردند، او هم با آن‌ها هم‌سفره شد و هر سه به یک سهم نان خوردند. نفر سوم ۵ درهم به آن دو نفر داد و گفت هر کدام به تعداد نان خود سهمش را از این پول بردارد.

حال چگونه این پول را میان دو نفر تقسیم کنیم و سهم هر یک چند درهم است؟

مسائل

۱ــ دستگاه معادلات (الف) را به روش جایگزینی و (ب) را به روش حذفی حل کنید.

الف) $\begin{cases} y = ۵ - ۲x \\ ۲y - ۳x = ۱۷ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} ۳x - ۵y = ۱ \\ ۲x + ۳y = ۷ \end{cases}$

۲ــ نوعی کود از مخلوط‌شدن دو نوع که یکی سرعت‌دهنده‌ی رشد و دیگری غنی‌کننده مواد غذایی گیاه است، درست می‌شود. مخلوط‌های متفاوت اثرات متفاوتی دارد.

مخلوط (A) ۴ پیمانه از نوع اول و ۳ پیمانه از نوع دوم است که ۲۰۰ تومان قیمت دارد. مخلوط (B) ۳ پیمانه از نوع اول و ۵ پیمانه از نوع دوم است که ۱۷۰ تومان قیمت دارد. اگر یک پیمانه از نوع اول x تومان و یک پیمانه از نوع دوم y تومان قیمت داشته باشد،

الف) برای قیمت مخلوط A و B روابطی برحسب x و y بنویسید.

ب) مقدار x و y را پیدا کنید.

ج) مخلوطی که دارای ۵ پیمانه از نوع اول و ۲ پیمانه از نوع دوم باشد، چه قیمتی دارد؟

۳ــ آیا می‌توان مقدار a را به گونه‌ای تعیین کرد که نقطه $\begin{bmatrix} a \\ -۱ \end{bmatrix}$ محل برخورد دو خط $x - ۲y = ۵$ و $۲x + y = ۵$ باشد.

۴ــ معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $۳x + ۲y = ۶$ و $y - x = ۳$ بگذرد و بر خط $x - ۲y = ۱$ عمود باشد.

۵ــ معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط $x - ۷y + ۱ = ۰$ و $x + ۷y - ۳ = ۰$ می‌گذرد و با خط $۴x + y = ۵$ موازی است.

۶ــ با رسم نمودارهای دو خط $y = \frac{۳}{۲}x - ۵$ و $۲y = -۵x - ۳$ تحقیق کنید این دو خط در چه ربعی همدیگر را قطع می‌کنند. سپس با حل جبری دستگاه تشکیل‌شده از این معادله‌ها، مختصات نقطه‌ی محل تقاطع آن را به‌دست آورید و جواب خود را بررسی کنید.

۶

نسبت های مثلثاتی

در شکل بالا هواپیما، ماهواره بر ایرانی امید و چند ماهواره دیده می شود
به نظر شما در یک لحظه شیب هر یک با محور افقی چقدر است؟

طرح یک مسئله

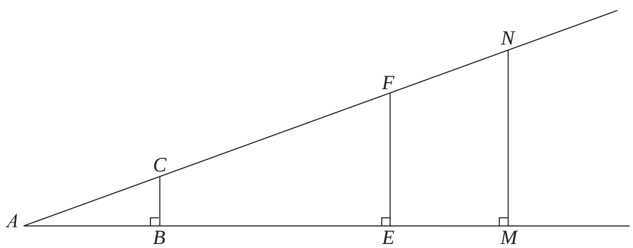
امروز در کلاس درس ریاضی، معلم گفت :

شما که ریاضی را خوب یاد گرفته‌اید توانایی‌های بسیاری در زندگی به‌دست آورده‌اید. شما کارهایی می‌توانید انجام دهید که دیگران نمی‌توانند. مدیر مدرسه گفته است که طناب تیرک پرچم مدرسه مدتی است که پوسیده شده است و لازم است طناب جدیدی برای آن بخریم ولی نمی‌دانیم طول تیرک پرچم چقدر است؟ من گفتم که دانش‌آموزان کلاس ریاضی من، ریاضی را خوب یاد گرفته‌اند و می‌توانند برای شما طول این تیرک را به‌دست آورند.

آیا شما می‌توانید طول تیرک پرچم یا بلندی ساختمان مدرسه خود را حساب کنید؟ برای این کار چه اطلاعاتی را نیاز دارید؟

معمولاً یک مسئله راه‌حل‌های متعددی دارد و هریک از شما ممکن است راه خاص خود را بیابد. یکی از راه‌های حل مسئله‌ی بالا، مقایسه طول اشیای بزرگ با طول اشیای کوچک است. فعالیت زیر ابزار مناسبی برای مقایسه طول‌ها فراهم می‌کند.

فعالیت



۱ــ یک زاویه با رأس A مانند روبه‌رو رسم شده است. روی یک ضلع این زاویه چند نقطه‌ی دلخواه مانند B و E و M درنظر گرفته شده است و از این نقاط عمودهایی بر این ضلع رسم شده است که ضلع دیگر را در نقاطی که به‌ترتیب C و F و N نامیده‌ایم قطع کرده‌اند.

با اندازه‌گیری‌های مستقیم درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

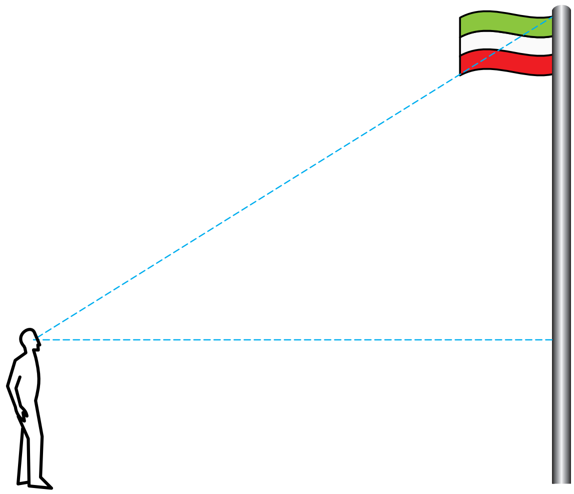
$$\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}=\frac{MN}{AM} \quad , \quad \frac{BC}{AC}=\frac{EF}{AF}=\frac{MN}{AN} \quad , \quad \frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}=\frac{AM}{AN}$$

۲ــ با رسم همین شکل با زاویه‌های دیگر و نقاط دیگر، درستی تساوی‌های بالا را بررسی کنید.

نسبت‌های بالا اعدادی هستند که فقط به زاویه‌ی انتخاب شده بستگی دارند.

تانژانت زاویه

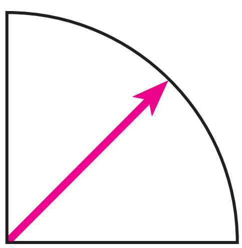
به مسئله‌ی اصلی بازمی‌گردیم. احمد یکی از شاگردان علاقه‌مند کلاس بود و می‌خواست توانایی خود را در حل مسئله اندازه‌گیری طول تیرک پرچم بیازماید. او به نزدیکی تیرک پرچم رفت و مدتی به آن نگاه کرد و از خود پرسید مجهول مسئله چیست و برای یافتن آن چه اطلاعاتی لازم است؟ او وضعیت مسئله را در یک شکل به‌صورت زیر در ذهن خود تجسّم کرد.



او گفت من طول قد خود را می‌دانم و فاصله‌ام را هم با تیرک پرچم می‌توانم به‌دست آورم و اگر بدانم با چه زاویه‌ای نوک تیرک را می‌بینم، این اطلاعات برای حل مسئله باید کافی باشد. بهتر است همراه احمد فعالیت زیر را انجام دهیم تا معلوم شود او تا چه حد در حل مسئله موفق خواهد بود.

فعالیت

۱ـ یک ربع دایره‌ی مقوایی شبیه یک نقاله نصف شده بسازید و روی مرکز ربع دایره یک عقربه‌ی نازک مقوایی دیگر با پونس بچسبانید.



۲ـ به حیاط بروید[1] و در فاصله‌ای مشخص شده از تیرک پرچم بایستید و در حالتی که یک ضلع ربع دایره به‌صورت افقی است، عقربه‌ی آن را در حالتی قرار دهید که نوک تیرک را نشان دهد. محل عقربه را روی محیط ربع دایره علامت بزنید.

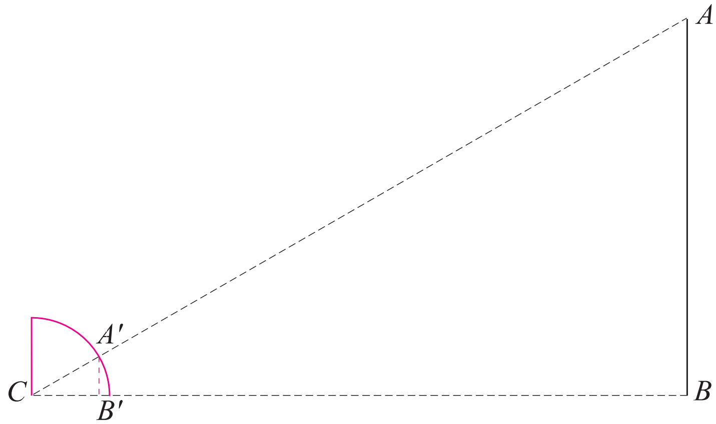
۱ـ در صورتی که امکان این کار را ندارید، در کلاس بمانید و ارتفاع تخته یا دیوار را اندازه بگیرید.

فاصله‌ی ضلع افقی ربع دایره تا سطح زمین تقریباً به اندازه‌ی قد شما خواهد بود.

۳ــ حال به کلاس برگردید و ربع دایره‌ی مقوایی را روی یک کاغذ بگذارید. مرکز ربع دایره را C و محل علامت‌گذاری شده روی محیط ربع دایره را A' بنامید. از A' خط عمود بر ضلع افقی ربع دایره را رسم کنید تا این ضلع را در نقطه‌ای قطع کند و این نقطه را B' بنامید. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $CA'B'$، طول ضلع‌های $A'B'$ و CB' را مستقیماً با خط‌کش اندازه‌گیری کنید.

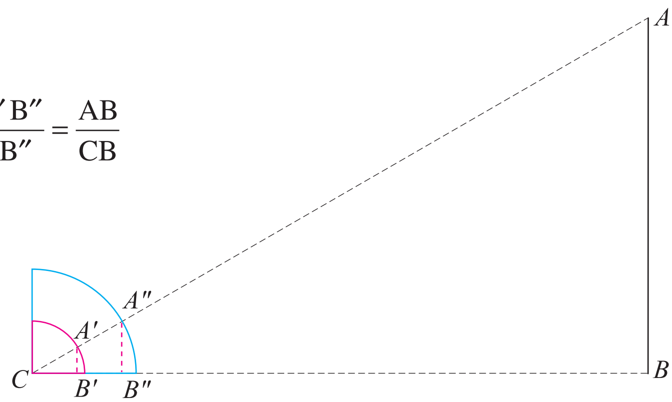
احمد یک ربع دایره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر ساخته بود و عقربه‌ی او با ضلع افقی ربع دایره زاویه‌ی ۲۳ درجه ساخته بود. فاصله‌ی او با تیرک پرچم ۱۷ متر بود و قد احمد ۱/۶۵ متر بود.

۴ــ با استفاده از شکل زیر و نتایج فعالیت صفحه ۱۴۰ طول تیرک پرچم را حساب کنید.



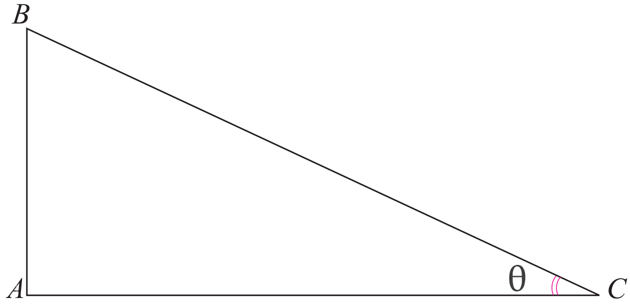
در انجام این فعالیت، هریک از شما ممکن است ربع دایره مقوایی خود را بسازد که احتمالاً هم‌اندازه نیستند. آیا این مطلب در محاسبه طول تیرک پرچم تأثیری خواهد داشت؟ برای مثال، فرض کنید حسن یکی دیگر از دانش‌آموزان است و ربع دایره‌ای ساخته است که شعاع آن دو برابر شعاع ربع دایره‌ی احمد است. با این فرض که حسن و احمد هم‌قد هستند و حسن در همان نقطه‌ای که احمد ایستاده بود، ایستاده است، محاسبات این دو نفر چه تفاوتی با هم خواهد داشت؟ شکل زیر نشان می‌دهد که این دو نفر نسبت‌های متفاوتی را تشکیل می‌دهند، ولی این دو نسبت مساوی‌اند.

$$\frac{A'B'}{CB'}=\frac{A''B''}{CB''}=\frac{AB}{CB}$$



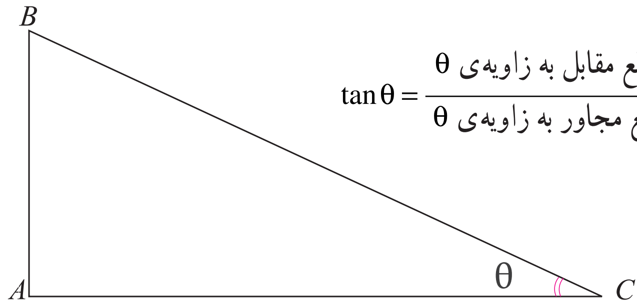
همان‌طور که مشاهده می‌شود، احمد از نسبت $\frac{A'B'}{CB'}$ و حسن از نسبت $\frac{A'B'}{CB'}$ برای حل مسئله استفاده می‌کند و مقدار این دو نسبت مساوی‌اند. در فعالیت صفحه‌ی ۱۴۰ دیدیم که این نسبت، عددی است که فقط بستگی به زاویه‌ی تشکیل شده در رأس C دارد. بنا به تعریف، این نسبت را **تانژانت** آن زاویه می‌نامند.

در یک مثلث قائم‌الزاویه مانند زیر که یک زاویه‌ی آن θ نامیده شده است، ضلع AB را ضلع روبه‌رو به این زاویه و ضلع AC را ضلع مجاور به این زاویه می‌نامند.



اگر θ یک زاویه‌ی حاده (تند) باشد، تانژانت آن را با $\tan\theta$ نشان می‌دهند[1]. تعریف تانژانت نشان می‌دهد که :

> در یک مثلث قائم‌الزاویه، اگر θ یک زاویه حاده آن باشد، $\tan\theta$ برابر است با تقسیم طول ضلع مقابل به θ به طول ضلع مجاور به θ.



$$\tan\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه‌ی } \theta}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه‌ی } \theta} = \frac{AB}{AC}$$

برای مثال، $\tan 26°$ تقریباً برابر $0/487$ است، یعنی $\tan 26° \simeq 0/487$.

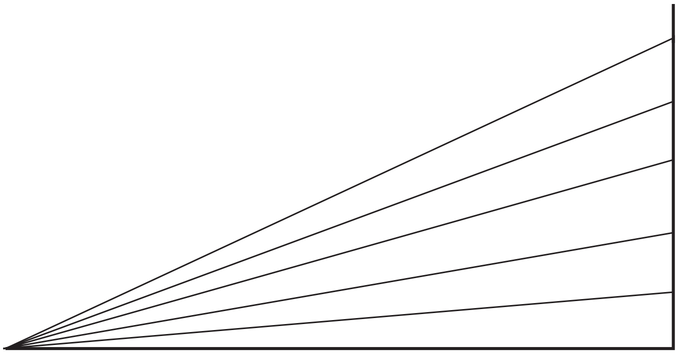
تمرین در کلاس

۱ــ یک جدول تشکیل دهید که در آن تانژانت زاویه‌های ۲۳، ۳۰، ۴۰، ۴۵ و ۶۰ درجه به‌طور تقریبی با رسم مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری مستقیم با خط‌کش و محاسبه نسبت‌ها، محاسبه شده باشند.

۲ــ با توجه به جدول، اگر زاویه حاده‌ای بزرگ شود تانژانت آن چه تغییری خواهد کرد؟

۱ــ tan مخفف لغت انگلیسی tangent است. در برخی کتاب‌ها تانژانت را با tg نیز نشان می‌دهند.

۳ــ شکل زیر زاویه‌های متفاوتی را نشان می‌دهد که ضلع مجاور به آن‌ها ثابت است ولی ضلع روبه‌روی به آن‌ها متفاوت است. درستی ادعای خود در بند (۲) را از طریق شکل نشان دهید.



۴ــ اگر زاویه‌ای به صفر نزدیک شود تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

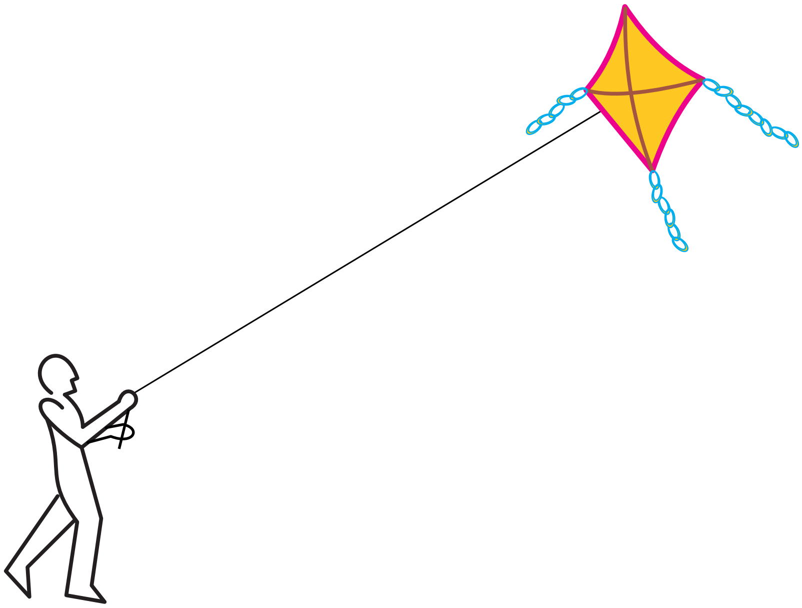
غیاث‌الدین جمشید کاشانی

جمشیدبن مسعودبن محمود طبیب کاشانی ملقب به غیاث‌الدین در سال ۷۹۰ ق در کاشان متولد شد. او یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان، منجمان و زیج‌نویسان ایرانی دوره‌ی اسلامی است. او ریاضی‌دانی هوشمند، مخترع، نقاد و صاحب افکار عمیق و مسلط بر آثار ریاضی‌دانان قبل از خود بود. او در فن محاسبه و به کار بستن روش‌های تقریبی بسیار توانمند بود. او برای اولین بار محاسبه عدد π تا شانزده رقم اعشار و محاسبه $\sin 1^\circ$ تا بیست و دو رقم اعشار را انجام داده است. او در محاسبه عدد π که با دقت $۰/۶ \times ۱۰^{-۱۷}$ است از ابزار مقدماتی در محاسبات که از مرز جذرگرفتن تجاوز نمی‌کند استفاده نموده است و به قول تاریخ‌نگاران ریاضیات اروپا این اثر را شاهکار فن محاسبه نامیدند. او در محاسبه $\sin 1^\circ$ با استفاده از تشکیل معادله‌ی جبری و استفاده از قضایای هندسی و حل معادله به روش تکرار که در ریاضیات حال حاضر بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد به محاسبه پرداخته است. او روشی برای محاسبه ریشه nام یک عدد صحیح بیان می‌کند که ریاضی‌دانان اروپایی در قرن نوزدهم آن را ابداع کرده و به روش «روفینی ــ هورنر» معروف است. او کسرهای اعشاری را به صورت روش‌مند معرفی و به‌کار برد. از او آثار بسیار زیادی از جمله در رساله‌ی محیطیه، رساله‌ی وتر و جیب، مفتاح‌الحساب و ... نامید. او در سال ۸۳۲ ق در رصدخانه سمرقند درگذشته است.

