

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

# استاتیک و دینامیک مقدماتی

رشته مکانیک موتورهای دریایی

زمینه صنعت

شاخه آموزش فنی و حرفه‌ای

شماره درس ۲۳۴۳

میریانی، فرهاد	۶۲ / ۱
استاتیک و دینامیک مقدماتی / مؤلف: فرهاد میریانی - تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های	الف ۹۶۷ / م
درسی ایران، ۱۳۹۱	۱۳۹۱
۱۶۳ ص: مصور - (آموزش فنی و حرفه‌ای؛ شماره درس ۲۳۴۳)	
متون درسی رشته مکانیک موتورهای دریایی، زمینه صنعت	
برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا: کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های	
درسی رشته مکانیک موتورهای دریایی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش	
وزارت آموزش و پرورش	
۱ استاتیک و دینامیک مقدماتی الف ایران وزارت آموزش و پرورش کمیسیون	
برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی رشته مکانیک موتورهای دریایی ب عنوان ج فروست	

همکاران محترم و دانش آموزان عزیز :  
پیشنهادها و نظرهای خود را درباره محتوای این کتاب به نشانی  
تهران - صندوق پستی شماره ۴۸۷۴/۱۵ دفتر برنامه ریزی و تألیف آموزش های  
فنی و حرفه ای و کاردانش، ارسال فرمایند  
پیام نگار (ایمیل) [tvoccd@medu.ir](mailto:tvoccd@medu.ir)  
وب گاه (وب سایت) [www.tvoccd.medu.ir](http://www.tvoccd.medu.ir)

محتوای این کتاب در کمیسیون تخصصی رشته مکانیک موتورهای دریایی دفتر برنامه ریزی و تألیف  
آموزش های فنی و حرفه ای و کاردانش تأیید شده است

## وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

برنامه ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر برنامه ریزی و تألیف آموزش های فنی و حرفه ای و کاردانش

نام کتاب : استاتیک و دینامیک مقدماتی - ۴۶۳/۹

مؤلف : فرهاد میریانی

نظارت بر چاپ و توزیع : اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ ، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وب سایت : [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir)

رسام : نازنین میریانی، رضا تاجر محمد قزوینی

صفحه آرا و طراح جلد : نسرین اصغری

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران : تهران، کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج، خیابان ۶۱ (داروپخش)

تلفن : ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱ ، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰ ، صندوق پستی : ۱۳۹-۳۷۵۱۵

چاپخانه : سهند

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ اول ۱۳۹۱

کلیه حقوق مربوطه به تألیف، نشر و تجدید چاپ این اثر متعلق به سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی است

حق چاپ محفوظ است.

شابک ۸ ۱۸۸۰ ۰۵ ۹۶۴ ISBN 964-05-1880-8



شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آیید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتکای به اجانب پرهیزید.

امام خمینی « قدس سره الشریف »



## فهرست

۶۹	۱-۸-۳-روش مثلث
۷۰	۲-۸-۳-روش چند ضلعی
۷۲	۳-۸-۳-نیروهای هم راس و نیروهای موازی
۷۳	۴-۸-۳-علامت‌گذاری
۷۴	۹-۳-کاربردهای عملی
۱۱۱	<b>فصل چهارم: تجزیه و تحلیل ماشین‌های گردش</b>
۱۱۳	۱-۴-ماشین‌های گردش
	۲-۴-حرکت در ماشین‌های گردش
۱۱۵	۱-۲-۴-اثر ترمز بر گردش
۱۱۷	۳-۴-ارتباط حرکت خطی و حرکت زاویه‌ای
۱۲۸	<b>فصل پنجم: تجزیه و تحلیل ابزار و ماشین‌های جابجایی و بالابر</b>
۱۳۲	۱-۵-اهرم
۱۳۳	۱-۱-۵-انواع اهرم
۱۳۳	۱-۱-۱-۵-اهرم نوع اول
۱۳۵	۲-۱-۱-۵-اهرم نوع دوم
۱۳۶	۳-۱-۱-۵-اهرم نوع سوم
۱۳۸	۴-۱-۱-۵-بهره مکانیکی
۱۳۹	۲-۵-قرقره و طناب
۱۴۴	۳-۵-راندمان ماشین
۱۴۸	۴-۵-تاثیر استقرار معکوس
۱۴۹	۵-۵-قرقره زنجیری
۱۵۱	۶-۵-چرخ و محور
۱۵۵	۷-۵-قرقره سنگی
۱۵۶	۸-۵-چرخ و محور دوپله ای
۱۵۸	۹-۵-میله حلزون و چرخ حلزون بالابر

صفحه	عناوین
۱	<b>فصل یکم: استفاده از ریاضیات در مکانیک کاربردی</b>
۳	۱-۱-مکانیک
۴	۲-۱-استفاده از ریاضیات در مکانیک
۴	۱-۲-۱-مثلث‌های راست گوشه
۷	۲-۲-۱-قانون کسینوس
۹	۳-۲-۱-قانون سینوس
۱۱	۳-۱-دستگاه بین‌المللی یکاها
۱۲	۱-۳-۱-توانهای ۱۰
۱۲	۲-۳-۱-مقایسه کمیت‌ها در دستگاه‌های مختلف
۲۳	<b>فصل دوم: تجزیه و تحلیل نیروهای ساده</b>
۲۵	۱-۲-وصیف نیرو
۳۰	۲-۲-انتقال پذیری نیرو
۳۱	۳-۲-برآیند دو نیروی عمود بر هم
۳۵	۴-۲-برآیند دو نیروی غیر عمود بر هم
۴۴	<b>فصل سوم: تجزیه و تحلیل بردارها</b>
۴۶	۱-۳-بردار
۴۹	۲-۳-جمع بردارها
۶۱	۳-۳-تفریق برداری
۶۲	۴-۳-مولفه‌های یک بردار
۶۲	۵-۳-برآیند دو نیروی موازی
۶۳	۶-۳-گشتاور یا ممان نیرو
۶۷	۷-۳-نیروی معادل (خنثی کننده برآیند نیروها)
۶۹	۸-۳-روشهای آسان حل مسائل برداری



## مقدمه

کتاب حاضر با توجه به الزامات سازمان بین‌المللی دریانوردی و توانایی دانش‌آموزان رشته مکانیک موتورهای دریایی و برنامه‌ریزی درسی گروه علوم و فنون دریایی تدوین شده است .

### هدف کلی

فراگیران پس از آموزش این درس قادر خواهند بود مسائل کاربردی نیروها، بردارها و ماشین‌های جابجایی و بالابر را به خصوص در کاربری‌های دریایی تجزیه و تحلیل کنند.

### فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلامی و ایران

«ای نوح غیر از همین‌هایی که ایمان آورده‌اند کس دیگری از قوم تو ایمان نخواهد آورد. پس از کارهایی که می‌کردند ناراحت مباش و کشتی بساز. نوح گفت: پروردگارا کشتی چیست؟ خدا گفت: خانه‌ای است از چوب که روی آب جاری می‌شود. نوح مردی درودگر بود. بعدا خدا او را به پیغمبری برگزید و نوح اولین کسی بود که کشتی ساخت که روی آب حرکت می‌کرد.»

آنچه که درباره حضرت نوح (ع) در قرآن و تفاسیر آمده است با تحقیقات غربی‌ها در مورد اینکه حضرت نوح(ع) اولین کشتی‌ساز جهان بوده است و فرزندان او کشتی‌سازان ماهری شدند اشتراکات زیادی دارد .





# فصل یکم

## استفاده از ریاضیات در مکانیک کاربردی

### هدف کلی: بهره برداری از ریاضیات در مکانیک کاربردی

هدف های رفتاری: فراگیر پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود

۱- هدف های کلی علم مکانیک را بیان کند.

۲- استاتیک و دینامیک را توضیح دهد.

۳- عملاً از ریاضیات برای تعیین اندازه اضلاع و زوایا بهره برداری کند.

## پیش آزمون (۱)

- ۱- سینوس زوایای ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ درجه را با استفاده از جداول مثلثاتی تعیین کنید.
- ۲- کسینوس و تانژانت زوایای ۳۰ و ۴۵ درجه را با استفاده از جداول مثلثاتی تعیین کنید.
- ۳- اندازه وتر را در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با اضلاع به طول ۳۰ سانتی متر محاسبه کنید.

## فصل یکم

### استفاده از ریاضیات در مکانیک کاربردی

#### ۱-۱ - مکانیک:

شاید هنوز دانش مکانیک از اصلی‌ترین شاخه‌های علوم برای درک طبیعت باشد. مطابق نوشته‌های باقیمانده از قدیمی‌ترین دوران زندگی بشر در کره خاکی، سیصد و پنجاه سال قبل از تولد مسیح(ع)، ارسطو فیلسوف یونانی کوشید تا توضیحی درباره اهرم بنویسد و آغازگر معرفی مکانیک و کاربرد آن شود.

مکانیک به وسیله ریاضی‌دانها و فیزیک‌دانها توسعه یافت. این گروه از دانشمندان عمدتاً به توضیح منطقی مشاهده‌های خود پرداختند و به مطالعه اهرم، قرقره، سقوط آزاد و حرکت سیاره‌ها مبادرت کردند. نتیجه کار هر محقق در قالب یک تئوری جدید یا تصحیح تئوری پیشینیان به گنجینه دانش بشر افزوده شد. در سال ۱۶۸۷ میلادی با کشف نیروی جاذبه و اعلام قوانین حرکت به وسیله اسحاق نیوتون دانش مکانیک در موقعیتی جدید قرار گرفت.

اهمیت علوم را می‌توان با نوع کاربرد آنها ارزیابی کرد. ملاحظه می‌شود طراحی و ساخت ساختمان، پل، خودرو، هواپیما و کشتی با تحلیل‌های اولیه بر مبنای اصول مکانیک انجام می‌شود. بنابراین مکانیک و کاربرد آن نقشی بزرگ در زندگی بشر دارد. استاتیک و دینامیک دو شاخه مکانیک هستند که در این کتاب معرفی می‌شوند و کاربرد آنها به طور مجزا و توأم بررسی می‌شود.

استاتیک مطالعه اجسام در حالت سکون (در شرایط موازنه با پیرامون خود) است. هدف نهایی استاتیک تحلیل نیروهاست. با کاربرد اصول استاتیک پاسخ اینگونه سوالات داده می‌شود.

- چه مقدار بار باید به وسیله یک ستون تحمل می‌شود؟

- کشش کابل یک پل چقدر است؟

- چه مقدار بار به وسیله یک جرثقیل تحمل می‌شود؟

- مزایای مکانیکی طناب و قرقره چیست؟

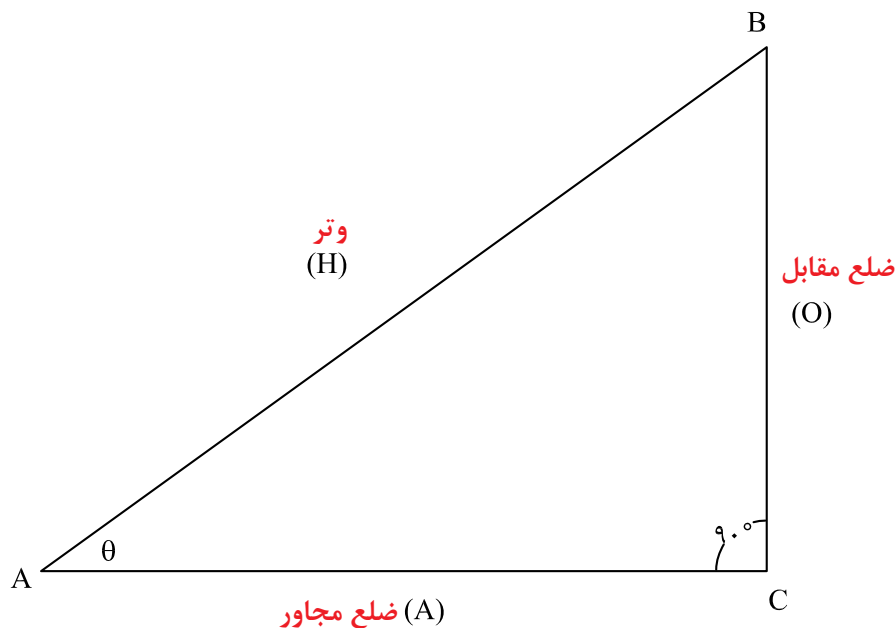
دینامیک شامل مطالعه هندسی حرکت (سینماتیک) و نیروهای لازم برای ایجاد حرکت (سینتیک) است. هدف نهایی دینامیک تعیین نیروهای لازم برای ایجاد حرکت و تغییر حرکت است.

## ۱-۲ - استفاده از ریاضیات در مکانیک

مکانیک موضوعی تحلیلی است. در مکانیک به طوری وسیع از شاخه‌های مختلف ریاضیات مانند جبر، هندسه و مثلثات استفاده می‌شود. هدف این کتاب آموختن ریاضیات نیست ولی یک شاخه آن یعنی مثلثات کاربرد فراوانی در این کتاب دارد و لذا توجه ویژه‌ای به آن می‌شود.

## ۱-۲-۱ - مثلث‌های راست گوشه

مثلث راست گوشه شکل سه ضلعی بسته‌ای است که یک زاویه نود درجه دارد، ضلعی که مقابل زاویه نود درجه است وتر نامیده می‌شود. دو ضلع دیگر با توجه به سایر زوایا نامگذاری می‌شوند. مثلاً اگر  $\theta$  (تتا) زاویه مورد نظر باشد ضلع BC در شکل ۱-۱ به عنوان ضلع مقابل و ضلع AC به عنوان ضلع مجاور نامگذاری می‌شوند.



H معرف hypotenuse (وتر)

A معرف adjacent side (ضلع مجاور)

O معرف opposite side (ضلع مقابل)

برای اضلاع این مثلث راست گوشه شش نسبت می توان نوشت:  
این نسبت ها روابط مثلثاتی نام دارند و به صورت زیر نشان داده می شوند.

$$\sin \theta \text{ (سینوس)} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{O}{H}$$

$$\cos \theta \text{ (کسینوس)} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{A}{H}$$

$$\tan \theta \text{ (تانژانت)} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{O}{A}$$

$$\cot \theta \text{ (کتانژانت)} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{A}{O}$$

$$\sec \theta \text{ (سکانت)} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{H}{A}$$

$$\operatorname{cosec} \theta \text{ (کسکانت)} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{H}{O}$$

از این شش رابطه مثلثاتی مشخص می شود که برای یک زاویه معین  $\theta$ ، نسبت های طولی اضلاع در یک مثلث راست گوشه مقادیری ثابت هستند. مقادیر سینوس، کسینوس و تانژانت زوایایی که کاربرد بیشتری نسبت به سایر زوایا دارند (زوایای صفر، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ درجه) در جدول ۱-۱ درج شده است. مقادیر مثلثاتی کلیه زوایا در جداول پایانی کتاب وجود دارد.

tan	Cos	Sin	زاویه (درجه)
۰	۱	۰	۰
۰/۵۷۷	۰/۸۶۶	۰/۵	۳۰
۱	۰/۷۰۷	۰/۷۰۷	۴۵
۱/۷۳۲	۰/۵	۰/۸۶۶	۶۰
بی نهایت	۰	۱	۹۰

جدول ۱-۱

یک مثلث راست گوشه دارای پنج متغیر است (سه ضلع و دو زاویه). اگر مقدار دو متغیر معین باشد سه متغیر دیگر به آسانی قابل تعیین می شود.

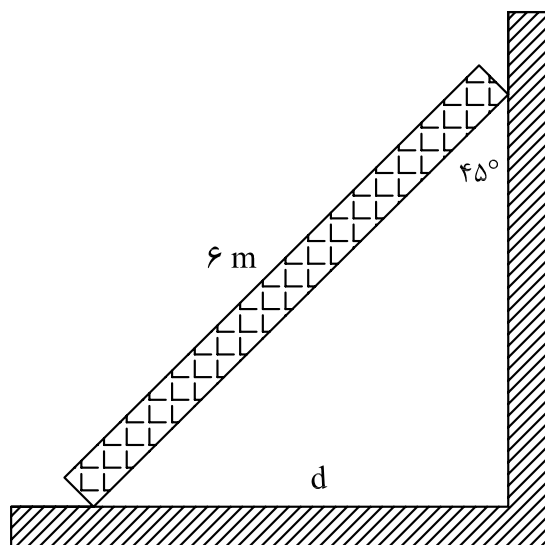
مثال ۱: یک نردبان ۶ متری مطابق شکل ۱-۲ قرار داده شده است.

فاصله  $d$  از پایه نردبان تا دیوار چقدر است؟

راه حل: سینوس ۴۵ درجه نسبت طول  $d$  و وتر را تعیین می کند.

$$\sin = \frac{d}{6}$$

$$d = 6 \sin 45^\circ = 6(0.707) = 4.242 \text{ m}$$

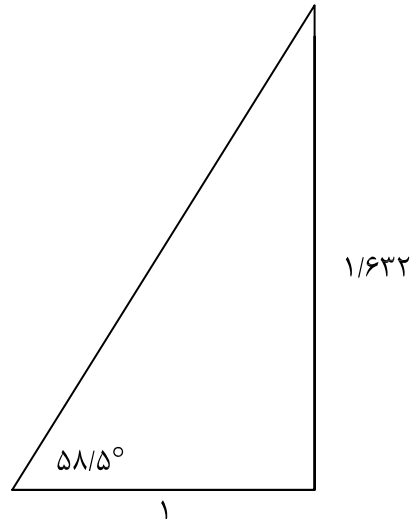


شکل ۱-۲

از رابطه تانژانت برای رسم و یا اندازه گیری دقیق زوایا استفاده می شود. مثلا برای رسم زاویه  $58/5$  درجه ابتدا مقدار تانژانت زاویه  $58/5$  درجه از جداول مثلثات یادداشت می شود (برابر  $1/632$ ) و سپس یک مثلث راست گوشه (مانند شکل ۱-۳) رسم می شود طوری که نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور برابر با تانژانت زاویه  $58/5$  درجه باشد (در این مثال نسبت عدد  $1/632$  به عدد یک).

دقت زاویه رسم شده به دقت رسم طول اضلاع بستگی دارد. مثلا دقت زاویه مثلثی که اضلاع آن به ترتیب برابر با  $16/32$  و  $10$  می باشد بسیار بیشتر از زاویه مثلثی است که اضلاع آن به ترتیب برابر  $1/632$  و یک است.

برای تعیین اندازه یک زاویه، طول مناسبی برای ضلع مجاور انتخاب می شود و ضلع مقابل اندازه گیری می شود. از نسبت طول دو ضلع اندازه تانژانت به دست می آید. با مراجعه به جداول مثلثات اندازه زاویه مقابل قابل تعیین است.



شکل ۱-۳

### ۲-۲-۱- قانون کسینوس

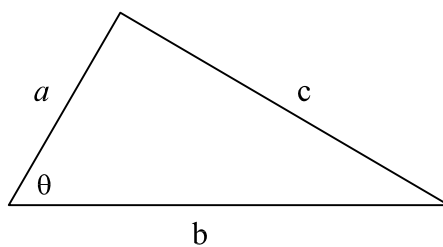
در مکانیک کاربردی در اکثر موارد اندازه دو ضلع یک مثلث و زاویه بین آنها مشخص است و ضرورت دارد اندازه ضلع سوم محاسبه شود. مناسب ترین روش برای محاسبه ضلع سوم استفاده از قانون کسینوس است. مطابق این قانون اگر  $a$  و  $b$  اندازه دو ضلع معین و  $\theta$  زاویه بین آنها باشد می توان اندازه ضلع سوم ( $c$ ) را با استفاده از رابطه :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

یا

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

به دست آورد. (به شکل ۱-۴ نگاه کنید)



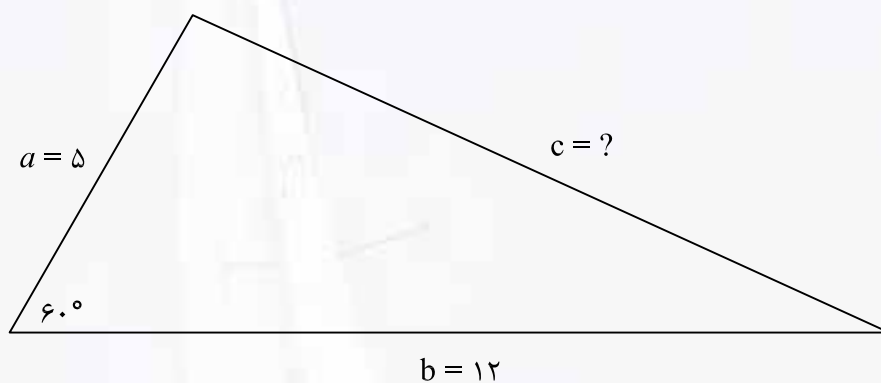
شکل ۱-۴

اگر  $\theta = 90^\circ$  باشد قانون کسینوس به قضیه معروف فیثاغورث تغییر می‌یابد که در آن  $c^2 = a^2 + b^2$  یا  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  می‌باشد.

مثال ۲: اندازه ضلع  $c$  در مثلث شکل ۱-۵ چقدر است؟

راه حل:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} \\ &= \sqrt{5^2 + 12^2 - 2(5)(12) \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{25 + 144 - 2 \times 5 \times 12 \times 0.5} = \sqrt{109} = 10.4 \end{aligned}$$



شکل ۱-۵

مثال ۳: اندازه ضلع  $c$  در مثلث شکل ۱-۶ چقدر است؟

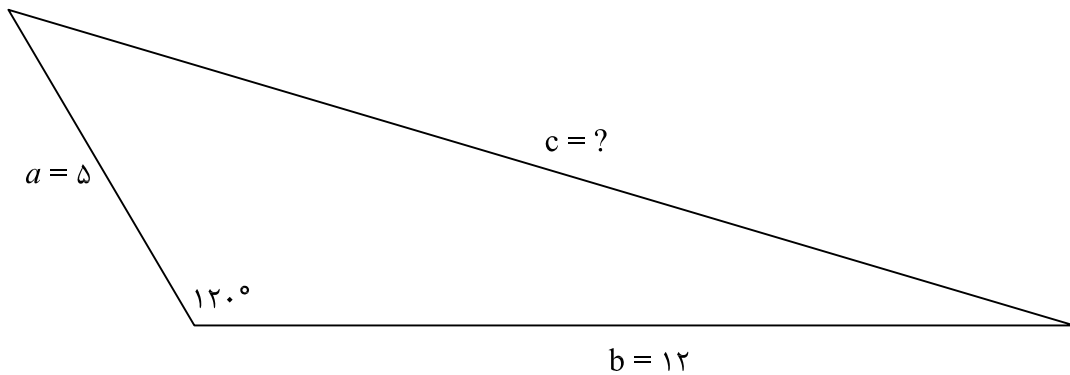
راه حل: کسینوس زوایای  $90^\circ$  الی  $180^\circ$  درجه منفی است لذا:

$$\cos \theta = -\cos (180^\circ - \theta)$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0.5$$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} \\ &= \sqrt{5^2 + 12^2 - 2 \times 24 \times 12 \times (-0.5)} \\ &= \sqrt{25 + 144 - (-60)} \\ &= \sqrt{25 + 144 + 60} \\ &= \sqrt{229} = 15.1 \end{aligned}$$





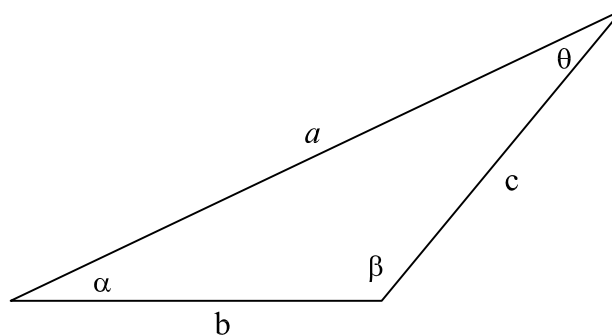
شکل ۱-۶

## ۳-۲-۱- قانون سینوس:

این قانون کاربرد وسیعی در مکانیک دارد. مطابق این قانون در مثلثی مانند مثلث شکل ۱-۷ ارتباط و تناسب اندازه اضلاع و زوایا به شرح زیر می‌باشد.

$$\frac{a}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \alpha}$$

از قانون سینوس برای تعیین اندازه ضلع سوم یک مثلث وقتی که اندازه دو ضلع دیگر و یک زاویه مقابل معین هستند استفاده می‌شود. همچنین وقتی که دو زاویه و یک ضلع معین هستند اندازه ضلع سوم را می‌توان تعیین کرد.



شکل ۱-۷

مثال ۴: اندازه اضلاع  $a$  و  $c$  در مثلث شکل ۱-۸ چقدر است؟  
راه حل: مجموع زوایای یک مثلث برابر با  $۱۸۰$  درجه است.

$$\theta + ۳۵ + ۴۳ = ۱۸۰$$

$$\theta = ۱۰۲$$

مطابق قانون سینوس:

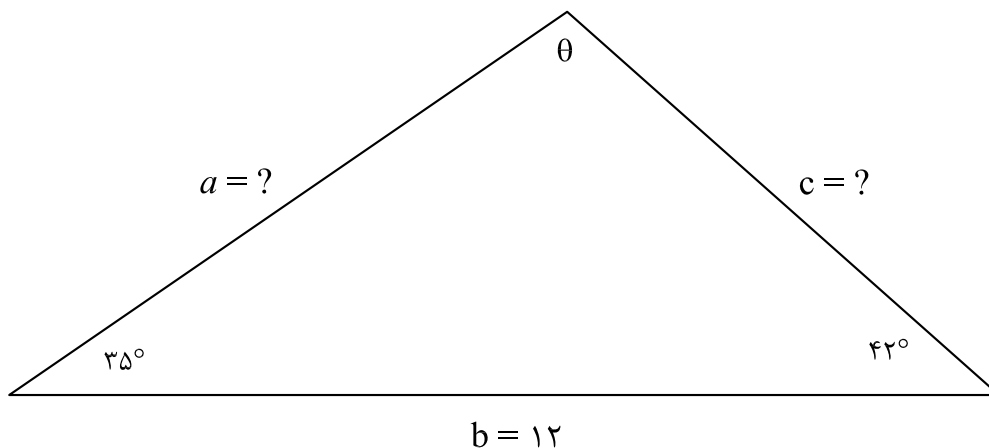
$$\frac{a}{\sin ۴۳} = \frac{c}{\sin ۱۰۲}$$

در صورتی که اندازه زاویه  $\theta$  بین  $۹۰$  و  $۱۸۰$  درجه باشد علامت سینوس مثبت است که به صورت زیر بدست می آید:

$$\sin \theta = \sin (۱۸۰ - \theta)$$

$$\sin ۱۰۲ = \sin (۱۸۰ - ۱۰۲) = \sin ۷۸$$

مقادیر سینوس زاویه  $۷۸$  و  $۴۳$  درجه از جداول مثلثات یادداشت می شود که به ترتیب برابر با  $۰/۹۷۸$  و  $۰/۶۸۲$  می باشد.



شکل ۱-۸

$$\frac{a}{۰/۶۸۲} = \frac{۱۲}{۰/۹۷۸}$$

$$a = \frac{۱۲ \times ۰/۶۸۳}{۰/۹۷۸} = ۸/۳۷$$

با تکرار همین روش برای تعیین C خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin 43} = \frac{c}{\sin 35}$$

$$c = \frac{1/37 \sin 35}{\sin 43} = \frac{1/37 \times 0/574}{0/682} = 7/04$$

### ۳-۱- دستگاه بین المللی یکاها\*

دستگاه بین المللی یکاها با علامت اختصاری SI به طور کامل در کتاب درسی فیزیک مکانیک معرفی شده است. ولی با توجه به کاربردهای آن در این کتاب مواردی به طور مختصر توضیح داده می شود.

در این دستگاه از حاصل ضرب یا تقسیم کمیت دو یکا، کمیت سوم در یکای دیگر حاصل می شود. این دستگاه بر مبنای شش یکای اصلی ایجاد شده است که به ترتیب عبارتند از متر (واحد طول)، کیلوگرم (واحد جرم)، ثانیه (واحد زمان)، کلون (واحد دما)، آمپر (واحد شدت جریان برق) و شمع (واحد شدت روشنایی).

از حاصل ضرب یک واحد طول (یک متر) در یک واحد طول (یک متر)، واحد سطح (یک مترمربع) حاصل می شود. از تقسیم یک واحد طول یا فاصله (یک متر) بر یک واحد زمان (یک ثانیه) یک واحد سرعت (یک متر بر ثانیه) حاصل می شود.

از حاصل ضرب یک واحد جرم (یک کیلوگرم) با یک واحد شتاب (یک متر بر مجذور ثانیه) یک واحد نیوتون (یک نیوتون) حاصل می شود. از نتیجه اعمال یک واحد نیرو (یک نیوتون) در یک واحد فاصله (یک متر) یک واحد کار (یک ژول) حاصل می شود.

یکاهای مورد استفاده در این کتاب اعم از یکاهای اصلی و یکاهای مشتق و مرتبط با یکاهای اصلی در جدول ۱-۲ معرفی می شوند.

یکاهایی که یادآور اشخاص معروف می باشند با حروف بزرگ لاتین نشان داده می شوند (مانند N برای نیوتون، W برای وات، Hz برای هرتز، J برای ژول) و سایر یکاها با حروف کوچک لاتین نشان داده می شوند.

\* در این کتاب پیرامون دما، شدت جریان برق و شدت روشنایی بحث نمی شود ولی به منظور شرح کامل دستگاه بین المللی یکاها به طور خلاصه معرفی شدند.

۱-۳-۱- توان های ۱۰

عامل ضرب، نگارش استاندارد، پیشوند و علامت توان های ۱۰ به شرح زیر می باشد.