سینوس زاویه

پس از حل مسئله یافتن طول تیرک پرچم، معلم مسئله‌ی دیگری را مطرح ساخت که شباهت بسیاری به مسئله‌ی اول داشت.

معلم پرسید : اگر شما بادبادکی را به هوا بفرستید، آیا می‌توانید بفهمید که چقدر از سطح زمین فاصله گرفته است؟



احمد گفت : هر چقدر نخ بیشتری را رها کرده باشیم بادبادک بالاتر رفته است، اگر بدانیم چقدر نخ فرستاده شده است می‌توانیم بفهمیم بادبادک چقدر بالا رفته است. (آیا این فکر احمد درست بود؟)

حسن گفت : اما اگر شدت باد کم شود، هر چقدر هم که نخ فرستاده باشیم بادبادک پایین می‌آید و زاویه‌ی راستای نخ با سطح زمین کم می‌شود، پس فقط با دانستن مقدار نخ فرستاده شده نمی‌توان فهمید بادبادک چقدر بالا رفته است.

معلم گفت : پس چه چیز دیگری را برای حل این مسئله باید بدانیم؟

احمد گفت : به‌نظر می‌رسد زاویه‌ی نخ با سطح زمین هم مهم است و اگر این زاویه را بدانیم شاید بتوانیم فاصله بادبادک تا سطح زمین را محاسبه کنیم.

آیا شما می‌توانید دلیل درستی حدس احمد را بیان کنید؟ فرض کنید ۴۵ متر نخ رها شده است و زاویه‌ی نخ با سطح زمین ۳۹ درجه باشد و فاصله‌ی دست کسی که بادبادک را هوا کرده است از سطح زمین یک متر و پنجاه و پنج سانتی‌متر باشد.

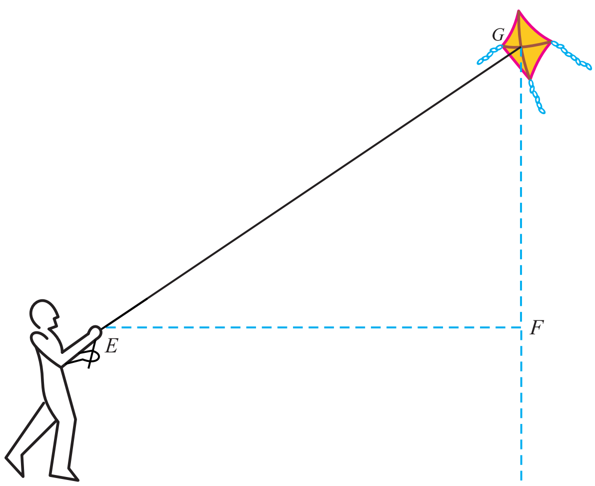
در فعالیت زیر شما می‌توانید شیوه‌ی یافتن ارتفاع بادبادک را بیابید.

فعالیت

۱ــ یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید که یک زاویه‌ی آن ۳۹ درجه باشد. رأس قائمه را A و رأس مربوط به زاویه‌ی ۳۹ درجه را B و رأس دیگر را C بنامید.

۲ــ با اندازه‌گیری مستقیم، نسبت $\frac{AC}{CB}$ را حساب کنید و آن را t بنامید. با مروری بر فعالیت صفحه‌ی ۱۴۰ نتیجه بگیرید که این نسبت بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که رسم کرده‌اید ندارد.

۳ــ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را درنظر بگیرید که وتر آن نخ بادبادک و یک ضلع آن خط موازی زمین و ضلع دیگر آن خط عمود از بادبادک به سطح زمین است. طبق شکل زیر رأس‌های آن نام‌گذاری شده‌اند، نتیجه بگیرید : $t=\frac{FG}{EG}$.

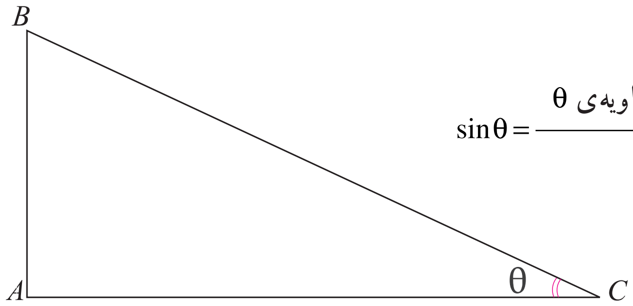


۴ــ با استفاده از تساوی بالا و دانستن مقدار t و مقدار EG و فاصله‌ی دست کسی که بادبادک را هوا کرده تا زمین، ارتفاع بادبادک را حساب کنید.

در حل مسئله‌ی بالا عدد t که عددی وابسته به زاویه‌ی ۳۹ درجه بود، نقش مهمی را بازی کرد. این عدد را سینوس زاویه‌ی ۳۹ درجه می‌نامند.

اگر θ زاویه‌ی حاده‌ای باشد، و مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که یک زاویه‌ی آن θ باشد، حاصل تقسیم طول ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی θ به طول وتر را، **سینوس** θ می‌نامند و با $\sin\theta$ نشان می‌دهند.

فعالیت صفحه‌ی ۱۴۰ نشان می‌دهد، این مقدار بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث رسم شده ندارد و فقط به زاویه‌ی θ بستگی دارد.



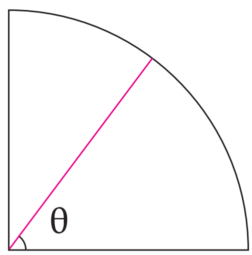
$$\sin\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه‌ی } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

برای مثال، $\sin ۳۹^\circ$ تقریباً برابر است با ۰/۶۲۹، یعنی $\sin ۳۹^\circ \simeq ۰/۶۲۹$.

تمرین در کلاس

۱ــ یک جدول تشکیل دهید که در آن سینوس زاویه‌های ۲۳، ۳۰، ۴۰، ۴۵ و ۶۰ درجه به‌طور تقریبی با رسم مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری مستقیم با خط‌کش و محاسبه نسبت‌ها، محاسبه شده باشند.

۲ــ با رسم یک ربع دایره به شعاع ۱، برای یک زاویه‌ی حاده θ که در زیر نشان داده شده است، $\sin\theta$ را به‌صورت طول یک پاره‌خط، در شکل نشان دهید.



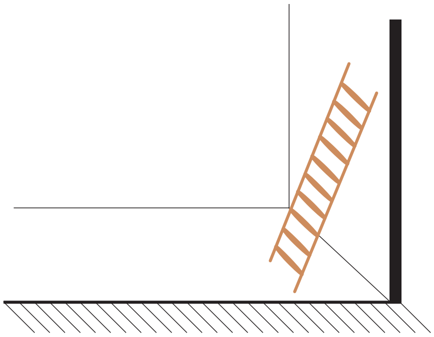
۳ــ در شکل بالا، اگر زاویه‌ی θ بزرگ شود سینوس آن چه تغییری خواهد کرد؟ از روی شکل و جدول درستی ادعای خود را نشان دهید.

۴ــ اگر زاویه‌ی θ به صفر نزدیک شود سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

۵ــ اگر زاویه‌ی θ به ۹۰ درجه نزدیک شود سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

کسینوس زاویه

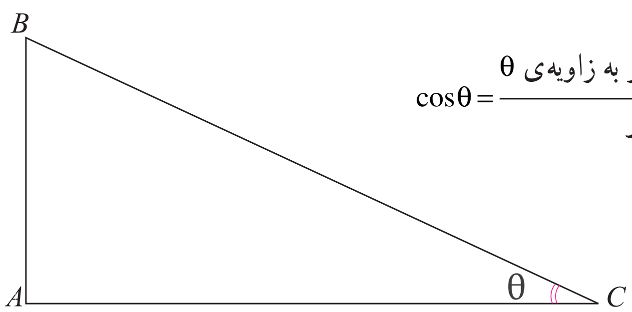
فرض کنید نردبانی را برای رفتن به پشت‌بام به دیوار تکیه داده‌ایم. شما می‌توانید فاصله‌ی پای نردبان که بر زمین قرار دارد را تا دیوار حساب کنید. هم‌چنین زاویه‌ای که نردبان با سطح زمین می‌سازد را هم می‌توانید اندازه بگیرید. آیا با این اطلاعات می‌توانید طول نردبان را حساب کنید؟



در اکثر مسائل هندسی که زاویه در آن‌ها نقش مهمی را بازی می‌کند تانژانت و سینوس زاویه‌ها در محاسبات بسیار کارگشا هستند. در حل مسئله‌ی بالا، عدد دیگری که آن هم از طریق یک زاویه تعیین می‌شود نقش اصلی را بازی می‌کند. این عدد را کسینوس زاویه می‌نامند.

اگر θ زاویه‌ی حاده‌ای باشد، و مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که یک زاویه‌ی آن θ باشد، حاصل تقسیم طول ضلع مجاور به زاویه‌ی θ به طول وتر را، **کسینوس** θ می‌نامند و با $\cos\theta$ نشان می‌دهند.

فعالیت صفحه ۱۴۰ نشان می‌دهد، این مقدار بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث رسم شده ندارد و فقط به زاویه‌ی θ بستگی دارد.

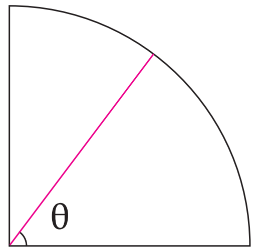


$$\cos\theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه‌ی } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

مثلاً، $\cos ۲۷^\circ$ تقریباً برابر است با ۰/۸۹۱، یعنی $\cos ۲۷^\circ \simeq ۰/۸۹۱$.

تمرین در کلاس

۱ــ با رسم یک ربع دایره به شعاع ۱، برای یک زاویه‌ی حاده θ که در زیر نشان داده شده است، $\cos\theta$ را به‌صورت طول یک پاره‌خط، در شکل نشان دهید.



۲ــ اگر زاویه‌ی حاده θ بزرگ شود کسینوس آن چه تغییری خواهد کرد؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

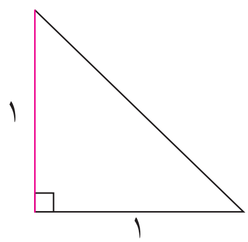
۳ــ اگر زاویه‌ی حاده θ به صفر نزدیک شود کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

۴ــ اگر زاویه‌ی حاده θ به ۹۰ درجه نزدیک شود کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

برای زاویه‌های حاده، از طریق نسبت‌های طول اضلاع مثلث‌های قائم‌الزاویه، اعدادی را ساختیم که تانژانت و سینوس و کسینوس این زاویه‌ها نام داشت. این اعداد را **نسبت‌های مثلثاتی** می‌نامند و در محاسبات هندسی نقش مهمی دارند.

تمرین در کلاس

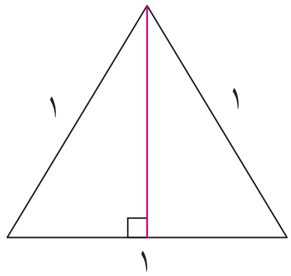
در زیر یک مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است که طول اضلاع مجاور قائمه آن برابر ۱ است.



۱ــ نشان دهید که زاویه‌های حاده این مثلث ۴۵ درجه است و طول وتر این مثلث را محاسبه کنید.

۲ــ سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه‌ی ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

در زیر یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ رسم شده است. ارتفاع، میانه و نیمساز مربوط به هر رأس بر هم منطبق‌اند و یکی از آن‌ها در یکی از رأس‌ها رسم شده است و دو مثلث قائم‌الزاویه مساوی به‌دست آمده است.



۳ــ طول اضلاع و زاویه‌های این مثلث‌های قائم‌الزاویه را حساب کنید.

۴ــ سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه را به‌دست آورید.

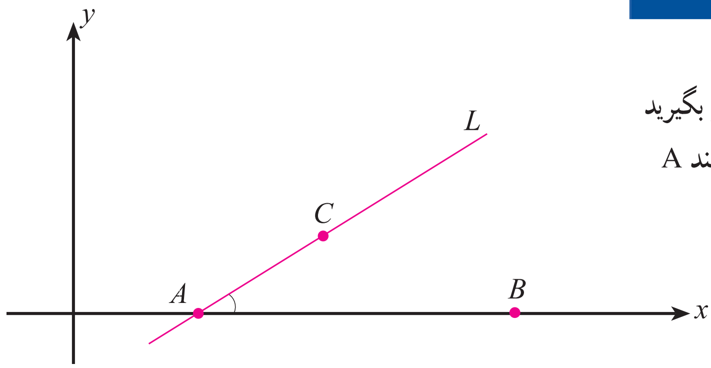
با حل تمرین بالا، می‌توانید جدول زیر را که نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه را نشان می‌دهد، به‌دست آورید.

زاویه	۳۰°	۴۵°	۶۰°
سینوس	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
تانژانت	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$

توجه کنید

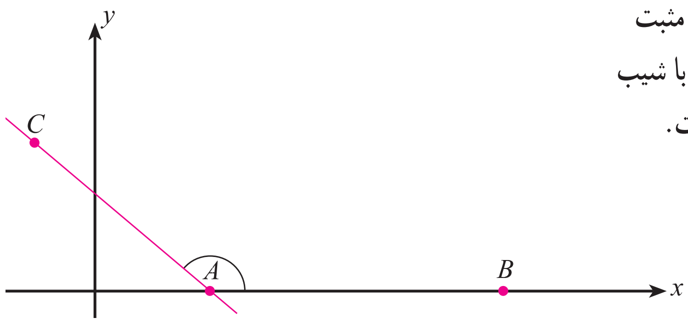
$\sin(۲\theta) \neq ۲\sin\theta \quad , \quad \sin(۳۰)+\sin(۴۵) \neq \sin(۳۰+۴۵)$

شیب خط و تانژانت

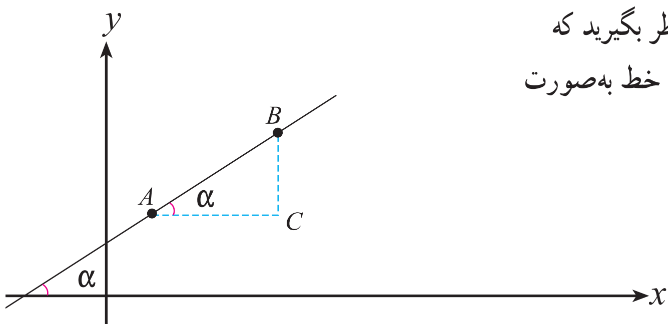


خطی مانند L در صفحه درنظر بگیرید که محور xها را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند.

سمت راست نقطه‌ی A روی محور xها نقطه‌ای مانند B انتخاب می‌کنیم و بالای محور xها روی خط L نقطه‌ای مانند C انتخاب می‌کنیم. زاویه‌ی بین دو نیم‌خط AB و AC را زاویه‌ی بین خط L و محور xها می‌نامند. برای خط‌های با شیب مثبت این زاویه حاده و برای خط‌های با شیب منفی این زاویه منفرجه (باز) است.



خطی به معادله‌ی $y = mx + b$ درنظر بگیرید که شیب آن مثبت باشد. شکل کلی این خط به‌صورت روبه‌رو است.



یادآوری می‌کنیم که شیب این خط برابر است با $\frac{BC}{AC}$، از طرف دیگر می‌دانید که این نسبت همان تانژانت زاویه بین این خط و محور افقی است. بنابراین :

شیب هر خط که با محور افقی زاویه‌ی حاده می‌سازد، همان تانژانت زاویه‌ی بین خط و محور افقی است، یعنی $\tan\alpha = m$.

m را ضریب زاویه‌ی خط $y = mx + b$ نیز می‌نامند.

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

از آن‌جا که هرکدام از سینوس و کسینوس و تانژانت[1] زاویه‌ها به‌صورت یک نسبت در یک مثلث به‌دست می‌آیند، آن‌ها را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامند. این مقادیر بی‌ارتباط به هم نیستند و اگر یکی از آن‌ها را بدانیم، دو تای دیگر را می‌توان به‌دست آورد.

تمرین در کلاس

یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کرده و زاویه‌های حاده آن را θ و α بنامید. می‌دانید $\alpha+\theta=90^\circ$.

۱ــ نشان دهید $\cos\theta=\sin\alpha$ و $\cos\alpha=\sin\theta$.

۲ــ برای زاویه‌ی حاده θ نشان دهید $\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$ و $\cos\theta=\sin(90^\circ-\theta)$.

دو زاویه که جمع آن‌ها ۹۰ درجه شود، زاویه‌های متمم می‌نامند. در مثلث‌های قائم‌الزاویه، زاویه‌های حاده آن متمم یکدیگرند. تمرین بالا نشان می‌دهد که *سینوس یک زاویه با کسینوس متمم آن زاویه مساوی است، هم‌چنین کسینوس یک زاویه با سینوس متمم آن زاویه مساوی است.*

فعالیت

یک زاویه‌ی حاده رسم کنید و آن را θ بنامید.

۱ــ یک مثلث قائم‌الزاویه روی اضلاع زاویه‌ی θ به‌گونه‌ای رسم کنید که وتر آن طول ۱ داشته باشد. رأس قائمه را C و رأس زاویه‌ی θ را A و رأس دیگر را B بنامید.

۲ــ از روی تعریف نسبت‌های مثلثاتی نتیجه بگیرید:

$$AC=\cos\theta \quad , \quad CB=\sin\theta \quad , \quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad (\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$$

۳ــ نشان دهید برای زاویه‌ی حاده θ داریم $0<\sin\theta<1$ و $0<\cos\theta<1$.

۱ــ برای زاویه‌ها یک نسبت مثلثاتی دیگر نیز به‌نام کتانژانت تعریف می‌شود که در این کتاب نیامده است. کتانژانت یک زاویه θ را با $\cot\theta$ نشان می‌دهند و به‌صورت $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ تعریف می‌کنند.

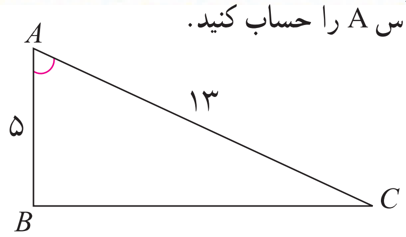
برای سادگی، در نوشتن توان‌های عبارت‌هایی مانند $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ به‌جای $(\sin\theta)^{۲}$ می‌نویسیم $\sin^{۲}\theta$ یا به جای $(\cos\theta)^{۳}$ می‌نویسیم $\cos^{۳}\theta$. توجه داشته باشید که $\sin\theta^{۲}$ به معنای $\sin(\theta^{۲})$ است.

توجه کنید

$$\sin^{۲}\theta \neq \sin\theta^{۲}$$

مسائل

۱ــ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی رأس A را حساب کنید.



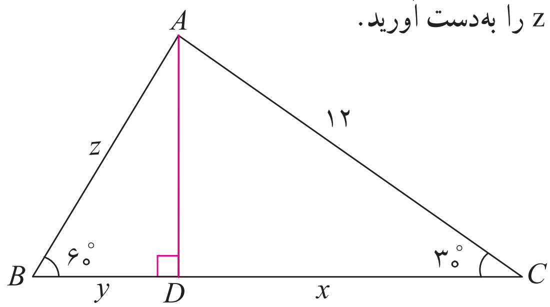
۲ــ مقدار عددی هر یک از عبارت‌های سمت چپ را به مساوی آن در سمت راست نظیر کنید.

$\sin^{۲}(۷۰^\circ)+\cos^{۲}(۷۰^\circ)$	$\frac{۱}{۲}$
$\sin(۴۵^\circ)+\cos(۴۵^\circ)$	۲
$\frac{۱}{\sin(۳۰^\circ)}$	$\sqrt{۲}$
	۱

۳ــ مقدار عددی عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=\frac{۲\cos^{۲}(۳۰^\circ)-۲\sin(۳۰^\circ)}{۲\tan(۴۵^\circ)+۳\cos^{۲}(۶۰^\circ)}$$

۴ــ در مثلث زیر مقادیر x و y و z را به‌دست آورید.



۵ــ طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۰ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{۳}{۵}$ است. محیط این مثلث چند سانتی‌متر است؟

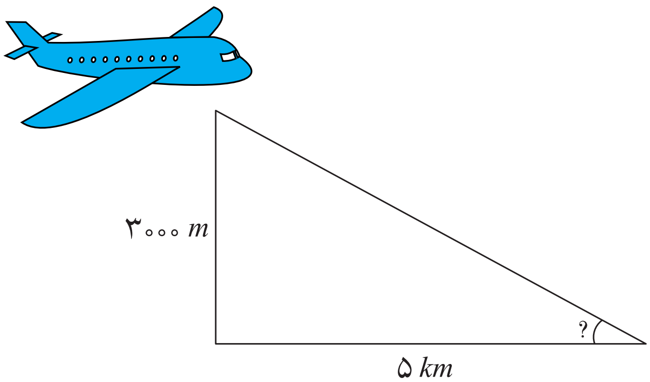
۶ــ یک عدد مثبت انتخاب کنید و آن را a بنامید. یک زاویه‌ی حاده θ بسازید که $\tan\theta = a$.

۷ــ یک عدد مثبت کوچک‌تر از ۱ انتخاب کنید و آن را a بنامید. یک زاویه‌ی حاده α بسازید که $\sin\alpha = a$ و یک زاویه‌ی حاده β بسازید که $\cos\beta = a$.

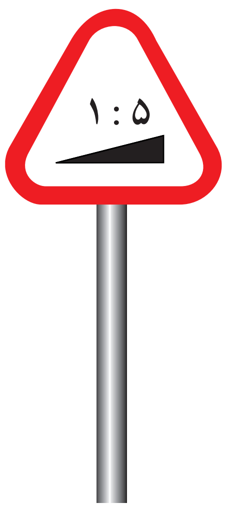
۸ــ اگر نردبانی را به دیوار تکیه داده باشیم و فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار ۱ متر و ۲۵ سانتی‌متر شده باشد و زاویه‌ی نردبان با سطح زمین ۳۶ درجه باشد، طول نردبان چقدر است؟ آیا ارتفاع دیوار را هم می‌توانید حساب کنید؟ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

۹ــ هواپیمایی می‌خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر روی باند حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس، با زاویه‌ی ۴۵ درجه از زمین بلند می‌شود، وقتی به بالای انتهای باند می‌رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟

۱۰ــ هواپیمایی در ارتفاع ۳۰۰۰ متری در حال پرواز است. این هواپیما وقتی به فاصله‌ی ۵ کیلومتری باند فرود می‌رسد، روی یک خط شروع به پایین آمدن می‌کند تا در ابتدای باند به زمین برسد. تانژانت زاویه‌ای که مسیر این هواپیما با سطح زمین می‌سازد چقدر است؟ از روی تانژانت این زاویه با رسم مثلث و استفاده از نقاله تعیین کنید هواپیما با چه زاویه‌ای به زمین رسیده است؟



۱۱ــ تابلویی در جاده وجود دارد که شیب جاده را به صورت (۵ : ۱) نشان می‌دهد. معنای این تابلو آن است که هر ۵ متر که به‌طور افقی جلو رفته باشیم یک متر ارتفاع جاده اضافه می‌شود. زاویه‌ای که جاده با افق می‌سازد چقدر است؟ (از رسم مثلث و نقاله استفاده کنید.)



۱۲ــ خط $۳x-\sqrt{۳}y=۱$ با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱۳ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

۱۴ــ درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\cos ۳۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

ب) $\tan ۷۰^\circ < \tan ۸۰^\circ$

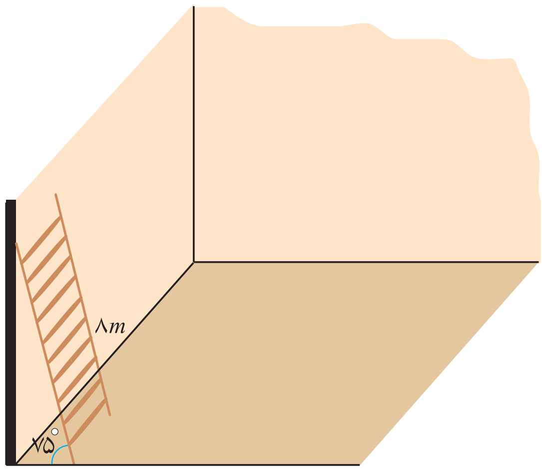
ج) $\sin ۲۰^\circ < \sin ۵۰^\circ$

د) $\cos ۷۰ = \sin ۲۰^\circ$

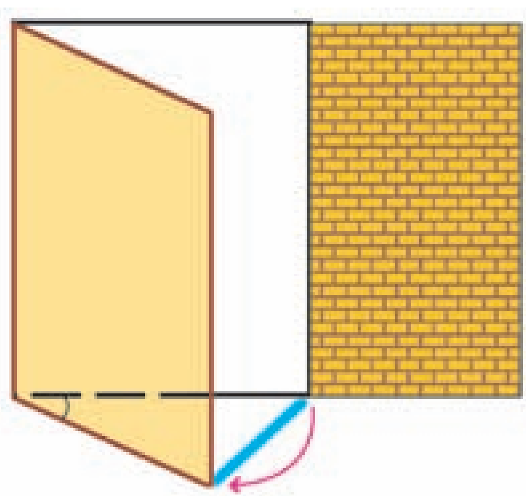
هـ) $\cos^{۲} ۳۵ + \sin^{۲} ۳۵ = ۱$

و) $\cos ۶۰^\circ = ۲\cos ۳۰$

ز) $\dfrac{\sin ۳۵}{\sin ۵۵} = \tan ۳۵^\circ$

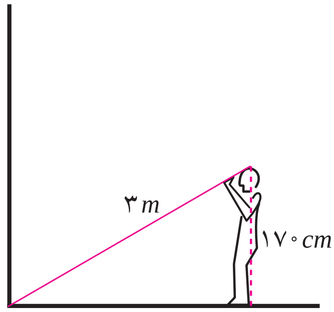


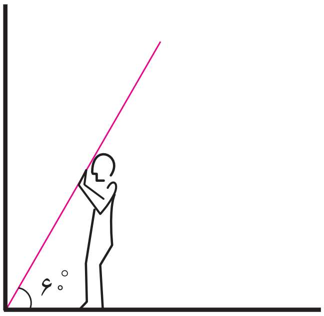
۱۵ــ نردبانی به طول ۸ متر به دیواری تکیه داده شده است. زاویهٔ نردبان با سطح زمین ۷۵ درجه است. نوک نردبان تا زمین چقدر فاصله دارد؟ (راهنمایی : یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۷۵ درجه را با استفاده از نقاله و رسم مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری با خط‌کش حساب کنید.)



۱۶ــ میله‌ای فلزی داریم که می‌خواهیم برای بازنگه داشتن یک در طبق شکل روبه‌رو از آن استفاده کنیم. عرض در ۷۰ سانتی‌متر است. طول میله چقدر باشد تا زاویهٔ بین در و دیوار ۴۰ درجه شود؟ اگر طول میله ۶۰ سانتی‌متر باشد، چه زاویه‌ای بین در و دیوار ایجاد می‌شود؟ (از رسم مثلث و نقاله استفاده کنید.)

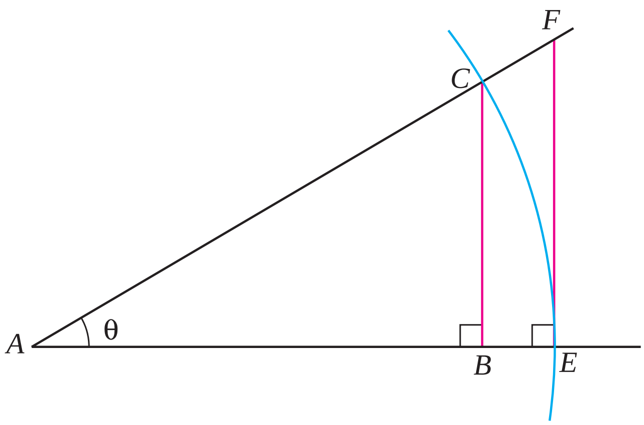
۱۷ــ فردی با قد یک متر و هفتاد سانتی‌متر می‌خواهد میله‌ای به طول ۳ متر را طبق شکل زیر با زاویه‌ی ۶۰ درجه بلند کند. او ابتدا یک سر میله را به دیوار تکیه می‌دهد و میله را تا قد خود بالا می‌آورد. او آن‌قدر به سمت دیوار حرکت می‌کند تا زاویه‌ی میله با سطح زمین ۶۰ درجه شود. او چقدر به سمت دیوار حرکت کرده است؟





۱۸ــ معنای عبارت‌های $\sin^{۲}\theta$ ، $\sin\theta^{۲}$ و $\sin ۲\theta$ را توضیح دهید و با یک مثال برای θ تفاوت آن‌ها را نشان دهید.

۱۹ــ در شکل زیر مثلث ABC در رأس B و مثلث AEF در رأس E قائمه هستند و طول ضلع‌های AC و AE برابر ۱ می‌باشند و زاویه‌ی رأس A را θ می‌نامیم.



الف) طول اضلاع AB، BC و EF را برحسب یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ حساب کنید.

ب) طول ضلع AF را از طریق تساوی $\frac{AF}{AE}=\frac{AC}{AB}$ برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ حساب کنید.

ج) طول ضلع AF را از طریق قضیه‌ی فیثاغورس به‌دست آورید و نتیجه بگیرید $۱+\tan^{۲}\theta=\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$.

عبارت‌های گویا

۷

برای آن که عکس واضحی روی دوربین ایجاد شود، عدسی دوربین به عقب یا جلو حرکت می‌کند. دلیل این امر قوانین فیزیکی مربوط به نور و عدسی‌ها است. محاسبات لازم برای یافتن مکان عدسی، محاسباتی جبری است.

حل یک مسئله

آقای صالحی، پدر یکی از دانش‌آموزان این مدرسه، می‌خواهد تا عید امسال خانه خود را رنگ بزند. یک نقاش گفته است می‌تواند خانه را در ۱۲ روز نقاشی کند. نقاش دیگری گفته است می‌تواند خانه را در ۹ روز نقاشی کند. آقای صالحی برای سرعت بیشتر، از این دو نقاش خواسته است با هم خانه را رنگ بزنند. آقای صالحی از پسر خود خواسته است که حساب کند کار نقاشی خانه چقدر طول خواهد کشید.

احمد این مسئله را در کلاس مطرح کرد و گفت من فکر کردم جواب این مسئله باید ۲۱ = ۹ + ۱۲ باشد، ولی پدرم این جواب را درست ندانست.

معلم از سایر دانش‌آموزان پرسید چرا این جواب نادرست است؟

اکبر گفت : روشن است که این جواب نادرست است، زیرا هر کدام از نقاش‌ها اگر به تنهایی هم که کار می‌کردند در ۹ روز یا ۱۲ روز کار را تمام می‌کردند، پس وقتی با هم کار کنند باید انجام کار، زمان کمتری طول بکشد نه این که بیشتر طول بکشد.

معلم پرسید : پس جواب درست چیست؟

اکبر گفت : تقریباً هر کدام از نقاش‌ها نیمی از کار را انجام می‌دهند، پس جواب، عددی بین ۴/۵ تا ۶ روز باید باشد.

معلم گفت : این یک جواب تقریبی است و تخمین آن درست است ولی برای توجیه درستی این تخمین استدلال بهتری لازم است. آیا می‌توانید روشی برای به دست آوردن جواب دقیق ارائه کنید؟

حسن گفت : ما باید بتوانیم سرعت کار کردن این دو نقاش را با هم مقایسه کنیم. بهتر است بدانیم هر کدام از این‌ها در یک روز چه مقدار از خانه را رنگ می‌کنند.

با توجه به این که نقاش اول در ۱۲ روز تمام خانه را رنگ می‌کند، او در یک روز $\frac{۱}{۱۲}$ خانه را رنگ می‌کند. با همین استدلال نقاش دوم در یک روز $\frac{۱}{۹}$ خانه را رنگ می‌کند. پس هر دو با هم در یک روز $\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۹}=\frac{۷}{۳۶}$ خانه را رنگ می‌کنند.

اگر تعداد روزهای لازم برای رنگ کردن خانه را x در نظر بگیریم تناسب روبه‌رو را تشکیل می‌دهیم.

روز	کار
۱	$\frac{۷}{۳۶}$
x	۱

در نتیجه :

$$\frac{\frac{۷}{۳۶}}{۱}=\frac{۱}{x}$$

$$x=\frac{۱\times۱}{\frac{۷}{۳۶}}=\frac{۳۶}{۷}\simeq ۵/۱۴$$

بیندیشیم

۵/۱۴ روز چه معنایی دارد؟

فعالیت

یک حوض در نظر بگیرید که توسط دو شیر آب پر می‌شود. فرض کنید شیر اول به تنهایی در a ساعت حوض را پر می‌کند و شیر دوم به تنهایی در b ساعت حوض را پر می‌کند و اگر این دو شیر را با هم باز کنیم حوض در x ساعت پر خواهد شد. با انجام مراحل زیر می‌خواهیم x را بر حسب a و b حساب کنیم.

۱ــ شیر اول به تنهایی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کند؟

۲ــ شیر دوم به تنهایی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کند؟

۳ــ هر دو شیر با هم در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کنند؟

۴ــ وقتی هر دو شیر با هم باز هستند در x ساعت حوض پر می‌شود، در یک ساعت چه کسری از حوض پر می‌شود؟

۵ــ با توجه به محاسبات بالا، رابطه‌ی ریاضی بین x و a و b را بنویسید.

در انجام فعالیت بالا معادله‌ی

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{x}$$

به دست می‌آید که برای حل آن به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{۱}{x}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

$$\frac{۱}{x}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}$$

$$\frac{۱}{x}=\frac{a+b}{ab}$$

$$x=\frac{ab}{a+b}$$

بنابراین، اگر دو شیر آب همزمان باز باشند، حوض در $\frac{ab}{a+b}$ ساعت پر خواهد شد.

اگر از ما بپرسند حوضی هست که از درون آن سه رود می‌گذرد که از گذر یک رود، حوض در سه روز پر می‌شود، رود دوم در چهار روز و رود سوم در پنج روز پر می‌شود. اگر هر سه رود هم‌زمان در حوض وارد شوند، در چند روز حوض پر می‌شود؟

پاسخ آن است که جواب آن را بگیریم سه و چهار و پنج، مقدار روزها را به مخرج‌ها می‌آوریم می‌شود ثلث و ربع و خمس $(\frac{۱}{۳})$، $(\frac{۱}{۴})$ و $(\frac{۱}{۵})$. سپس ثلث و ربع و خمس را به مخرج شصت می‌آوریم.

بیست، پانزده و دوازده، آن را جمع می‌کنیم می‌شود چهل و هفت و مخرج آن را که شصت است بر آن تقسیم می‌کنیم که جواب می‌شود و سیزده از چهل و هفت می‌ماند پس حوض در مدّت یک روز و شش ساعت و چهل دقیقه پر می‌شود.

(مسئله از مفتاح‌المعاملات)

عبارت‌های گویا

همان‌گونه که در فعالیت بالا دیدید، در حل بسیاری از مسائل لازم است عبارت‌هایی مانند $\frac{1}{a}$، $\frac{1}{b}$ و $\frac{ab}{a+b}$ را در نظر بگیریم و روی آن‌ها محاسباتی انجام دهیم. این گونه عبارت‌ها را عبارت‌های گویا می‌نامند.