علامت	پیشوند	نگارش استاندارد	عامل ضرب
T	tera (ترا)	$10^{12}$	۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰
G	giga (گیگا)	$10^9$	۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰
M	mega (مگا)	$10^6$	۱/۰۰۰/۰۰۰
K	kilo (کیلو)	$10^3$	۱۰۰۰
h	hecto (هکتو)	$10^2$	۱۰۰
da	deca (دکا)	$10^1$	۱۰
d	deci (دسی)	$10^{-1}$	۰/۱
c	centi (سانتی)	$10^{-2}$	۰/۰۱
m	milli (میلی)	$10^{-3}$	۰/۰۰۱
$\mu$	micro (میکرو)	$10^{-6}$	۰/۰۰۰۰۰۱
n	nano (نانو)	$10^{-9}$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱
p	pico (پیکو)	$10^{-12}$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱

۱-۳-۲- مقایسه کمیت ها در دستگاه های مختلف

با وجود گسترش تجهیزات و سیستم های متریک هنوز در برخی کشتی ها تجهیزاتی وجود دارند که بر مبنای واحدهای اندازه گیری غیرمتریک طراحی و ساخته شده اند. بسیاری از اوقات ضرورت دارد واحدهای اندازه گیری به یکدیگر تبدیل شوند. برخی مقایسه ها و تبدیل ها به شرح زیر است.

طول:

$$۱ \text{ اینچ (1 in)} = ۲۵/۴ \text{ mm} = ۲/۵۴ \text{ cm}$$

$$۱ \text{ فوت (1 ft)} = ۰/۳۰۴۸ \text{ m}$$

$$۱ \text{ یارد (1 yd)} = ۰/۹۱۴۴ \text{ m}$$

$$۱ \text{ مایل (1 mile)} = ۱/۶۰۹ \text{ km}$$

$$۱ \text{ مایل دریایی (بین المللی)} = ۱/۸۵۲ \text{ km}$$

نیرو:

$$1 \text{ پوند نیرو} = 1 \text{ lbf} = 2/448 \text{ N}$$

$$1 \text{ تن نیرو} = 1 \text{ tonf} = 9/964 \text{ kN}$$

فشار:

$$1 \text{ پوند نیرو بر اینچ مربع} = 1 \text{ lbf/in}^2 = 6/895 \text{ kN/m}^2 = 0/06895 \text{ bar}$$

$$1 \text{ اتمسفر} = 1 \text{ atm} = 1/013 \text{ bar}$$

حجم:

$$1 \text{ فوت مکعب} = 1 \text{ ft}^3 = 0/02832 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ گالن انگلیسی} = 1 \text{ gal} = 4/546 \text{ litre}$$

انرژی:

$$1 \text{ فوت پوند نیرو} = 1 \text{ ft lbf} = 1/356 \text{ J}$$

$$1 \text{ یک بی تی یو} = 1 \text{ BTU} = 1/055 \text{ kJ}$$

جرم:

$$1 \text{ پوند} = 1 \text{ lb} = 0/4536 \text{ kg}$$

$$1 \text{ تن} = 1 \text{ ton} = 1/016 \text{ tonne}$$

توان:

$$1 \text{ اسب بخار} = 1 \text{ hp} = 0/7456 \text{ kN}$$

کمیت	یکاهای اصلی یا ترکیبی و علامت	سایر یکها
طول	متر - m	میلی متر - mm، کیلومتر - km
مساحت	متر مربع - m <sup>2</sup>	میلی متر مربع - mm <sup>2</sup>
حجم	متر مکعب - m <sup>3</sup>	لیتر - l
زمان	ثانیه - S	روز - day، ساعت - h، دقیقه - min
سرعت خطی	متر بر ثانیه - m/s	کیلومتر در ساعت - km/h گره بین المللی (دریایی) knot (nautical mile/h)
سرعت زاویه ای	رادیان بر ثانیه - rad/s	
شتاب خطی	متر بر مجذور ثانیه - m/s <sup>2</sup>	
شتاب زاویه ای	رادیان بر مجذور ثانیه - rad/s <sup>2</sup>	
جرم	کیلوگرم - kg	مگا گرم - Mg
نیرو	نیوتون - N	کیلو نیوتون - kN
ممان نیرو	نیوتون متر - Nm	کیلو نیوتون متر - kNm
کار، انرژی	ژول - J = Nm	کیلوژول - kJ کیلووات ساعت - kWh
توان	وات - W - J/s = Nm/s	کیلووات - kW
اندازه حرکت	کیلوگرم متر بر ثانیه - kgm/s	
گشتاور زاویه ای	کیلوگرم مجذور متر بر ثانیه kgm <sup>2</sup> /s	
ممان دوم سطح	متر به توان ۴ - m <sup>4</sup>	سانتی متر به توان ۴ - cm <sup>4</sup>
گشتاور ماند	کیلوگرم مجذور متر - kgm <sup>2</sup>	

جدول ۱-۲

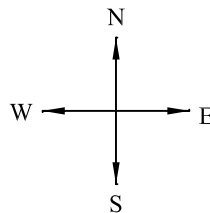
# خود آزمایی :



۱- طول وتر یک مثلث راست گوشه ۲۰ سانتی متر و یک زاویه آن ۶۰ درجه است طول ضلع مجاور و مقابل این زاویه چقدر است؟

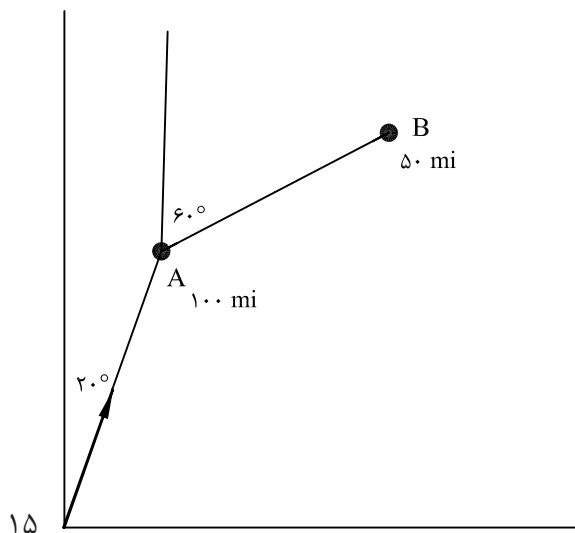
۲- دو ضلع یک مثلث راست گوشه به ترتیب ۶ و ۴ متر است. زاویه بین وتر و ضلع کوتاه تر چقدر است؟

۳- در صورتی که دو ضلع عمود بر هم یک مثلث راست گوشه مساوی و برابر ۱۲ سانتی متر باشد اندازه وتر چقدر است؟



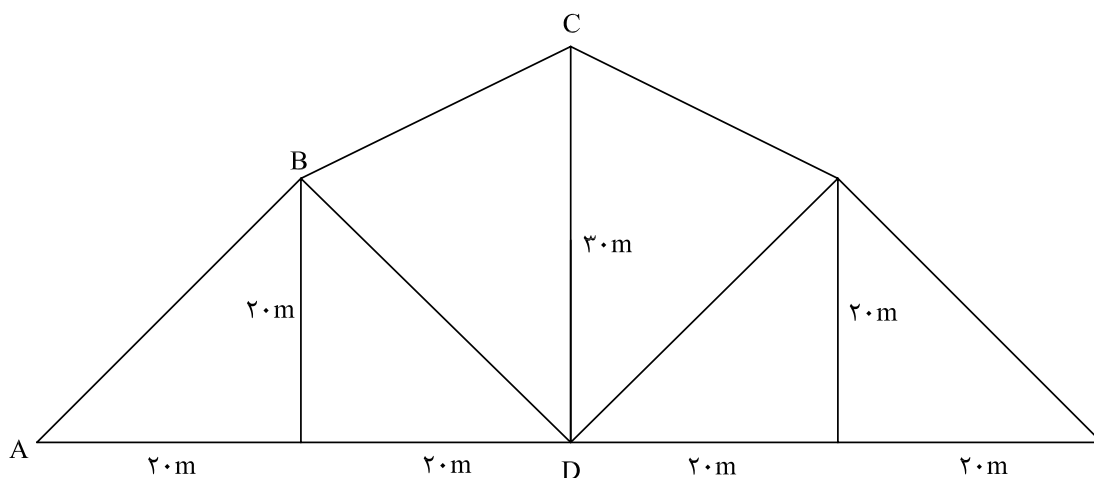
۴- یک نردبان ۵ متری با زاویه ۳۵ درجه به دیوار قرار داده شده است. فاصله نقطه بالایی نردبان تا کف زمین چقدر است؟

۵- یک کشتی فاصله ۱۰۰ مایل را در مسیر  $N 20^\circ E$  (۲۰ درجه شمال شرقی) و سپس فاصله ۵۰ مایل را در مسیر  $N 60^\circ E$  (۶۰ درجه شمال شرقی) مطابق شکل ۹-۱ دریاوردی می کند. فاصله کشتی از نقطه شروع چقدر است؟



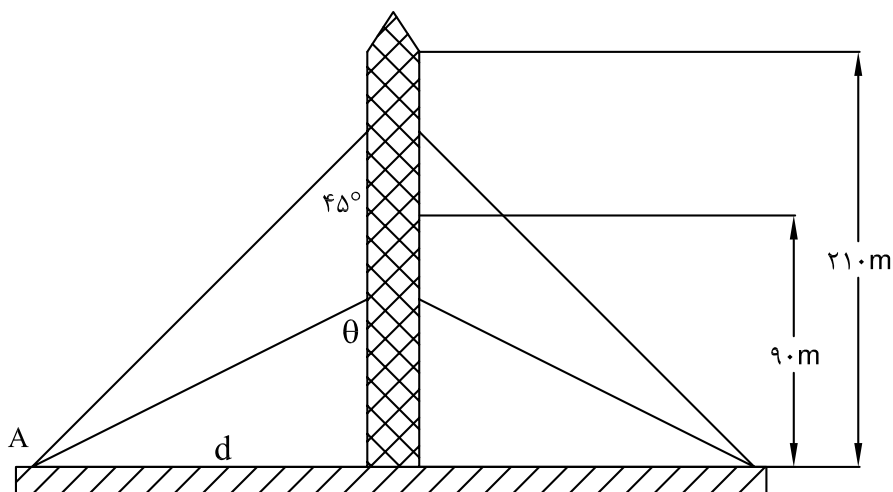
شکل ۹-۱

۶- خرابای یک سقف دارای اعضای با اندازه‌های شکل ۱-۱۰ است. اندازه زوایای  $BCD$  و  $DBC$  چقدر است؟



شکل ۱-۱۰

۷- یک آنتن فرستنده تلویزیون به ارتفاع ۳۰۰ متر مطابق شکل ۱-۱۱ با کابل‌های فلزی مهار شده است. فاصله تکیه‌گاه A تا آنتن (فاصله  $d$ ) و اندازه زاویه  $\theta$  (زاویه بین کابل‌های مهار تحتانی و آنتن) چقدر است؟



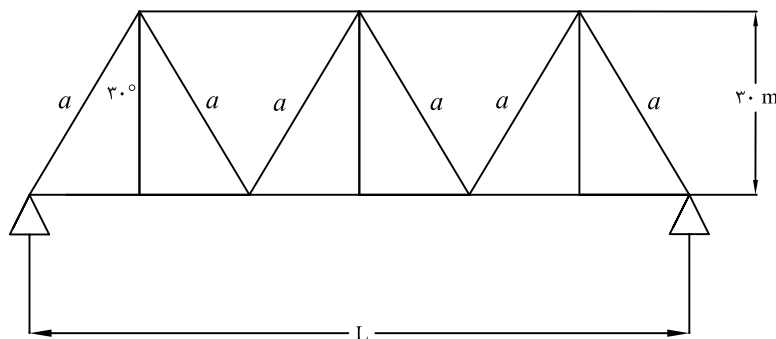
شکل ۱-۱۱



۸- ارتفاع یک مثلث راست گوشه ۴۰ سانتی متر و قاعده آن ۹۰ سانتی متر است. طول وتر و زاویه بین وتر و قاعده چقدر است؟

۹- چنانچه ارتفاع یک مثلث متساوی الساقین ۵۰ سانتی متر و اندازه قاعده آن ۲۵ سانتی متر باشد اندازه دو ضلع مساوی و زاویه آنها با قاعده چقدر است؟

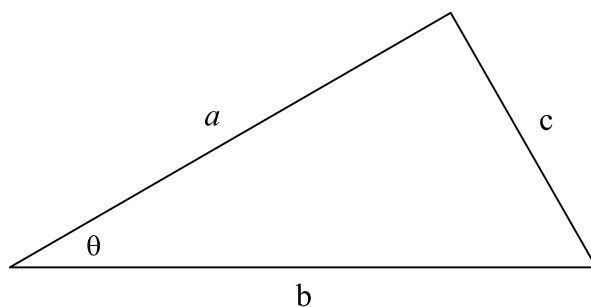
۱۰- فاصله  $L$  در شکل ۱-۱۲ چقدر است؟



شکل ۱-۱۲

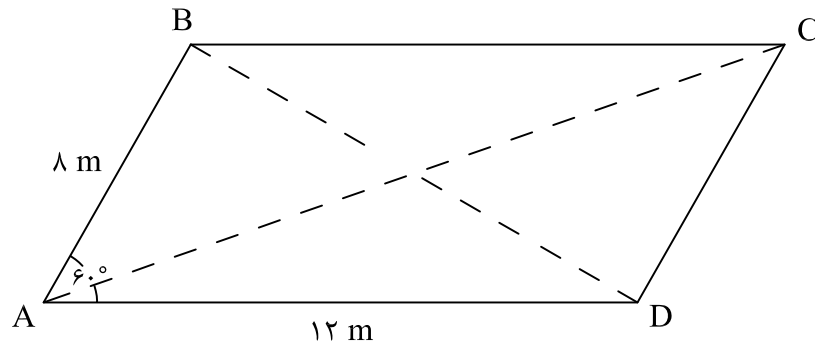
۱۱- با استفاده از روش تانژانت خطی رسم کنید که با یک خط افقی مبنا زاویه  $57/2$  درجه تشکیل دهد.

۱۲- در شکل ۱-۱۳ در صورتی که  $a = 5\text{ cm}$ ،  $b = 10$ ،  $\theta = 30^\circ$  درجه باشد اندازه ضلع  $c$  چقدر است؟



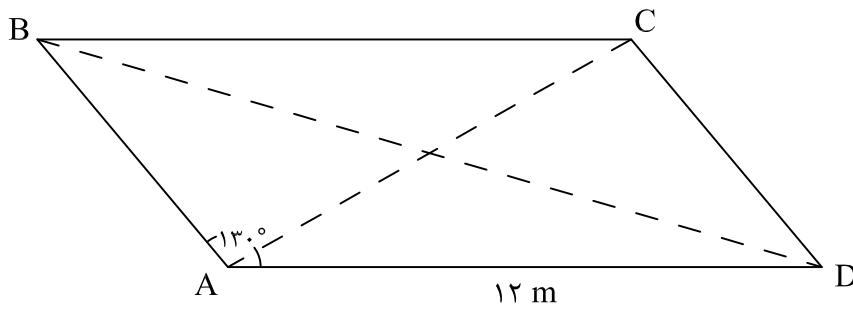
شکل ۱-۱۳

۱۳- اندازه قطرهای  $AC$  و  $BD$  در متوازی الاضلاع شکل ۱-۱۴ چقدر است؟



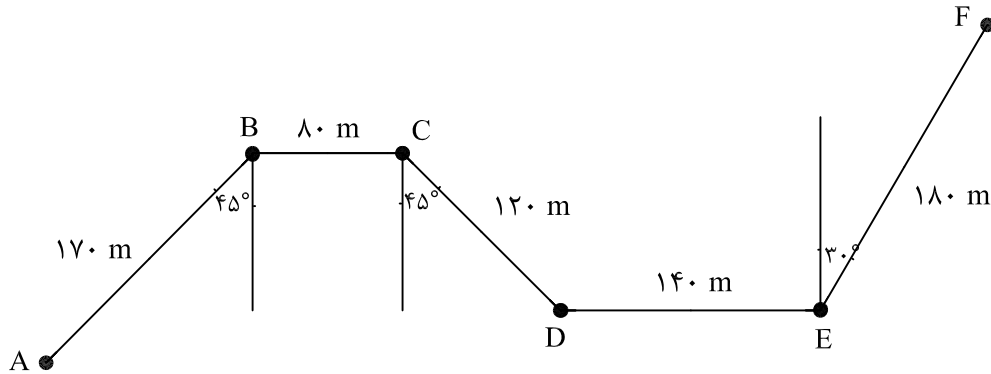
شکل ۱-۱۴

۱۴- اندازه قطرهای  $AC$  و  $BD$  در متوازی الاضلاع شکل ۱-۱۵ چقدر است؟



شکل ۱-۱۵

۱۵- یک قایق مسیر زیگ زاگ را از نقطه A تا نقطه F مطابق شکل ۱-۱۶ می پیماید. خط AF را رسم کرده و اندازه آن را تعیین کنید.



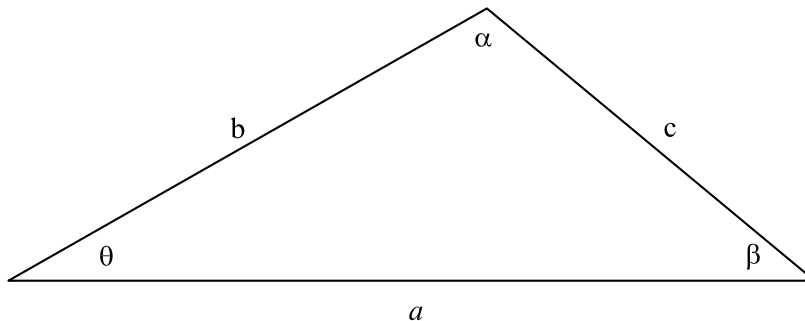
شکل ۱-۱۶

۱۶- در مثلث شکل ۱-۱۷ اندازه ضلع و زوایای معین نشده، چقدر است؟

$$a = 100 \text{ cm}$$

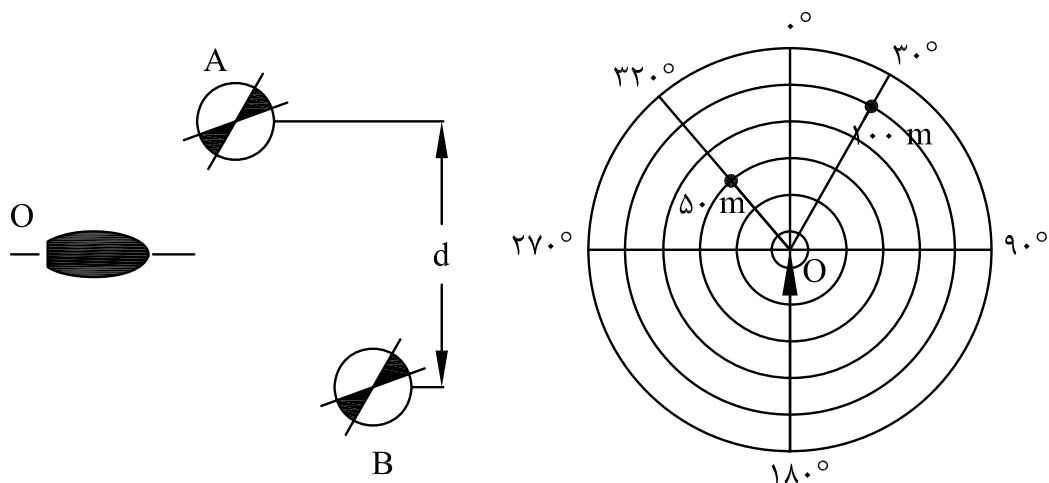
$$\theta = 30^\circ$$

$$\beta = 40^\circ$$



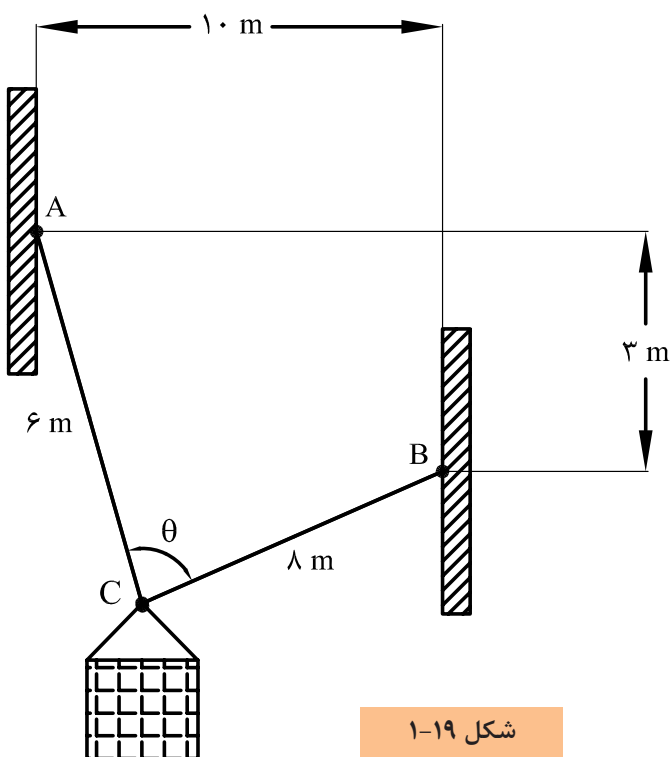
شکل ۱-۱۷

۱۷- یک کشتی مطابق شکل ۱-۱۸ باید از بین دو بویه A و B بگذرد. فواصل A و B از کشتی به ترتیب ۵۰ و ۱۰۰ متر است. اندازه d چقدر است؟

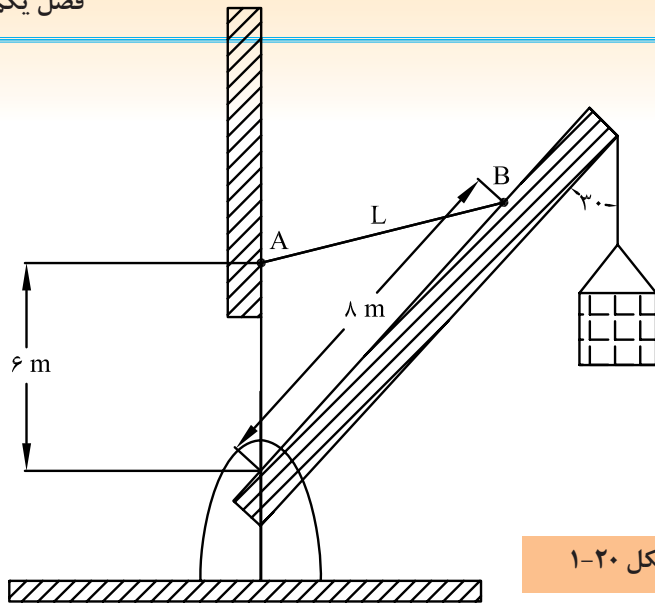


شکل ۱-۱۸

۱۸- وزنه‌ای مطابق شکل ۱-۱۹ از کابل‌های AC و BC آویزان است. زاویه  $\theta$  بین این دو کابل چقدر است؟



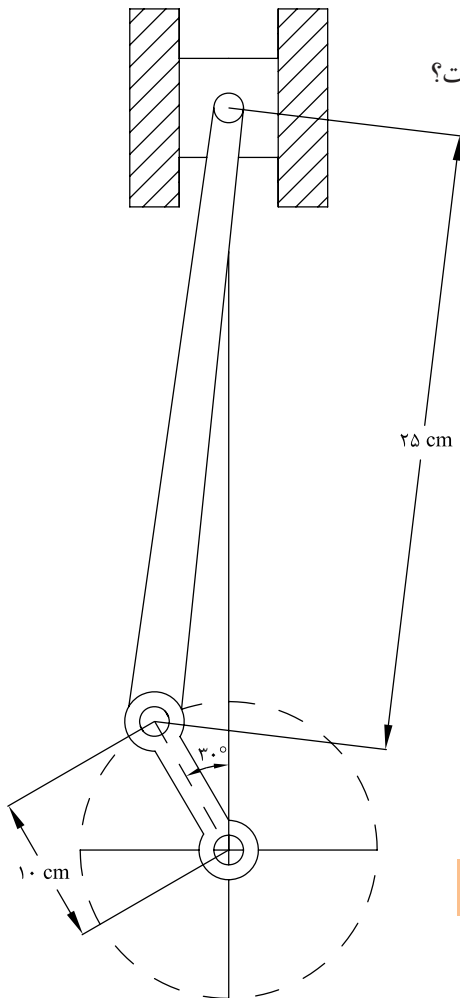
شکل ۱-۱۹



شکل ۱-۲۰

۱۹- بوم جرثقیل شکل ۱-۲۰ به وسیله کابل  $AB$  مهار شده است. طول کابل  $L$  و زاویه بین کابل و بوم چقدر است؟

۲۰- فاصله بین سر پیستون تا نقطه مرگ بالا در شکل ۱-۲۱ چقدر است؟



شکل ۱-۲۱

## فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلام و ایران

از قرن سوم الی هشتم هجری دانشمندان مسلمان نقش به سزایی در پیشبرد علم مثلثات و انتقال آن به اروپا داشتند. محد بوزجانی معروف به ابوالوفاء (۳۲۹-۳۸۹ هجری) تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت را همان طوری تعریف کرد که در کتابهای امروزی دیده می‌شود.

خواجه نصیرالدین طوسی (۵۷۹-۶۷۳ هجری) مثلثات را یک رشته علمی مستقل دانست. خواجه نصیرالدین روشهای جدیدی برای حل مسائل مختلف مثلثاتی ارائه کرد.

از قرن پنجم (دوازدهم میلادی) کتابهای علمی نجوم از عربی (زبان رسمی مسلمانان) به لاتین ترجمه شد تا برای اولین بار اروپایی‌ها با مثلثات آشنا شوند. اما بسیاری از نکات مطرح شده به وسیله خواجه نصیرالدین در اروپا درک نشد تا اینکه دویست سال بعد از آن، ستاره‌شناس آلمانی قرن پانزدهم میلادی جوآن مولر (۱۴۳۶-۱۴۷۶ میلادی) یافته‌های خواجه نصیرالدین را به اروپایی‌ها ارائه نمود.

# فصل دوم

## تجزیه و تحلیل نیروهای ساده

### هدف کلی: تجزیه و تحلیل نیروهای ساده

هدف‌های رفتاری: فراگیر پس از آموزش این واحد فصل قادر خواهد بود

- ۱- نیرو را توصیف کند.
- ۲- قانون‌های حرکت نیوتون را با مثال‌های ساده بیان کند.
- ۳- منشاء نیرو را تشخیص دهد.
- ۴- نقطه اثر نیرو را تشخیص دهد.
- ۵- برای انتقال پذیری نیرو مثال بزند.
- ۶- برآیند دو نیروی عمود بر هم را تعیین کند.
- ۷- برآیند دو نیروی غیرعمود بر هم را تعیین کند.
- ۸- راستای برآیند را تحلیل کند.

**پیش آزمون (۲)**

- ۱- برآیند دو نیروی ۵ نیوتونی عمود بر هم را محاسبه کنید.
- ۲- برآیند دو نیروی عمود برهم که اولی به مقدار ۱۰ نیوتون و دومی به مقدار ۲۰ نیوتون است را محاسبه کنید.
- ۳- برآیند دو نیروی ۲۰ و ۴۰ نیوتونی که با هم زاویه ۶۰ درجه می سازند را به روش ترسیمی تعیین کنید.



## فصل دوم

### تجزیه و تحلیل نیروهای ساده

#### ۱-۲- توصیف نیرو

اگرچه مفهوم نیرو با ذهن بشر بیگانه نیست ولی تعریف و توصیف فیزیکی نیرو آسان نمی‌باشد، ساده‌ترین و بلکه کامل‌ترین تعریف برای نیرو با توجه به اثر نیرو بر اجسام ارائه می‌شود. مطابق تعریف، نیرو عبارت است از «اثر یک جسم بر جسم دیگر، طوری که وضعیت جسم دوم تغییر کند» مثلاً؛

(۱) ممکن است جسم دوم در حالی که ساکن است تحت تأثیر نیرو حرکت کند مانند شکل ۱-۲ که در آن دوچرخه‌سوار به وسیله دوچرخه سوار به حرکت در می‌آید و یا شکل ۲-۲ که توپ (جسم دوم) با ضربه فوتبالیست حرکت می‌کند.



شکل ۲-۲



شکل ۲-۱

(۲) ممکن است جسم دوم در حالی که متحرک است تحت تأثیر نیرو به وضعیت سکون درآید مانند شکل ۳-۲ که در آن دوچرخه‌سوار (جسم دوم) بوسیله ترمز (جسم اول) متوقف می‌شود و یا مانند شکل ۴-۲ که توپ (جسم دوم) بوسیله دروازه‌بان (جسم اول) مهار می‌شود.



شکل ۲-۴

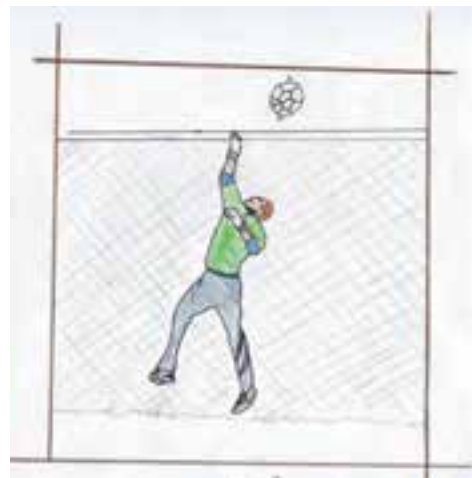


شکل ۲-۳

(۳) ممکن است جهت حرکت جسم دوم در حالی که متحرک است تحت تاثیر نیرو تغییر کند مانند شکل ۲-۵ که در آن با تاثیر نیروی دست دوچرخه سوار (جسم اول) دوچرخه (جسم دوم) تغییر جهت می دهد یا مطابق شکل ۲-۶ که در آن دروازه بان با ضربه مشت (جسم اول) جهت حرکت توپ (جسم دوم) را تغییر می دهد و از ورود توپ به دروازه جلوگیری می کند.