> عبارت‌های جبری که پس از ساده‌کردن، به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای در می‌آیند را یک عبارت گویا می‌نامند.

برای مثال، عبارت‌های جبری زیر عبارت‌هایی گویا هستند.

$$7 \quad , \quad 4xy^2 \quad , \quad \frac{a^2b+b^2a}{a+b} \quad , \quad \frac{xy+x^2+1}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{x+2}{x-1}$$

ولی، عبارت‌های جبری زیر، عبارت گویا نیستند.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+y} \quad , \quad \frac{2-x^2\sqrt{y}}{y^2+x} \quad , \quad \sqrt{x}+1$$

تمرین در کلاس

زمینی مستطیلی شکل در نظر بگیرید که طول و عرض آن به‌ترتیب x متر و y متر باشند.

۱ــ اگر در این زمین یک مستطیل را جدا کنیم که عرض آن نصف عرض زمین و طول آن یک سوم طول زمین باشد، مساحت آن چقدر خواهد شد؟ نسبت مساحت این قسمت به مساحت کل زمین چقدر خواهد بود؟

۲ ــ اگر در گوشه‌ای از این زمین باغچه‌ای بسازیم که طول آن ۲۰ متر کمتر از طول زمین و عرض آن ۳۰ متر کمتر از عرض زمین باشد، محیط این باغچه برحسب x و y چند متر و مساحت آن چند متر مربع است؟

۳ــ مساحت باغچه چه کسری از مساحت کل زمین است؟

۴ــ کدام یک از عبارت‌های زیر عبارت گویا نیستند؟

الف) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ ب) $\frac{x^2-x+1}{y+\sqrt{3}}$ ج) $3x+7$

یک عبارت گویا، نشان‌دهنده‌ی یک عدد است که با جایگذاری مقدارهایی برای متغیرهایش محاسبه می‌شود. برای مثال، مقدار عبارت $\frac{x}{x+۱}$، به ازای $x=۴$ برابر است با $\frac{۴}{۵}=\frac{۴}{۴+۱}$ و مقدار این عبارت به ازای $x=-۵$ برابر است با $\frac{۵}{۴}=\frac{-۵}{-۵+۱}$. به ازای $x=-۱$ مخرج این عبارت گویا صفر می‌شود، بنابراین این عبارت گویا به ازای $x=-۱$ تعریف نشده است.

در چند جمله‌ای‌ها، چون از عمل تقسیم استفاده نمی‌شود، به ازای هر مقداری از متغیرهایش مقدار عددی چند جمله‌ای قابل محاسبه است. اما، در عبارت‌های گویا چون عمل تقسیم نیز وجود دارد، ممکن است به ازای برخی مقادیر برای متغیرهایش، مخرج عبارت صفر شود و در این حالات مقدار عبارت تعریف نشده است.

مثال: عبارت $\frac{y^۲-y+x}{x^۲-۱}$ به ازای مقدارهای $x=۱$ و $x=-۱$ تعریف نشده است (چرا؟)، ولی به ازای سایر مقادیر تعریف شده است. مثلاً، به ازای $x=۰$ و $y=۳$ مقدار این عبارت برابر است با $\frac{۳^۲-۳+۰}{۰^۲-۱}=\frac{۶}{-۱}=-۶$.

تمرین در کلاس

۱ــ به ازای چه مقداری برای x مقدار عبارت $\frac{x}{x+۱}$ برابر ۸ می‌شود؟

۲ــ آیا مقداری برای x می‌توان قرار داد که مقدار این عبارت برابر ۱ شود؟ چرا؟

۳ــ اگر $\frac{x}{x+۱}$ مساوی a باشد، x را بر حسب a حساب کنید.

۴ــ به ازای چه مقداری برای m دو عبارت $\frac{۲}{m-۲}$ و $\frac{۴}{m+۱}$ مقدار یکسانی خواهند داشت؟

اعمال جبری روی عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای هستند، بنابراین همانند اعدادی هستند که از طریق تقسیم دو عدد بر هم به دست می‌آیند. پس می‌توان آن‌ها را با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کرد و حاصل این اعمال مجدداً یک عبارت گویا خواهد بود. قواعد محاسبه با عبارت‌های گویا، همان قواعد محاسبه با چند جمله‌ای‌ها و کسرها است.

تمرین در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}$ ۲) $۲\times\frac{۱}{x}$ ۳) $۱+\frac{۱}{b}$

۴) $\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}$ ۵) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ۶) $۱\div\frac{a}{b}$

۷) $\frac{۱}{y+۱}+\frac{۱}{y-۱}$ ۸) $\frac{x-۱}{y}-\frac{y}{x+۱}$ ۹) $۱-\frac{x-y}{x+y}$

مثال: مجموع و حاصل ضرب و تقسیم دو عبارت گویای $\frac{x-۱}{y+۱}$ و $\frac{x+۱}{y-۱}$ را به دست آورید.

$$\frac{x-۱}{y+۱}+\frac{x+۱}{y-۱}=\frac{(x-۱)(y-۱)+(x+۱)(y+۱)}{(y+۱)(y-۱)}=\frac{xy-x-y+۱+xy+x+y+۱}{y^۲-۱}$$

$$=\frac{۲(xy+۱)}{y^۲-۱}$$

$$\frac{x-۱}{y+۱}\times\frac{x+۱}{y-۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{(y-۱)(y+۱)}=\frac{x^۲-۱}{y^۲-۱}$$

$$\frac{\frac{x-۱}{y+۱}}{\frac{x+۱}{y-۱}}=\frac{x-۱}{y+۱}\div\frac{x+۱}{y-۱}=\frac{x-۱}{y+۱}\times\frac{y-۱}{x+۱}=\frac{(x-۱)(y-۱)}{(x+۱)(y+۱)}$$

تمرین در کلاس

فرض کنید A و B عبارت‌های گویایی به صورت $A=\frac{x}{x-۱}$ و $B=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ باشند. در هر قسمت، عبارت گویای C را چنان تعیین کنید که تساوی برقرار شود.

۱) $A\times B=C$ ۲) $A+C=B$ ۳) $\frac{A}{C}=B$

مسائل

۱ــ اعمال جبری زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{a^۲b}{c}\times\frac{c^۲b}{a^۲}$

ب) $\frac{a}{۲b}\times\frac{۳b}{۲a^۲}\times\frac{۴}{a}$

۲ــ هریک از عبارت‌های گویای زیر را به‌صورت مجموع یا تفاضل دو عبارت گویا بنویسید.

$\frac{x+۲}{y}$ ، $\frac{x+۱}{x^۲+۱}$ ، $\frac{a-۵}{b}$ ، $\frac{۲b-۳}{b-۳}$

۳ــ عبارت گویایی بیابید که اگر با $\frac{x+۱}{x-۱}$ جمع شود، حاصل آن برابر ۳ شود.

۴ــ نشان دهید قدرمطلق تفاضل معکوس دو عدد طبیعی متوالی برابر است با معکوس حاصل‌ضرب آن‌ها.

۵ــ اگر نسبت $۲x-y$ به $x+y$ برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، نسبت x به y چقدر خواهد بود؟

۶ــ مخزن آبی دو شیر دارد. اگر یکی از این شیرها را باز کنیم در ۹۰ دقیقه ۱۰۰ لیتر آب را تخلیه می‌کند. اگر دو شیر را با هم باز کنیم ۱۰۰ لیتر آب در ۲۰ دقیقه تخلیه می‌شود. اگر شیر دوم را به تنهایی باز کنیم، در چند دقیقه ۱۰۰ لیتر آب تخلیه خواهد شد؟

۷ــ مستطیلی درنظر بگیرید که طول و عرض آن اعداد x و y باشند. دایره‌ای درنظر بگیرید که محیط آن برابر محیط این مستطیل باشد. نسبت مساحت این دایره را به مساحت این مستطیل بنویسید و به‌عنوان یک عبارت جبری گویا بودن یا نبودن آن را تعیین کنید. درحالتی که این مستطیل، یک مربع باشد، این نسبت به چه شکل در می‌آید؟

۸ــ اگر $۳x+\frac{۱}{۲x}=۴$ باشد حاصل $۹x^۲+\frac{۱}{۴x^۲}$ چیست؟

۹ــ اعمال جبری زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}+\frac{۱}{۳x}$

ب) $\frac{c}{c+۱}+\frac{۲}{۲c+۲}$

ج) $\frac{۱}{b}+\frac{۴}{۳b}$

د) $\frac{۴}{۳x^۲y}-\frac{۳}{۲xy}$

هـ) $\frac{x+۳}{۵}\div\frac{x-۳}{۵x}$

و) $\frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}$

ساده کردن عبارت‌های گویا

فعالیت

دو عبارت $\frac{x+1}{x-1}$ و $\frac{x^2+x}{x^2-x}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ مقدار این دو عبارت را به ازای مقدارهای $x=3$ و $x=-5$ و $x=\frac{1}{2}$ حساب کنید و با هم مقایسه کنید.

۲ــ به ازای مقدار دیگری برای x که به دلخواه خود در نظر می‌گیرید دو عبارت را حساب کنید. آیا این دو مقدار مساویند؟

۳ــ به نظر می‌رسد به ازای هر مقداری برای x که مخرج را صفر نمی‌کند، این دو عبارت مقدارهای یکسانی دارند. چگونه می‌توانید از عبارت اول، عبارت دوم را به دست آورید؟

۴ــ صورت و مخرج عبارت دوم را تجزیه کنید و با توجه به آن که هر کسر به صورت $\frac{ac}{bc}$ با کسر $\frac{a}{b}$ مساوی است، تساوی این دو عبارت را نتیجه بگیرید.

در کسرها، می‌توان صورت و مخرج آن کسر را در عدد مخالف صفری ضرب یا بر آن تقسیم کرد و با این عمل، مقدار کسر تغییر نخواهد کرد.

در عبارت‌های گویا نیز، چون به صورت کسر می‌باشند، در صورت وجود، عبارت مشترکی که به صورت ضرب در صورت و مخرج قرار دارد، را می‌توان از صورت و مخرج حذف کرد و عبارت گویای ساده‌تر دیگری به دست آورد که با عبارت قبلی مساوی است. این عمل را ساده کردن کسر می‌نامند.

مثال ۱: عبارت گویای $\frac{ax+a}{x^2-1}$ را ساده کنید.

$$\frac{ax+a}{x^2-1}=\frac{a(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x-1}$$

مثال ۲: عبارت گویای $\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x}$ را ساده کنید.

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x}=\frac{x(x^2+3x)}{(x^2+3x)}=x$$

مثال ۳: عبارت گویای $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$ را ساده کنید.

صورت و مخرج این عبارت را تجزیه می‌کنیم تا بتوان عامل مشترکی را در صورت و مخرج پیدا کرد.

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$$

تمرین در کلاس

عبارت‌های گویای زیر را تا آن‌جا که ممکن است ساده کنید.

الف) $\frac{a^2-4}{a+2}$ ب) $\frac{ax^3+x^3a}{2a^2x+2ax^2}$ ج) $\frac{y^2-4y+3}{y^2+2y-3}$

مسائل

۱ــ حاصل عبارت $(\frac{1}{r}+\frac{1}{s})\times\frac{s}{r+s}$ کدام یک از عبارت‌های زیر است.

الف) $\frac{s}{r}$ ب) $\frac{1}{s}$ ج) $\frac{1}{r}$

۲ــ اگر $A=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $B=\frac{2x}{1+x^2}$ ثابت کنید $A^2+B^2=1$

۳ــ عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

ج) $\frac{x^2-8x+7}{x^2-1}$ الف) $\frac{2a^2x^3}{4ax^2}$

د) $\frac{y^2z+y^3}{z^2y+z^3}$ ب) $\frac{3x^2-9x}{x^2-9}$

۴ــ قاعده متوازی‌الاضلاعی برای عددی مانند x برابر $x-2$ و مساحت آن برابر $2x^2-3x-2$ است. ارتفاع این متوازی‌الاضلاع را برحسب x به‌دست آورید.

۵ــ حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{4x^2}{x+1}\times\frac{x^2-1}{x^2-x}$ ب) $\frac{x^2-1}{x-2}\div\frac{x+1}{x^2-4}$

ج) $\frac{6x^2-15xy}{9x^2y^2}\div\frac{4x^2-25y^2}{2x^2y+5xy^2}$

۶ــ عبارت گویایی بیابید که اگر در $\frac{x^2-y^2}{4x+y}$ ضرب شود، حاصل آن برابر $x+y$ شود.

۷ــ ساده شده عبارت $\frac{5x^2}{x^2-2x}\times\frac{x^2-4}{10x}$ کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

ج) $x-1$ ب) $\frac{x+2}{2x}$ الف) $\frac{x+2}{2}$

۸ــ دانش‌آموزی در برگه امتحانی خود به صورت زیر نوشته است. اشتباهات او را توضیح دهید.

ج) $\frac{-4yx^2}{2^2y}=\frac{-4yx^2}{4y}=-x^2=x^2$ الف) $\frac{x+3}{2x+5}+\frac{x+2}{2x+5}=\frac{2x+5}{2x+5}=0$

ب) $\frac{3x+1}{2}-\frac{1-x}{2}=\frac{3x+1-1-x}{2}=\frac{2x}{2}=x$

تقسیم چند جمله‌ای ها

در ساده‌کردن عبارت‌های گویا، حالت‌هایی پیش می‌آید که نتیجه ساده‌شدن یک چند جمله‌ای است.

به‌عنوان مثال، می‌دانیم $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ ، بنابراین

$$\frac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1$$

در این مثال گوییم : x^3+1 بر $x+1$ بخش‌پذیر است و حاصل تقسیم x^3+1 بر $x+1$ برابر است با x^2-x+1 . یک مسئله‌ی مهم در چند جمله‌ای‌ها آن است که اگر بدانیم یک چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای دیگری بخش‌پذیر است، حاصل تقسیم این چند جمله‌ای‌ها را چگونه محاسبه می‌کنیم؟

قاعده تقسیم دو چند جمله‌ای بر هم

تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

در تقسیم یک جمله‌ای‌ها بر هم از قاعده‌ی ساده‌کردن کسرها استفاده می‌شود. ابتدا ضرایب عددی یک جمله‌ای‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم و سپس بقیه‌ی جملات را با استفاده از رابطه‌ی $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ ساده می‌کنیم.

مثال: یک جمله‌ای $۷x^۳$ را بر یک جمله‌ای $۱۴x^۲$ تقسیم کنید.

$$\frac{۷x^۳}{۱۴x^۲}=\frac{۷}{۱۴}\times\frac{x^۳}{x^۲}=\frac{۱}{۲}x$$

مثال: یک جمله‌ای «$-۲۰x^۴y^۳z$» را بر یک جمله‌ای $۵x^۳y^۲z$ تقسیم کنید.

$$\frac{-۲۰x^۴y^۳z}{۵x^۳y^۲z}=\frac{-۲۰}{۵}\times\frac{x^۴}{x^۳}\times\frac{y^۳}{y^۲}\times\frac{z}{z}=-۴xy$$

تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

در تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یک جمله‌ای‌ها از درستی تساوی $(\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c})$ ، استفاده می‌شود. هر چند جمله‌ای مجموعی از یک جمله‌ای‌ها است و در تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای، آن را به صورت جمع چند تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای می‌نویسیم و آن را ساده می‌کنیم.

مثال: چندجمله‌ای $۴x^۳y^۲+۶x^۲y^۳-۱۲x^۵y$ را بر یک جمله‌ای $۲xy$ تقسیم کنید.

$$\frac{۴x^۳y^۲+۶x^۲y^۳-۱۲x^۵y}{۲xy}=\frac{۴x^۳y^۲}{۲xy}+\frac{۶x^۲y^۳}{۲xy}+\frac{-۱۲x^۵y}{۲xy}=۲x^۲y+۳xy^۲-۶x^۴$$

تمرین در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

۱) $\dfrac{۱۴a^۲b}{۷ab}$

۲) $\dfrac{\sqrt{۶}x^۴y^۳z}{\sqrt{۲}x^۲z}$

۳) $\dfrac{۲xy^۲-۴x^۲yz}{۱۰xy}$

۴) $\dfrac{۱۵a^۳b^۵-۳۰a^۲b^۴-۲۵a^۳b^۳}{۲۵a^۲b^۳}$

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

در این قسمت فقط چندجمله‌ای‌های یک متغیره را درنظر می‌گیریم. به عنوان مثال تقسیم چندجمله‌ای $۲x^۳-x^۲+x+۴$ بر چندجمله‌ای $x+۱$ را بررسی می‌کنیم. در تقسیم $۲x^۳-x^۲+x+۴$ بر $x+۱$، اولی را مقسوم و دومی را مقسوم‌علیه و حاصل تقسیم را خارج قسمت می‌نامند. عمل تقسیم را در شکلی مانند زیر که همانند تقسیم اعداد طبیعی است نشان می‌دهند.

مقسوم	مقسوم‌علیه
	خارج قسمت

در یک عمل تقسیم، درجه‌ی مقسوم باید بزرگتر یا مساوی درجه‌ی مقسوم علیه باشد.

مرحله‌ی اول: ابتدا مقسوم و مقسوم‌علیه را به شکل استاندارد (از بالاترین توان به کمترین توان متغیر) می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳-x^۲+x+۴ & x+۱ \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

مرحله‌ی دوم: اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و حاصل را در محل خارج‌قسمت می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳-x^۲+x+۴ & x+۱ \\ \cline{2-2} & ۲x^۲ \end{array}$$

مرحله‌ی سوم: خارج قسمت به‌دست آمده در مرحله‌ی قبل را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و قرینه‌ی آن را زیر مقسوم می‌نویسیم و با مقسوم جمع می‌کنیم. این عمل، همان تفریق کردن حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم‌علیه، از مقسوم است.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3-x^2+x+4 & x+1 \\ \cline{2-2}
-2x^3-2x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-1}
\quad -3x^2+x+4 &
\end{array}
$$

مرحله‌ی چهارم: چندجمله‌ای به دست آمده‌ی جدید را مانند یک مقسوم جدید می‌گیریم و مراحل دوم و سوم را تکرار می‌کنیم.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3-x^2+x+4 & x+1 \\ \cline{2-2}
-2x^3-2x^2 & 2x^2-3x \\ \cline{1-1}
\quad -3x^2+x+4 & \\
\quad 3x^2+3x & \\ \cline{1-1}
\qquad 4x+4 &
\end{array}
$$

مرحله‌ی پنجم: مرحله‌ی چهار را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا در محل مقسوم‌های جدید یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم‌علیه به‌دست آید.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3-x^2+x+4 & x+1 \\ \cline{2-2}
-2x^3-2x^2 & 2x^2-3x+4 \\ \cline{1-1}
\quad -3x^2+x+4 & \\
\quad 3x^2+3x & \\ \cline{1-1}
\qquad 4x+4 & \\
\qquad -4x-4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

در این مرحله، اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، در محل مقسوم‌های جدید چندجمله‌ای صفر به‌دست می‌آید. اما، اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر نباشد، با این عملیات، در محل مقسوم‌های جدید یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم علیه به‌دست می‌آید که آن را باقیمانده عمل تقسیم می‌نامند.

مثال: با تقسیم $5x^3+4x^2-x+3$ بر چندجمله‌ای x^2+1، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید. آیا چندجمله‌ای $5x^3+4x^2-x+3$ بر چندجمله‌ای x^2+1 بخش‌پذیر است؟

$$
\begin{array}{l|l}
5x^3+4x^2-x+3 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
-5x^3-5x & 5x+4 \\ \cline{1-1}
\quad 4x^2-6x+3 & \\
\quad -4x^2-4 & \\ \cline{1-1}
\qquad -6x-1 &
\end{array}
$$

با توجه به آن که باقیمانده این تقسیم صفر نیست، مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر نیست.

در هر عمل تقسیم، مقسوم برابر است با حاصل‌ضرب مقسوم‌علیه در خارج‌قسمت و جمع با باقیمانده.

از این مطلب می‌توان برای بررسی درستی یک تقسیم استفاده کرد. اگر تساوی صفحه‌ی قبل برقرار شود می‌توان اطمینان داشت که تقسیم به درستی انجام شده است.

برای مثال، اگر تقسیم صفحه‌ی قبل به‌درستی انجام شده باشد، باید تساوی زیر برقرار باشد.

$$5x^3+4x^2-x+3=(x^2+1)(5x+4)-6x-1$$

تساوی بالا به معنای آن است که کسر $\frac{5x^3+4x^2-x+3}{x^2+1}$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\frac{5x^3+4x^2-x+3}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(5x+4)-6x-1}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(5x+4)}{x^2+1}+\frac{-6x-1}{x^2+1}$$

$$=5x+4-\frac{6x+1}{x^2+1}$$

مثال: با تقسیم چندجمله‌ای اولی بر چندجمله‌ای دومی، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید. آیا چندجمله‌ای $x^3+3x^2+9x+27$ بر چندجمله‌ای $x+3$ بخش‌پذیر است؟

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+9x+27 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2 & x^2+9 \\ \cline{1-1} 9x+27 & \\ -9x-27 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

از آن‌جا که باقیمانده صفر است، مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر بوده است و داریم

$$\frac{x^3+3x^2+9x+27}{x+3}=x^2+9$$

تمرین در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$1)\ \ 6x^5+3x^2+1 \ \Big|\ \underline{x^2+1}$$

$$2)\ \ x^3+x^4+3 \ \Big|\ \underline{1-2x^2}$$

مسائل

۱ــ تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{24x^2y^2}{4xy^2}$ ب) $\frac{6x^3b^2+3x^2b}{3x^2b}$ ج) $(x^3-2x^2+x)\div(x^2-x)$

۲ــ تقسیم $-2x^2+4x+7$ بر $x-2$ را انجام دهید. خارج‌قسمت و باقیمانده را تعیین و درستی عمل تقسیم را بررسی کنید.

۳ــ در تقسیم $\frac{x^3+a}{x+1}$ مقدار a چقدر باشد تا باقیمانده صفر شود؟

۴ــ ساده شده عبارت $\frac{y^3-y^2-y+1}{1-y}$ برابر کدام‌یک از عبارت‌های زیر است؟

الف) $1-y+y^2$ ب) $1-y^2$ ج) y^3

۵ــ نشان دهید چندجمله‌ای $3x^4+(5-3a)x^3-5ax^2-x+a$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

۶ــ اگر در تقسیم $3x^3+4x+m$ بر $x+2$ باقیمانده صفر شود m چیست؟

۷ــ خارج‌قسمت و باقیمانده هریک از تقسیم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $5x+9x^3-4 \;\Big|\; \underline{3x+2}$

ب) $8y^3-125 \;\Big|\; \underline{5-2y}$

ج) $x^2+x^4-2 \;\Big|\; \underline{2+x^2}$

۸ــ مساحت یک مستطیل برحسب a، به‌صورت $2a^3-4a+2$ و عرض آن برابر $a-1$ می‌باشد. طول آن برحسب a چیست؟

عبارت‌های رادیکالی

عبارت‌های جبری که در آن‌ها محاسبات ریشه‌گیری وجود دارد، عبارت‌های رادیکالی می‌نامند. به عنوان مثال، عبارت‌های زیر، عبارت‌های رادیکالی هستند.

$$\sqrt{۱+x^۲} \quad , \quad \sqrt{x^۲+y^۲}-xy^۲ \quad , \quad \frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt[۳]{y}}{\sqrt[۳]{x^۳+x+۴}}$$

تمرین در کلاس

۱ــ محیط و مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن z و طول یک ضلع آن x است را به عنوان دو عبارت رادیکالی به دست آورید.

۲ــ اگر مربعی با مساحت z داشته باشیم و طول اضلاع آن را x واحد افزایش دهیم، مساحت مربع اولیه چقدر افزایش می‌یابد؟

عبارت‌های رادیکالی نیز نشان‌دهنده اعدادی هستند که برحسب مقدار متغیرهایشان تعیین می‌شوند. به همین خاطر عبارت‌های رادیکالی را می‌توان باهم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کرد یا به توان رسانید یا ریشه‌ی آن‌ها را محاسبه کرد. با استفاده از قواعد محاسباتی مربوط به جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و توان‌رسانی و ریشه‌گیری می‌توان این محاسبات را انجام داد و نتیجه را تا آن‌جا که ممکن است ساده نمود.

در یک عبارت رادیکالی که به صورت تقسیم دو عبارت است، اگر در مخرج کسر عمل ریشه‌گیری وجود داشته باشد و با عملیات جبری، نمایشی از آن کسر را به دست آوریم که در مخرج کسر فقط چندجمله‌ای وجود داشته باشد، این عمل را گویاکردن مخرج آن عبارت رادیکالی می‌نامند.

مثال: مخرج عبارت $\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ را گویا کنید.

کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{x}$ ضرب کنیم تا مخرج کسر از حالت رادیکالی خارج شود.

$$\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱\times\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{۲x}$$

مثال: مخرج عبارت رادیکالی $\frac{۲}{\sqrt{a}-۱}$ را گویا کنید.

صورت و مخرج این عبارت را در $\sqrt{a}+۱$ ضرب می‌کنیم. به این عبارت مزدوج $\sqrt{a}-۱$ می‌گویند.

$$\frac{۲}{\sqrt{a}-۱}=\frac{۲(\sqrt{a}+۱)}{(\sqrt{a}-۱)(\sqrt{a}+۱)}=\frac{۲(\sqrt{a}+۱)}{(\sqrt{a})^۲-۱^۲}$$

$$=\frac{۲(\sqrt{a}+۱)}{a-۱}$$

مثال: مخرج عبارت رادیکالی $\frac{۱}{\sqrt{x}+۲\sqrt{y}}$ را گویا کنید.

با استفاده از اتحاد مزدوج اگر مخرج این عبارت را در $\sqrt{x}-۲\sqrt{y}$ ضرب کنیم، مخرج از حالت رادیکالی خارج می‌شود، زیرا

$$(\sqrt{x}+۲\sqrt{y})\times(\sqrt{x}-۲\sqrt{y})=(\sqrt{x})^۲-(۲\sqrt{y})^۲=x-۴y$$

بنابراین صورت و مخرج این عبارت را در $\sqrt{x}-۲\sqrt{y}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\sqrt{x}+۲\sqrt{y}}=\frac{۱\times(\sqrt{x}-۲\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+۲\sqrt{y})\times(\sqrt{x}-۲\sqrt{y})}=\frac{\sqrt{x}-۲\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^۲-(۲\sqrt{y})^۲}=\frac{\sqrt{x}-۲\sqrt{y}}{x-۴y}$$

مثال: حاصل عبارت $۱+\sqrt{x}+\frac{x}{۱-\sqrt{x}}$ را حساب کنید و به ساده‌ترین صورت آن را بنویسید.

$$۱+\sqrt{x}+\frac{x}{۱-\sqrt{x}}=\frac{(۱+\sqrt{x})(۱-\sqrt{x})+x}{۱-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{۱-(\sqrt{x})^۲+x}{۱-\sqrt{x}}=\frac{۱-x+x}{۱-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{۱}{۱-\sqrt{x}}=\frac{۱\times(۱+\sqrt{x})}{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{۱+\sqrt{x}}{۱-x}$$

مسائل

۱ــ مخرج عبارت‌های رادیکالی زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۲\sqrt{x}}{۳\sqrt{y}}$

ب) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}$

ج) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}}$

د) $\frac{\sqrt{a}-۱}{\sqrt{a}+۱}$

هـ) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

۲ــ کدام عبارت جبری در $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ضرب شود، حاصل برابر $a^۲-b^۲$ می‌شود؟

۳ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{a}-۱}-\frac{۱}{\sqrt{a}+۱}$

ب) $\frac{۱-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$

ج) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x})(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x})$

ب) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

۵ــ اگر $x=۲+\sqrt{۳}$ باشد حاصل $\sqrt{x+\frac{۱}{x}}$ چیست؟

۸

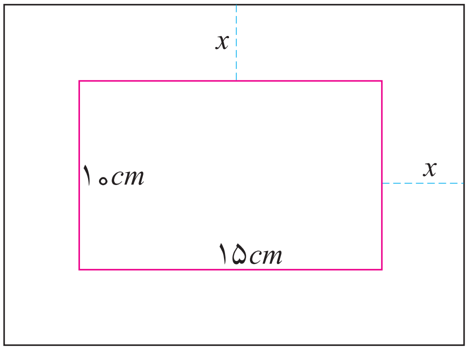
معادلات درجه دوم و حل آن‌ها

معمولاً چتربازان پس از کمی سقوط آزاد، چتر خود را باز می‌کنند. فکر می‌کنید چه مدت طول می‌کشد که یک چتر باز ۲۰ متر سقوط آزاد کند؟

معادلات درجه دوم

مریم می‌خواهد برای یکی از عکس‌های خانوادگی خود که ۱۵ سانتی‌متر طول و ۱۰ سانتی‌متر عرض دارد، یک قاب عکس تهیه کند. عکس باید از کناره‌های قاب فاصله‌های مساوی داشته باشد و می‌خواهیم نسبت مساحت قاب ($S_۱$) به مساحت عکس ($S_۲$) $\frac{۵}{۴}$ باشد. طول و عرض این قاب چقدر باید باشد؟

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۵}{۴}$$



اگر عرض حاشیه ایجاد شده در قاب موردنظر را x بنامیم، طول و عرض قاب $۱۵+۲x$ و $۱۰+۲x$ خواهد بود، پس $S_۱=(۱۵+۲x)(۱۰+۲x)$ و $S_۲=۱۵\times۱۰$ و باید داشته باشیم.

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{(۱۵+۲x)(۱۰+۲x)}{۱۵\times۱۰}=\frac{۵}{۴}$$

رابطه‌ی بالا یک معادله برحسب x است و باید به دنبال مقداری برای x بگردیم تا تساوی بالا برقرار شود. آن مقادیری از x که تساوی بالا را برقرار می‌کنند جواب‌های معادله‌ی بالا نامیده می‌شوند.

معادله‌هایی را که پس از ساده کردن، بالاترین درجه متغیر آن ۲ باشد معادله درجه دوم می‌نامند.

معادله مربوط به قاب عکس یک معادله درجه دوم است، زیرا پس از ساده کردن به صورت زیر درمی‌آید.

$$۸x^۲+۱۰۰x-۷۵=۰$$

مثال: یک نخ به طول یک متر در اختیار داریم و می‌خواهیم با آن یک مستطیل بسازیم که مساحت آن ۶۰۰ سانتی‌مترمربع باشد. طول و عرض این مستطیل چقدر باید باشد؟

اگر طول و عرض این مستطیل را برحسب سانتی‌متر x و y بنامیم باید داشته باشیم $۲(x+y)=۱۰۰$ و

$xy=600$. از معادله اول نتیجه می‌شود $y=50-x$ و با جایگذاری در معادله دوم داریم $x(50-x)=600$. این نیز یک معادله درجه دوم برحسب x است، زیرا پس از ساده کردن به شکل $x^2-50x+600=0$ در می‌آید.

مثال: اعدادی بیابید که مربع آن‌ها ۱۲ واحد بیشتر از خودشان باشد؟ اگر چنین عددی را x بنامیم، باید داشته باشیم $x^2=x+12$. این یک معادله درجه دوم برحسب x است و جواب‌های این معادله همان اعداد موردنظر هستند.

آیا هر معادله درجه ۲ جواب دارد؟ به عنوان مثال، آیا عددی هست که جمع مربع آن با ۱ صفر شود؟ اگر چنین عددی وجود داشته باشد، جواب معادله $x^2+1=0$ خواهد بود. اما مربع هر عددی نامنفی است و اگر با ۱ جمع شود صفر نخواهد شد. پس این معادله جواب ندارد.

در مثال قبل اعدادی وجود دارند که مربع آن‌ها ۱۲ واحد بیشتر از خودشان باشند. ۴ یکی از این اعداد است زیرا $4^2=4+12$ در این مثال، جواب دیگری هم وجود دارد. (-3) نیز جواب این مسئله است، $(-3)^2=-3+12$.

خوارزمی

ابوعبدالله محمدبن موسی‌خوارزمی متولد قبل از ۱۶۵هـ.ق. ریاضی‌دان، منجم و مورخ و جغرافی‌دان ایرانی و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم عصر خود بود، به گونه‌ای که سده‌ی نهم میلادی را عصر خوارزمی می‌نامیدند. ازجمله معروف‌ترین کتاب‌های او کتاب الجبر و المقابله بوده است که تا قرن ۱۶میلادی مبنای مطالعات علمی ریاضی‌دانان اروپایی بوده است. خوارزمی در این کتاب به جای مجهول درجه اول (یعنی x) از کلمه‌ی شیء به مفهوم چیز نامعلوم استفاده می‌کند. هنگامی که اروپائیان کتاب‌های مسلمانان را به زبان خود ترجمه می‌کردند، کلمه‌ی عربی «شیء» را هم با اندکی تحریف با تلفظ xei به همین شکل برگزیدند و پس از آن که نوشتن معادلات به صورت نمادگذاری معمول شد اروپائیان «x» را که حرف اول آن واژه است به جای مجهول درجه اول اختیار کردند. او نخستین کسی است که علم جبر را به طور مستقل جبر و مقابله نامید. او روش تازه حساب را که به الگوریتم شهرت داشت در کتاب الجمع والتفریق حساب الهند آورده است. او همه انواع معادلات را به چند نوع استاندارد تبدیل و به کمک چند قاعده به حل آن‌ها می‌پردازد. از خوارزمی کتاب‌های دیگری نظیر کتاب الحساب، صورة الارض وجود دارد. او در سال ۲۳۳ هـ. درگذشت.

روش‌های حل معادلات درجه دوم

برای حل معادلات درجه دوم روش‌های متعددی وجود دارد که در این بخش برخی از آن‌ها را توضیح خواهیم داد.

روش آزمون و خطا

ساده‌ترین روش حل معادله‌های درجه دوم، روش آزمون و خطا است که یک جواب تقریبی به دست می‌دهد و در مورد معادلات پیچیده‌تر نیز می‌توان آن را به کار برد.

فعالیت

می‌خواهیم معادله $x^۲ - ۱۲x + ۳۴ = ۰$ را حل کنیم.

۱ــ جدول زیر را کامل کنید.

x	۰	۱	۲
$x^۲ - ۱۲x + ۳۴$			

۲ــ آیا با اضافه شدن مقادیر x، مقادیری که برای $x^۲ - ۱۲x + ۳۴$ یافته‌اید در حال نزدیک شدن به صفر است؟

۳ــ مقادیر x در سطر اول را ادامه دهید تا جایی که مقادیر سطر دوم هم‌چنان به صفر نزدیک شوند و در جایی منفی شوند.

۴ــ مقدار $x^۲ - ۱۲x + ۳۴$ به ازای $x = ۴$، مثبت و به ازای $x = ۵$، منفی است. ثابت می‌شود که در چنین حالتی یک جواب معادله بین ۴ و ۵ است. برای یافتن دقیق‌تر جواب جدول زیر را کامل کنید.

x	۴	۴/۳	۴/۵	۴/۸	۵
$x^۲ - ۱۲x + ۳۴$					

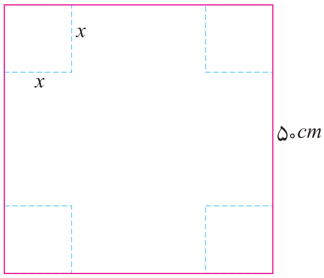
۵ــ با استفاده از جدول، مقادیری برای x بیابید که جواب معادله بین آن‌ها باشد؟

۶ــ روش بالا را تکرار کنید و در فاصله‌های کوچکتر به دنبال جواب بگردید. یک جواب این معادله را با دقت یک رقم اعشار تعیین کنید.

البته، یک معادله درجه دوم ممکن است دو جواب داشته باشد و با روش بالا فقط یکی از جواب‌ها به‌طور تقریبی محاسبه می‌شود. برای به‌دست آوردن جواب دیگر باید حدسی در مورد مقدار آن جواب داشته باشیم. با تکرار روش بالا و مقداردهی مناسب به متغیر، می‌توانیم به آن جواب برسیم.

تمرین در کلاس

در یک مغازه شیرینی فروشی، با مقواهای مربعی به طول ۵۰ سانتی‌متر و بریدن گوشه‌های آن به صورت مربع و تا کردن کناره‌های آن، جعبه می‌سازند. از گوشه‌های مربع بزرگ، چه مربع‌هایی را ببریم تا حجم جعبه ساخته شده، ۷۰۰۰ سانتی‌مترمکعب شود.