شکل ۲-۵



شکل ۲-۶

(۴) ممکن است جسم دوم در حالی که متحرک است تحت تأثیر نیرو و با سرعت کمتر یا بیشتری به حرکت ادامه دهد مانند شکل ۲-۷ که دوچرخه سوار در سرآشویی قرار می‌گیرد و دوچرخه به سمت پایین می‌رود که در این حالت نیروی وزن دوچرخه و دوچرخه سوار به نیروی حاصل از پدال زدن دوچرخه سوار اضافه می‌شود و سرعت دوچرخه افزایش می‌یابد. یا مطابق شکل ۲-۸ دوچرخه در سربالایی حرکت می‌کند و نیروی وزن دوچرخه سوار و دوچرخه موجب می‌شود که بخشی از نیروی ناشی از پدال زدن صرف غلبه بر نیروی وزن شود. لذا سرعت دوچرخه کاهش می‌یابد.



شکل ۲-۸



شکل ۲-۷

(۵) ممکن است جسم دوم نیروی مساوی نیروی داده شده از جسم اول به جسم دوم وارد کند منتهی نیروی وارده بر جسم اول در جهت مخالف نیروی وارده از جسم دوم باشد مانند شکل ۹-۲ که در آن توپ (جسم اول) به تیر دروازه عمودی (جسم دوم) برخورد می کند و جسم دوم نیروی در جهت مخالف بر توپ (جسم اول) وارد می کند.



شکل ۹-۲

مثال‌های فوق بیانگر قانون‌های حرکت هستند که بشر از ابتدای پیدایش در کره خاکی با آنها سر و کار داشته است. نیوتون قوانین حرکت را با توجه به نظریه‌های دانشمندان قبل از خود در سه قانون خلاصه نمود که از آن پس به نام خود او معروف شد. این سه قانون عبارتند از:

### قانون اول نیوتون :

هر جسمی در حالت سکون و یا در حرکت یکنواخت در مسیر مستقیم باقی می ماند مگر اینکه نیرویی موجب تغییر سرعت یا تغییر مسیر جسم شود.

### قانون دوم نیوتون :

وقتی یک، دو یا چند نیرو بر یک جسم متحرک وارد شود، حرکت آن شتابی می یابد که با نیرو و یا برآیند نیروها متناسب است.

### قانون سوم نیوتون :

وقتی جسمی بر جسم دیگر نیرو وارد می کند (عمل)<sup>۱</sup>، جسم دوم نیروی مساوی و در جهت مخالف (عکس العمل)<sup>۲</sup> به جسم اول وارد می کند.

۱-کنش

۲-واکنش

تمرین: مثال‌های (۱) الی (۵) را به همراه شکل‌های ۲-۲ الی ۲-۹ مرور کنید.

کدام قانون نیوتون در هر مثال و شکل وجود دارد؟

حالا می‌توان نتیجه گرفت که به طور خلاصه یک نیرو عبارت است از اثری هدایت شده که تمایل دارد تا حالت حرکت

یک جسم را تغییر دهد. نیرو همواره با یک عکس العمل مساوی همراه است.

بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت؛

۱- نیرو اثر یک جسم بر جسم دیگر است که میل دارد وضعیت جسم دوم را به صورتی هدایت شده از لحاظ سکون یا

حرکت تغییر دهد.

۲- برای تولید نیرو همواره دو جسم دخالت دارند. جسم اول به منشاء نیرو و جسم دوم به نقطه اثر نیرو موسوم است.

۳- نیرو دارای اندازه (مقدار)، جهت و نقطه اثر است.

توضیح: از این به بعد برای نشان دادن نیرو از یک حرف لاتین و علامت  $\rightarrow$  استفاده می‌شود. مثلا برای معرفی  $F$  نوشته

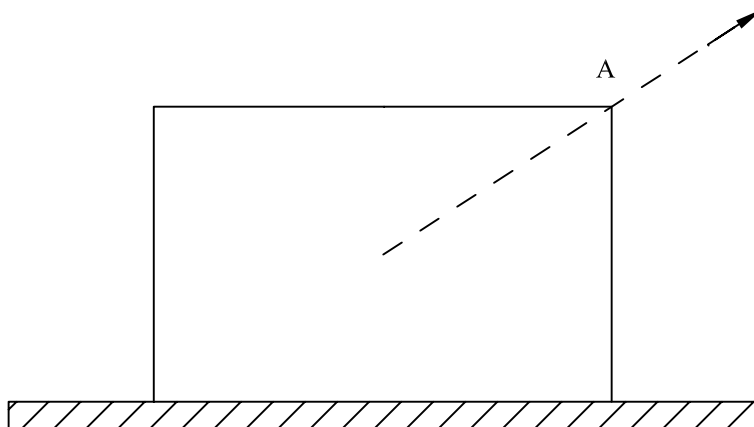
می‌شود  $\vec{F}$  ولی اندازه همان نیروی  $\vec{F}$  با حرف  $F$  نشان داده می‌شود. مثلا  $F = 25\text{ N}$

مطابق شکل ۲-۱۰ نیرو با پیکانی نشان داده شده است که طول پیکان مشخص کننده اندازه یا مقدار نیرو، نقطه  $A$

نقطه اثر نیرو و نوک پیکان نشان دهنده جهت اثر نیرو می‌باشد. خط اثر نیرو با خطوط بریده نشان داده شده است (خط

اثر نیرو به امتداد نیرو معروف است. به این معنی که امتداد نیرو خط مستقیمی است که نیرو در امتداد آن خط بر جسم

اثر می‌کند).



شکل ۲-۱۰

## ۲-۲- انتقال پذیری نیرو

اگر اولین واگن یک قطار به لکوموتیوی وصل شود و لکوموتیو قطار را بکشد مانند این است که همان لکوموتیو به آخرین واگن وصل شود و قطار را هل دهد. به این معنی که نتیجه ورود نیرو در هر کدام از نقاط خط اثر خود یکسان است. این عمل به عنوان اصل انتقال پذیری نیرو در استاتیک مطرح است.

مثال: در شکل ۲-۱۱ فاصله نقطه برخورد خط اثر نیرو (نقطه P) تا نقطه O و فاصله عمودی بین نقطه O و امتداد خط

اثر نیرو (d) چقدر است؟

راه حل: با توجه به اینکه  $30^\circ =$  زاویه BPC در مثلث BPC داریم؛

$$\tan 30^\circ = \frac{60 \text{ cm}}{PC}$$

$$PC = 60 \cdot (\frac{1}{\sin 30^\circ}) = 103.92 \approx 104 \text{ cm}$$

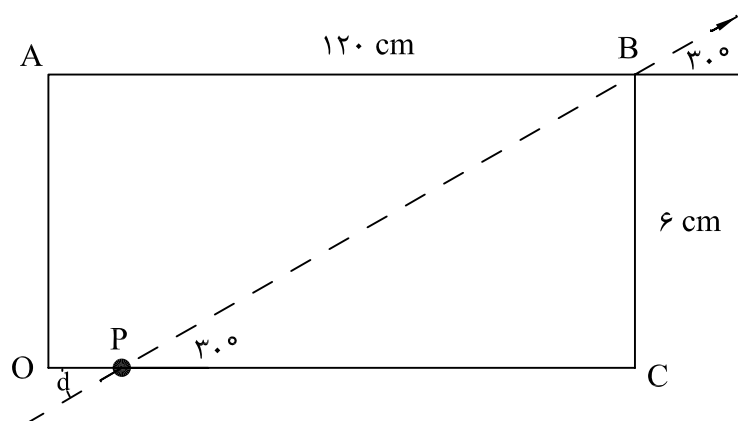
چون  $120 \text{ cm} = OC = AB$  داریم

$$OP = OC - PC = 120 - 104 = 16 \text{ cm}$$

برای یافتن d داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{d}{OP} = \frac{d}{16}$$

$$d = 16 \sin 30^\circ = 8 \text{ cm}$$



شکل ۲-۱۱

## ۳-۲- برآیند دو نیروی عمود بر هم

دو نیروی  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  شکل ۲-۱۲ بر نقطه O وارد شده اند. نیروی  $\vec{F}_1$  منطبق با محور x و نیروی  $\vec{F}_2$  منطبق بر محور y می باشد.

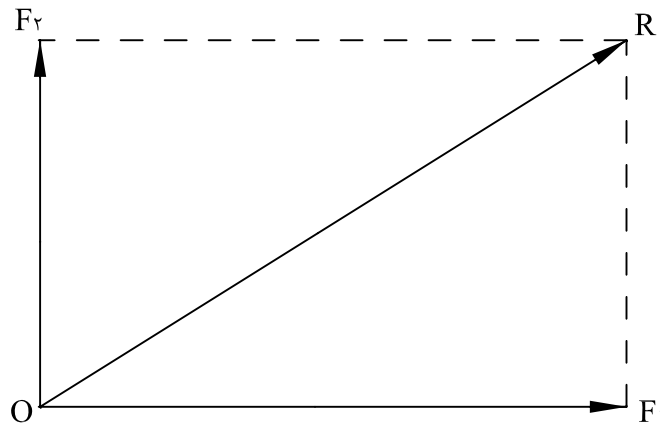
با توجه به اینکه با تجربه و آزمایش ثابت شده است که به جای دو نیروی  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  می توان یک نیروی  $\vec{R}$  را به نقطه O وارد کرد طوری که  $\vec{R}$  به تنهایی اثر دو نیروی  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  را داشته باشد نیروی  $\vec{R}$  به برآیند دو نیروی  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  معروف شده است. برای تعیین اندازه نیروی  $\vec{R}$  از روش های ترسیمی و ریاضی استفاده می شود. به این ترتیب که ابتدا از انتهای  $\vec{F}_1$  خطی موازی  $\vec{F}_2$  و سپس از انتهای  $\vec{F}_2$  خطی موازی  $\vec{F}_1$  رسم می شود تا مستطیلی به دست آید. قطر مستطیل که از نقطه O شروع می شود اندازه برآیند  $\vec{R}$  است.



شکل ۲-۱۲

مثال ۱:

اگر در شکل ۲-۱۳ اندازه نیروی  $\vec{F}_1$  برابر با ۱۲ N اندازه نیروی  $\vec{F}_2$  برابر با ۹ N باشد، اندازه نیروی برآیند  $\vec{R}$  چقدر است؟



۲-۱۳

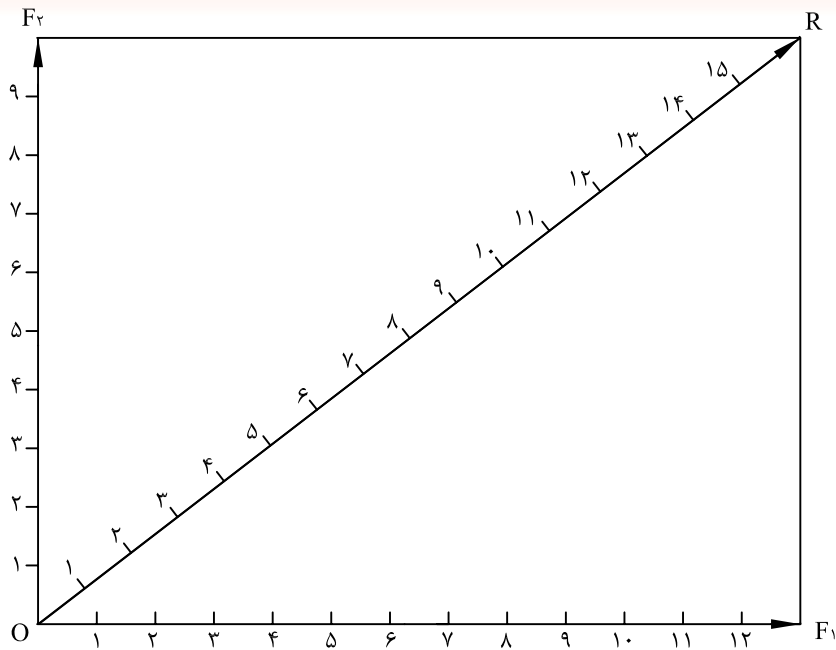
حل: اولاً برای ترسیم نیروها در این مثال می‌توان هر یک نیوتون را برابر یک سانتی‌متر گرفت و نیروها را مطابق شکل ۲-۱۴ ترسیم کرد.

طول نیروی  $\vec{F}_1$  برابر با ۱۲ سانتی‌متر و طول نیروی  $\vec{F}_2$  برابر با ۹ سانتی‌متر رسم می‌شود. حال اگر طول قطر مستطیل اندازه‌گیری شود ملاحظه می‌شود که برابر ۱۵ سانتی‌متر است. چون در شکل مزبور هر یک سانتی‌متر برابر یک نیوتون می‌باشد،  $R = 15 \text{ N}$  است. از طرف دیگر چون  $15^2 = 225$  و همچنین

$$12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$$

و لذا:  $15^2 = 12^2 + 9^2$  یا  $15 = \sqrt{12^2 + 9^2}$  می‌باشد. در اینگونه مثال همواره  $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$  خواهد بود. اندازه  $R$  هم با استفاده از روش ترسیمی و هم با استفاده از ریاضیات قابل تعیین است.

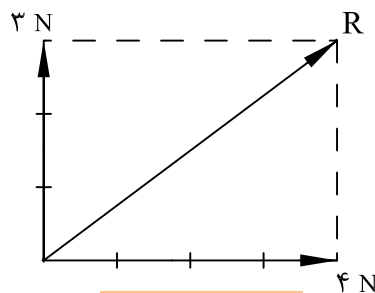




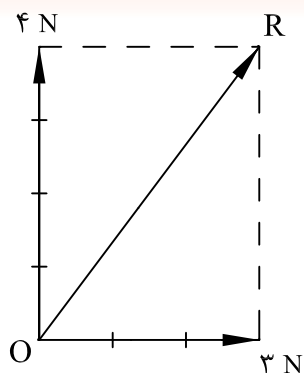
شکل ۲-۱۴

مثال ۲: برآیند دو نیروی عمود بر هم  $4\text{N}$  و  $3\text{N}$  را با استفاده از روش های ترسیمی و ریاضی تعیین کنید.  
 حل: ابتدا هر دو نیرو رسم می شود. هر یک سانتی متر طول به عنوان یک نیوتون گرفته می شود.  
 طول نیروی  $\vec{R}$  با خط کش اندازه گیری می شود که برابر  $5$  سانتی متر است و چون هر یک سانتی متر مساوی یک نیوتون گرفته شده است پس اندازه نیروی  $\vec{R}$  مساوی  $5$  نیوتون است. با استفاده از ریاضیات می توان نوشت:

$$R = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$



شکل ۲-۱۵



شکل ۱۶-۲

مثال ۳: در مثال ۲ چنانچه نیروی افقی  $3\text{ N}$  و نیروی عمودی  $4\text{ N}$  باشد اندازه  $\vec{R}$  چقدر است؟

حل: با استفاده از هر دو روش ترسیمی و ریاضی مشخص می‌شود که اندازه  $R$  برابر  $5\text{ N}$  است. بنابراین نتیجه گرفته می‌شود که اندازه برآیند دو نیروی معین عمود بر هم  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  همواره یک نیروی معین  $R$  است ولی اندازه زاویه ای که نیروی برآیند با محورهای مختصات افقی و عمودی تشکیل می‌دهد متفاوت است.

تمرین:

- ۱- با استفاده از نقاله زاویه نیروی  $R$  با محور مختصات افقی در مثال های ۲ و ۳ را مقایسه کنید.
- ۲- زاویه نیروی  $R$  با محور مختصات عمودی در مثال های ۲ و ۳ را مقایسه کنید.
- ۳- در صورتی که نیروی  $\vec{F}_1$  برابر  $5\text{ N}$  در راستای عمودی و نیروی  $\vec{F}_2$  برابر  $3\text{ N}$  در راستای افقی باشد زاویه بین  $R$  و محور مختصات عمودی در مقایسه با زاویه بین  $R$  و محور مختصات عمودی در شکل ۱۶-۲ کوچکتر است یا بزرگتر؟

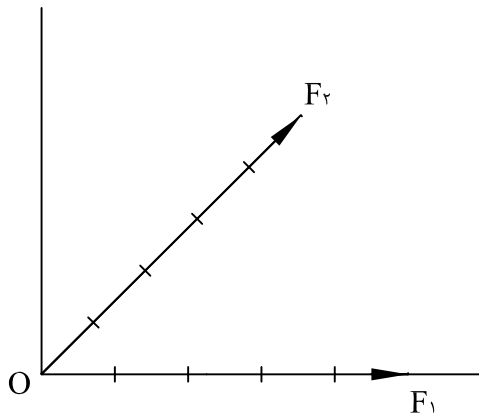


## ۴-۲- برآیند دو نیروی غیر عمود بر هم

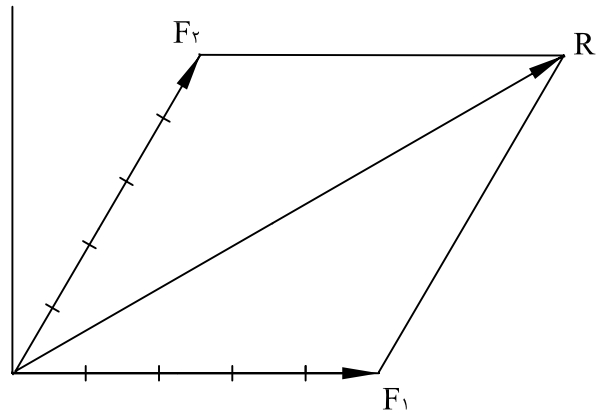
دو نیروی  $F_1 = 5\text{ N}$  و  $F_2 = 5\text{ N}$  مطابق شکل ۲-۱۷ بر نقطه O وارد می‌شوند. زاویه بین دو نیرو ۴۵ درجه است. برای تعیین برآیند این دو نیرو از روش‌های ترسیمی و ریاضی می‌توان استفاده کرد. برای تعیین نیروی  $\vec{R}$  از روش ترسیمی ای که به روش ترسیمی متوازی الاضلاع معروف است استفاده می‌شود. در این روش از انتهای  $F_1$  خطی موازی  $F_2$  و از انتهای  $F_2$  خطی موازی  $F_1$  رسم می‌شود. قطر متوازی الاضلاعی که به دست می‌آید اندازه نیروی برآیند  $\vec{R}$  می‌باشد. با خط‌کش هر سانتی‌متر مساوی یک نیوتون فرض می‌شود. طول قطر R برابر  $9/24$  سانتی‌متر می‌شود و در نتیجه اندازه  $\vec{R}$  مساوی  $9/24$  نیوتون است. با استفاده از روش ریاضی داریم:

$$\begin{aligned} R^2 &= F_1^2 + F_2^2 + 2(F_1)(F_2)\cos 45 \\ R &= \sqrt{5^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times 5 \cos 45} \\ &= \sqrt{5^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times 5 \times 0.707} \\ &= 9.23879 \approx 9.24 \end{aligned}$$

بدیهی است در روش ترسیمی هر چقدر اندازه گیری طول با دقت بیشتری انجام شود اندازه گیری برآیند دقیق تر می‌شود.



شکل ۲-۱۷



شکل ۲-۱۸

مثال ۱: برآیند دو نیروی  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  شکل ۲-۱۹ چقدر است؟

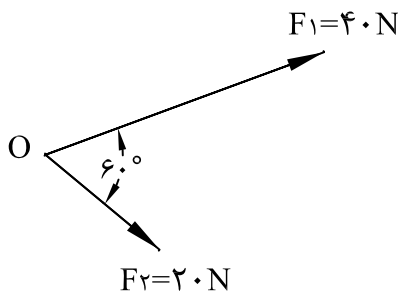
با استفاده از روش ترسیمی شکل ۲-۲۰ ترسیم می شود. هر سانتی متر مساوی ۱۰ نیوتون گرفته می شود. طول  $R$  در شکل ۲-۲۰ برابر  $۵/۲۹$  سانتی متر است و در نتیجه اندازه  $\vec{R}$  مساوی  $۵۲/۹$  نیوتون می باشد. با استفاده از روش ریاضی می توان نوشت:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2(F_1)(F_2) \cos 60}$$

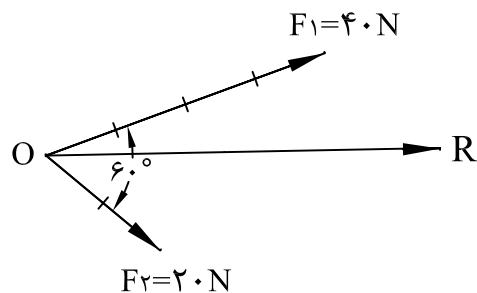
$$R = \sqrt{۴۰^2 + ۲۰^2 + 2(۴۰)(۲۰) \cdot ۱/۵}$$

$$= \sqrt{۲۸۰۰}$$

$$= ۵۲/۹ \text{ N}$$



شکل ۲-۱۹



شکل ۲-۲۰

مثال ۲:

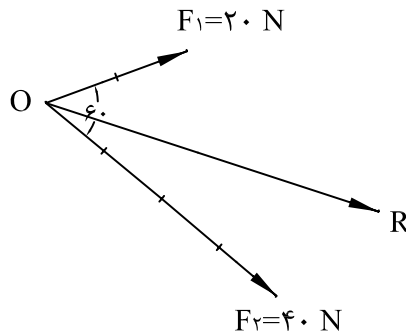
برآیند دو نیروی  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  شکل ۲-۲۱ چقدر است؟  
( در مقایسه با مثال ۱ نیروهای  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  جابه جا شده اند )

$$R = \sqrt{۲۰^2 + ۴۰^2 + 2(۴۰)(۲۰) \cdot ۱/۵} = ۵۲/۹ \text{ N}$$

تمرین ۱: چه تفاوتی بین برآیند  $R$  در مثال های ۱ و ۲ وجود دارد؟  
پاسخ: اندازه  $R$  در هر دو مثال یکی است ولی راستای  $R$  در مثال ۱ با راستای  $R$  در مثال ۲ متفاوت است.

تمرین ۲:

با استفاده از نقاله زاویه  $\vec{R}$  در مثال های ۱ و ۲ را با محور مختصات افقی و عمودی اندازه گرفته و تحلیل خود را بیان کنید.



شکل ۲-۲۱

مثال ۳: طناب نازکی مطابق شکل ۲-۲۲ به چارچوب A بسته شده و خودرو با نیروی  $500\text{ N}$  یک تنه درخت با وزن  $1000\text{ N}$  را می کشد. برآیند نیروهای وارد بر چارچوب در نقطه A چقدر است؟ زاویه نیروی برآیند با محور عمودی چقدر است؟

حل: با توجه به شکل ۲-۲۲ نیروهای موجود در مسئله و متوازی الاضلاع نیروها ترسیم می شود.

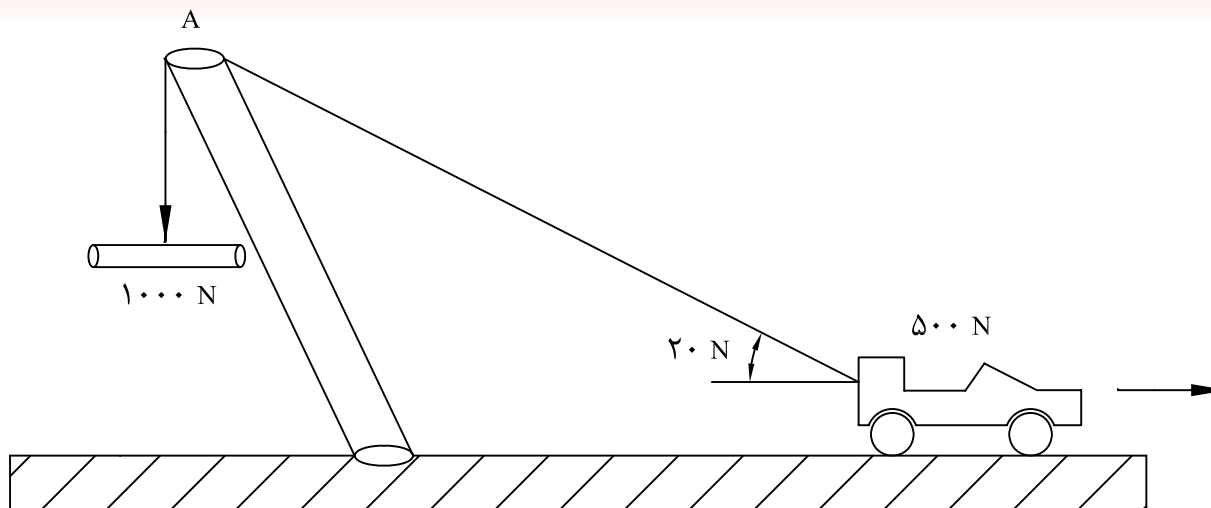
ابتدا اندازه زاویه بتا ( $\beta$ ) تعیین می شود. ملاحظه می شود زاویه بین نیروی  $500\text{ N}$  و محور AX مساوی  $20^\circ$  درجه است. چون زاویه بین نیروی  $1000\text{ N}$  و محور AX مساوی  $90^\circ$  درجه است بنابراین اندازه زاویه بین نیروهای  $500\text{ N}$  و  $1000\text{ N}$  برابر  $90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$  است. با توجه به اینکه مجموع زوایای متوازی الاضلاع برابر  $360^\circ$  درجه است، بنابراین اندازه زاویه  $\beta$  مساوی  $110^\circ$  درجه است.

زاویه  $\gamma$  مساوی  $70^\circ$  درجه و زاویه  $\theta$  مساوی  $20^\circ$  درجه است.