۱ــ طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند را x بنامید و حجم جعبه ساخته شده را برحسب x بنویسید.
۲ــ معادله‌ای تشکیل دهید که با حل آن، جواب مسئله به دست آید.
۳ــ این معادله، یک معادله درجه دوم نیست، ولی با روش آزمون وخطا، یک جواب تقریبی با دقت یک رقم اعشار برای آن پیدا کنید.

مسائل

۱ــ با دقت دو رقم اعشار و با استفاده از روش آزمون و خطا، یکی از دو جواب معادله $۲x^{۲} - ۲x - ۱ = ۰$ را حساب کنید.
۲ــ حل تقریبی معادله $x^{۲} - ۲ = ۰$ به معنی محاسبه تقریبی $\sqrt{۲}$ است. با استفاده از روش آزمون و خطا، $\sqrt{۲}$ را با دقت دو رقم اعشار حساب کنید.

روش هندسی

معادله $x^{۲} - ۶x + ۷ = ۰$ را در نظر بگیرید. این معادله را به صورت $x^{۲} = ۶x - ۷$ می‌نویسیم. می‌توانیم بگوییم جواب این معادله آن مقداری از x است، که به ازای آن مقدار دو چند جمله‌ای $x^{۲}$ و $۶x - ۷$ با هم برابر شوند. همانند روش آزمون و خطا می‌توان عمل کرد و با حدس مقادیر مختلف برای x، مقادیر $x^{۲}$ و $۶x - ۷$ را محاسبه می‌کنیم و با انتخاب‌های مناسب برای x، کاری می‌کنیم که مقدار این دو چندجمله‌ای به هم نزدیک شوند.

فعالیت

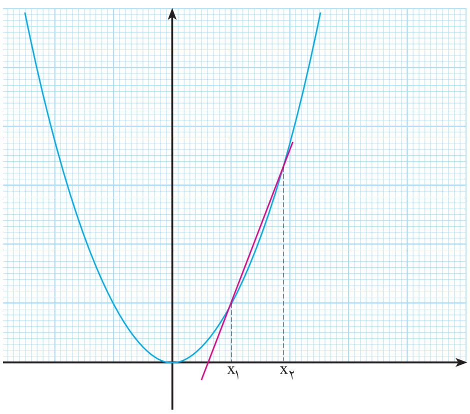
می‌خواهیم معادله $x^2-2x-1=0$ را حل کنیم.

۱ــ جدول زیر را کامل کنید.

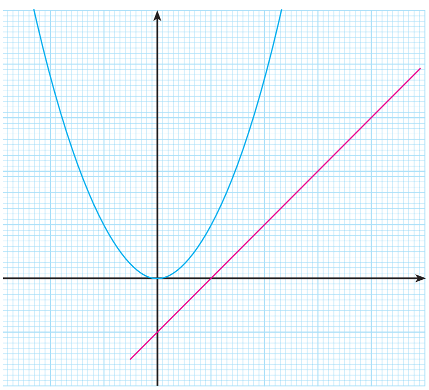
x	-1	0	1	2	3
x^2	1	0	1		
$2x+1$	-1	1			

۲ــ اعداد قرار گرفته در این جدول را می‌توان به صورت نمودار دو معادله $y=x^2$ و $y=2x+1$ در صفحه نمایش داد. جاهایی که مقدار این دو چندجمله‌ای مساوی می‌شوند، چه نقطه‌هایی از این دو نمودار را نشان می‌دهند؟

۳ــ در جدول به ازای هیچ مقداری از x دو چند جمله‌ای x^2 و $2x+1$ مساوی نشده‌اند. با رسم نمودارهای معادلات $y=x^2$ و $y=2x+1$ و یافتن محل‌های تقاطع این دو نمودار و اندازه‌گیری طول نقطه‌های تقاطع، به‌طور تقریبی جواب‌های معادله $x^2-2x-1=0$ را به دست آورید.



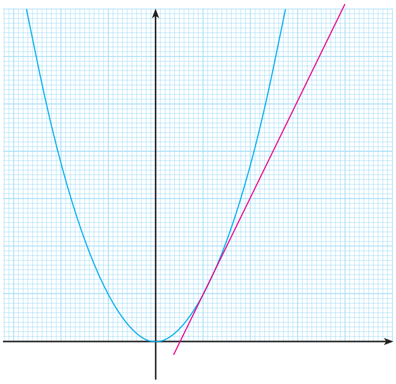
مثال ۱: برای حل یک معادله درجه دوم مانند $5x^2-14x+9=0$، می‌توانیم آن را به صورت $x^2=\frac{14}{5}x-\frac{9}{5}$ بنویسیم. اگر نمودارهای معادله $y=x^2$ و خط $y=\frac{14}{5}x-\frac{9}{5}$ را رسم کنیم، محل‌های برخورد این دو نمودار جاهایی را نشان می‌دهد که به ازای مقدارهایی از x مقدارهای x^2 و $\frac{14}{5}x-\frac{9}{5}$ مساوی شده‌اند. این مقدارهای x همان طول نقاط تقاطع نمودارها هستند و جواب معادله می‌باشند.



مثال ۲: وضعیت جواب‌های معادله $x^2-x+1=0$ را با روش هندسی تعیین کنید.

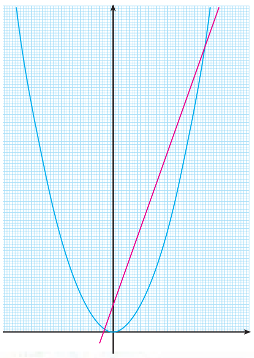
این معادله را به صورت $x^2=x-1$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله $y=x^2$ و خط $y=x-1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس این معادله جواب ندارد.

مثال ۳: وضعیت جواب‌های معادله $x^2-2x+1=0$ را با روش هندسی تعیین کنید.



این معادله را به صورت $x^2=2x-1$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله $y=x^2$ و خط $y=2x-1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها حالت مماس بر هم دارند. حدس می‌زنیم معادله فقط یک جواب دارد. با محاسبات جبری باید درستی حدس خود را بیازماییم.

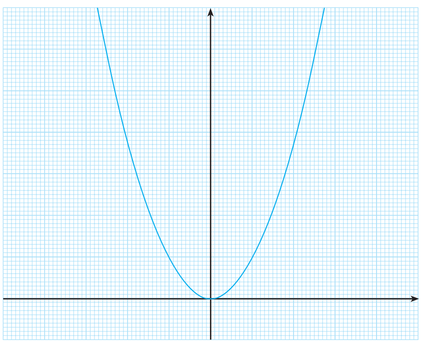
مثال ۴: وضعیت جواب‌های معادله $x^2-3x-1=0$ را با روش هندسی تعیین کنید.



این معادله را به صورت $x^2=3x+1$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله $y=x^2$ و خط $y=3x+1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. پس این معادله دو جواب دارد.

تمرین در کلاس

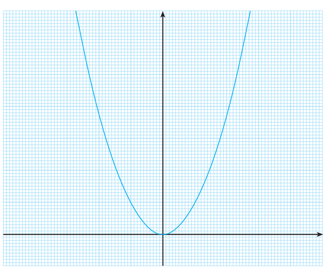
۱ـ نمودارهای خط‌های $y=2x-2$ و $y=2x-1$ و $y=2x+1$ را رسم کنید و محل تقاطع آن‌ها را با نمودار $y=x^2$ تعیین کنید.



۲ـ از میان معادلات $x^2-2x+2=0$ و $x^2-2x+1=0$ و $x^2-2x-1=0$ تعیین کنید کدام‌یک جواب دارند و چند جواب دارند.

مسائل

۱ـ با رسم نمودار نشان دهید معادله $x^2+4=0$ جواب ندارد.



۲ـ معادلات زیر را با روش رسم نمودار حل کنید و جواب‌های آن را به‌طور تقریبی به‌دست آورید.

الف) $x^2+x+1=0$ ب) $x^2-4x+3=0$

ج) $4x^2-8x=0$

روش تجزیه

در مواردی، معادله درجه دوم به صورت ضرب دو چندجمله‌ای درجه ۱ مساوی صفر است. به عنوان مثال معادله $(x-1)(2x+3)=0$ را در نظر بگیرید. حل این گونه معادلات بسیار ساده است، زیرا طبق یکی از خواص اساسی اعداد،

برای آن که ضرب دو عدد صفر شود باید حداقل یکی از آن دو عدد صفر باشند.

بنابراین $(x-1)(2x+3)$ فقط در حالتی صفر است که $x-1$ یا $2x+3$ صفر شوند. پس، جواب‌های دو معادله $x-1=0$ و $2x+3=0$، همان جواب‌های معادله $(x-1)(2x+3)=0$ است.

یک معادله درجه دوم به صورت تساوی یک چندجمله‌ای درجه دوم با صفر است. اگر بتوانیم این چندجمله‌ای را تجزیه کنیم، می‌توانیم به روش بالا آن را حل کنیم. این روش حل را روش تجزیه می‌نامند.

مثال ۱: معادله $x^2-5x=0$ را حل کنید.

این معادله را به صورت $x^2-5x=x(x-5)=0$ می‌نویسیم. در نتیجه جواب‌های آن $x=0$ و $x=5$ خواهند بود.

مثال ۲: معادله $x^2-5x+6=0$ را حل کنید.

چندجمله‌ای x^2-5x+6 را تجزیه می‌کنیم. $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)=0$، درنتیجه جواب‌های این معادله $x=2$ و $x=3$ خواهند بود.

مثال ۳: معادله $2x^2-5x-3=0$ را حل کنید.

می‌توان چندجمله‌ای $2x^2-5x-3$ را تجزیه کرد. این چندجمله‌ای را در فصل ۴ با روش‌های معمول تجزیه کرده‌ایم.

$$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$$

بنابراین، معادله اصلی را می‌توانیم به صورت $(x-3)(2x+1)=0$ بنویسیم. در نتیجه جواب‌های این معادله $x=3$ و $x=-\frac{1}{2}$ خواهند بود.

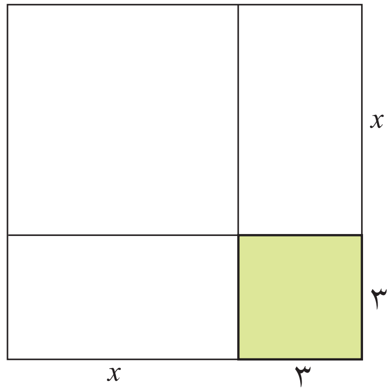
اگر بتوانیم چندجمله‌ای مربوط به یک معادله درجه دوم را تجزیه کنیم به دو معادله درجه اول می‌رسیم که جواب دارند. بنابراین آن دسته از معادلات درجه دوم که جواب ندارند، چند جمله‌ای آن‌ها قابل تجزیه نخواهد بود.

آخرین مثال نشان می‌دهد که کاربرد روش تجزیه بسیار محدود است، زیرا عمل تجزیه در بسیاری موارد کار آسانی نیست.

روش خوارزمی

خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم شش حالت خاص را بررسی کرده است. از میان این حالت‌ها فقط یکی از آن‌ها را توضیح خواهیم داد.

معادله $x^۲+۶x-۴۰=۰$ را در نظر بگیرید. در روش خوارزمی جمله‌های دارای مجهول را در یک طرف تساوی نگه می‌داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم. بنابراین، این معادله را به صورت $x^۲+۶x=۴۰$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم که در اینجا عدد ۳ است. مساحت مربعی با ضلع $x+۳$ را می‌توان حساب کرد.



در شکل روبه‌رو مساحت مربع رنگی برابر ۳×۳ است و بقیه مربع، مساحت $x^۲+۶x$ دارد که آن هم برابر ۴۰ است. پس کل مربع بزرگ، مساحت $۹+۴۰=۴۹$ دارد. پس، طول ضلع مربع بزرگ برابر $\sqrt{۴۹}=۷$ است، یعنی $x+۳=۷$. در نتیجه $x=۴$.

تمرین در کلاس

معادله $x^۲+۲x-۴=۰$ را با روش خوارزمی حل کنید.

همه معادلات درجه دوم را نمی‌توان با این روش حل کرد، زیرا این روش نیازمند یک تعبیر هندسی از معادله است و برخی معادلات را نمی‌توان با این روش تعبیر هندسی کرد. علاوه بر این، با این تعبیر هندسی، فقط یکی از جواب‌های معادلات درجه دوم به‌دست می‌آید. خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم در حالت‌های دیگر روش‌های دیگری را ساخته است.

مسائل

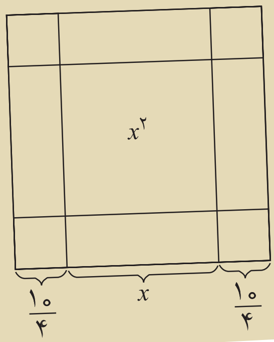
۱ــ معادلات زیر را با روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^۲-۷x+۶=۰$ ب) $(x-۱)(x+۱)=(x-۱)$ ج) $۴x^۲+۳x-۱=۰$

۲ــ معادلات زیر را با روش خوارزمی حل کنید.

الف) $x^۲+۴x-۵=۰$ ب) $۴x^۲+۴x-۳=۰$

ریاضی‌دانان مسلمان به‌جای x^3، لفظ «مکعب»، به‌جای x^2 لفظ «مال»، به‌جای x، لفظ «ریشه»، «شئ»، «ضلع» یا «جذر» و به‌جای مقدار عددی لفظ «درهم» یا «عدد» را به‌کار می‌بردند.
خیام و خوارزمی روش مشابهی را برای اثبات جواب معادله‌ی «مالی و دَه جذر معادل سی و نه درهم» به‌کار برده‌اند.
این معادله را با زبان امروزی بنویسید.
آیا می‌توانید از روی شکل اثبات را تکمیل کنید؟



روش مربع کامل

این روش، عملاً همان روش خوارزمی است با این تفاوت که جبری است و نیازی به تعبیر هندسی ندارد و به همین علت در حالت کلی می‌توان از آن استفاده کرد.

مثال ۱: معادله $x^2-20x+30=0$ را حل کنید.

سعی می‌کنیم روش خوارزمی را به‌کار بریم. می‌نویسیم $x^2-20x=-30$. نصف ضریب x عدد -10 است و چندجمله‌ای $(x-10)^2$ را در نظر می‌گیریم. این چندجمله‌ای رابطه مشخصی با چندجمله‌ای x^2-20x دارد.

$$(x-10)^2=(x^2-20x)+100$$

با توجه به تساوی بالا می‌توانیم معادله اصلی را به صورت $(x-10)^2-100=-30$ بنویسیم که پس از ساده‌سازی به صورت $(x-10)^2=70$ درمی‌آید. در نتیجه $x-10$ برابر ریشه‌های دوم ۷۰ است، یعنی

$$x-10=\pm\sqrt{70}$$

جواب‌های این معادله عبارتند از : $x=10+\sqrt{70}$ و $x=10-\sqrt{70}$.

در روش به‌کار گرفته شده در مثال فوق، چندجمله‌ی x^2-20x را برحسب $(x-10)^2$ نوشتیم، بنابراین روش را **روش مربع کامل** می‌نامند.

مثال ۲: معادله $x^2-2bx+15=0$ را حل کنید.

در این‌جا، نصف ضریب x برابر $(-b)$ است و چندجمله‌ای x^2-2bx را برحسب $(x-b)^2$ می‌نویسیم.

$$(x-b)^2=(x^2-2bx)+b^2$$

پس، معادله اصلی به صورت $(x-b)^۲-b^۲+۱۵=۰$ نوشته می‌شود. پس :

$$(x-b)^۲=b^۲-۱۵$$

$$x-b=\pm\sqrt{b^۲-۱۵}$$

$$x=b+\sqrt{b^۲-۱۵} \quad و \quad x=b-\sqrt{b^۲-۱۵}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $b^۲-۱۵$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد.
پس شرط داشتن جواب در این معادله، نامنفی بودن $b^۲-۱۵$ است.

مثال ۳: معادله $۳x^۲-۲x+c=۰$ را حل کنید.

ابتدا کاری می‌کنیم که ضریب $x^۲$ برابر ۱ شود. طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و معادله $x^۲-\frac{۲}{۳}x+\frac{c}{۳}=۰$ را به‌دست می‌آوریم. حال روش قبلی را تکرار می‌کنیم.

در این‌جا، نصف ضریب x برابر $(-\frac{۱}{۳})$ است و چندجمله‌ای $x^۲-\frac{۲}{۳}x$ را برحسب $(x-\frac{۱}{۳})^۲$ می‌نویسیم.

$$(x-\frac{۱}{۳})^۲=(x^۲-\frac{۲}{۳}x)+(\frac{۱}{۳})^۲$$

پس، معادله اصلی به صورت $(x-\frac{۱}{۳})^۲-\frac{۱}{۹}+\frac{c}{۳}=۰$ نوشته می‌شود. در نتیجه $(x-\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱}{۹}-\frac{c}{۳}$.

$$(x-\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱}{۹}-\frac{c}{۳}=\frac{۱-۳c}{۹}$$

$$x-\frac{۱}{۳}=\pm\sqrt{\frac{۱-۳c}{۹}}=\pm\frac{\sqrt{۱-۳c}}{۳}$$

$$x=\frac{۱}{۳}+\frac{\sqrt{۱-۳c}}{۳} \quad و \quad x=\frac{۱}{۳}-\frac{\sqrt{۱-۳c}}{۳}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $۱-۳c$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد. پس شرط داشتن جواب در این معادله، نامنفی بودن $۱-۳c$ است.

فرمول کلی جواب‌های معادلات درجه دوم

در فعالیت صفحه‌ی بعد، روش مربع کامل را روی یک معادله درجه دوم دلخواه پیاده می‌کنیم تا تشخیص دهیم تحت چه شرایطی یک معادله درجه دوم جواب دارد و درصورت وجود جواب، فرمولی برای جواب‌های معادله درجه دوم بیابیم.

فعالیت

یک معادله درجه دوم دلخواه به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ است که در آن a و b و c اعداد معینی هستند و a ناصفر است.

۱ــ طرفین معادله بالا را بر عدد ناصفر a تقسیم کنید و معادله درجه دومی بنویسید که ضریب $x^۲$ برابر ۱ باشد. نشان دهید جواب‌های این معادله جدید همان جواب‌های معادله اصلی است.

۲ــ نصف ضریب x در معادله جدید برابر $\frac{b}{۲a}$ است. چندجمله‌ای $(x+\frac{b}{۲a})^۲$ را با چندجمله‌ای معادله جدید مقایسه کنید.

۳ــ معادله جدید را برحسب $(x+\frac{b}{۲a})^۲$ بنویسید و نتیجه بگیرید $(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}$.