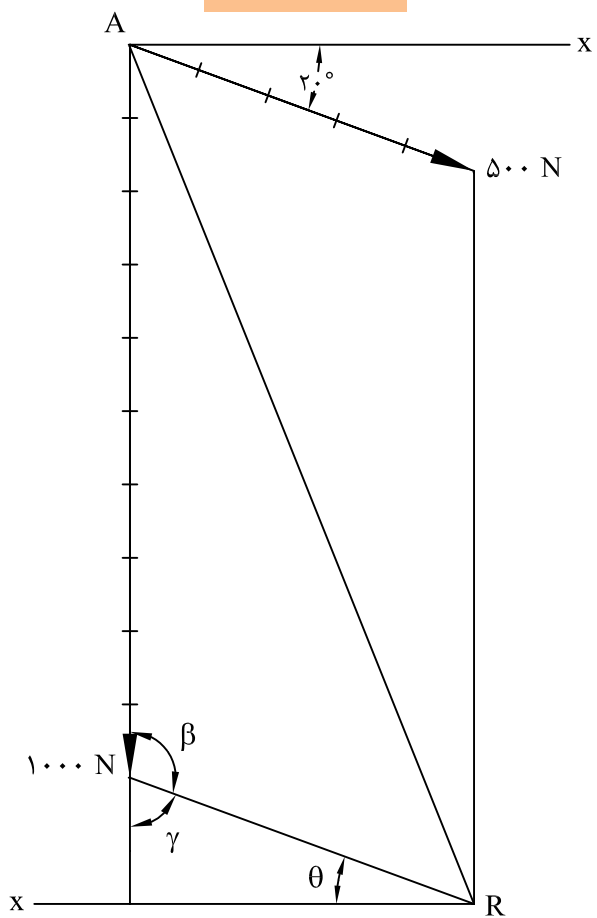
با استفاده از قانون کسینوس داریم:

$$R^2 = 500^2 + 1000^2 - 2(500)(1000) \cos 110^\circ$$

$$R^2 = 500^2 + 1000^2 - 2(500)(1000)(-0.342)$$



شکل ۲-۲۲



شکل ۲-۲۳

$$\begin{aligned}
 &= 250000 + 1000000 + 342000 \\
 &= 1592000 \\
 \Rightarrow R &= 1261/7 \text{ N}
 \end{aligned}$$

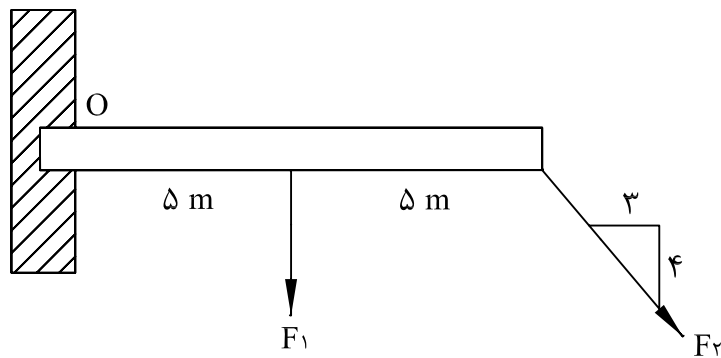
$\alpha$  زاویه نیروی برآیند  $\vec{R}$  با محور عمودی است. اندازه آن با استفاده از قانون سینوس قابل تعیین است.

$$\begin{aligned}
 \frac{500}{\sin \alpha} &= \frac{1261/7}{\sin 110} \\
 \frac{500}{\sin \alpha} &= \frac{1261/7}{0.9397} \\
 \sin \alpha &= 0.372394 \\
 \Rightarrow \alpha &\approx 21/8
 \end{aligned}$$

# خود آزمایی :



۱- دونیروی  $F_1$  و  $F_2$  مطابق شکل ۲-۲۴ بر تیر وارد می‌شوند. امتداد نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  در نقطه ای بالای  $F_1$  با هم تلاقی می‌کنند. فاصله عمودی نقطه تلاقی از تیر چقدر است؟

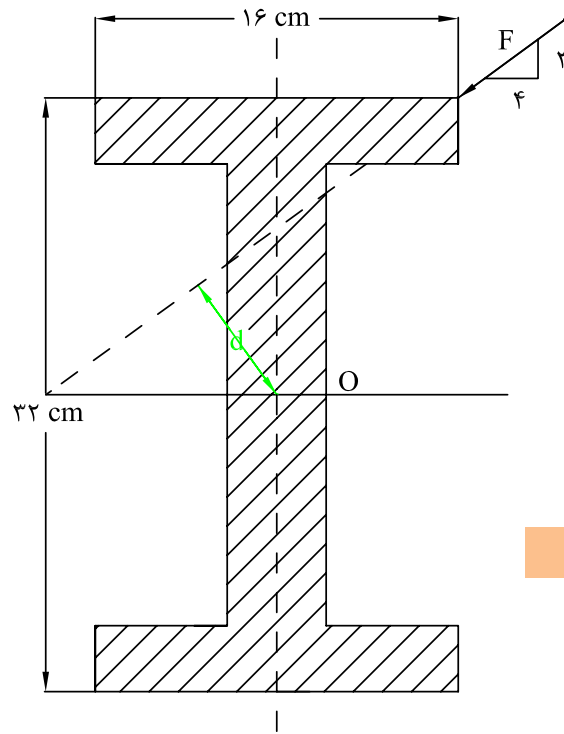


شکل ۲-۲۴

۲- در مسئله شماره ۱، فاصله عمودی نقطه برخورد امتداد نیروی  $F_2$  با دیوار چقدر است؟

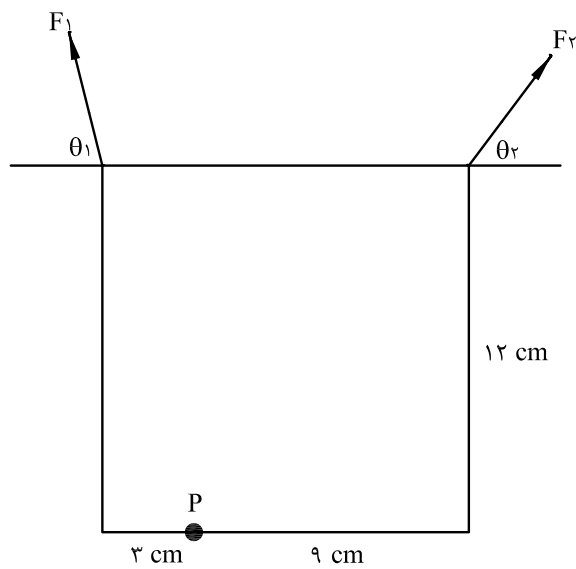
۳- مطابق شکل ۲-۲۵، نیروی  $F$  در گوشه تیرآهن بر آن وارد می‌شود. فاصله عمودی  $d$  از مرکز هندسی تیرآهن تا امتداد نیروی  $F$  چقدر است؟





شکل ۲-۲۵

۴- در شکل ۲-۲۶، امتداد نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  از نقطه P می‌گذرند. اندازه زاویه های  $\theta_1$  و  $\theta_2$  چقدر است؟



شکل ۲-۲۶

۵- با توجه به شکل ۲-۲۲ در متن درس، در صورتی که زاویه نیروی ۵۰۰ نیوتون با محور افقی برابر ۳۰ درجه است برآیند نیروهای وارد بر چارچوب در نقطه A و زاویه نیروی برآیند با محور عمودی چقدر است؟

## فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلام و ایران

## طراحی و ساخت کشتی به نقل از قرآن مجید و انجیل و تورات

محققین غربی عقیده دارند طراحی و ساخت کشتی نوح سرآغاز دورانی جدید در طراحی و ساخت کشتی در دوران باستان بوده است. در مراجعه به قرآن مجید ملاحظه می شود خدای متعال فرموده است کشتی در برابر دیدگان آن خالق یکتا ساخته می شود و حضرت نوح (ع) قبلا اطلاع و تجربه ای از طراحی و ساخت کشتی نداشته است. متخصصان غربی عقیده دارند ساخت کشتی نوح (ع) یک پروژه عظیم بوده است. کیل کشتی از تکه های بزرگ تنه درخت و قابها (فریمها) و قطعات پوسته نیز از الوارهای سنگین تهیه شد. جابجایی و تنظیم و نصب و اتصال این قطعات به یکدیگر در کشتی های مشابه فقط با استفاده از نوعی دستگاه بالابرنده امکان پذیر است. در قرآن مجید مطلبی در مورد ابعاد و اندازه های کشتی نوح گفته نشده است. ولی در تورات و انجیل به ابعاد، تعداد



عرشه ها، وجود یک پنجره و یک در اشاره شده است و علاقه مندان مدل هایی ساخته اند. سوار شدن یک جفت از انواع حیوانات و یکصد و پنجاه روز دریانوردی، انبارهای بزرگ آذوقه را می طلبد و گفته شده برخی فرزندان حضرت نوع (ع) کشتی سازان خیره عصر خود شدند. البته قدرت خدای بزرگ فراتر از دانش و عقل بشر است و معلوم نیست که نظر غربی ها صحیح باشد ولی می توان گفت طراحی و ساخت کشتی نوح (ع) الهام بخش بشر برای ساخت کشتی هایی شد که توانایی های کشتی نوح (ع) را داشته باشند و در ساخت آنها از دستگاه های بالابر مانند جرثقیل های عهد کهن استفاده شود.

علاوه بر انتقال فرامین خداوند انبیاء (ع) مشاغل مختلف را به بشر آموختند و از جمله آن، حضرت نوح (ع) ساخت کشتی را به بشر آموخته است.

# فصل سوم

## تجزیه و تحلیل بردارها (استاتیک)

### هدف کلی: تجزیه و تحلیل بردارها

هدفهای رفتاری: فراگیر پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود

- ۱- بردار برآیند و مؤلفه‌های بردار را به روش‌های ترسیمی و محاسبه‌ای تجزیه و تحلیل کند.
- ۲- نیروی معادل (خنثی‌کننده برآیند نیروها را) به روش ترسیمی تعیین کند.
- ۳- مسائل مربوط به جرثقیل کشتی را تجزیه و تحلیل کند.
- ۴- تأثیر جریان آب بر سرعت و راه کشتی را تجزیه و تحلیل کند.
- ۵- مسائل مربوط به سازه ساده را تجزیه و تحلیل کند.

**پیش آزمون (۳)**

- ۱- روش ترسیمی تعیین برآیند سه نیرو که در یک نقطه اثر می‌کنند چگونه است؟
- ۲- روش ترسیمی تعیین مؤلفه‌های یک بردار چگونه است؟
- ۳- روش ترسیمی تعیین نیروی معادل چگونه است؟
- ۴- روش محاسبه نیروی وارد بر اجزاء جرثقیل ساده بازویی چگونه است؟
- ۵- روش تعیین عضوهای تراکمی و کششی در یک سازه ساده چگونه است؟

## فصل سوم

### تجزیه و تحلیل بردارها (استاتیک)

#### ۱-۳- بردار

برای حل مسائل استاتیک از بردار استفاده می‌شود. در واقع، به کارگیری بردار نقش و اهمیت به‌سزایی در استاتیک دارد. بردار دارای مقدار (بزرگی) و جهت است. پس بردار کمیتی است که دارای مقدار و جهت است. کمیت دیگر که فقط دارای مقدار است و بدون جهت می‌باشد کمیت اسکالر (نرده‌ای) نامیده می‌شود. بنابراین:

**تمام کمیت‌های اسکالر یا نرده‌ای فقط دارای مقدار هستند و دارای جهت نمی‌باشند**

**و**

**تمام کمیت‌های برداری دارای مقدار و جهت هستند.**

وقتی گفته می‌شود طول زمین فوتبال یک صد و ده متر است، در این عبارت مؤلفه جهت‌دار وجود ندارد و کمیت مزبور (طول زمین فوتبال) یک کمیت اسکالر محسوب می‌شود. اگر فعالیتی شامل جابجا شدن یک جسم به فاصله یک کیلومتر شود ولی معلوم نباشد جابجایی در چه جهتی بوده است در این فعالیت نیز مؤلفه جهت دار ملاحظه نمی‌شود. ولی اگر گفته شود که همان جسم از نقطه اولیه یک کیلومتر به طرف شمال شرق جابجا شده است فعالیت دارای مؤلفه جهت‌دار است و به زبان برداری بیان شده است.

در استاتیک جرم (mass)، زمان (time)، فاصله (distance) و سرعت (speed) جزء کمیت‌های اسکالر محسوب می‌شوند. در این چهار کمیت مؤلفه جهت وجود ندارد مثلاً ممکن است گفته شود؛

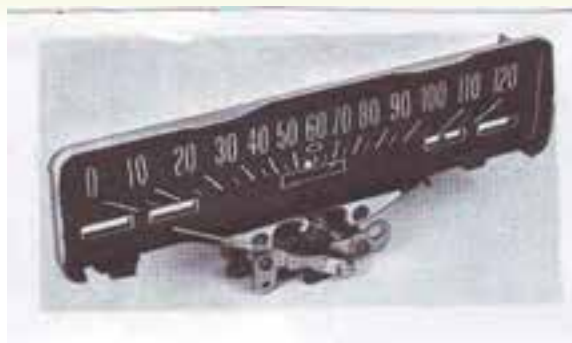
- جرم جسمی یک هزار گرم است.

- یک سال شمسی شامل سیصد و شصت و پنج روز و شش ساعت است.

- طول زمین فوتبال یکصد و ده متر است.

- حداکثر سرعت کشتی رو-رو والفجر یک شانزده مایل در ساعت است و یا حداکثر سرعت خودروی برقی شصت

کیلومتر در ساعت است.



شکل ۱-۳



شکل ۲-۳ - سرعت سنج کشتی نیز فقط سرعت کشتی در واحد زمان را که یک کمیت اسکالر است نشان می‌دهد

شکل ۱-۳ سرعت سنج (speedometer) خودرو یک کمیت اسکالر را نشان می‌دهد و مشخص نمی‌کند خودرو در چه جهتی حرکت می‌نماید. سرعت سنج مزبور نشان می‌دهد که در هر لحظه مقدار سرعت حرکت خودرو در واحد زمان چند کیلومتر و یا چند مایل است.

سرعت (speed) یک کمیت اسکالر است. سرعت به معنی آهنگ تغییر در پیمودن فاصله است. سرعت سنج خودرو (speedometer) به درستی نامگذاری شده است زیرا مدت زمانی را نشان می‌دهد که در آن یک واحد مسافت پیموده می‌شود. اما تندی (velocity) یک کمیت برداری است که شامل سرعت و جهت است. مثلاً می‌توان گفت سرعت نوک پروانه یک کشتی ثابت است. اما نمی‌توان گفت که تندی نوک همان پروانه ثابت است زیرا بردار تندی دائم تغییر می‌کند. در این کتاب هرگاه صحبت از تندی (velocity) شود منظور سرعت جسم در یک جهت معین است و هر جا صحبت از سرعت (speed) شود منظور سرعت جسم بدون در نظر گرفتن جهت است.

شکل ۳-۳ نشان‌دهنده راه کشتی (course indicator) جهت حرکت کشتی را نشان می‌دهد. وقتی سرعت کشتی و جهت حرکت کشتی مشخص باشد تندی که یک کمیت برداری است معین می‌شود. مثلاً می‌توان گفت تندی کشتی در راه ۳۵۰ درجه ۲۰ مایل در ساعت است.



شکل ۳-۳ - نشان‌دهنده راه کشتی

در جدول ۳-۱ کمیت‌های اسکالر و در جدول ۳-۲ کمیت‌های برداری معرفی شده‌اند.

کمیت	معادل انگلیسی	علامت	مثالهای مقداری
زمان	Time	t	ثانیه، ساعت، ...
مسافت	Distance	s	متر، کیلومتر، ...
جرم	Mass	m	گرم، کیلوگرم، ...
سرعت	Speed	s/t	متر بر ثانیه، کیلومتر در ساعت، مایل در ساعت، ...

### جدول ۳-۱ کمیت‌های اسکالر

**نیرو** عبارت است از جرم ضربدر شتاب. نیرو یک کمیت برداری است زیرا دارای جهت است. وزن نوع ویژه‌ای از نیرو می‌باشد که مساوی است با جرم ضربدر شتاب جاذبه (شتاب جاذبه برابر است با  $9/8$  متر بر مجذور ثانیه). نیرو ممکن است در جهت‌های مختلف باشد ولی وزن (نوع ویژه‌ای از نیرو) تحت تأثیر شتاب جاذبه همواره دارای جهتی عمودی به‌طرف پایین است.

نیرو یک کمیت برداری است که دارای دو مؤلفه جرم و شتاب است و دارای جهت است.

وزن نوع ویژه‌ای از نیرو می‌باشد که دارای دو مؤلفه جرم و شتاب جاذبه است و جهت آن همواره به‌طرف پایین است.



مثال	علامت	توضیح	معادل انگلیسی	کمیت
نیوتون	$F = ma$	دارای مؤلفه جرم و شتاب	Force	نیرو
نیوتون	$W = mg$	دارای مؤلفه‌های جرم و شتاب جاذبه	Weight	وزن (نوع ویژه‌ای از نیرو)
کیلومتر در ساعت، متر در ثانیه، مایل در ساعت	$v = at = s/t$	سرعت (speed) در یک جهت معین	Velocity	تندی
مسافت بر مجذور ثانیه	$a = s/t^2$	تغییر در تندی	Acceleration	شتاب
—	$g = 9/81 \text{ m/s}^2$	—	Acceleration due to gravity	شتاب جاذبه

### جدول ۲-۳ کمیت‌های برداری

برای پنج کمیت مندرج در جدول ۲-۳ می‌توان گفت:

- نیروی به مقدار ۱۰۰ نیوتون با زاویه ۴۵ درجه بر جسمی وارد می‌شود.
- وزن جسمی در کره زمین ۷۱ نیوتون و در کره ماه ۱۲ نیوتون است.
- یک کشتی با تندی ۴۵ مایل در ساعت در زاویه ۳۶۰ درجه از بحرین به‌طرف بوشهر و در برگشت تحت زاویه ۱۸۰ درجه از بوشهر به‌طرف بحرین دریانوردی می‌کند.
- خودروی با شتاب ۱۰ متر بر مجذور ثانیه از مبدأ حرکت می‌کند.
- شتاب جاذبه در سطح کره زمین  $9/81 \text{ m/s}^2$  فرض می‌شود.

### ۲-۳- جمع بردارها

جمع کمیت‌های اسکالر با توجه به اینکه شامل ریاضیات ساده می‌شود آسان است ولی جمع کمیت‌های برداری زحمت بیشتری دارد و معمولاً نیاز است تا دایاگرامی رسم شود. در مثال زیر جمع برداری جابجا شدن یک خودرو که با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند و چندین مرتبه تغییر جهت (در اصطلاح عامیانه تغییر مسیر) می‌دهد بررسی و محاسبه می‌شود.

فرض می‌شود که خودرو مسیری را به شرح زیر می‌پیماید:

(۱) ۵ کیلومتر به طرف شمال

(۲) ۲ کیلومتر به طرف شرق

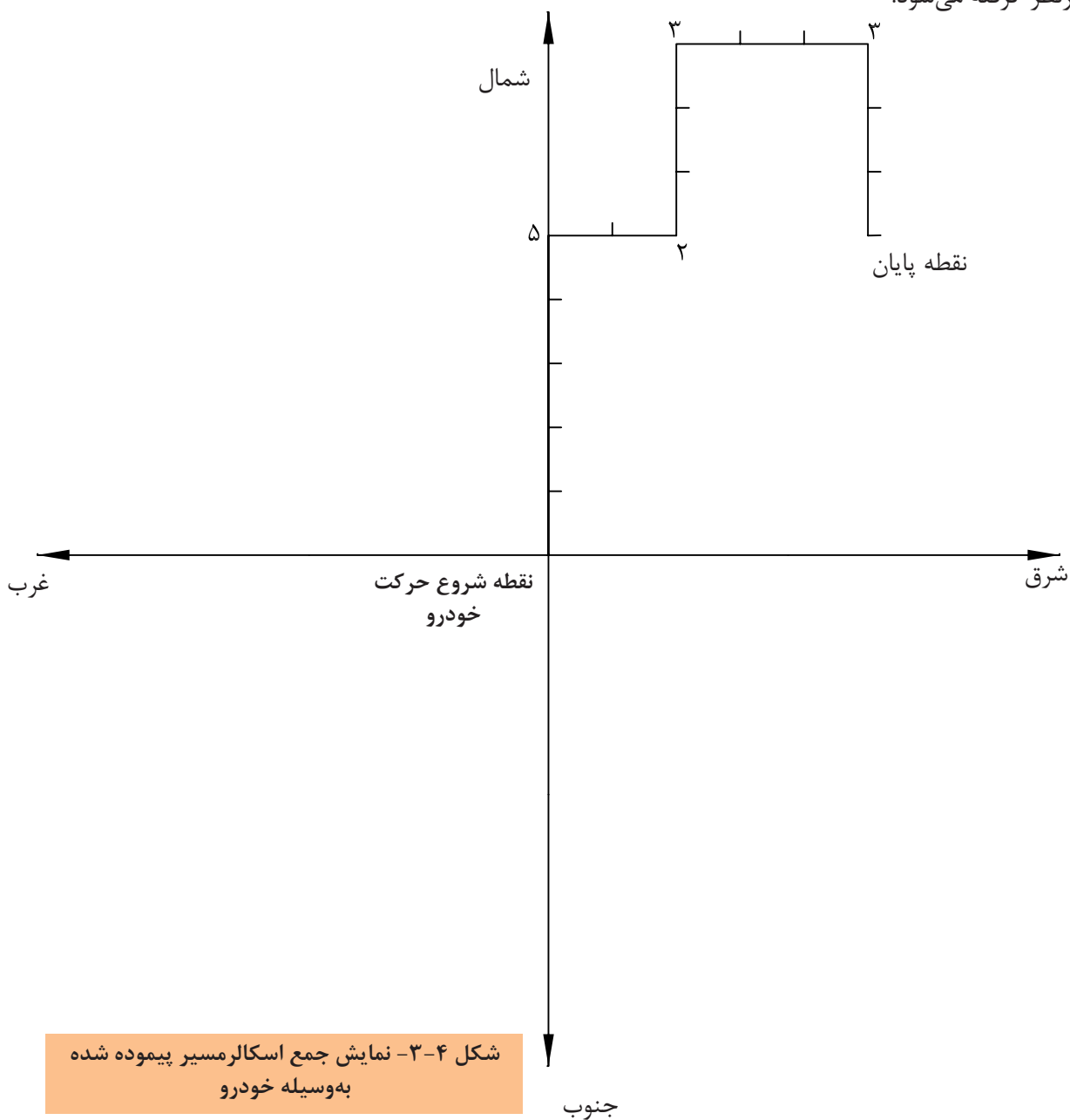
(۳) ۳ کیلومتر به طرف شمال

(۴) ۳ کیلومتر به طرف جنوب

جمع اسکالر مسیر پیموده شده مساوی است با:  $۵ + ۲ + ۳ + ۳ + ۳ = ۱۶ \text{ km}$

و مسیر به صورت شکل ۳-۴ قابل نشان دادن است. هر یک سانتی متر در کاغذ به عنوان یک کیلومتر در مثال واقعی

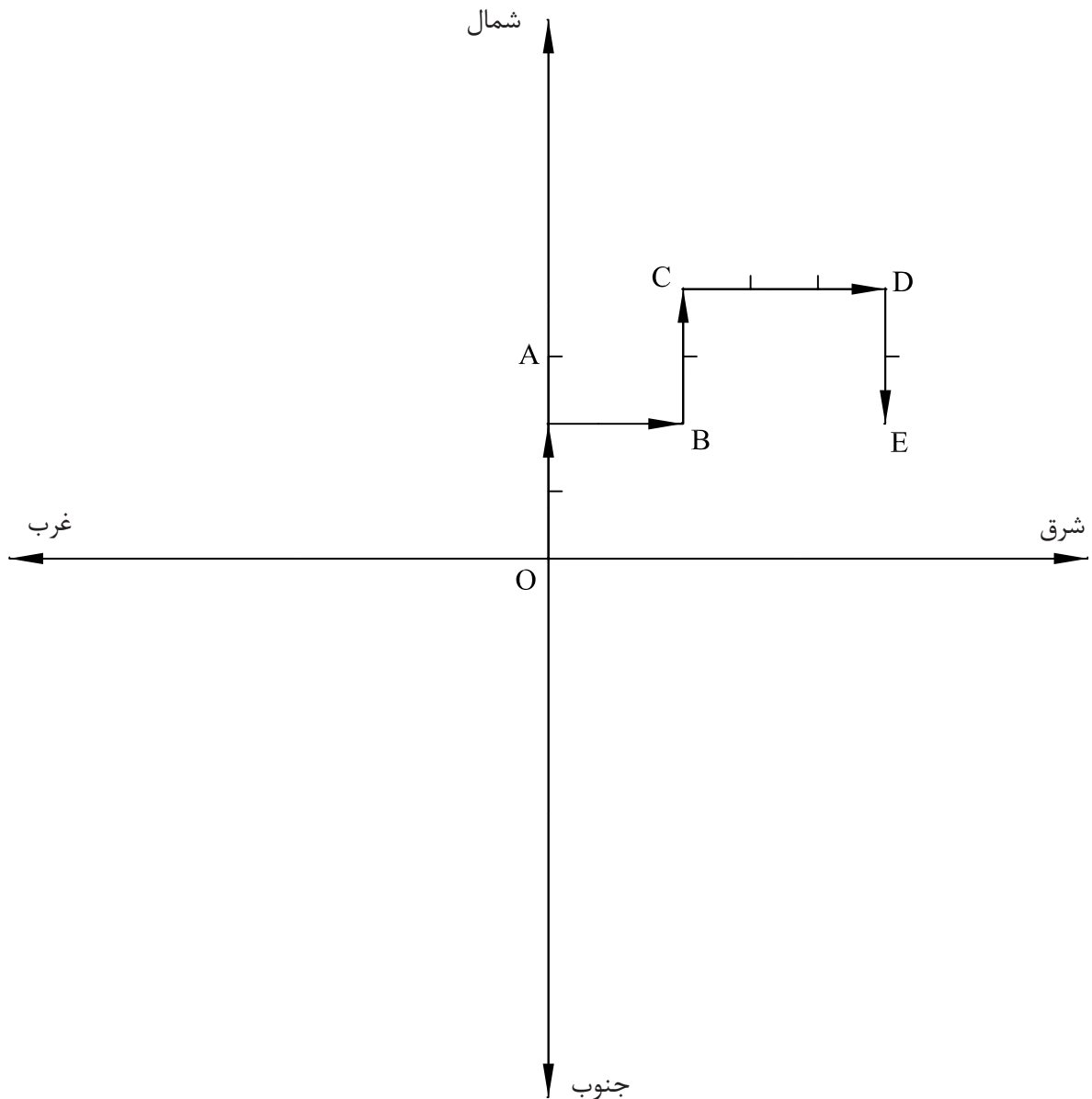
در نظر گرفته می شود.



شکل ۳-۴- نمایش جمع اسکالر مسیر پیموده شده به وسیله خودرو

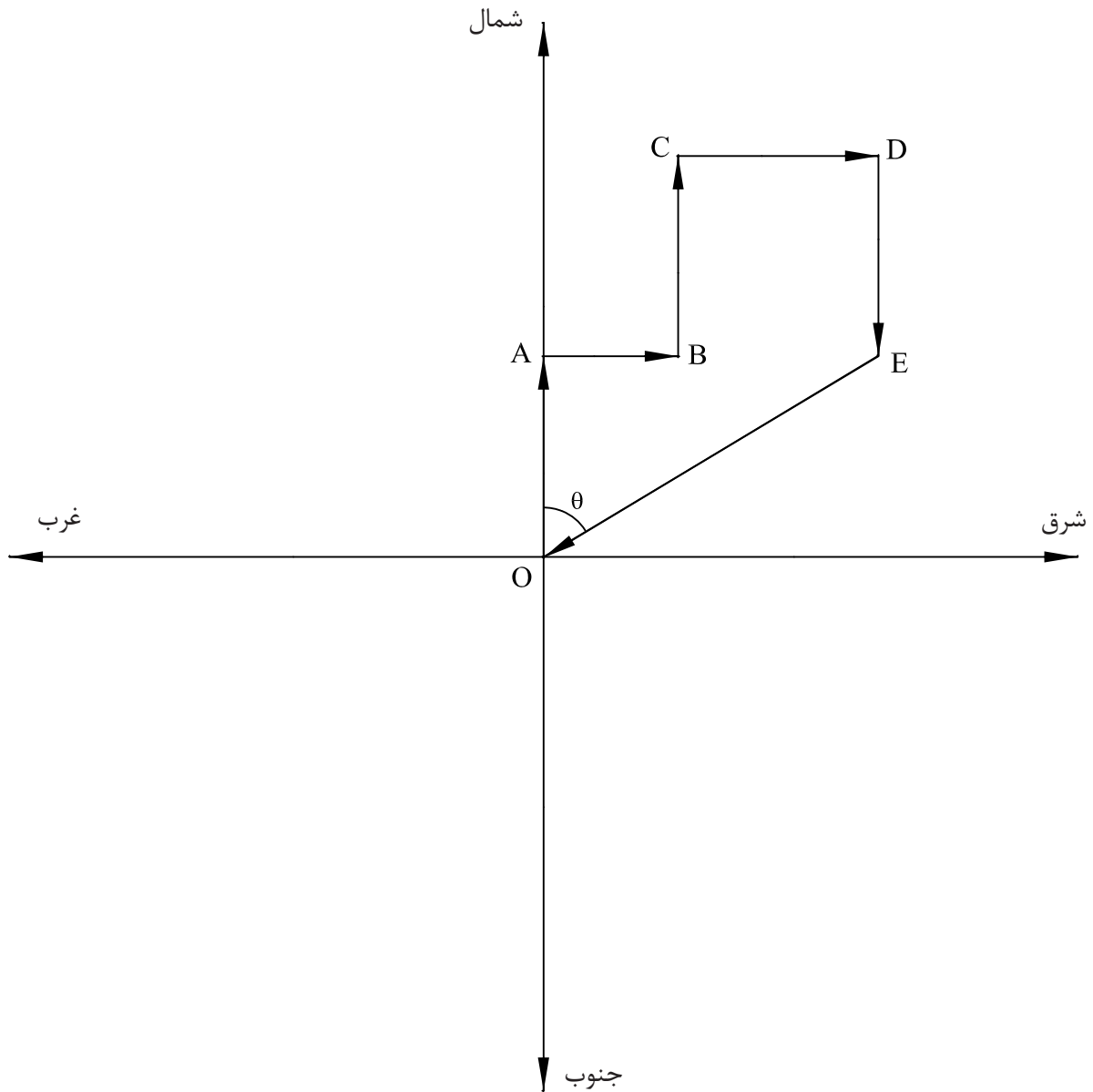
در جمع برداری هر کدام از مسیرها به عنوان یک جهت انتخاب می‌شود و انتهای هر مسیر با یک پیکان علامت گذاری می‌شود. حال هر مسیر با یک بردار نشان داده شده است و سر (یا نوک) هر بردار به دُم (یا ته) بردار بعدی وصل می‌شود (مطابق شکل ۳-۵).

بنابراین بردارهای  $\vec{OA}$ ،  $\vec{AB}$ ،  $\vec{BC}$ ،  $\vec{CD}$  و  $\vec{DE}$  نمایش داده می‌شوند.



شکل ۳-۵- نمایش برداری مسیر پیموده شده به وسیله خودرو

ملاحظه می‌شود نقطه E پایان جابه‌جا شدن خودرو می‌باشد و در این فعالیت جابه‌جا شدن واقعی خودرو از نقطه O به نقطه E بوده است. اکنون اگر با رسم یک بردار نقطه O به نقطه E وصل شود بردار  $\vec{OE}$  به دست می‌آید. بردار  $\vec{OE}$  به بردار برآیند یا برآیند هر پنج بردار  $\vec{OA}$ ،  $\vec{AB}$ ،  $\vec{BC}$ ،  $\vec{CD}$  و  $\vec{DE}$  موسوم است (شکل ۳-۶).



شکل ۳-۶ - نمایش بردار برآیند  $\vec{OE}$

مقدار بردار  $\vec{OE}$  با استفاده از رابطه  $OE^2 = OA^2 + AE^2$ :

$$OE = \sqrt{(\Delta)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ km}$$

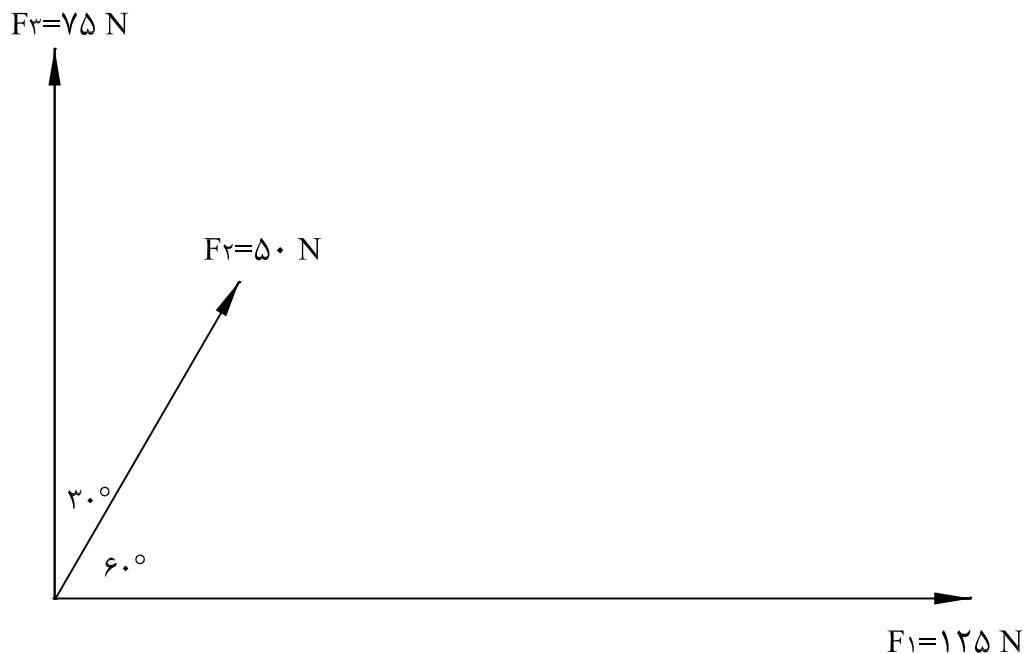
جابه‌جایی واقعی خودرو از نقطه O به نقطه E مساوی 7.07 کیلومتر است. ولی بردار دارای مؤلفه جهت نیز می‌باشد. برای تعیین جهت بردار  $\vec{OE}$  کافی است زاویه  $\theta$  تعیین شود. البته به غیر از روش محاسبه می‌توان با استفاده از نقاله اندازه زاویه  $\theta$  را تعیین کرد. ولی در روش محاسبه می‌توان از روابط سینوس و یا تانژانت در مثلث قائم‌الزاویه OAE استفاده کرد. اگر از روش تانژانت استفاده شود می‌توان نوشت:

$$\tan \theta = \frac{AE}{OA} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1 = \tan 45^\circ$$

لذا نتیجه گرفته می‌شود:

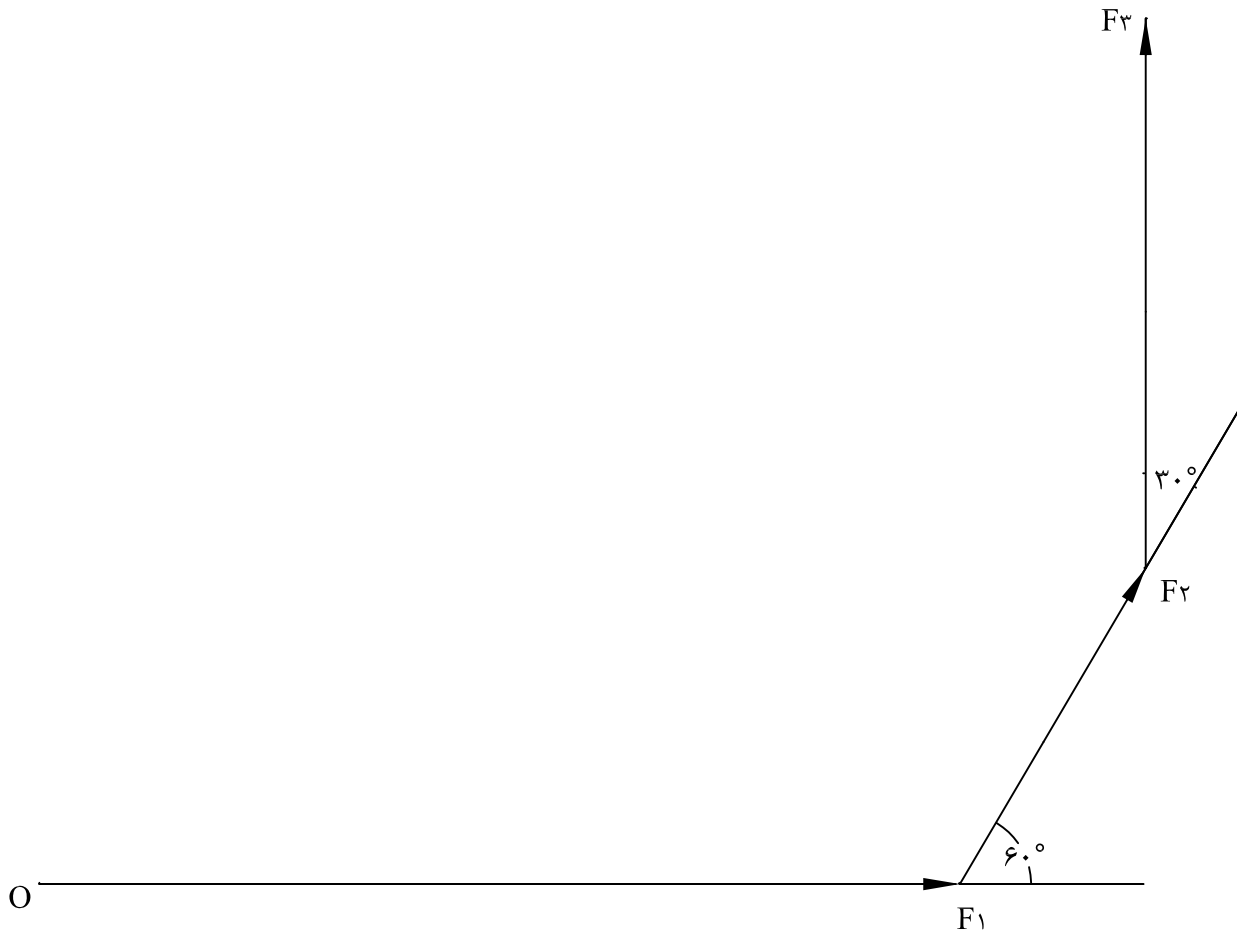
زاویه بردار  $\vec{OE}$  نسبت به محور شمال (y) 45 درجه است. جابه‌جایی واقعی خودرو 7.07 کیلومتر به سمت شمال شرق (تحت زاویه 45 درجه با محور X و همچنین با محور y) می‌باشد.

مثال 1: با استفاده از روش ترسیمی مقدار و جهت بردار برآیند ( $\vec{R}$ ) سه نیروی شکل 3-7 را تعیین کنید.



شکل 3-7

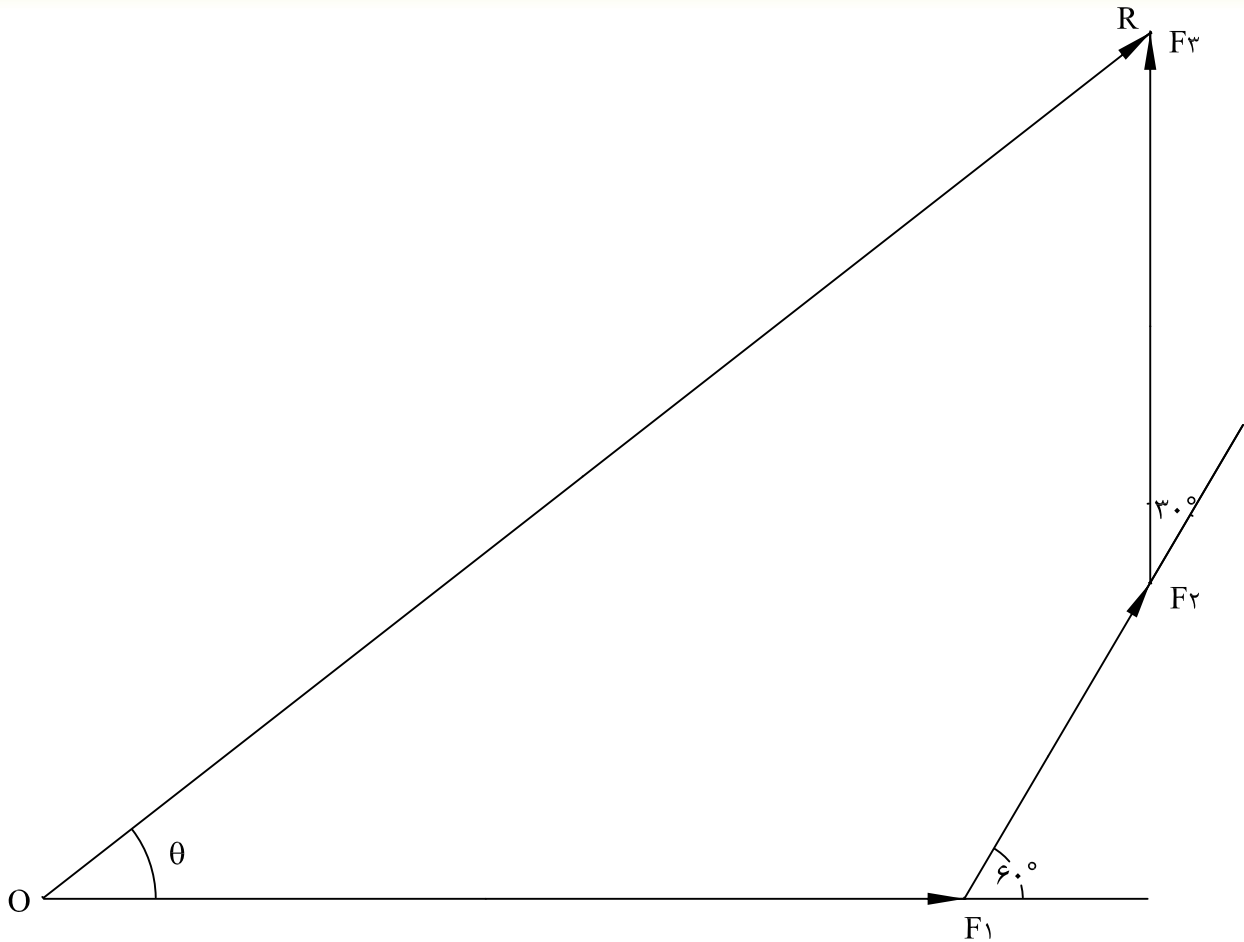
برای نشان دادن رسم بردارها هر یک سانتی متر از طول بردار را مساوی ۱۰ نیوتون قرار داده و بردارها مطابق شکل ۳-۸ رسم می شوند.



شکل ۳-۸ - ترسیم برداری نیروهای شکل ۳-۷

با رسم برداری از نقطه O طوری که سر بردار به نوک بردار  $F_p$  وصل شود بردار برآیند ( $\vec{R}$ ) به دست می آید (شکل ۳-۹).

با تقسیم پاره خط نشان دهند بردار R به قطعات یک سانتی متری و ضرب عدد حاصل در ۱۰ نیوتون مقدار R به دست می آید. زاویه  $\theta$  با استفاده از نقاله اندازه گیری می شود.



شکل ۳-۹- نمایش بردار R (برآیند نیروهای  $F_1$ ،  $F_2$  و  $F_3$ )

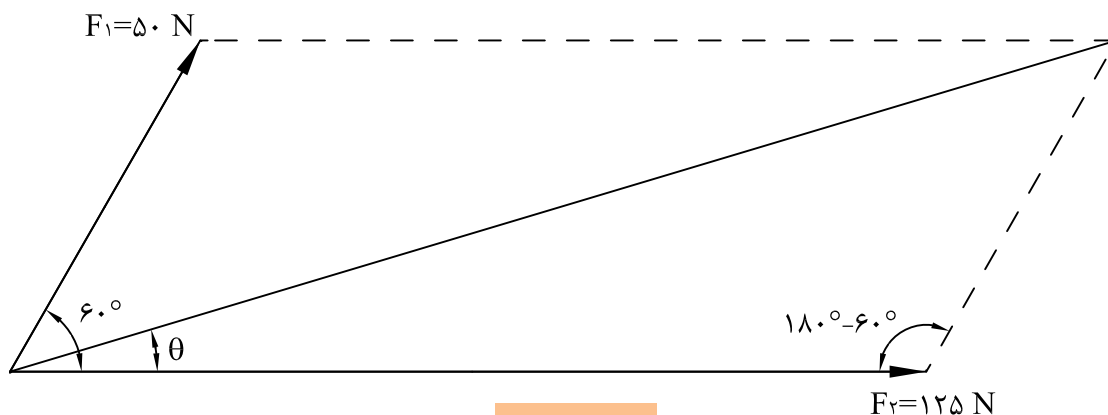
روش دوم برای تعیین برآیند سه نیرو استفاده از روش متوازی الاضلاع است. در این روش ابتدا مطابق شکل ۳-۱۰ برآیند دو نیروی  $F_1$  و  $F_2$  با استفاده از قانون کسینوس تعیین می‌شود.

مقدار قطر متوازی الاضلاع مساوی برآیند دو نیروی  $F_1$  و  $F_2$  است. این برآیند را می‌توان با  $R_{1,2}$  نشان داد.

$$\begin{aligned} R_{1,2}^2 &= F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - 60^\circ) \\ &= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 60^\circ \\ &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{(125)^2 + (50)^2 + 2(125)(50)(0.5)} \\ R_{1,2}^2 &= 156N \end{aligned}$$

اندازه زاویه  $\theta$  (در واقع زاویه بردار  $R$  با محور  $x$  ها) با استفاده از قانون سینوس به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{F_r}{R} \sin (180^\circ - 60^\circ) = \frac{F_r}{R} \sin 60^\circ = \frac{150}{156} (0.866) \\ &= 0.27756 \\ \theta &\approx 16^\circ \end{aligned}$$



شکل ۱۰-۳

حال با استفاده از بردار  $R_{1,2}$  (برآیند بردارهای  $F_1$  و  $F_2$ ) که با محور  $x$  دارای زاویه  $16^\circ$  درجه است و بردار  $F_p$  که با بردار  $R_{1,2}$  زاویه  $30^\circ$  درجه می‌سازد متوازی‌الاضلاعی تشکیل می‌دهیم (شکل ۱۱-۳). اندازه  $R$  با استفاده از روش قبلی عبارت است از:

$$\begin{aligned} R^2 &= R_{1,2}^2 + F_p^2 - 2R_{1,2}F_p \cos (180^\circ - 30^\circ) \\ R^2 &= R_{1,2}^2 + F_p^2 - 2R_{1,2}F_p \cos 30^\circ \\ R &= \sqrt{(156)^2 + (75)^2 - 2(156)(75)(0.866)} \\ R &= 224 \text{ N} \end{aligned}$$

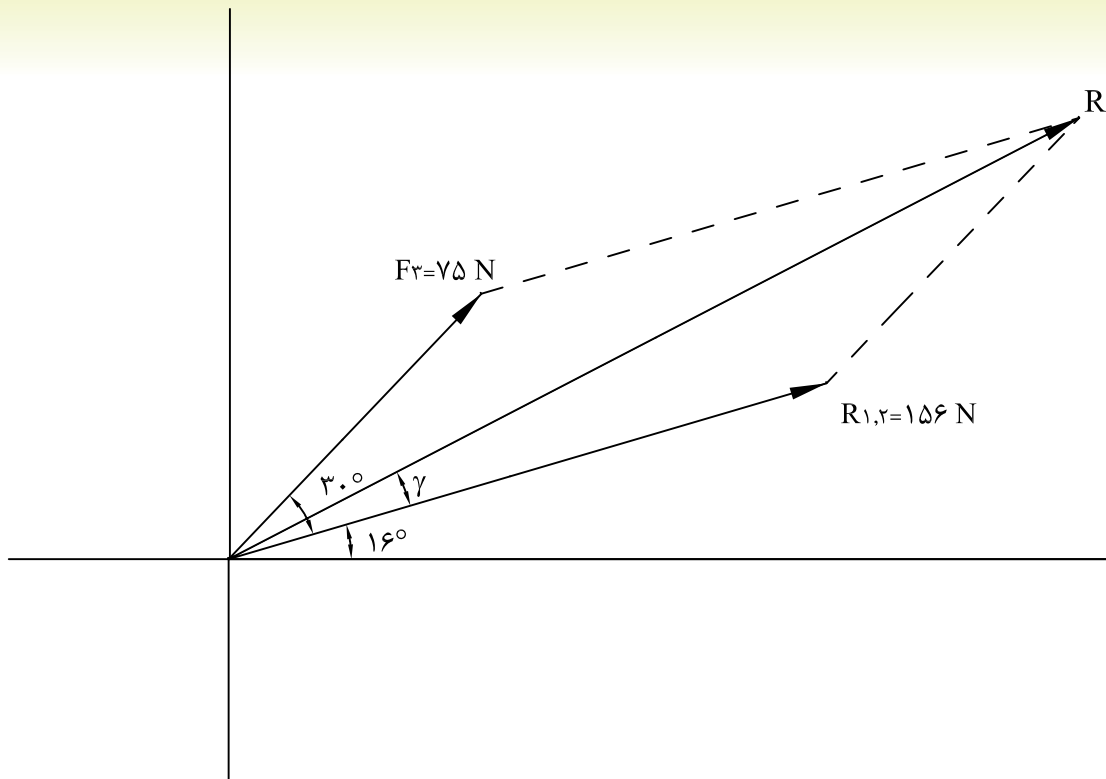
$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{F_p}{R} \sin (180^\circ - 30^\circ) \\ &= \frac{75}{224} \sin 30^\circ \\ &= \frac{75(0.5)}{224} = 0.1674 \\ \gamma &\approx 9.6^\circ \end{aligned}$$

و برای تعیین زاویه  $\gamma$ :

بنابراین برآیند سه نیروی  $F_1$ ،  $F_2$  و  $F_p$  برداری است به بزرگی 224 N که با محور  $x$  ها زاویه  $16^\circ + 9.6^\circ$  یا  $25.6^\circ$

می‌سازد.

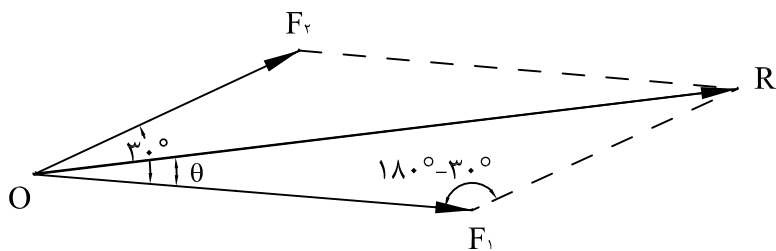




شکل ۳-۱۱ نمایش  $F_r$ ،  $R_{1,2}$  و برآیند آنها ( $\vec{R}$ )

مثال ۲: مطابق شکل ۳-۱۲ چنانچه  $F_1 = 40\text{ N}$  و  $F_2 = 20\text{ N}$  و  $\alpha = 30^\circ$  باشد اندازه بردار برآیند و جهت آن چقدر است؟

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 30^\circ} \\
 &= \sqrt{40^2 + 20^2 + 2(40)(20)(0.866)} \\
 &= 58.12\text{ N} \\
 \theta &\approx 9^\circ
 \end{aligned}$$



شکل ۳-۱۲

مثال ۳: مطابق شکل ۱۳-۳ برآیند سه نیروی  $F_1$ ،  $F_2$  و  $F_3$  را تعیین کنید. هر کدام از بردارهای شکل ۱۳-۳ دارای مؤلفه‌های معادل در دستگاه مختصات  $x$  و  $y$  هستند. مثلاً  $F_1$  دارای مؤلفه‌های  $(F_1)_x$  و  $(F_1)_y$  است.

برآیند نیروها را در محورهای  $x$  و  $y$  می‌توان به طریق زیر نوشت:

$$R_x = \sum F_x = (F_1)_x + (F_2)_x + (F_3)_x + \dots$$

$$R_y = \sum F_y = (F_1)_y + (F_2)_y + (F_3)_y + \dots$$

برآیند  $R$  (جمع برداری  $R_x$  و  $R_y$ ) با استفاده از قضیه فیثاغورت به دست می‌آید.

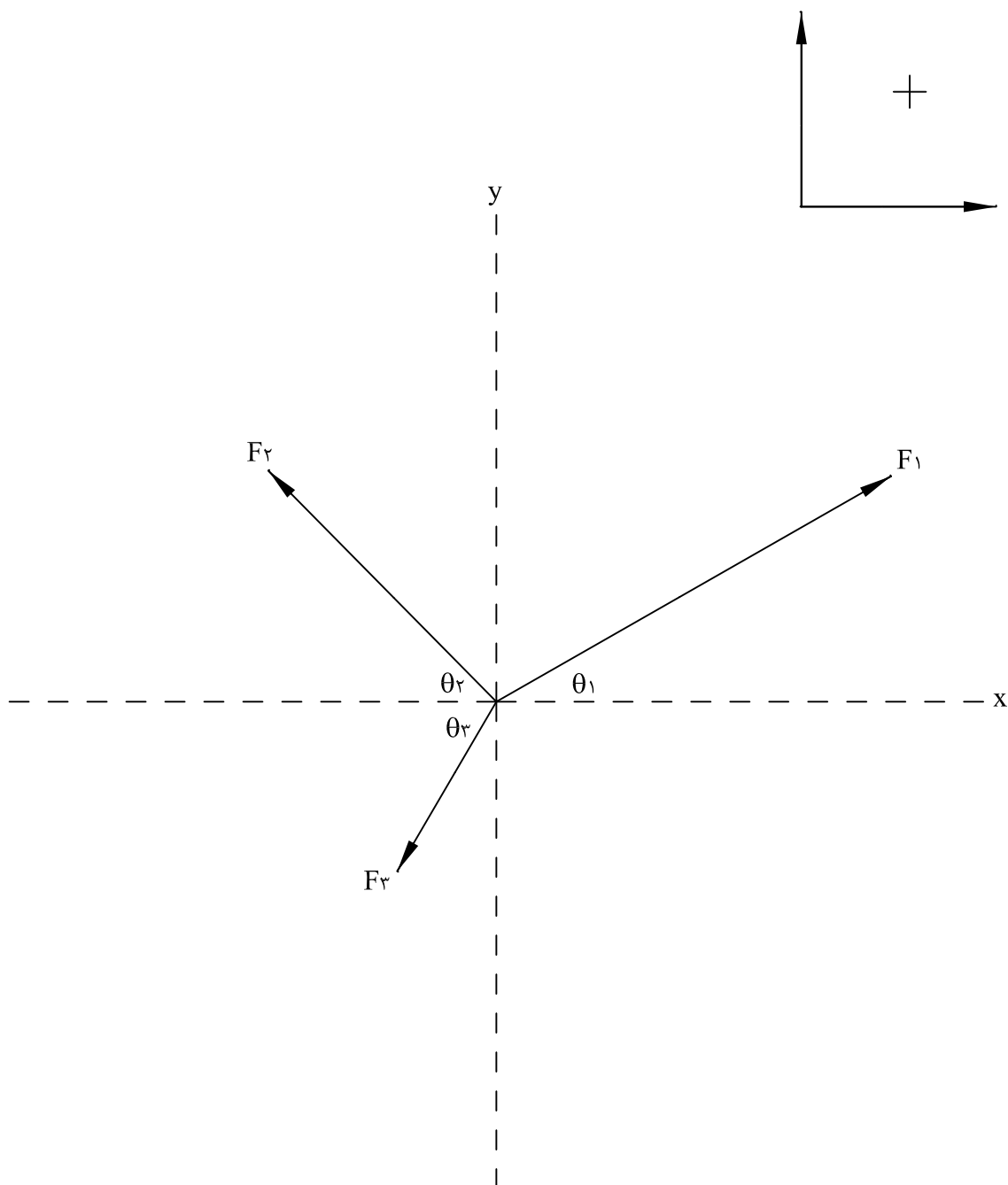
$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

تانژانت زاویه‌ای که برآیند  $R$  با محور  $x$  به وجود می‌آورد عبارت است از:

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\sum F_x}{\sum F_y}$$

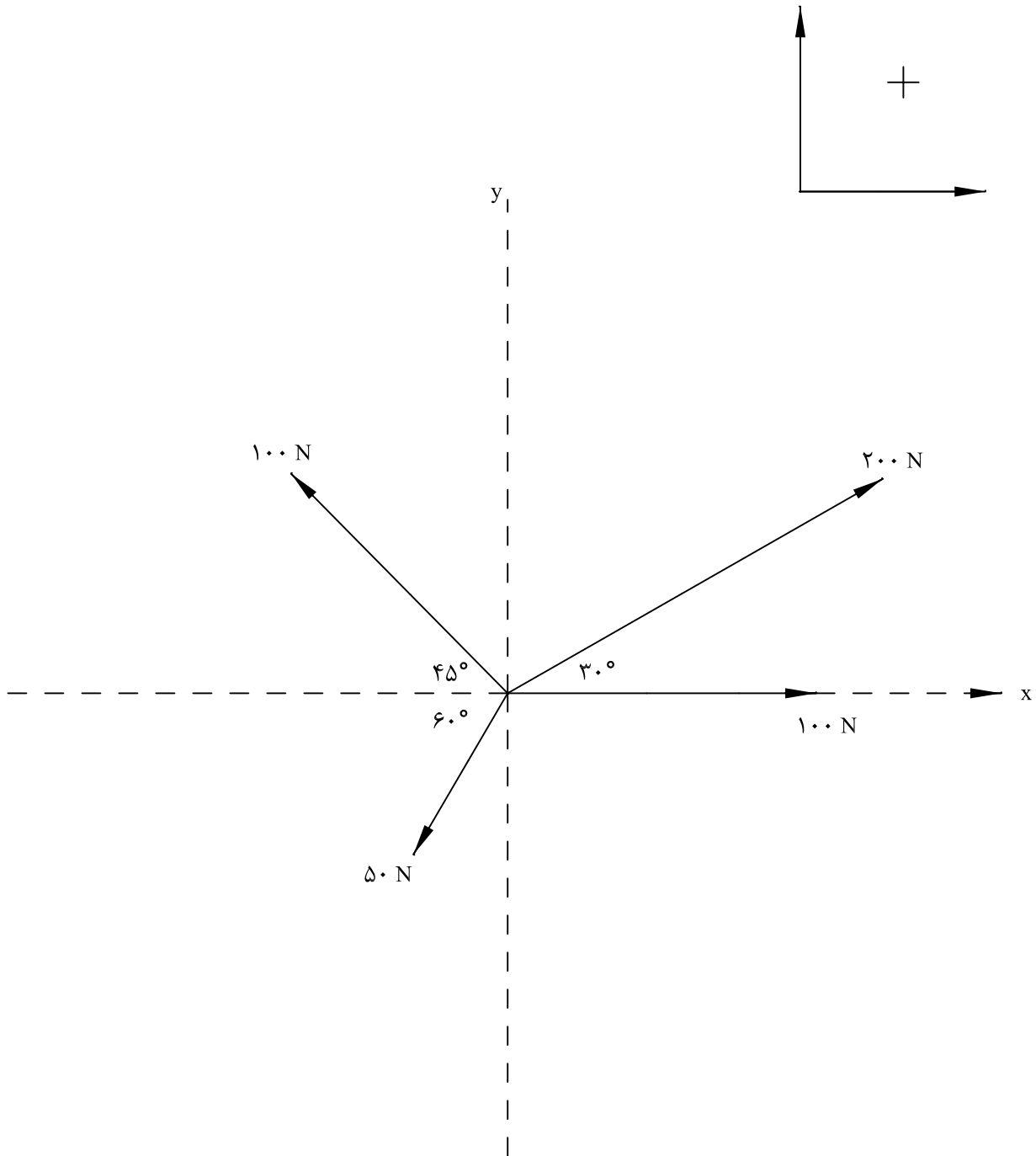
مطابق قرارداد در شکل ۱۳-۳ برای مؤلفه‌های  $x$  به طرف راست و مؤلفه‌های  $y$  به طرف بالا مقادیر مثبت در نظر گرفته می‌شود.





شکل ۳-۱۳

مثال ۴: برآیند نیروهای شکل ۳-۱۴ را تعیین کنید.



شکل ۳-۱۴

$$R_x = \Sigma F_x = +100 + 200 \cos 30^\circ - 100 \cos 45^\circ - 50 \cos 60^\circ$$

$$R_x = +100 + 173/2 - 70/2 - 25$$

$$R_x = +177/2 \text{ N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = +200 \sin 30^\circ + 100 \sin 45^\circ - 50 \sin 60^\circ$$

$$R_y = +100 + 70/2 - 43/2 = +127/2 \text{ N}$$

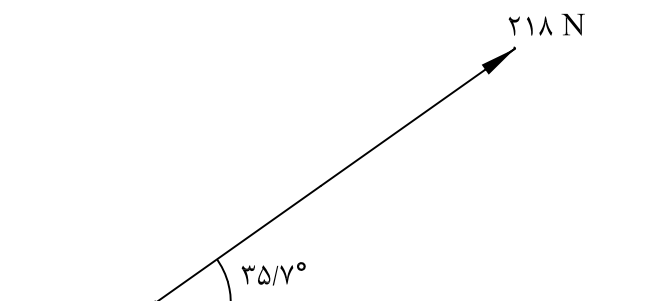
$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

$$= \sqrt{(177/2)^2 + (127/2)^2}$$

$$= \sqrt{47700} = 218 \text{ N}$$

$$\theta = \arctan \frac{R_y}{R_x} = \arctan \frac{127/2}{177/2} = 35/7^\circ$$

بنابراین نیروی R را می توان به صورت شکل ۱۵-۳ نشان داد.



شکل ۱۵-۳ نمایش بردار برآیند مثال ۴

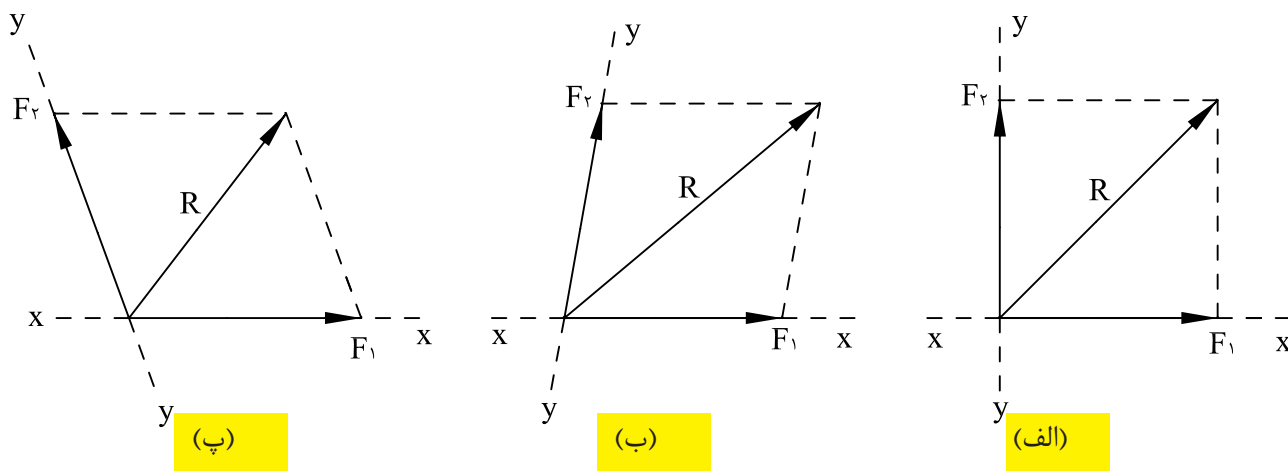
### ۳-۳ - تفریق برداری

مطابق تعریف، اگر جهت بردار معینی ۱۸۰ درجه تغییر کند، مقدار بردار با علامت منفی نشان داده می شود. بنابراین اگر جهت اولیه مثبت باشد بردار منفی می شود و اگر جهت اولیه منفی باشد بردار مثبت می شود. برای تفریق بردار معینی مانند  $\vec{F}_r$  از بردار معین دیگری مانند  $\vec{F}_l$  می توان نوشت:

$$\vec{R} = \vec{F}_l - \vec{F}_r = \vec{F}_l + (-\vec{F}_r)$$

### ۳-۴ - مؤلفه‌های یک بردار

تاکنون ملاحظه شد چگونه دو (و یا چند) بردار مانند بردارهای  $A$  و  $B$  بردار برآیند  $R$  را به وجود می‌آورند. عکس آن هم صادق است. یعنی می‌توان برداری مانند بردار  $R$  را با دو (و یا چند) بردار مانند بردارهای  $A$  و  $B$  که مجموعاً معادل بردار  $R$  می‌شوند جانشین کرد، در این حالت دو بردار  $A$  و  $B$  «مؤلفه‌های برآیند» یا به سادگی «مؤلفه» نامیده می‌شوند. با توجه به این که هر مؤلفه یک بردار محسوب می‌شود لذا هر مؤلفه را هم می‌توان برابر چندین بردار که مجموعاً معادل آن می‌شوند فرض نمود. بنابراین برداری مانند بردار  $R$  را می‌توان برآیند یا جمع تعداد زیادی بردار (حتی بی‌نهایت بردار) فرض کرد. برای مثال در شکل ۱۶-۳ بردار  $R$  که دارای مؤلفه‌های  $F_1$  و  $F_2$  در شرایط گوناگون است نشان داده شده است. در موارد (ب) و (پ) مؤلفه‌های  $F_1$  و  $F_2$  مؤلفه‌های متوازی‌الاضلاع نام دارند و در مورد (الف) مؤلفه‌های  $F_1$  و  $F_2$  بر محور  $x$  و  $y$  ها منطبق و بر هم عمودند که به مؤلفه‌های عمودی یا مستطیلی موسومند.

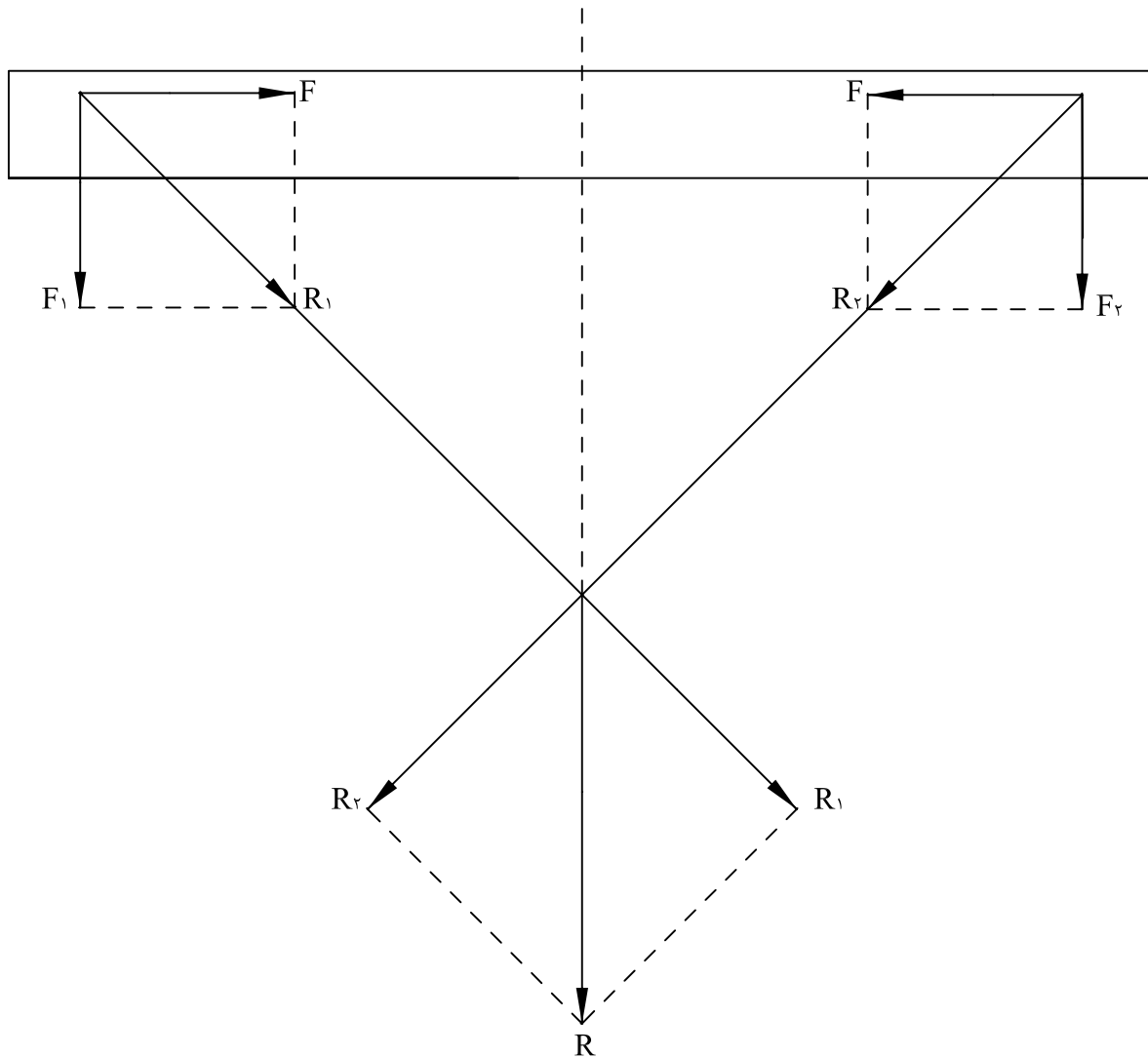


شکل ۱۶-۳

### ۳-۵ - برآیند دو نیروی موازی

دو نیرو که دارای یک خط اثر مشترک هستند به نیروهای هم‌خط موسومند. برآیند دو نیروی هم‌خط که با هم مساوی بوده ولی در دو جهت مخالف هستند برابر با صفر است.

بنابراین چنانچه مطابق شکل ۱۷-۳ دو نیروی هم‌خط  $F$  به نیروهای موازی  $F_1$  و  $F_2$  اضافه شود، سیستم نیروها تغییر نمی‌کند و برآیند دو نیروی  $F$  و  $F_1$  برداری مانند  $R_1$  و برآیند دو نیروی  $F$  و  $F_2$  برداری مانند  $R_2$  خواهد بود. برآیند  $R_1$  و  $R_2$  بردار  $R$  می‌باشد. بردار  $R$  معادل بردارهای  $F_1$  و  $F_2$  است. بهترین روش برای حل این گونه مسائل استفاده از روش ترسیمی است.



شکل ۳-۱۷

### ۳-۶ - گشتاور یا ممان نیرو

چنانچه یک نیرو تمایل داشته باشد تا جسمی را به حول یک محور معین بچرخاند گشتاور (یا ممان نیرو) به حول آن محور معین به وجود می‌آید. اندازه گشتاور عبارت است از حاصل ضرب نیرو در فاصله بین خط اثر نیرو تا محور چرخش. در شکل ۳-۱۸ حاصل ضرب  $F$  و  $d$  مساوی اندازه گشتاور  $M$  می‌باشد. از آن جا که گشتاور تمایل دارد تا جسم به گردش درآید، از علامت مثبت (+) و منفی (-) برای نشان دادن جهت چرخش استفاده می‌شود. در این کتاب چنانچه حاصل ۶۳

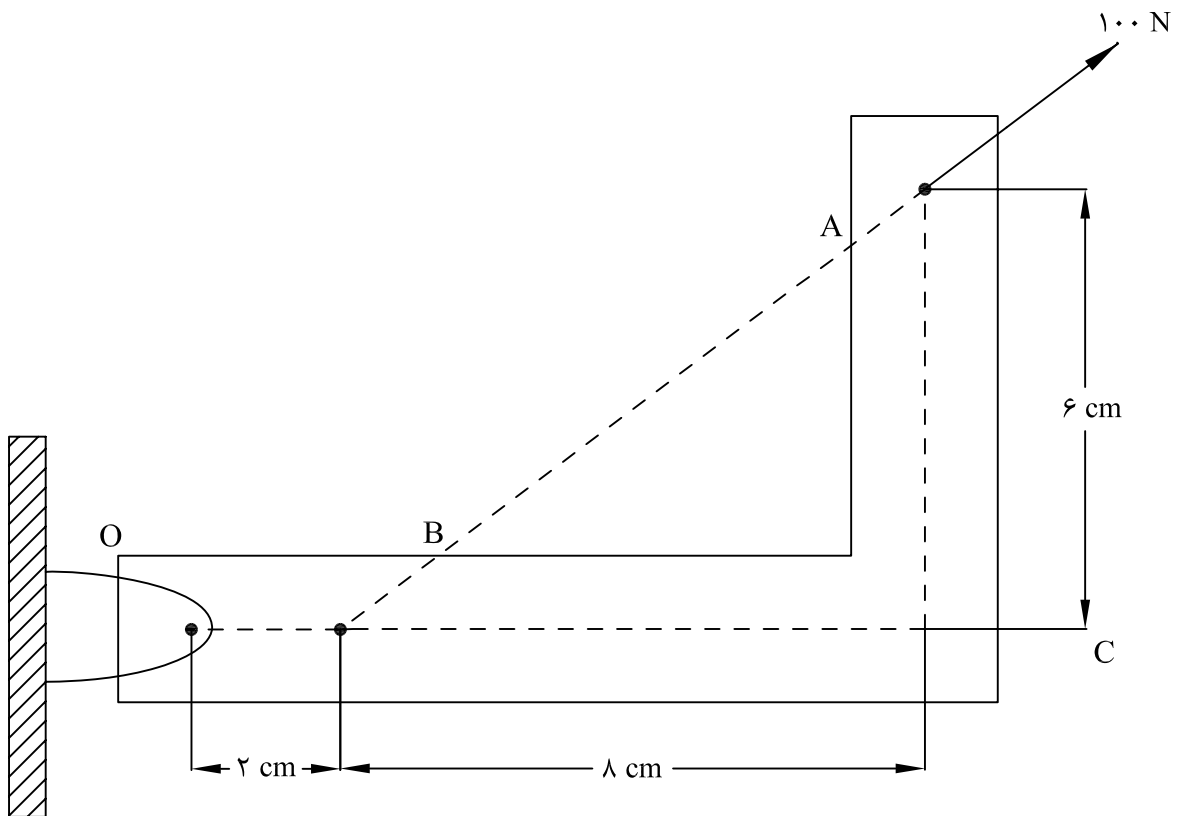
عملکرد گشتاور در جهت عقربه ساعت باشد از علامت منفی و در صورتی که در جهت خلاف حرکت عقربه ساعت باشد از علامت مثبت استفاده می‌شود.

مثال: در شکل ۳-۱۸ نیروی ۱۰۰ نیوتون در نقطه A بر یک لچکی وارد می‌شود طوری که گشتاوری به حول نقطه O به وجود می‌آید. اندازه گشتاور را به شرح زیر تعیین کنید:

(۱) با حاصل ضرب نیرو در فاصله عمودی بین نیرو تا نقطه O

(۲) با تعیین گشتاورهای مؤلفه‌های نیرو در نقطه A

(۳) با تعیین گشتاورهای مؤلفه‌های نیرو در نقطه B



شکل ۳-۱۸

حل:

(۱) شرایط موجود در شکل ۳-۱۸ را به صورت شکل ۳-۱۹ رسم می‌کنیم. به این ترتیب حل مثال به سهولت انجام می‌شود.

فاصله AB عبارت است از اندازه وتر در مثلث راست گوشه ACB یا

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$$

۶۴ ضلع OE در مثلث OBE بر ضلع EB عمود است و در مثلث‌های ACB و OEB با هم متشابه‌اند. لذا از نسبت اندازه



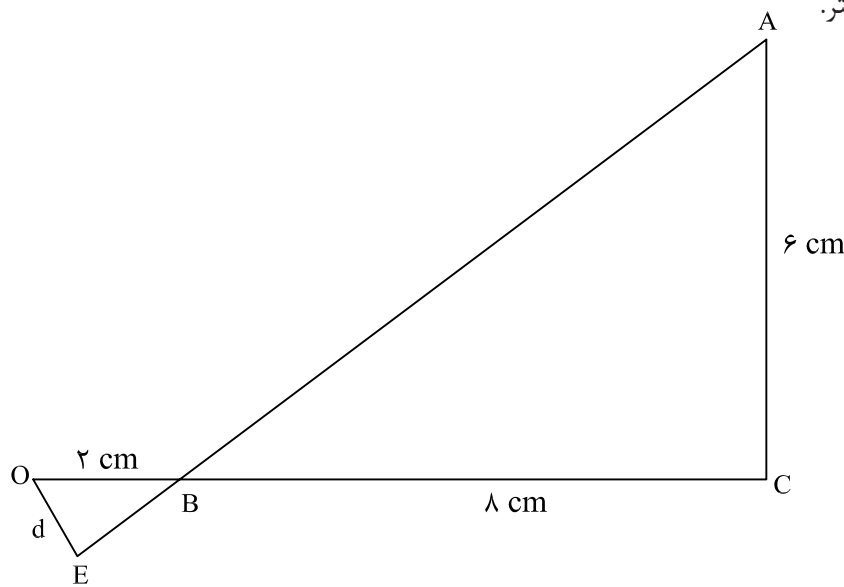
ضلع‌های متشابه استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم (OE) که با فاصله d نشان داده می‌شود فاصله خط اثر نیرو تا نقطه O می‌باشد)

$$\frac{OE}{OB \text{ (وتر)}} = \frac{AC}{AB \text{ (وتر)}}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{6}{10}$$

$$d = 1/2 \text{ cm}$$

اندازه گشتاور حاصل از نیروی ۱۰۰ نیوتونی به حول نقطه O عبارت می‌شود از حاصل ضرب نیروی ۱۰۰ نیوتون در فاصله ۱/۲ سانتی‌متر.



شکل ۱۹-۳

$$M = Fd = 100 \cdot (1/2) = 120 \text{ N cm}$$

(۲) مؤلفه‌های نیروی ۱۰۰ نیوتونی F عبارت می‌شوند از:

$$F_x = F \cos \theta \quad \text{مؤلفه نیروی F در راستای x}$$

$$F_y = F \sin \theta \quad \text{مؤلفه نیروی F در راستای y}$$

کسینوس  $\theta$  مساوی است با ضلع مجاور به وتر در مثلث ACB یا  $\frac{8}{10}$  یا  $\frac{4}{5}$ . سینوس  $\theta$  مساوی است با ضلع مقابل به وتر در مثلث ACB یا  $\frac{6}{10}$  یا  $\frac{3}{5}$ . بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$F = F \cos \theta = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = 80 \text{ N}$$

$$F = F \sin \theta = 100 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = 60 \text{ N}$$

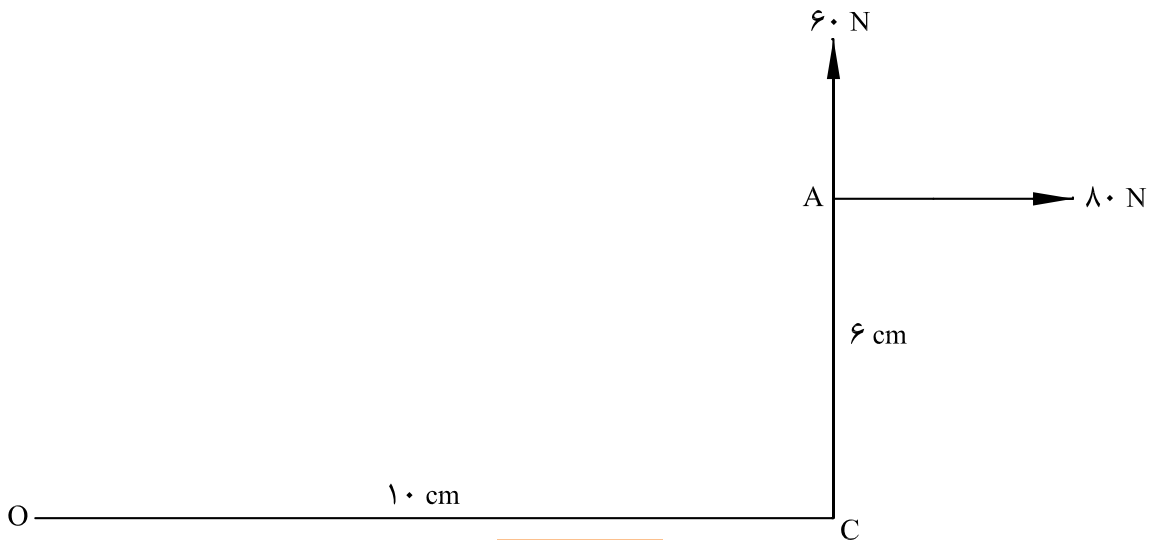
نمایش این نیروها مطابق شکل ۲۰-۳ می‌باشد.

ملاحظه می‌شود فاصله عمودی نیروی ۶۰ نیوتونی از نقطه O برابر ۱۰ سانتی‌متر و فاصله عمودی نیروی ۸۰ نیوتونی ۶۵

از نقطه O برابر ۶ سانتی متر است.

با توجه به این که گشتاور حاصل از نیروی ۶۰ نیوتونی خلاف جهت عقربه ساعت و گشتاور حاصل از نیروی ۸۰ نیوتونی

موافق جهت عقربه ساعت به وجود می آیند، می توان نوشت:  $M = ۱۶۰ (۱۰) - ۸۰ (۶) = ۶۰۰ - ۴۸۰ = +۱۲۰ \text{ Ncm}$



شکل ۳-۲۰

(۳) مؤلفه های x و y به طوری که در شکل ۳-۲۱ ملاحظه می شود در نقطه B هم عمل می کنند که در امتداد خط اثر

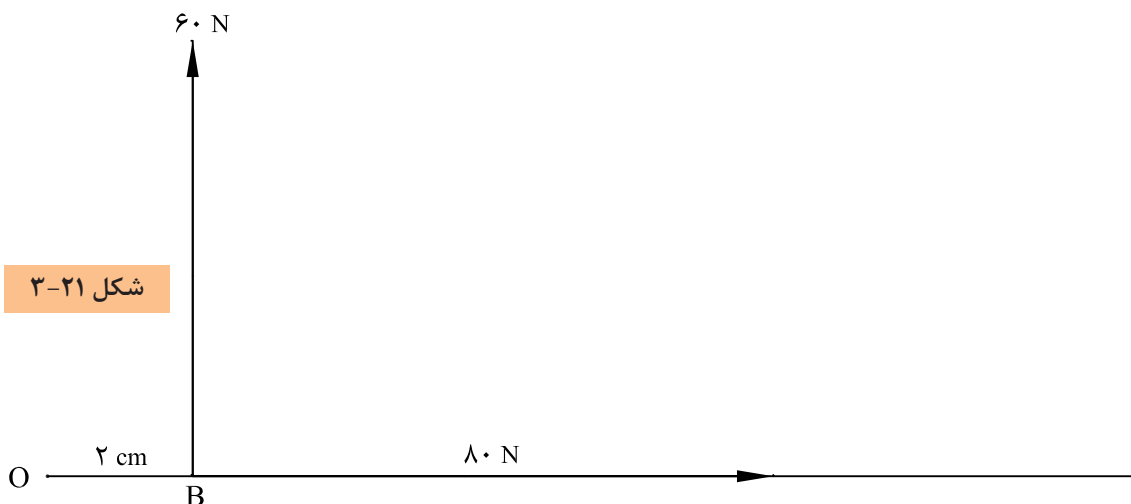
نیروی F است.

راستای نیروی ۸۰ N از نقطه O می گذرد لذا اندازه فاصله نقطه O تا نیروی مزبور مساوی با صفر است. حاصل ضرب

نیروی ۸۰ N در صفر برابر صفر است و اندازه گشتاور حاصل از این نیرو مساوی صفر می باشد.

اندازه گشتاور حاصل از نیروی ۶۰ N برابر است با:

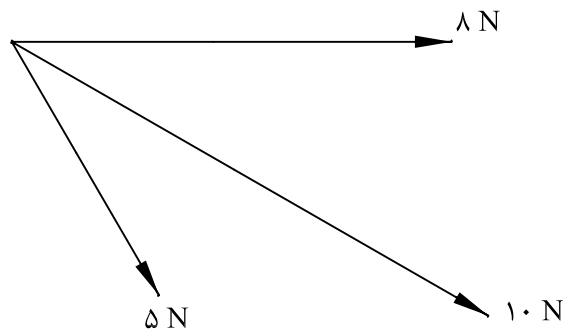
$$M = ۶۰ \text{ N} (۲ \text{ cm}) = ۱۲۰ \text{ Ncm}$$



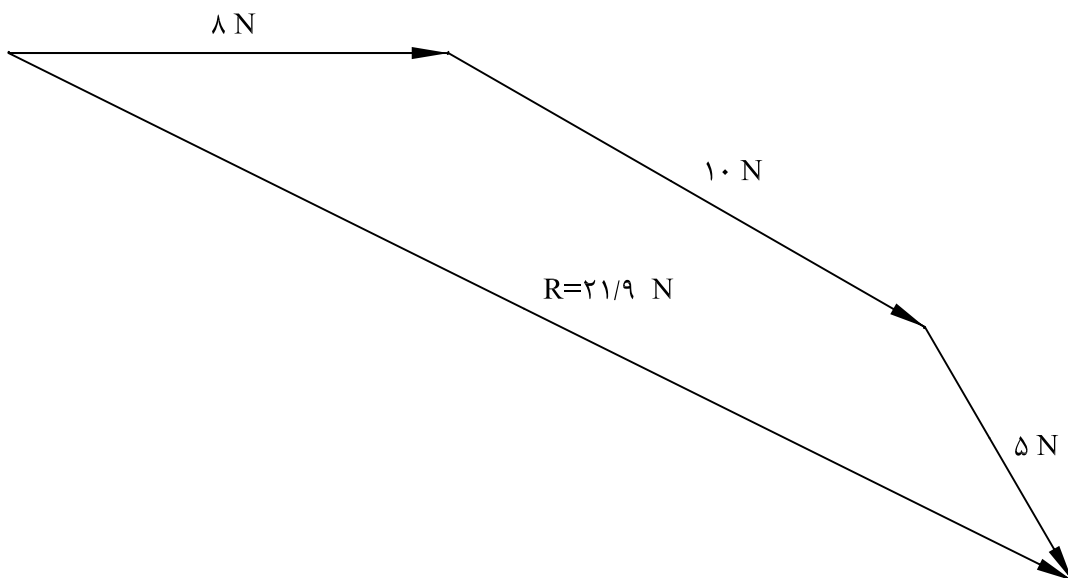
شکل ۳-۲۱

### ۷-۳- نیروی معادل (خشی کننده بر آیند نیروها)

فرض شود چند نیرو بر یک جسم وارد شده‌اند طوری که جسم از شرایط تعادل (Equilibrium) خارج شده است. حال اگر نیروای به تنهایی طوری بر جسم وارد شود که جسم در شرایط تعادل قرار گیرد به نیروی مزبور نیروی معادل (Equilibrant) گفته می‌شود. برای نمونه به سه نیروی شکل ۳-۲۲ توجه شود. برآیند این سه نیرو در شکل ۳-۲۳ نشان داده شده است. نیروای که می‌تواند خشی کننده برآیند  $R = ۲۱/۹ \text{ N}$  باشد نیروای است که می‌توان آن را با  $E$  نشان داد که جهت آن کاملاً مخالف  $R$  و اندازه آن برابر  $R$  است. یعنی  $E = -R$  یا  $E = -۲۱/۹ \text{ N}$

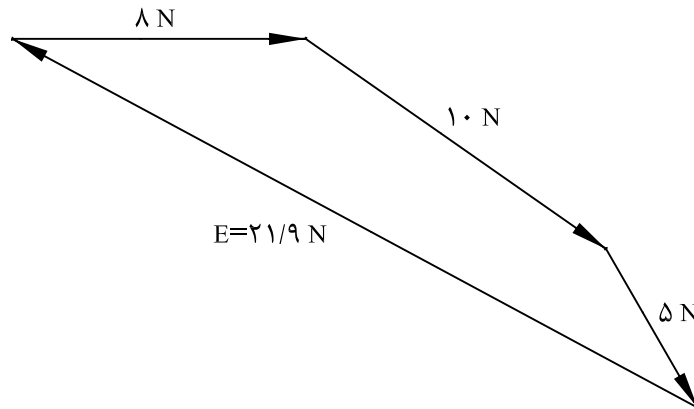


شکل ۳-۲۲ - نمایش سه نیرو در فضا



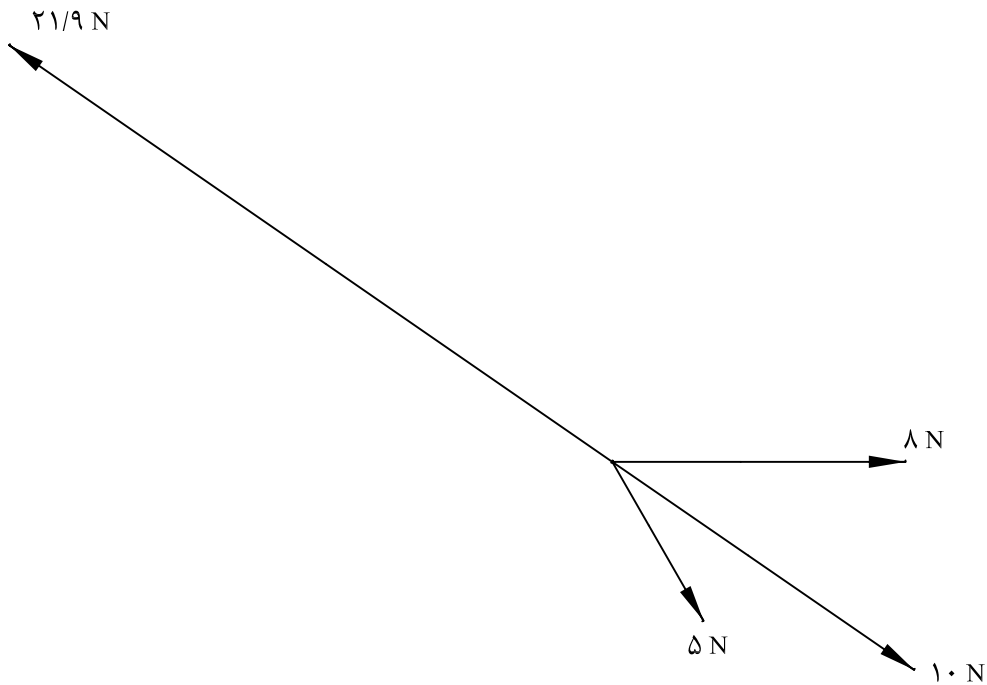
شکل ۳-۲۳ - نمایش برداری هر سه نیرو و برآیند آنها

نمایش برداری این نیرو در شکل ۳-۲۴ مشاهده می‌شود.



شکل ۳-۲۴- نمایش برداری هر سه نیرو و خنثی کننده برآیند آنها یا نیروی معادل

ملاحظه می‌شود نیروی  $E$ ، نیروی  $R$  و در واقع نیروهای  $8\text{ N}$  و  $10\text{ N}$  و  $5\text{ N}$  را خنثی می‌کند و جسم را در شرایط تعادل قرار می‌دهد. نیروی  $E$  را می‌توان به صورت شکل ۳-۲۵ نشان داد.



شکل ۳-۲۵- نمایش واقعی نیروی معادل یا خنثی‌ساز برآیند چند نیرو

### ۳-۸- روش‌های آسان حل مسائل برداری

برای حل مسائل برداری روش‌های آسانی وجود دارد. به این منظور ابتدا روش مثلث و روش چند ضلعی معرفی و سپس نحوه استفاده از آنها در حل مسائل برداری توضیح داده می‌شود.

#### ۳-۸-۱- روش مثلث

چنانچه سه نیرو در یک نقطه عمل کنند ولی در شرایط تعادل باشند نمودار برداری‌ای که به ترتیب نیروها را با اندازه و جهت آنها نشان دهد تشکیل یک مثلث می‌دهد.

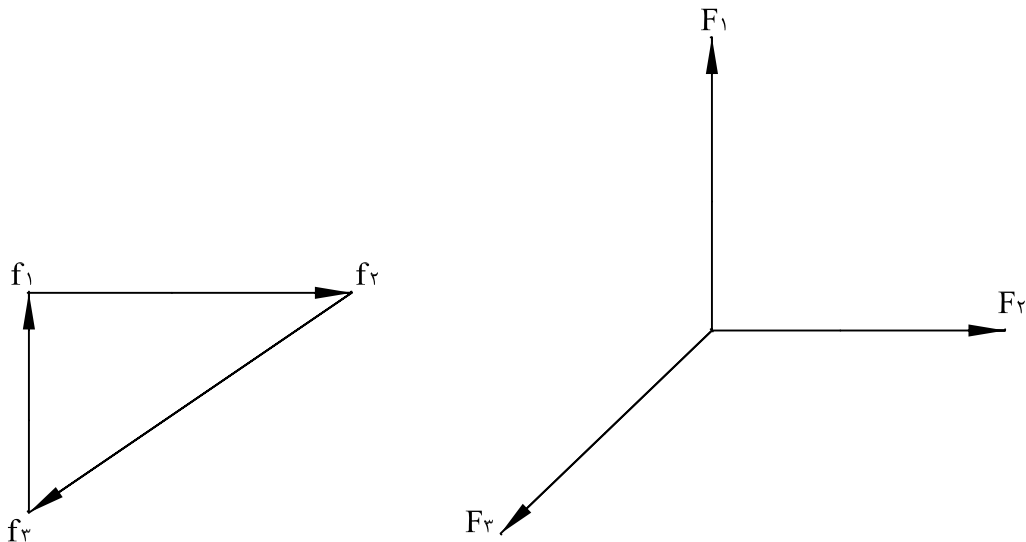
مثال: نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  و  $F_3$  در شکل ۳-۲۶ در شرایط تعادل قرار دارند. نمودار برداری آنها را رسم کنید.

راه حل:

بردار  $f_1$  را موازی با نیروی  $F_1$  رسم می‌کنیم. سپس از ابتدای  $f_1$  بردار  $f_2$  را موازی با  $F_2$  و از ابتدای  $f_2$  بردار  $f_3$  را موازی

با  $F_3$  رسم می‌کنیم.

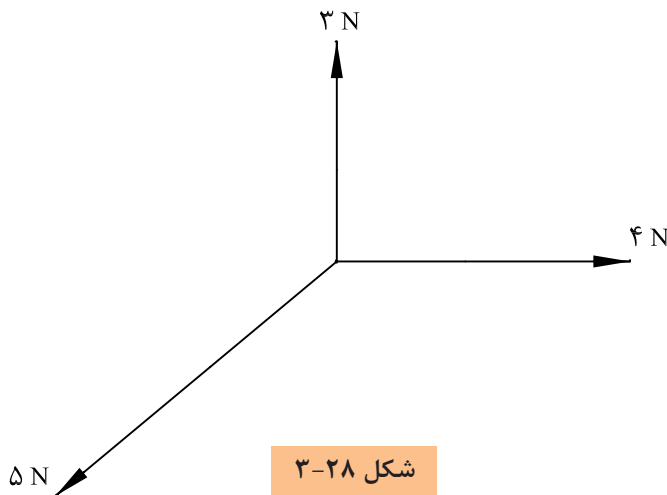
ملاحظه می‌شود که سه بردار  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_3$  تشکیل یک مثلث می‌دهند.



شکل ۳-۲۷ نمودار برداری

شکل ۳-۲۶

یادآوری می‌شود که این مثلث در صورتی تشکیل می‌شود که مانند این مثال نیروها در تعادل باشند.



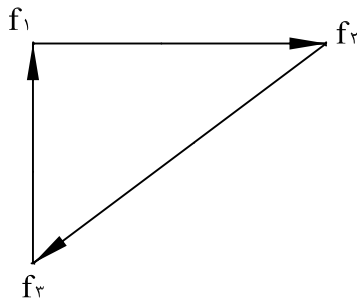
شکل ۳-۲۸

مثال: نیروهای  $3\text{ N}$ ،  $4\text{ N}$  و  $5\text{ N}$  مطابق شکل ۳-۲۸ در شرایط تعادل قرار دارند. نمودار برداری آنها را رسم کنید.

حل:

بردارهای  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_3$  را با استفاده از روشی که آموخته‌ایم با دقت (یک سانتی‌متر مساوی یک نیوتون) رسم می‌کنیم.

حاصل مثلث شکل ۳-۲۹ می‌باشد.



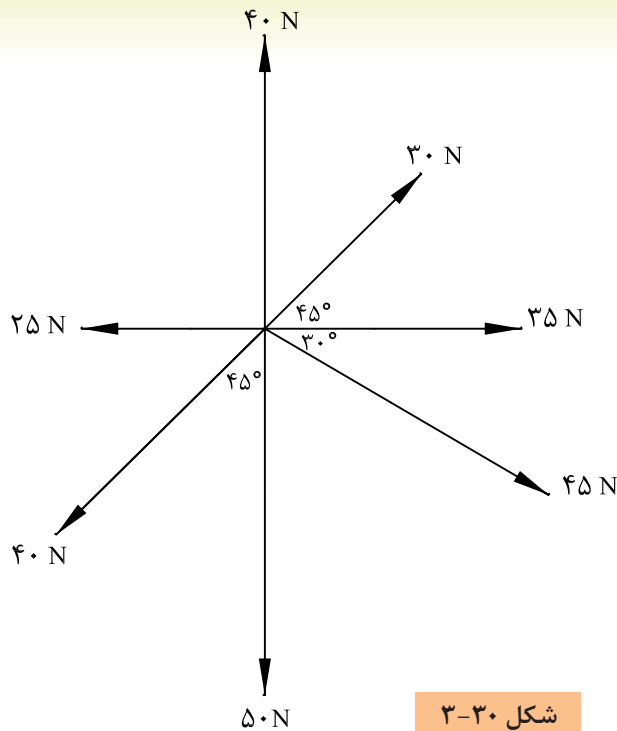
شکل ۳-۲۹

نکته مهم: با کمی دقت متوجه می‌شویم که در دو مثال فوق بردار  $f_3$  نشان‌دهنده نیروی معادل یا خنثی‌ساز برآیند دو نیروی دیگر است و به همین دلیل نیروها در شرایط تعادل قرار دارند.

### ۳-۸-۲ - روش چند ضلعی

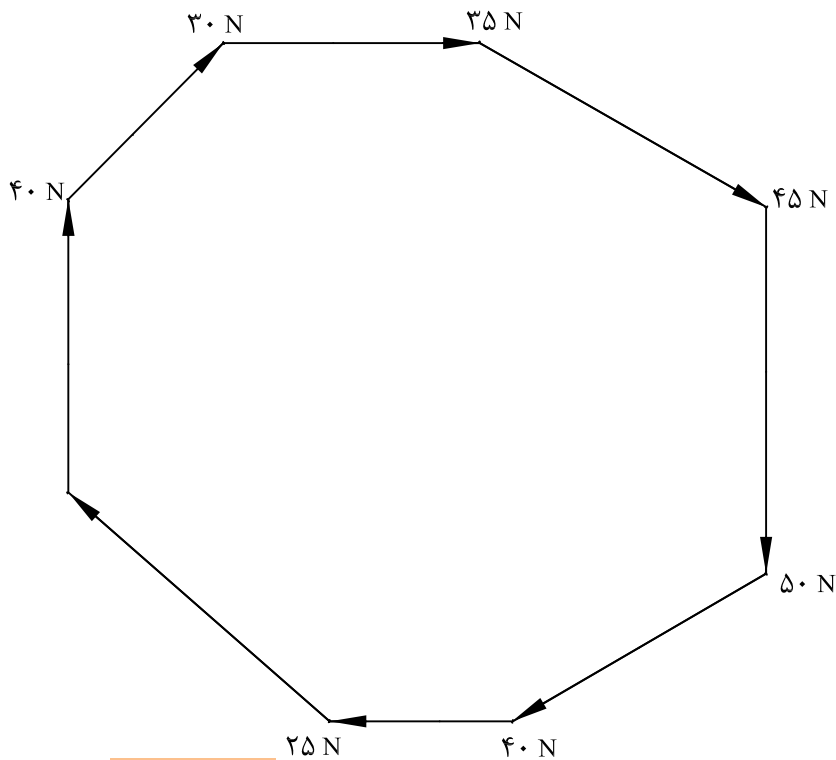
چنانچه چند نیرو در یک نقطه عمل کنند ولی در شرایط تعادل باشند نمودار برداری‌ای که به ترتیب نیروها را با اندازه و جهت آنها نشان دهد یک چند ضلعی می‌سازد. روش‌های مثلث و چند ضلعی مشابه یکدیگر هستند و تفاوت آنها در تعداد نیروها می‌باشد. در مثلث تعداد نیروها سه و در چند ضلعی تعداد نیروها بیش از سه است.

مثال: چند نیرو مطابق شکل ۳-۳۰ بر نقطه‌ای عمل می‌کنند. با استفاده از روش رسم چند ضلعی با فرض این که نیروها در تعادل باشند اندازه و جهت نیروی معادل را بیابید.



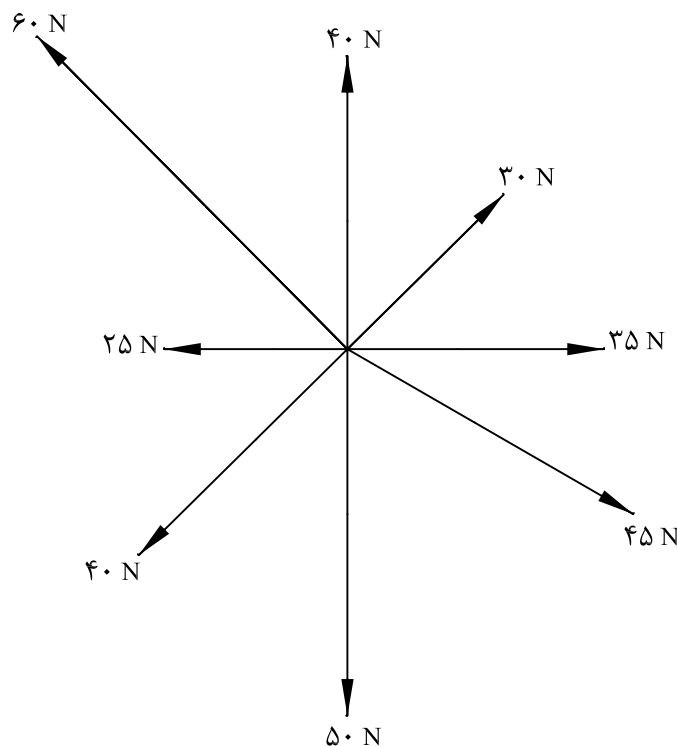
شکل ۳-۳۰

راه حل: نمودار برداری را مطابق روشی که آموخته‌ایم رسم می‌کنیم. هر یک سانتی‌متر را معادل  $10\text{ N}$  قرار می‌دهیم. رسم بردارها را از بردار عمودی  $40\text{ N}$  شروع می‌کنیم. هفت نیروی موجود در سیستم به صورت هفت بردار شکل ۳-۳۱ رسم می‌شوند. برای یافتن بردار معادل که در واقع با رسم آن چند ضلعی کامل می‌شود کافی است که با رسم یک بردار ابتدای بردار  $25\text{ N}$  به انتهای بردار  $40\text{ N}$  متصل شود.



شکل ۳-۳۱

حال با استفاده از خط کش طول بردار معادل را اندازه می‌گیریم که ۶ سانتی‌متر است و چون هر سانتی‌متر را معادل  $10\text{ N}$  قرار داده‌ایم بنابراین اندازه بردار حدود  $60\text{ N}$  می‌باشد. چنانچه با نقاله زاویه نیروی معادل با محورهای عمودی و افقی اندازه گرفته شود ملاحظه می‌گردد که زاویه آن با این محورها  $45$  درجه است. حال اگر به شکل ۳-۳۰ برگردیم می‌توانیم نیروی معادل را به آن شکل اضافه کنیم و در نتیجه شکل ۳-۳۲ را در حالی که کلیه نیروها در آن در شرایط تعادل قرار دارند رسم کنیم.



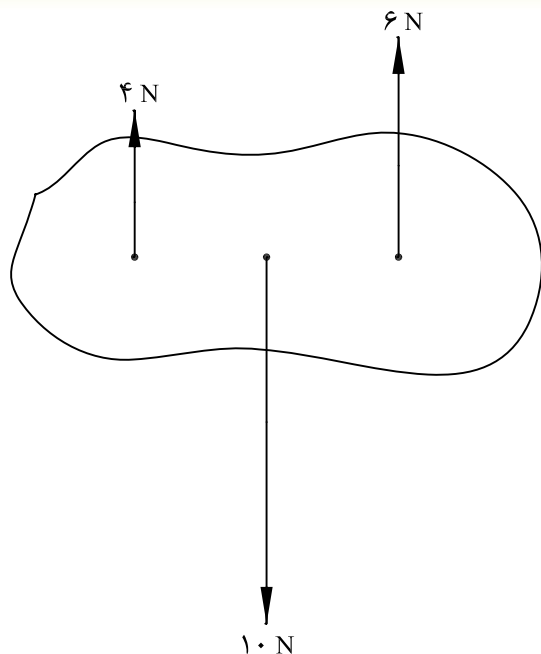
شکل ۳-۳۲

### ۳-۸-۳ - نیروهای هم‌رأس و نیروهای موازی

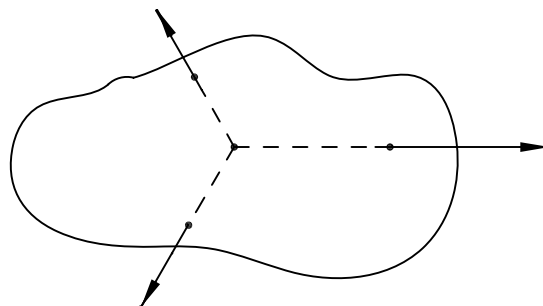
خط اثرهای سه نیرو (یا خط اثرهای هر تعداد نیرو که قابل کاهش به سه نیرو باشند) که در حالت تعادل هستند یا باید از یک نقطه مشترک بگذرند و یا اینکه با هم موازی باشند. این مطلب را به‌طور عملی در شکل‌های ۳-۳۳ و ۳-۳۴ تجربه می‌کنیم. در هر دو شکل مزبور نیروها در حال کشیدن صفحه هستند.

در شکل ۳-۳۳ سه نیرو در حال کشیدن صفحه هستند. اگر صفحه در حالت تعادل باشد خط اثرهای هر سه نیرو از یک نقطه مشترک می‌گذرند و با هم موازی نیستند.





شکل ۳-۳۴



شکل ۳-۳۳

در شکل ۳-۳۴ سه نیروی موازی، یک صفحه را می‌کشند. ملاحظه می‌شود صفحه در حال تعادل است زیرا مجموع نیروهای موافق و مخالف یکدیگر را خنثی می‌کنند.

تمرین ۱: دانش‌آموزان عزیز شرایط شکل ۳-۳۳ را تغییر دهند طوری که خط اثر نیروها از یک نقطه نگذرد و موازی هم نباشند و نتیجه بگیرند که صفحه نمی‌تواند در حال تعادل باشد.

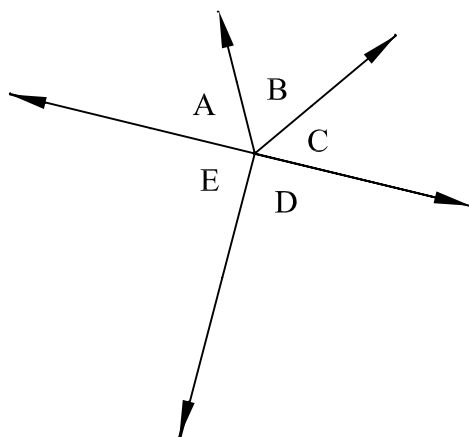
تمرین ۲: دانش‌آموزان عزیز شرایط شکل ۳-۳۴ را تغییر دهند طوری که نیروهای موافق و مخالف یکدیگر را خنثی نکنند و نتیجه بگیرند که صفحه نمی‌تواند در حال تعادل باشد.

#### ۳-۸-۴ - علامت‌گذاری

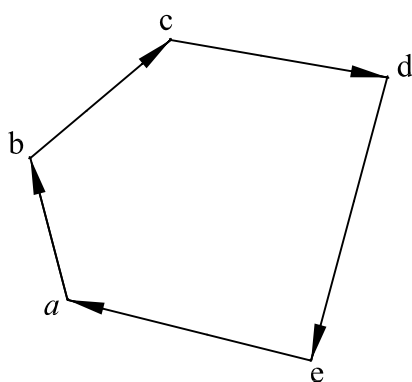
در این قسمت روشی برای علامت‌گذاری فضاها در نمودار فضایی با حروف بزرگ لاتین (A, B, C و ...) معرفی می‌شود طوری که هر نیرو را بتوان با حروفی که نشانگر دو فضا در دو طرف آن نیرو هستند معرفی کرد. مثلاً نیروی AB نیروی است که بین فضای A و فضای B قرار می‌گیرد. در این روش بردار هر نیرو در نمودار برداری با حروف کوچک نشانگر آن نیرو معرفی می‌شود. مثلاً بردار ab برای نیروی AB، بردار bc برای نیروی BC و مانند آن. در شکل ۳-۳۵ این روش علامت‌گذاری مشاهده می‌شود. در این شکل فضاهای بین نیروها به‌طور پیوسته و موافق حرکت عقربه ساعت نام‌گذاری و علامت‌گذاری شده‌اند. همواره ترجیح داده می‌شود که در صورت امکان اولین نیرو (و در نتیجه اولین بردار) عمودی یا افقی

باشد تا رسم نمودار برداری آن آسان شود.

### الف) نمودار فضایی



### ب) نمودار برداری



بردار  $ab$  نشان‌دهنده نیروی  $AB$  واقع شده بین فضای  $A$  و  $B$   
 بردار  $bc$  نشان‌دهنده نیروی  $BC$  واقع شده بین فضای  $B$  و  $C$   
 بردار  $cd$  نشان‌دهنده نیروی  $CD$  واقع شده بین فضای  $C$  و  $D$   
 بردار  $de$  نشان‌دهنده نیروی  $DE$  واقع شده بین فضای  $D$  و  $E$   
 بردار  $ea$  نشان‌دهنده نیروی  $EA$  واقع شده بین فضای  $A$  و  $E$

شکل ۳-۳۵

### ۳-۹ - کاربردهای عملی

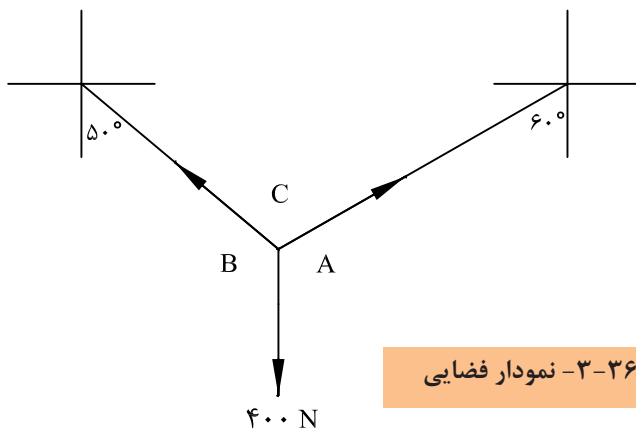
با آنچه که تاکنون آموخته‌ایم می‌توانیم نمودار برداری نیروها را برای حل مسائل عملی رسم کنیم. آموختیم که در حل مسائل مکانیک کاربردی (فعالاً استاتیک) از دو روش می‌شود استفاده کرد.

(۱) «حل ترسیمی» که در آن نمودار برداری با مقیاس و اندازه ترسیم می‌شود و موارد نامعلوم با اندازه‌گیری تعیین می‌شوند، از خط‌کش برای تعیین بزرگی (مقدار) بردار و از نقاله برای تعیین جهت و اندازه زاویه استفاده می‌شود. هرچه

نمودار دقیق تر رسم شود پاسخها دقیق تر می شوند. توصیه می گردد که نمودارها متناسب با اندازه کاغذ در بزرگترین مقیاس ممکن رسم شوند.

(۲) «حل محاسبه‌ای» که در آن نمودار برداری رسم می شود ولی اندازه گیری نمی گردد و موارد نامعلوم با استفاده از مثلثات تعیین می شوند. حل مسائل با استفاده از جداول مثلثات نتایج دقیق تری نسبت به حل مسائل با استفاده از روش ترسیمی می دهد و لذا معمولاً از روش محاسبه استفاده می شود مگر آن که اعلام شود که روش ترسیمی قابل قبول است. به هر حال چون در روش محاسبه‌ای ترسیم نقشه ساده و بدون اندازه (sketch) نیاز است و از طرفی اندازه گیری نمودار برداری در زمان کوتاهی قابل انجام است توصیه می شود که دانش آموز از هر دو روش استفاده کند. بنابراین با روش ترسیمی می توان از صحیح بودن محاسبات اطمینان یافت. البته استفاده از روش ترسیمی و انطباق آن با محاسبات مهارت دانش آموز را افزایش می دهد.

مثال: مطابق شکل ۳-۳۶ دو کابل که با محور عمودی زاویه  $50^\circ$  و  $60^\circ$  درجه می سازند از یک تیر آویزان هستند. اتصال دو طناب با یک شِگل برقرار است و از آن باری به وزن  $400\text{ N}$  آویزان می باشد. نیروی کششی در هر کابل چقدر است؟



شکل ۳-۳۶ - نمودار فضایی

حل ترسیمی: شکل ۳-۳۶ نمودار فضایی مثال را

نشان می دهد.

محل اتصال کابلها و بار به وضوح مشاهده می شود. شِگل به صورت یک گره نشان داده شده است. گره محل برخورد سه نیرو می باشد. نیروها به ترتیب عبارتند از؛

(۱) نیروی کششی ناشی از بار چهارصد نیوتونی به سمت پایین در محور عمودی

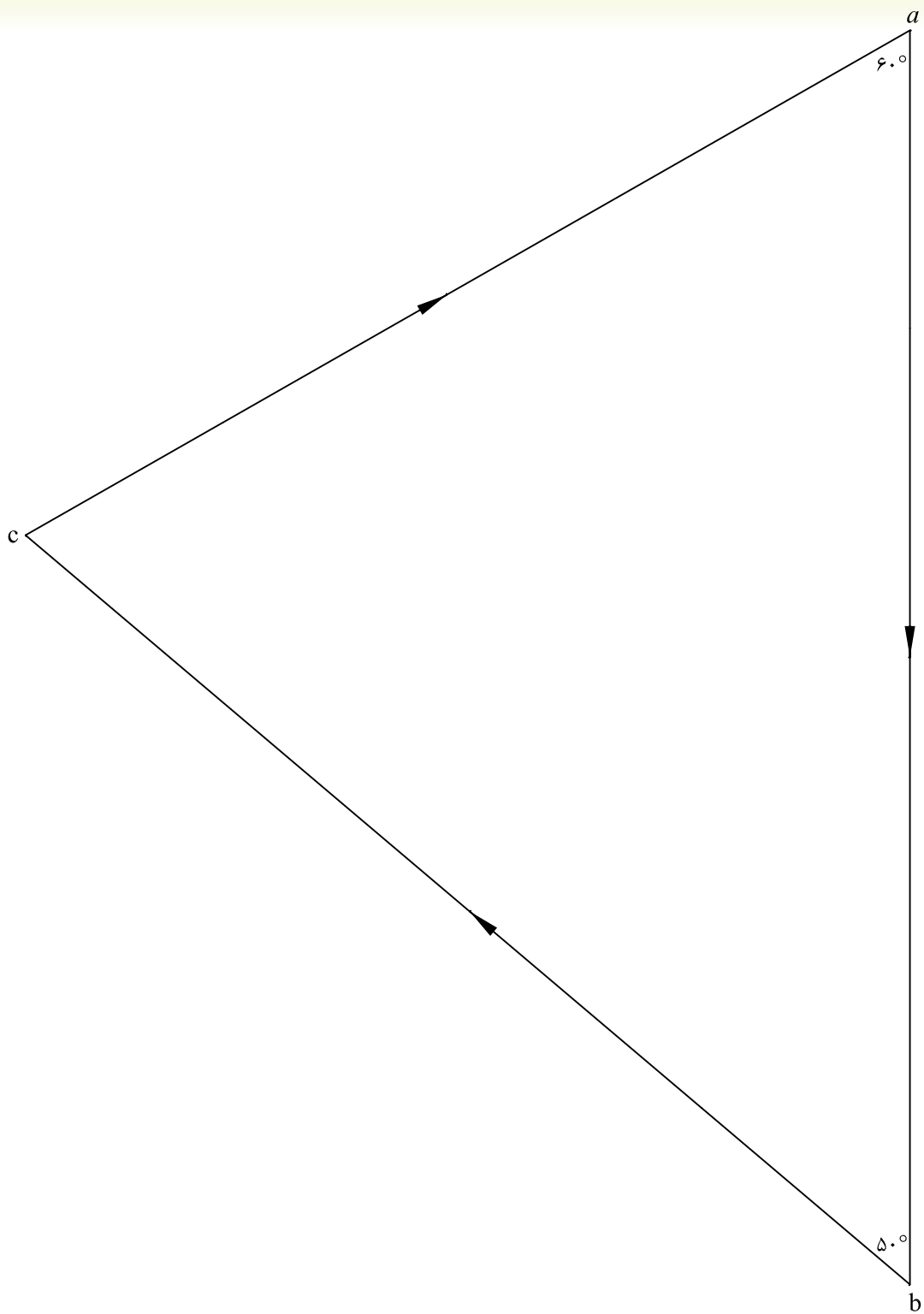
(۲) نیروی کششی کابل BC

(۳) نیروی کششی کابل CA

پیکانهای رسم شده در نمودار فضایی (شکل ۳-۳۶) جهت هر کدام از نیروها را نشان می دهند.

اکنون می توانیم نمودار برداری را مطابق شکل ۳-۳۷ رسم کنیم. ابتدا بردار عمودی را موازی با نیروی  $400$  نیوتون رسم

می کنیم و آن را به صورت بردار  $ab$  نشان می دهیم. در این مثال هر  $20$  نیوتون را مساوی یک سانتی متر قرار می دهیم.



شکل ۳۷-۳- نمودار برداری

بنابراین طول  $ab$  مساوی ۲۰ سانتی متر می شود. اکنون می توانیم از نقطه  $b$  برداری موازی با نیروی کششی کابل  $BC$  رسم کنیم. چون زاویه  $BC$  با محور عمودی برابر  $۵۰$  درجه است زاویه  $bc$  با بردار  $ab$  نیز مساوی  $۵۰$  درجه می باشد. البته هنوز اندازه (بزرگی) بردار  $bc$  را نمی دانیم بنابراین طول  $bc$  برای ما مشخص نیست. به همین دلیل هنگام رسم  $bc$  ممکن است طول  $bc$  مقداری بزرگتر یا کوچکتر از اندازه واقعی شود ولی توصیه می شود بردار با مداد ولی قدری بزرگتر رسم شود زیرا بعداً قابل اصلاح خواهد بود. حال باید بردار  $ca$  که نشان دهنده نیروی کششی کابل  $CA$  است رسم شود. چون هنوز محل دقیق نقطه  $c$  را نمی دانیم از نقطه  $a$  بردار  $ca$  را موازی با کابل  $CA$  رسم می کنیم. بدیهی است زاویه بین بردار  $ca$  و بردار  $ab$  برابر  $۶۰$  درجه است (چون زاویه نیروی کششی کابل  $CA$  با محور عمودی مساوی  $۶۰$  درجه می باشد). محل برخورد دو بردار نقطه  $c$  می باشد.

حال طول بردارهای  $bc$  و  $ca$  را با خط کش اندازه می گیریم. چون هر یک سانتی متر را مقابل ۲۰ نیوتون فرض کرده ایم طول هر بردار را در ۲۰ نیوتون ضرب می کنیم و بزرگی هر بردار و در نتیجه نیروی کششی کابل ها را به دست می آوریم. طول بردار  $ca$  برابر  $۱۶/۳$  سانتی متر و طول بردار  $bc$  برابر  $۱۸/۴$  سانتی متر می شود. بنابراین خواهیم داشت:

نیروی کششی در کابل  $AC = ۳۲۶N = ۱۶/۳ \times ۲۰N$  = اندازه (بزرگی) بردار  $ca$

نیروی کششی در کابل  $BC = ۳۶۸N = ۱۸/۴ \times ۲۰N$  = اندازه (بزرگی) بردار  $bc$

البته باید در نظر داشته باشیم که نتایج روش ترسیمی با تقریب همراه است ولی در صورتی که نمودار برداری به دقت و با خط کش و نقاله دقیق و پرگار رسم شود روش مناسبی است که عملاً می تواند در کارهای اجرایی مربوط به کشتی و کشتی سازی به کار رود.

حل محاسبه ای: برای تعیین نیروی کششی در هر کابل به طریق زیر عمل می کنیم.

ابتدا نمودار ساده برداری را رسم می کنیم (چون نمودار ساده برداری مورد نظر مشابه نمودار شکل ۳-۳۷ می باشد به آن شکل مراجعه شود)، سپس اندازه زاویه  $ab$  را تعیین می کنیم. در شکل ۳-۳۷ زاویه  $acb$  زاویه ای است در یک مثلث که ضلع مقابل آن بردار ۴۰۰ نیوتونی می باشد.

$$\hat{acb} = ۱۸۰^\circ - (۶۰ + ۵۰) = ۷۰^\circ$$

با استفاده از قانون سینوس می توانیم بنویسیم:

$$\frac{ac}{\sin ۵۰^\circ} = \frac{۴۰۰}{\sin ۷۰^\circ}$$

$$ac = \frac{۴۰۰ \cdot (\sin ۵۰^\circ)}{\sin ۷۰^\circ} = \frac{۴۰۰ \times ۰/۷۶۶}{۰/۹۳۹۷} = ۳۲۶/۰۶ \text{ نیوتون}$$

$$\frac{bc}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{۴۰۰}{\sin ۷۰^\circ}$$

$$bc = \frac{۴۰۰ \cdot (\sin ۶۰^\circ)}{\sin ۷۰^\circ} = \frac{۴۰۰ \times ۰/۸۶۶}{۰/۹۳۹۷} = ۳۶۸/۶ \text{ نیوتون}$$

بنابراین نیروی کششی در کابل ها به شرح زیر می باشد.

نیوتون  $326/06 =$  نیروی کششی در کابل AC

نیوتون  $368/6 =$  نیروی کششی در کابل BC

حال می توانیم نتایج حاصل از روش ترسیمی و روش محاسبه ای را مقایسه کنیم. ملاحظه می شود که خطای حاصل به شرح زیر است؛

(۱) خطا در تعیین نیروی کششی کابل AC:

$$326/06 - 326 = 0/06$$

$$\frac{0/06}{326/06} = 0/00018 = \%.118$$

بنابراین ملاحظه می شود خطای روش ترسیمی در تعیین نیروی کششی کابل AC برابر هجده هزارم درصد می باشد که برای این مثال قابل صرف نظر است.

(۲) خطا در تعیین نیروی کششی کابل BC:

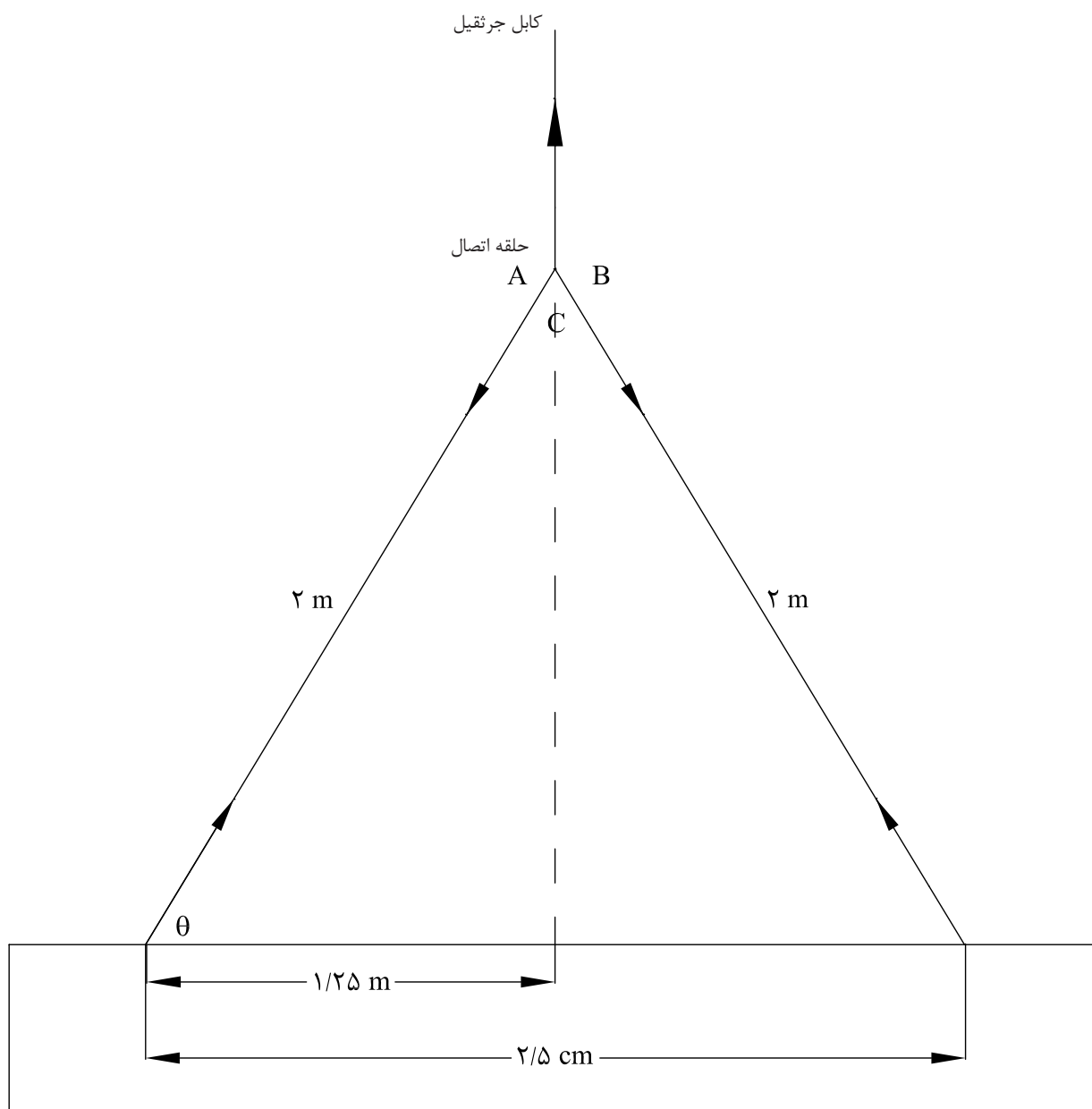
$$368/6 - 368 = 0/6$$

$$\frac{0/6}{368/6} = 0/00162 = \%.162$$

خطای روش ترسیمی در تعیین نیروی کششی کابل BC برابر یکصد و شصت و دو هزارم درصد است، که قابل صرف نظر می باشد.

مثال: دو رشته کابل (مطابق شکل ۳-۳۸) هرکدام به طول ۲ متر برای بالا بردن شاسی یک موتور کوچک به جرم  $3/058$  تن استفاده می شوند. نیروی کششی در هر کابل چقدر است؟

حل ترسیمی: تفاوت این مثال با مثال قبلی در این است که در مثال قبلی بار آویزان بود ولی در این مثال بار به وسیله جرثقیل بالا برده می شود. در نتیجه نیروهای موجود در سیستم با مثال قبلی تفاوت دارند. کابل جرثقیل نیرویی به سمت بالا به حلقه اتصال وارد می کند. نیروی مزبور مساوی با وزن کل شاسی می باشد (از وزن کابل ها و حلقه های اتصال صرف نظر می شود). در نتیجه کابل جرثقیل تحت کشش قرار دارد. از انتهای فوقانی هر کدام از کابل های B و C نیرویی به سمت پایین به حلقه اتصال A وارد می شود. انتهای پایینی هر دو کابل B و C به شاسی متصل است و از محل اتصال به شاسی نیرویی به سمت بالا از طناب به نقاط اتصال وارد می شود.

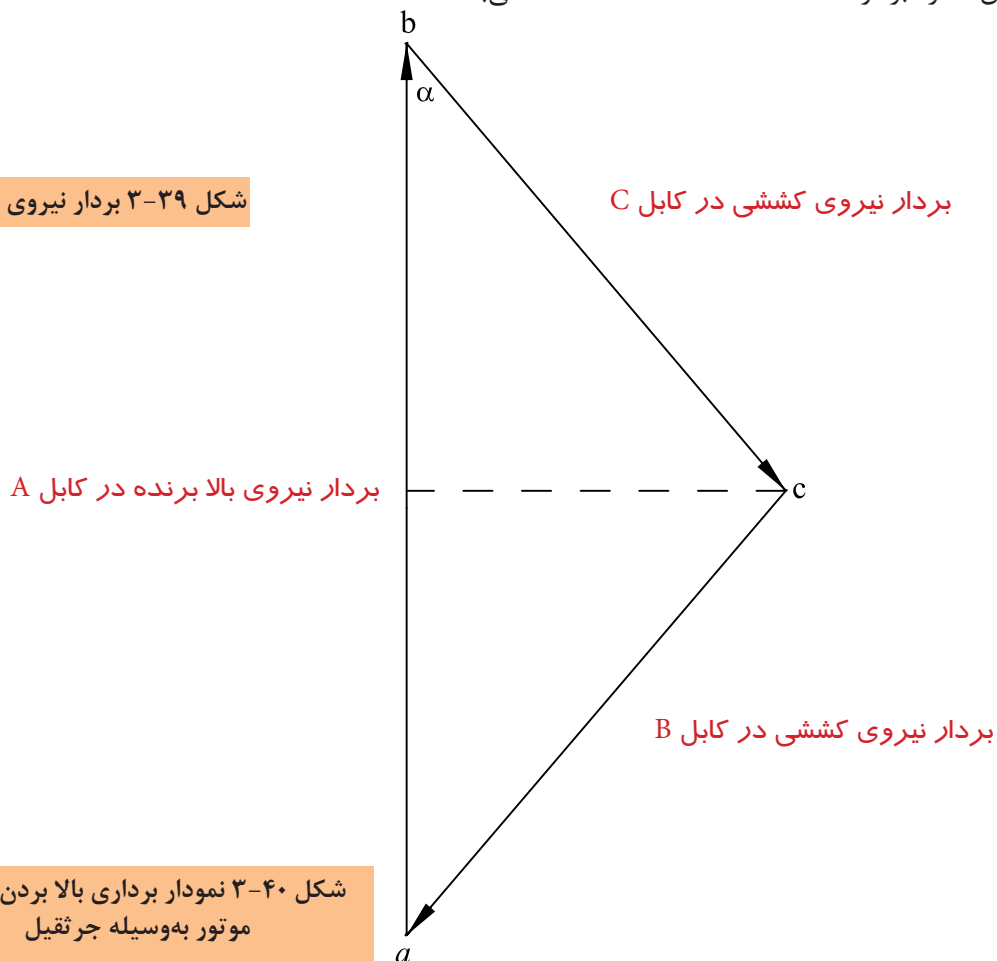


شکل ۳-۳۸ نمودار فضایی بالابردن شاسی موتور به وسیله جرثقیل

حال بردار نیروی بالابرنده را با توجه به این که می‌دانیم نیروی بالابرنده در کابل جرثقیل مساوی با نیروی وزن شاسی است مطابق شکل ۳-۳۹ رسم می‌کنیم. با توجه به این که جرم شاسی برابر  $۳/۰۵۸$  تن بوده است وزن شاسی (نیروی وزن آن) مساوی  $۳/۰۵۸ \times ۱۰۰۰^۳ \times ۹/۸۱ = ۲۹۹۹۸/۹ = ۳۰۰۰۰$  نیوتون یا تقریباً مساوی  $۳۰۰۰۰$  نیوتون یعنی  $۳۰$  کیلو نیوتون ( $۳۰ \text{ kN}$ ) می‌باشد. برای رسم بردار نیروی بالابرنده هر سه کیلو نیوتون را مساوی یک سانتی‌متر قرار می‌دهیم.  $۳۰ \text{ kN}$

نیروی بالابرنده در کابل A در واقع خنثی کننده برآیند دو نیروی است که کابل‌های متصل به شاسی (کابل‌های B و C) به حلقه اتصال وارد می‌کنند. بنابراین نمودار برداری کلیه کابل‌ها را می‌توان مطابق شکل ۳-۴۰ رسم نمود. برای رسم نمودار برداری سیستم ابتدا بردار بالابرنده در کابل A و سپس بردار نیروهای کششی در کابل‌های B و C را موازی با نیروها در یک مثلث رسم می‌کنیم (در این مثال هم هنوز نمی‌دانیم در چه نقطه‌ای بردارهای bc و ca یکدیگر را قطع می‌کنند، لذا بردارها را کمی بلندتر رسم می‌کنیم و پس از یافتن نقطه تلاقی خطوط اضافی را پاک می‌کنیم). حاصل نمودار، یک مثلث متساوی‌الساقین است که طول ساق‌ها حدود  $۶/۴$  سانتی‌متر می‌باشد. چون هر سانتی‌متر را برابر  $۳ \text{ kN}$  قرار دادیم پس اندازه بردارها  $۶/۴ \times ۳ \text{ kN} = ۱۹/۲ \text{ kN}$  می‌باشد.

شکل ۳-۳۹ بردار نیروی بالابرنده در کابل A



شکل ۳-۴۰ نمودار برداری بالا بردن شاسی موتور به وسیله جرثقیل



نتیجه عملی از یافتن اندازه نیروها این است که در این مسئله کابل‌ها و حلقه‌های اتصال باید به ترتیب برای کار با نیروهای بزرگتر از ۳۰ kN و ۱۹/۲ kN انتخاب شوند.

حل محاسبه‌ای: در شکل‌های ۳-۳۸ و ۳-۴۰ از قلاب جرثقیل خطی عمود بر شاسی رسم می‌کنیم. مثلث متساوی‌الساقین به دو مثلث راست گوشه تبدیل می‌شود. از شکل ۳-۳۸ اندازه زاویه  $\theta$  را به شرح زیر تعیین می‌کنیم.

$$\cos \theta = \frac{1/25}{2} = 0.125$$

با مراجعه به جداول مثلثات اندازه زاویه  $\theta$  در حدود  $38^{\circ}41'$  می‌باشد. در نمودار فضایی (شکل ۳-۳۸) زاویه بین کابل‌های مورب اتصال شاسی به قلاب به شرح زیر قابل تعیین است:

$$\frac{1}{2} \text{ زاویه بین دو کابل} = 90 - \theta$$

$$90 - 51^{\circ}19' = 38^{\circ}41'$$

با کمی دقت در شکل‌های ۳-۳۸ و ۳-۳۹ ملاحظه می‌شود زاویه  $\alpha$  در نمودار برداری همان زاویه  $38^{\circ}41'$  تعیین شده در نمودار فضایی است. اگر در نمودار برداری از نقطه C خطی عمود بر ضلع مقابل رسم کنیم بردار ۳۰ kN را به دو قسمت هر کدام به اندازه ۱۵ kN تقسیم کرده‌ایم و می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos \alpha = \cos 38^{\circ}41' = \frac{15 \text{ kN}}{B \text{ یا } C}$$

C یا B مقدار نیروی کششی در هر کدام از کابل‌های مورب اتصال شاسی به قلاب هستند.

$$B \text{ یا } C = \frac{15 \text{ kN}}{0.77806} = 19.2159$$

بنابراین با استفاده از روش ترسیمی اندازه نیروی کششی هر کدام از کابل‌ها تقریباً برابر ۱۹/۲۲ کیلو نیوتون می‌باشد. ملاحظه می‌شود با وجود در نظر گرفتن تخمین در روش ترسیمی، تفاوت حاصل از روش ترسیمی و روش محاسبه‌ای حدود دو صدم کیلو نیوتون یا بیست نیوتون می‌باشد.

مثال: مطابق شکل ۳-۴۱ چهار نیروی کششی بر یک نقطه اثر می‌کنند. اندازه و جهت سه تا از نیروها به شرح زیر

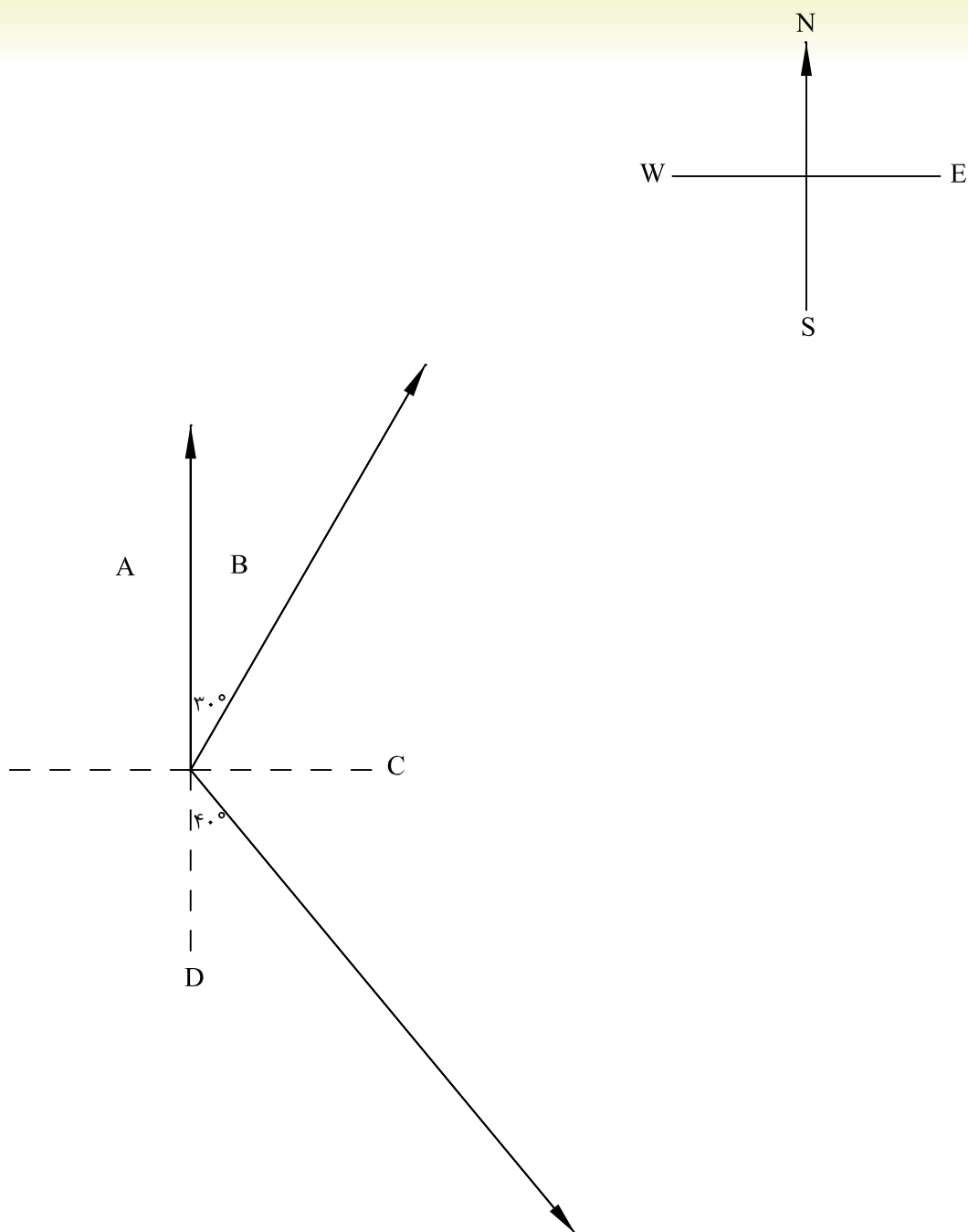
است.

(۱) نیروی ۱۲ نیوتون در جهت شمال

(۲) نیروی ۱۵ نیوتون در جهت شمال شرقی که با محور عمودی زاویه ۳۰ درجه می‌سازد.

(۳) نیروی ۲۰ نیوتون در جهت جنوب شرقی که با محور عمودی زاویه ۴۰ درجه می‌سازد.

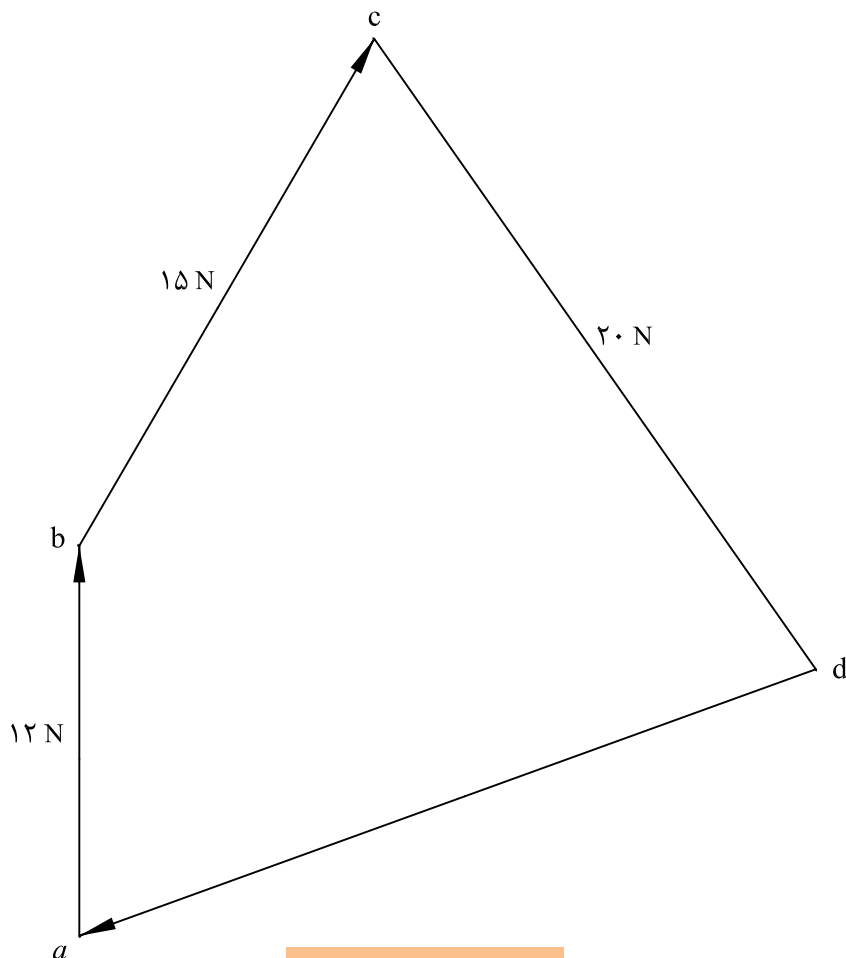
اندازه و جهت نیروی چهارم را به طوری که سیستم در تعادل باشد از طریق ترسیمی و نیز از طریق محاسبه تعیین کنید.



شکل ۳-۴۱

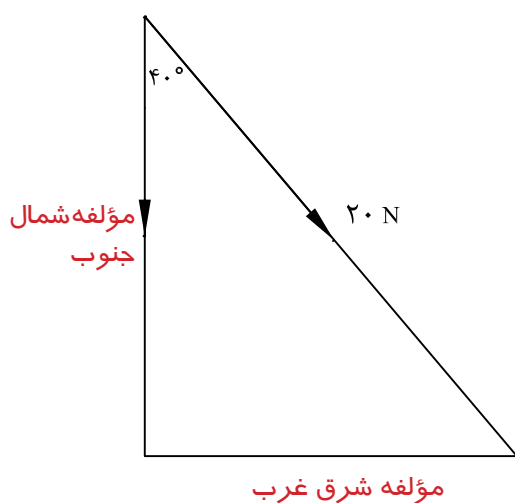
حل ترسیمی: برای ترسیم نمودار برداری مناسبی انتخاب می‌شود. برای این مثال فرض می‌شود هر یک سانتی‌متر معرف دو نیوتون باشد. ابتدا بردار عمودی  $ab$  (به سمت بالا) به نمایندگی از نیروی  $12\text{ N}$  در جهت شمال رسم می‌شود. از نقطه  $b$  بردار  $bc$  به نمایندگی از نیروی  $15\text{ N}$  که با محور عمودی دارای زاویه  $30^\circ$  در جهت شمال‌شرق است رسم می‌گردد. از نقطه  $c$  بردار  $cd$  معرف نیروی  $20\text{ N}$  در جهت جنوب‌شرق با زاویه  $40^\circ$  با محور عمودی رسم می‌شود. چون سیستم در تعادل است نمودار برداری باید تشکیل یک چند ضلعی دهد. بنابراین نیروی چهارم به وسیله برداری نمایندگی می‌شود که نقطه  $d$  را به نقطه  $a$  وصل می‌کند. طول بردار  $da$  مساوی  $11/25$  سانتی‌متر است یعنی:  $22/5\text{ N} = 11/25 \times 2\text{ N}$ . زاویه  $a$  برابر  $64/5^\circ$  درجه است (یعنی زاویه  $dab$ ). جهت این نیرو جنوب غرب با زاویه  $64/5^\circ$  درجه با محور عمودی است. بنابراین می‌توان نوشت:  $22/5\text{ N } s64/5^\circ w$  = اندازه نیروی معادل

حل محاسبه‌ای: برای محاسبه اندازه بردار  $da$  از نمودار برداری شکل ۳-۴۲ می‌توان استفاده نمود. حل محاسبه‌ای از دو راه قابل انجام است. راه اول این که از نقطه  $b$  خطی تا نقطه  $d$  رسم شود، ابتدا اندازه  $bd$  با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث  $bcd$  محاسبه و سپس در مثلث  $bda$  اندازه  $da$  تعیین شود.

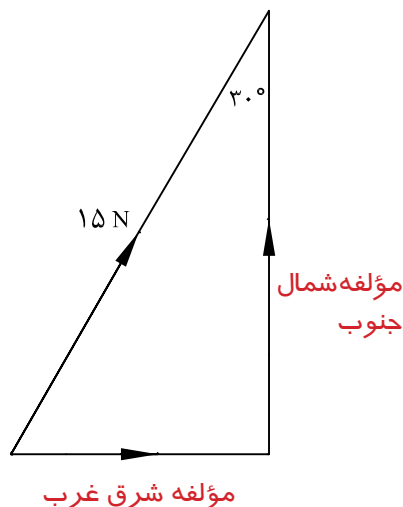


شکل ۳-۴۲ - نمونه برداری

ولی یک راه حل ساده‌تر وجود دارد. به این ترتیب که هر سه بردار ۱۲، ۱۵ و ۲۰ نیوتون به مؤلفه‌های شمال جنوب و شرق غرب تبدیل شده و سپس نیروی معادل برآیند یا نیروی خنثی کننده برآیند آن مؤلفه‌ها به دست آید. از شکل ۳-۴۲ ملاحظه می‌شود که بردار ۱۲ نیوتون فقط یک مؤلفه عمودی شمال جنوب دارد و فاقد مؤلفه شرق غرب است. ولی بردارهای ۱۵ و ۲۰ نیوتون دارای مؤلفه‌های شمال جنوب و شرق غرب هستند و لذا می‌توان شکل ۳-۴۳ را برای بردار ۱۵ نیوتون و شکل ۳-۴۴ را برای بردار ۲۰ نیوتون رسم نمود.



شکل ۳-۴۴- نمایش مؤلفه‌های بردار ۲۰ N



شکل ۳-۴۳- نمایش مؤلفه‌های بردار ۱۵ N

اندازه مؤلفه‌ها به شرح زیر قابل تعیین است.

$$\text{در جهت شمال} \quad ۱۵ \text{ N} \cos ۳۰^\circ = ۱۲/۹۹ \text{ N} = \text{اندازه مؤلفه شمال جنوب بردار } ۱۵ \text{ N}$$

$$\text{در جهت شرق} \quad ۱۵ \text{ N} \sin ۳۰^\circ = ۷/۵ \text{ N} = \text{اندازه مؤلفه شرق غرب بردار } ۱۵ \text{ N}$$

$$\text{در جهت جنوب} \quad ۲۰ \text{ N} \cos ۴۰^\circ = ۱۵/۳۲ \text{ N} = \text{اندازه مؤلفه شمال جنوب بردار } ۲۰ \text{ N}$$

$$\text{در جهت شرق} \quad ۲۰ \text{ N} \sin ۴۰^\circ = ۱۲/۸۵۶ \text{ N} = \text{اندازه مؤلفه شرق غرب بردار } ۲۰ \text{ N}$$

مؤلفه‌های بردار ۱۲ N چنانچه قبلاً هم تعیین شد به شرح زیر است.

$$۱۲ \text{ N} = \text{اندازه مؤلفه شمال جنوب بردار } ۱۲ \text{ N}$$

$$۰ = \text{اندازه مؤلفه شرق غرب بردار } ۱۲ \text{ N}$$

برآیند مؤلفه‌های شمال جنوب عبارت است از:

$$(۱۲/۹۹ \text{ (شمال)} + ۱۲ \text{ (شمال)}) - ۱۵/۳۲ \text{ (جنوب)} = ۹/۶۷ \text{ N (شمال)}$$

برآیند مؤلفه‌های شرق غرب عبارت است از:

$$(شرق) ۲۰/۳۵۶ N + (شرق) ۱۲/۸۵۶ = ۷/۵$$

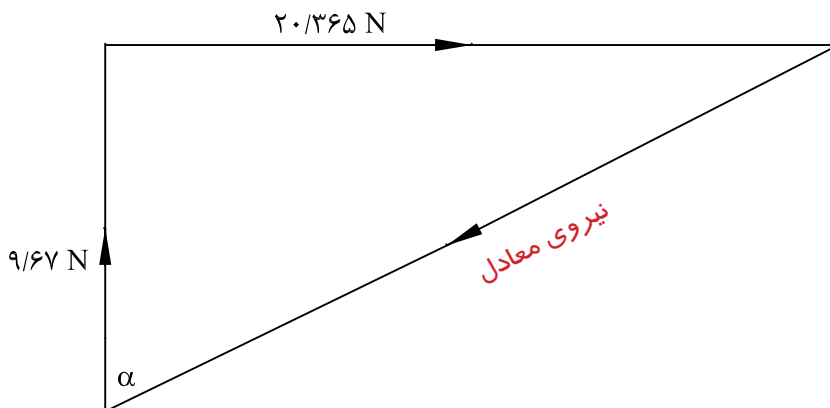
با استفاده از دو برآیند  $۹/۶۷ N$  و  $۲۰/۳۵۶ N$  شکل ۳-۴۵ قابل رسم است. مجدداً هر دو نیوتون مساوی یک سانتی‌متر فرض می‌شود. اینک اندازه نیروی معادل قابل تعیین است.

$$\text{اندازه نیروی معادل} = \sqrt{(۹/۶۷)^2 + (۲۰/۳۵۶)^2} = ۲۲/۵۴ N$$

برای تعیین جهت نیروی معادل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{۲۰/۳۵۶}{۹/۶۷} = ۲/۱۰۵ \\ \Rightarrow \alpha &= ۶۴^{\circ}۳۶' \end{aligned}$$

پس نیروی معادل نیروی است با اندازه  $۲۲/۵۴$  نیوتون در جهت جنوب شرق با زاویه  $۶۴$  درجه و  $۳۶$  دقیقه



شکل ۳-۴۵ تعیین نیروی معادل

### جرثقیل بازویی