۴ــ تحت چه شرایطی تساوی بالا امکان‌پذیر است. تحت چه شرایطی معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ جواب دارد.

۵ــ نشان دهید که اگر $b^۲-۴ac$ مثبت باشد، طرف دوم معادله جذر دارد و جواب‌های معادله اصلی برابر جواب‌های دو معادله $x+\frac{b}{۲a}=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ و $x+\frac{b}{۲a}=-\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ است.

۶ــ نتیجه بگیرید، معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ در صورت داشتن جواب، دارای جواب‌های زیر است.

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}\ ,\ x_۲=\frac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

خوارزمی نیز تمام عملیات گفته شده‌ی این بخش را برای حل یک معادله درجه دوم انجام داده بود ولی در محاسبه جواب‌ها فقط از ریشه مثبت عبارت $b^۲-۴ac$ استفاده نموده است، بنابراین مناسب است که این فرمول‌ها را فرمول‌های خوارزمی برای معادلات درجه دوم بنامیم.

در هر معادله درجه ۲ به صورت $ax^۲+bx+c=۰$، عبارت $b^۲-۴ac$ را با Δ نشان می‌دهند. شرط وجود جواب برای یک معادله درجه دوم آن است که $\Delta>۰$ یا $\Delta=۰$.

اگر $\Delta>۰$، معادله دو جواب دارد که عبارتند از

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\ ,\ x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta = ۰$ معادله فقط دارای یک جواب $x = -\frac{b}{۲a}$ است.

اگر $\Delta < ۰$ معادله جواب ندارد.

مثال ۱: جواب‌های معادله $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله داریم $\Delta = (-۳)^۲ - ۴\times۱\times۱ = ۵$. چون $\Delta = ۵ > ۰$ ، این معادله دارای دو جواب زیر است.

$$\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \quad , \quad \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

مثال ۲: جواب‌های معادله $۹x^۲ - ۱۲x + ۴ = ۰$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله داریم $\Delta = (-۱۲)^۲ - ۴\times۹\times۴ = ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۰$. چون $\Delta = ۰$ ، این معادله دارای یک جواب $x = -\frac{-۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳}$ است.

مثال ۳: جواب‌های معادله $۵x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله داریم $\Delta = ۲^۲ - ۴\times۵\times۱ = ۴ - ۲۰ = -۱۶$. چون $\Delta < ۰$ ، این معادله جواب ندارد.

تمرین در کلاس

معادله مربوط به قاب عکس را که در ابتدای این فصل به‌دست آمد، حل کنید و جواب‌های آن را تفسیر کنید.

مسائل

۱ــ با روش مربع کامل معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۲ + ۳x = ۰$

ب) $۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

ج) $x^۲ - \frac{x}{۵} = \frac{۶}{۵}$

۲ــ کدام‌یک از معادلات زیر فقط یک جواب دارند؟ جواب آن را بیابید.

الف) $x^۲ + ۳x + ۴ = ۰$

ب) $x^۲ - ۷x + ۴ = ۰$

ج) $x^۲ - ۶x + ۹ = ۰$

۳ــ با استفاده از فرمول کلی جواب‌های معادلات درجه دوم، معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$

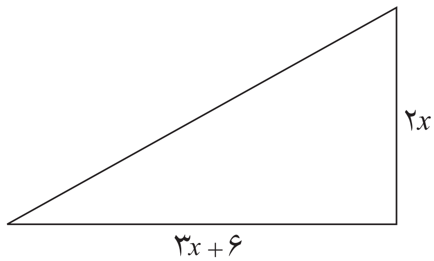
ب) $۷x^۲ - ۸x + ۱ = ۰$

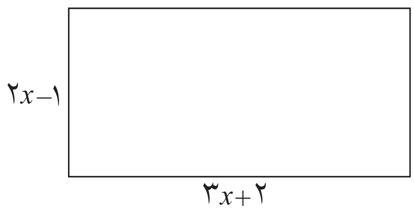
ج) $x^۲ - (\sqrt{۲} + ۱)x + \sqrt{۲} = ۰$

۴ــ اگر یکی از جواب‌های معادله $۴x^۲ - ax + ۲۰ = ۰$ برابر (-۴) باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۵ــ اگر طول مستطیلی دو برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۲۰۰ سانتی‌مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

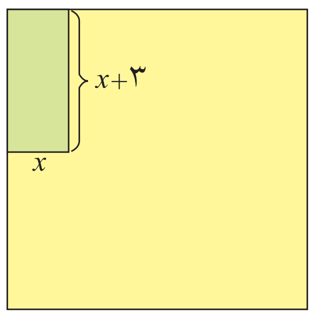
۶ــ در زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم شده مساوی هستند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ مسئله چند جواب دارد؟





۷ــ اگر a عددی مثبت باشد و طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه برابر $۲a$ و $۲a+۱$ و $۲a+۲$ شده باشد، کدام عدد طول وتر خواهد بود؟ طول اضلاع این مثلث را بیابید.

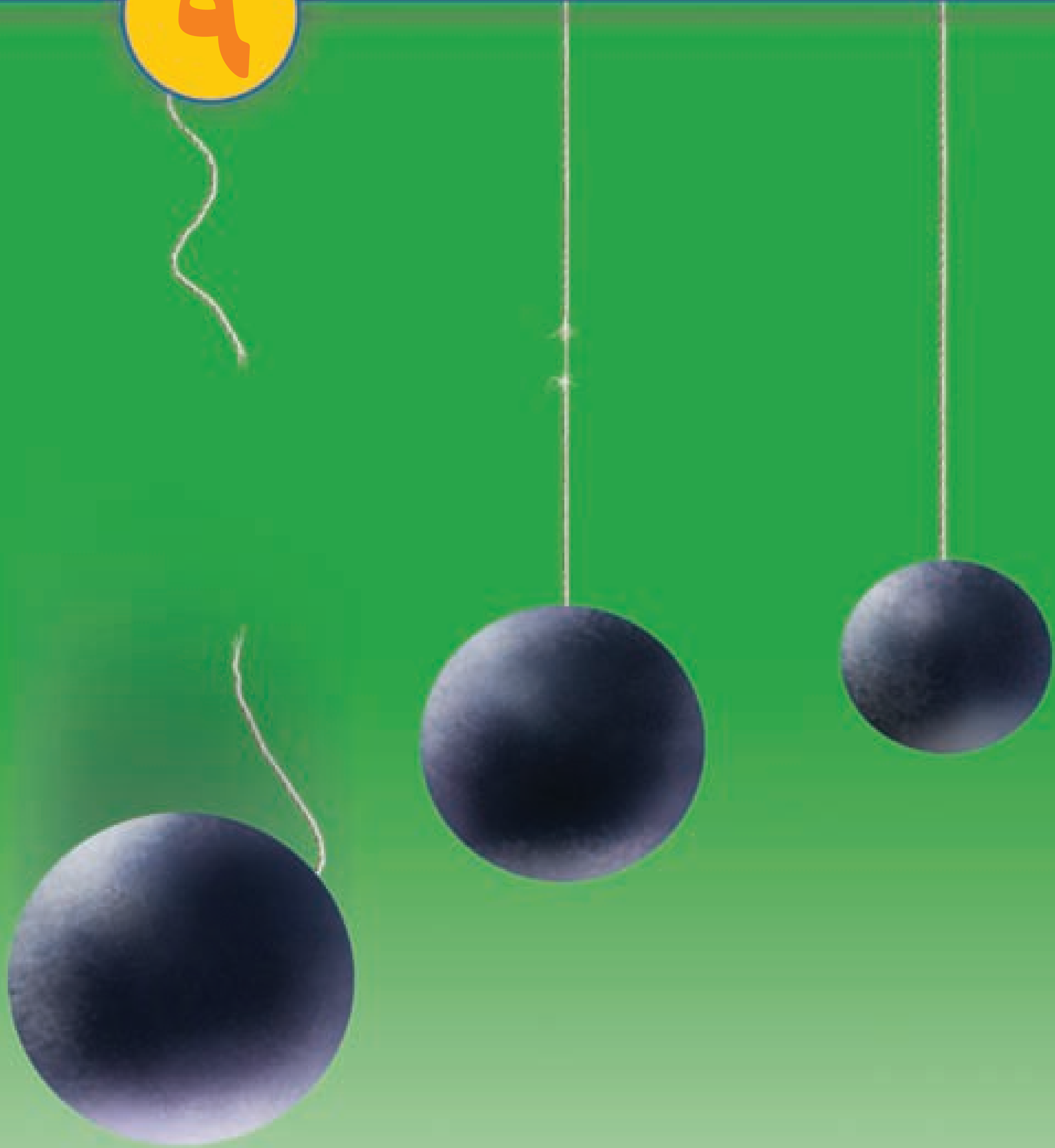
۸ــ در شکل زیر در کنار زمینی مربعی شکل به‌طول ۸۰ متر باغچه‌ای به ابعاد x و $x+۳$ درست کرده‌ایم اگر باقیمانده مساحت زمین ۴۹۰۰ مترمربع باشد مقدار x چیست؟



۹ــ عددی طبیعی بیابید که مربع آن ۳۴۲ واحد بیشتر از خود عدد باشد.

۹

نامعادلات درجه اول

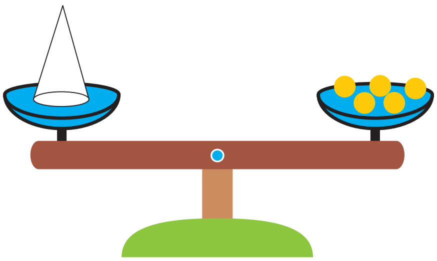


اگر گلوله‌ای را به نخی آویزان کنیم، معمولاً نخ گلوله را نگه می‌دارد. اما با افزایش وزن گلوله، جایی می‌رسد که نخ پاره می‌شود. این مقدار وزن مربوط به چگونگی نخ است.

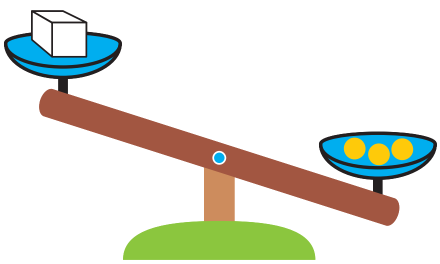
با دانستن قدرت تحمل نخ می‌توانید آن مقادیری از وزن گلوله‌ها را که نخ تحمل می کند بنویسید.

نامساوی

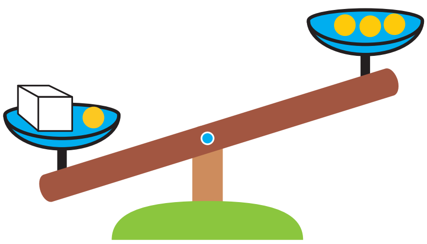
حسن‌آقا یک خواربارفروشی دارد. او برای به‌دست آوردن وزن اجناس از یک ترازوی دوکفه‌ای به شکل زیر استفاده می‌کند.



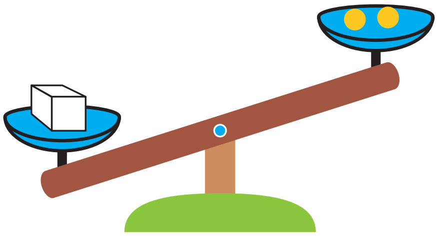
اما، معمولاً وزن اجسام، با استفاده از وزنه‌هایی که حسن‌آقا در اختیار دارد به طور دقیق قابل تعیین نیستند و با هرگونه وزنه‌گذاری روی کفه‌های ترازو، هر دفعه یک طرف سنگین‌تر می‌شود.
روزی او برای تعیین وزن بسته‌ای، حدس زد این بسته حدوداً ۳ کیلوگرم وزن دارد و سه وزنه یک کیلوگرمی در یک کفه قرار داد و بسته را در کفه دیگر قرار داد. کفه ترازو در طرف وزنه‌ها، پایین آمد و حسن‌آقا نتیجه گرفت بسته سبک‌تر است و وزن بسته کمتر از ۳ کیلوگرم است.



اگر وزن بسته را x بنامیم، بیان ریاضی وضعیت ترازو در شکل بالا به‌صورت $x < ۳$ است.
در مرحله دوم حسن‌آقا یک وزنه یک کیلوگرمی در کفه مربوط به بسته قرار داد، و با این عمل، کفه مربوط به بسته پایین رفت.



بیان ریاضی این وضعیت ترازو به‌صورت $x+1<3$ است. اگر از طرفین این ترازو یک وزنه یک کیلوگرمی برداریم، وضعیت ترازو تغییر نمی‌کند و نتیجه می‌شود $x<2$.



این عمل به معنای آن است که از طرفین نامساوی $x+1<3$ عدد ۱ را کم کرده‌ایم و نامساوی به همان شکل برقرار مانده است.

وضعیت ترازو به هر شکلی که باشد، اگر از طرفین ترازو وزن یکسانی را برداریم یا اضافه‌کنیم، وضعیت ترازو تغییر نمی‌کند. بیان ریاضی این مطلب به‌صورت زیر است.

اگر $a<b$، آن‌گاه $a+c<b+c$.
اگر $a<b$، آن‌گاه $a-c<b-c$.

نامساوی کوچکتر یا مساوی

یک روز، معلم از ناهید خواست فهرست نام همکلاسی‌های خود را که با او هم‌قد هستند یا از او کوتاهتر هستند، تهیه کند. پس از این کار، معلم از ناهید خواست، مجموعه این شاگردان را به زبان ریاضی بنویسد. ناهید پس از کمی فکر گفت : اگر مجموعه همه‌ی دانش‌آموزان کلاس را با M نشان دهیم، چون قد من ۱۴۷ سانتی‌متر است این مجموعه را به شکل زیر می‌توان نوشت.

$$\{x \in M \mid \text{(قد } x) < ۱۴۷\}$$

معلم از دانش‌آموزان کلاس پرسید : آیا این مجموعه، همه‌ی همکلاسی‌های ناهید که با او هم‌قد هستند یا از او کوتاهتر هستند را نشان می‌دهد؟

زهره گفت : خود ناهید در این مجموعه نیست چون قد او ۱۴۷ سانتی‌متر است و هیچ عددی از خودش کمتر نیست.

ناهید گفت : درست است. کسانی که با من هم‌قد هستند در این مجموعه نیستند. تعریف را باید اصلاح

کنیم. بهتر است این مجموعه را به‌صورت زیر بنویسیم.

$$\{x\in M \mid (\text{قد } x)<۱۴۷ \text{ یا } (\text{قد } x)=۱۴۷\}$$

معلم گفت : اکنون تعریف ناهید از این مجموعه درست است. این رابطه‌ای که ناهید آن را به‌کار برده است نوعی نامساوی است که آن را نامساوی «کوچکتر یا مساوی» می‌نامند. برای بیان کوچکتربودن یک عدد از عدد دیگر از نماد «$<$» استفاده می‌کردیم. برای بیان «کوچکتر یا مساوی» بودن یک عدد از یک عدد دیگر از نماد «$\le$» استفاده می‌شود. برای بیان این که عدد a از عدد b کوچکتر یا مساوی است، می‌نویسیم $a\le b$. جمله $a\le b$، به معنای آن است که یکی از دو حالت $a<b$ یا $a=b$ برقرار است.

تمرین در کلاس

دلیل درستی یا نادرستی هریک از نامساوی‌های زیر را بیان کنید.

الف) $۳\le۴$ ب) $۳\le۳$ ج) $۳\le۲$

مثال: اگر n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $۱<n$ آنگاه $۲\le n$.

مثال: $\{n\in\mathbb{N} \mid n\le۵\}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$.

نامعادلات

فعالیت

آقای صالحی می‌خواست خانه‌اش را رنگ کند. او که فقط ۱۰ روز برای این کار وقت داشت با یک نقاش قرارداد بست که حداکثر در ۱۰ روز، خانه را رنگ بزند و تحویل دهد.

۱ــ اگر کار نقاش x روز طول بکشد، به‌ازای چه مقادیری از x، نقاش به قرارداد عمل کرده است؟

۲ــ اگر کار نقاش ۱۱ روز طول بکشد، آیا او توانسته است به قرارداد عمل کند؟

۳ــ مهلت انجام کار را به‌صورت ریاضی بنویسید.

۴ــ اگر نقاش حداقل ۶ روز برای انجام کارش نیاز داشته باشد، این مطلب را با نمادهای ریاضی بیان کنید. در این صورت تحویل کار در چند روز می‌تواند انجام شود تا نقاش به قرارداد هم عمل کرده باشد؟ این مطلب را با نمادهای ریاضی بیان کنید.

در این فصل به حالت‌هایی برخورد کردیم که جواب مسئله فقط یک عدد خاص نبود و مسئله به گونه‌ای بود که بیش از یک جواب برای آن وجود داشت. مسائلی شبیه مسائل بالا را که بیان ریاضی آن‌ها به‌صورت یک نامساوی بین دوچندجمله‌ای یا دو عبارت گویا باشند را نامعادله می‌نامند. مثلاً، نامساوی‌های زیر نامعادله هستند.

$$۲x-۱<۶ \quad , \quad ۵x+۳<x-۱ \quad , \quad -۴x+۵\leq ۲(x+۱)$$

در این فصل فقط در مورد نامعادلاتی بحث خواهیم کرد که به‌صورت یک نامساوی بین دو چندجمله‌ای حداکثر درجه اول از یک متغیر باشند.

جواب‌های یک نامعادله، مقادیری از متغیر هستند که به ازای آن‌ها، نامساوی برقرار شود. همه جواب‌های یک نامعادله یک مجموعه تشکیل می‌دهند که آن را مجموعه جواب آن نامعادله می‌نامند.

مثال: در نامعادله $۵x-۱۰\leq ۱۲$ کدام‌یک از اعداد ۰، ۱، ۲، ۴، ۵ و ۶ از جواب‌های نامعادله هستند؟

مقدار $۵x-۱۰$ به‌ازای $x=۰,۱,۲,۴$ از ۱۲ کمتر است، پس ۰، ۱، ۲ و ۴ در مجموعه جواب این نامعادله قرار دارند. اما $۵x-۱۰$ به‌ازای $x=۵$ و ۶ از ۱۲ بزرگتر است، پس این اعداد در مجموعه جواب این نامعادله قرار ندارند.

روش‌های حل نامعادلات

می‌دانید که اگر به طرفین یک نامعادله عددی را اضافه یا کم کنیم، نامساوی هم‌چنان به همان شکل برقرار می‌ماند. با استفاده از این عمل می‌توان نامعادلات را ساده‌تر کرد.

مثال: نامعادله $۲x-۱<x+۵$ را حل کنید.

ابتدا به طرفین نامساوی «$-x$» و سپس ۱ را اضافه می‌کنیم.

$$۲x-۱<x+۵$$

$$۲x-۱-x<x+۵-x$$

$$x-۱<۵$$

$$x-۱+۱<۵+۱$$

$$x<۶$$

بنابراین، مجموعه اعداد کمتر از ۶، مجموعه جواب این نامعادله هستند.

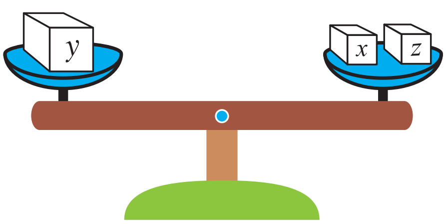
همان‌گونه که در حل معادلات دیدیم، بسیار پیش می‌آید که برای حل معادله طرفین تساوی را در عددی ضرب می‌کردیم. در حل نامعادلات نیز بسیار پیش می‌آید که باید طرفین نامعادله را در عددی ضرب کنیم. باید بدانیم که ضرب طرفین یک نامساوی در یک عدد، چه تغییری در نامساوی ایجاد می‌کند. فعالیت زیر، این مسئله را بررسی می‌کند.

فعالیت

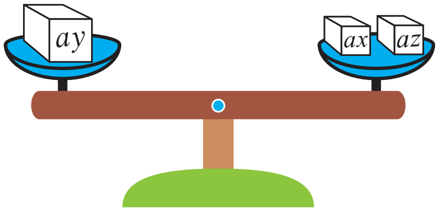
فرض کنید x و y دو عدد مثبت هستند که $x<y$ و a یک عدد مثبت است.

۱ــ بسته‌هایی به وزن‌های x و y در نظر بگیرید و آن‌ها را در دو کفه یک ترازو قرار دهید. وضعیت ترازو به چه شکل درمی‌آید؟ شکل آن را بکشید.

۲ــ آیا می‌توان وزنه‌ای به یکی از دو کفه اضافه کرد تا طرفین هم‌وزن شوند؟ وزن این وزنه اضافی را z بنامید و بیان ریاضی تساوی به‌دست آمده را بنویسید.



۳ــ طرفین تساوی به‌دست‌آمده را در a ضرب کنید. تساوی جدید را به‌صورت وزن بسته‌هایی که در یک ترازو قرار دارند نشان دهید.



۴ــ اگر بسته به وزن az را از کفه ترازو برداریم وضعیت ترازو به چه شکل درمی‌آید؟ کدام نامساوی را می‌توانید نتیجه بگیرید؟

۵ــ این نامساوی را با نامساوی اول مقایسه کنید.

از این فعالیت نتیجه می‌شود که اگر یک نامساوی بین دو عدد مثبت برقرار باشد، می‌توان طرفین نامساوی را در یک عدد مثبت ضرب کرد و نامساوی مجدداً به همان شکل برقرار می‌ماند.

در فعالیت بالا، برای آن که از ترازو استفاده کنیم، مجبور بودیم دو عدد x و y را مثبت فرض کنیم، ولی مثبت‌بودن x و y ضروری نیست و حتی اگر x یا y، یا هر دو، مثبت هم نباشند، برای هر عدد مثبت a، از $x < y$ می‌توان نتیجه گرفت $ax < ay$. برای اثبات این مطلب تمرین زیر را انجام دهید.

تمرین در کلاس

فرض کنید x و y دو عدد باشند که $x < y$ و فرض کنید a عدد مثبتی باشد. دلیل درستی هر مرحله از محاسبه زیر را بیان کنید.

$$x < y$$

$$0 < y - x$$

$$0 < a(y - x)$$

$$0 < ay - ax$$

$$ax < ay$$

به این ترتیب، می‌توانیم نتیجه کلی زیر را بیان کنیم و از آن در حل نامعادله‌ها استفاده کنیم.

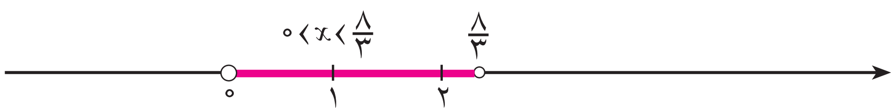
اگر x و y دو عدد باشند که $x < y$، آنگاه برای هر عدد مثبت a داریم $ax < ay$.

در تقسیم طرفین یک نامساوی بر یک عدد مثبت، رابطه مشابهی برقرار است، زیرا تقسیم بر a همان ضرب در $\frac{۱}{a}$ است. اگر a عدد مثبتی باشد $\frac{۱}{a}$ نیز مثبت است، پس با ضرب طرفین یک نامساوی در $\frac{۱}{a}$، نامساوی به همان شکل برقرار می‌ماند.

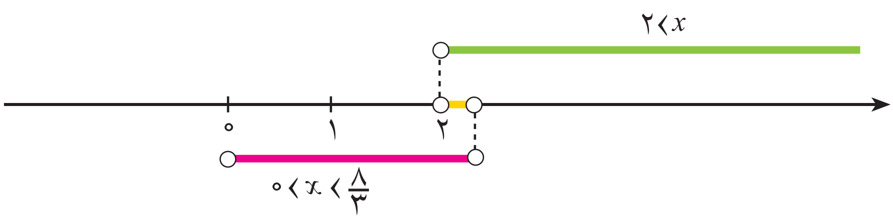
اگر x و y دو عدد باشند که $x < y$، آنگاه برای هر عدد مثبت a داریم $\frac{x}{a} < \frac{y}{a}$.

مثال: اگر از کالایی سه بسته هم‌وزن داشته باشیم، که وزن دوتای آن‌ها روی هم از ۴ کیلوگرم بیشتر و وزن سه‌تای آن‌ها روی هم از ۸ کیلوگرم کمتر باشد، هر بسته از این کالا چه وزن‌هایی ممکن است داشته باشد؟
اگر وزن هر بسته را x بنامیم، بیان ریاضی داده‌های مسئله به‌صورت $۲x > ۴$ و $۳x < ۸$ است. با تقسیم طرفین نامعادله اول بر ۲ نتیجه می‌شود $x > ۲$. بنابراین، مجموعه جواب این نامعادله به شکل زیر است.

با تقسیم طرفین نامعادله دوم بر ۳ نتیجه می‌شود $x < \frac{۸}{۳}$. همچنین چون وزن هر بسته عددی مثبت است داریم $x > ۰$. بنابراین مجموعه جواب نامعادله دوم به شکل زیر است.



اشتراک این دو مجموعه، مجموعه جواب‌های مشترک هر دو نامعادله است و عبارت است از $\left\{x \in \mathbb{R} \mid ۲ < x < \frac{۸}{۳}\right\}$.



تمرین در کلاس

احمد و اصغر دو دوست هستند که هرکدام تعدادی خرگوش دارند. تعداد خرگوش‌های احمد دو برابر خرگوش‌های اصغر است.

۱ــ اصغر ۱۰ خرگوش جدید می‌خرد و با این کار، تعداد خرگوش‌هایش از تعداد خرگوش‌های احمد بیشتر می‌شود. این مطلب را با نمادهای ریاضی بیان کنید. چه نتیجه‌ای در مورد تعداد خرگوش‌های اصغر به‌دست می‌آورید؟

۲ــ اگر سه تا از خرگوش‌های احمد دوقلو بزایند، مجدداً تعداد خرگوش‌های احمد بیشتر می‌شود. این مطلب را به‌صورت ریاضی بنویسید. چه نتیجه جدیدی در مورد تعداد خرگوش‌های اصغر به‌دست می‌آورید؟

۳ــ آیا می‌توانید بگویید اصغر دقیقاً در ابتدا چند خرگوش داشته است؟

مسائل

نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲x + ۷ < x - ۴$ ب) $۳x - ۴ \leq ۵x - ۸$ ج) $۴ < ۲x - ۱$

د) $\frac{x}{۳} \leq x - \frac{۱}{۲}$ هـ) $\frac{x}{۴} < \frac{x}{۲} - \frac{x}{۳}$

حل یک مسئله

در ایام عید، خانواده زهرا برای مسافرت می‌خواهند با ماشین خودشان از یزد به مشهد بروند. هزینه هر روز اقامت در مشهد برای این خانواده سی‌هزارتومان است و هزینه رفت و برگشت به مشهد روی هم بیست هزارتومان است. اگر این خانواده در ابتدای سفر چهارصد هزارتومان پول به همراه خود بردارند، حداکثر چند روز در مشهد می‌توانند بمانند؟

معلم، از اکرم خواست تا در پای تخته این مسئله را حل کند. اکرم گفت : ابتدا باید ببینیم مجهول مسئله چیست. در اینجا تعداد روزهایی که خانواده زهرا می‌توانند در مشهد بمانند مجهول است و آن را با x

نشان می‌دهیم. بعد باید فرضیات و اطلاعاتی که در مسئله آمده است را به‌صورت ریاضی بنویسیم. در اینجا می‌توانیم بگوییم که اگر از چهارصد هزارتومان، هزینه اقامت در مشهد را کم کنیم حداقل به اندازه هزینه رفت و برگشت به مشهد باید باقی بماند، یعنی $۲۰۰۰۰ \le ۴۰۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰x$.

معلم، از فرزانه خواست بقیه مسئله را او حل کند. فرزانه گفت : این، یک نامعادله است و برای حل آن به طرفین «-۴۰۰۰۰۰» اضافه می‌کنیم. نتیجه می‌شود $۲۰۰۰۰ - ۴۰۰۰۰۰ = -۳۸۰۰۰۰ \le -۳۰۰۰۰x$.

طرفین نامساوی را بر -۳۰۰۰۰ تقسیم می‌کنیم و نتیجه می‌شود $\frac{۳۸}{۳} \simeq ۱۲/۶ \le x$ ، یعنی خانواده زهرا می‌توانند بیش از ۱۲ روز در مشهد بمانند.

یکی از دانش‌آموزان گفت : این جواب قابل قبول نیست زیرا معنای آن این است که این خانواده با چهارصد هزار تومان، می‌توانند تا هر وقت که می‌خواهند در مشهد بمانند.

معلم گفت درست است، حتماً در جایی از حل این مسئله اشتباهی رخ داده است. این اشتباه در کجاست؟ باید یکی یکی عملیاتی را که انجام داده‌ایم بررسی کنیم تا اشتباه را به‌دست آوریم.

اکرم گفت من می‌دانم اشتباه در کجاست. بهتر است نامعادله را به‌صورت زیر حل کنیم.

$$۲۰۰۰۰ \le ۴۰۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰x$$

$$۲۰۰۰۰ + ۳۰۰۰۰x \le ۴۰۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰x + ۳۰۰۰۰x$$

$$۲۰۰۰۰ + ۳۰۰۰۰x \le ۴۰۰۰۰۰$$

$$۲۰۰۰۰ + ۳۰۰۰۰x - ۲۰۰۰۰ \le ۴۰۰۰۰۰ - ۲۰۰۰۰$$

$$۳۰۰۰۰x \le ۳۸۰۰۰۰$$

$$x \le \frac{۳۸۰۰۰۰}{۳۰۰۰۰} \simeq ۱۲/۶$$

اکرم گفت : با این جواب، این خانواده حداکثر ۱۲ روز می‌توانند در مشهد بمانند و نه بیشتر و این جواب قابل قبول است. این جواب شبیه جواب فرزانه است با این تفاوت که جهت نامساوی برعکس آن است. لابد اشتباه محاسبات فرزانه در آن است که در جایی باید جهت نامساوی را تغییر دهد. این عمل احتمالاً باید به هنگام تقسیم بر «-۳۰۰۰۰» انجام شود، زیرا تقسیم بر اعداد مثبت، نامساوی را به همان شکل نگه‌می‌دارد، ولی تقسیم بر اعداد منفی شاید نامساوی را برعکس می‌کند.

معلم گفت : پس باید بررسی کنیم که ضرب یک عدد منفی در طرفین یک نامساوی چه تغییری در نامساوی ایجاد می‌کند.

تمرین در کلاس

فرض کنید x و y دو عدد باشند که $x<y$ و فرض کنید a عددی منفی باشد.

۱ــ طرفین نامساوی $x<y$ را ابتدا با $-x$ و سپس با $-y$ جمع کنید و یک نامساوی جدید به‌دست آورید.

۲ــ «$-a$» عددی مثبت است و طرفین نامساوی به‌دست‌آمده را در «$-a$» ضرب کنید و پس از ساده‌کردن نتیجه بگیرید $ay<ax$.

از تمرین بالا نتیجه می‌شود :

> اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب کنیم یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود و نامساوی در یک جهت دیگر برقرار می‌شود.

مثال: نامعادله $-۳x+۱۴<x+۲$ را حل کنید.

با جمع طرفین نامساوی با $-x$ و سپس جمع طرفین با -۱۴ داریم $-۴x<-۱۲$. با تقسیم طرفین این نامساوی بر -۴ نتیجه می‌شود $x>۳$.

مسائل

۱ــ نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را روی محور اعداد مشخص کنید.

الف) $\frac{۳x}{۲}-۴>\frac{۲x}{۳}+۱$

ب) $x\le\frac{۲x-۳}{۵}$

ج) $\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}<\frac{x}{۴}+\frac{x}{۵}$

د) $x(x-۳)<(x-۱)^۲$

هـ) $\frac{۵x}{۲}\le(۱-x)^۲-(x+۳)^۲$

و) $x-۸<۲x-۱\ ,\ ۲x-۱<-۵$

ز) $x-۱<۲x-۳\ ,\ ۲x-۳<-\frac{x}{۲}+۱$

۲ــ در عبارت‌های زیر در $\square$ یکی از نمادهای «<» یا «>» یا «=» را قرار دهید.

الف) اگر $۱<a$، آنگاه $a^۳\ \square\ a^۲$.

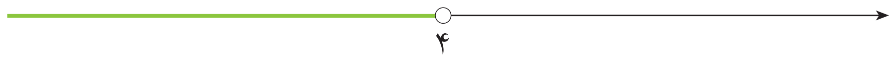
ب) اگر $۰<a$ و $a<۱$ ، آنگاه $a^۳\ \square\ a^۲$.

ج) اگر $a<۰$ آنگاه $a^۳\ \square\ a^۲$.

۳ـ کدام یک از شکل‌های زیر مربوط به مجموعه جواب نامعادله $x-1 \leq 2(x-1)-3$ است؟

الف)


ب)


ج)


د)

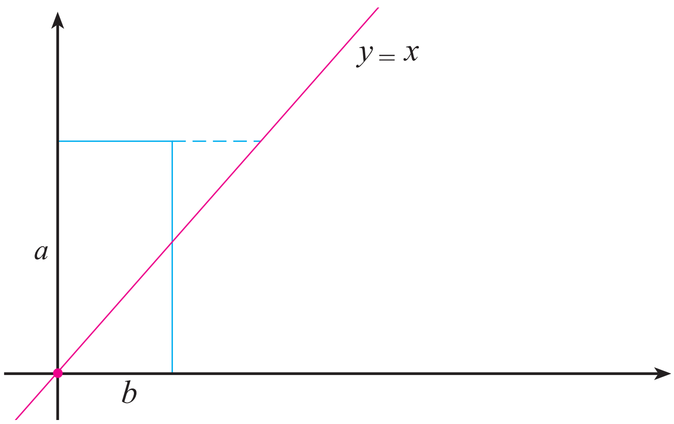

۴ـ یک شرکت سازنده میزهای تحریر، برای پرداخت حقوق کارگران و مخارج دستگاه‌ها، ۳۲۰۰۰۰۰ تومان هزینه هفتگی دارد. هزینه‌ی مواد اولیه برای هر میز ۲۰۰۰۰ تومان، و قیمت فروش هر میز ۳۰۰۰۰ تومان است.

الف) اگر تعداد میزهای تولیدشده در یک هفته را x بنامیم، مقدار هزینه‌ی انجام‌شده در یک هفته را به‌صورت یک عبارت جبری بنویسید.

ب) با فرضیات قسمت (الف)، درآمد به‌دست‌آمده در یک هفته را بنویسید.

ج) تفاضل هزینه از درآمد را سود می‌نامند. این شرکت حداقل چند میز در هفته باید بفروشد تا سود ببرد؟

۵ـ از طریق شکل زیر نشان دهید برای هر دو عدد مثبت a و b داریم: $\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\geq ab$.



۶ـ هزینه‌ی تولید x متر سیم برحسب تومان از رابطه‌ی $C=60x+170000$ محاسبه می‌شود. اگر قیمت فروش هر متر سیم ۴۰۰ تومان باشد، چه مقادیری از سیم باید به فروش برسد تا کارخانه ضرر نکند؟

۷ـ مقدار a را چنان بیابید که نقطه‌ی $A(a+2, 3-6a)$ در ربع دوم صفحه مختصات باشد.

۸ـ حدود m را چنان بیابید که معادله‌ی درجه دوم $x^2-3x+m-1=0$ دارای ریشه‌ی حقیقی نباشد.

مراجع

۱ــ مجموعه مقالات کمیته فرهنگ و تمدن اسلام و ایران، دبیرخانه شورای عالی انقلاب فرهنگی
۲ــ ریاضیات ۱ چاپ ۱۳۸۶، علی‌رضا مدقالچی، اسماعیل بابلیان.
۳ــ FUNCTIONS, STATISTICS AND TRIGONOMETRY SHARON, L. SENK AND OTHERS.
۴ــ MATHEMATICS, SCOTT FORESMAN, ADDISON WESLEY.
۵ــ MATHEMATICS FOR STUDENTS, J.L.MARTIN, MCMILLAN.
۶ــ MATHEMATICS FOR TEACHERS, J.L.MARTIN, MCMILLAN.
۷ــ MATHEMATICAL IDEAS, CHARLES D.MILLER, SEVENTH EDITION, HARPER COLLINS PUBLISHER.
۸ــ MIDDLE GRADES MATH TOOLS FOR SUCCESS PRENTICE HALL.
۹ــ PRINCIPLES & STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS N.C.T.M.
۱۰ــ REAL LIFE MATHEMATICS, EVERYDAY USE OF MATHEMATICS CONCEPTS, EVAN M.GLAZER , JOHN W. MCCONNELL GREENWOOD PRESS.
۱۱ــ WWW. TIMSS/RELEASED ITEMS/ MATHEMATICS /08
(TIMSS ۲۰۰۳سؤالات قابل انتشار).

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره‌ی مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۳۶۳ ۱۵۸۵۵ ـ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی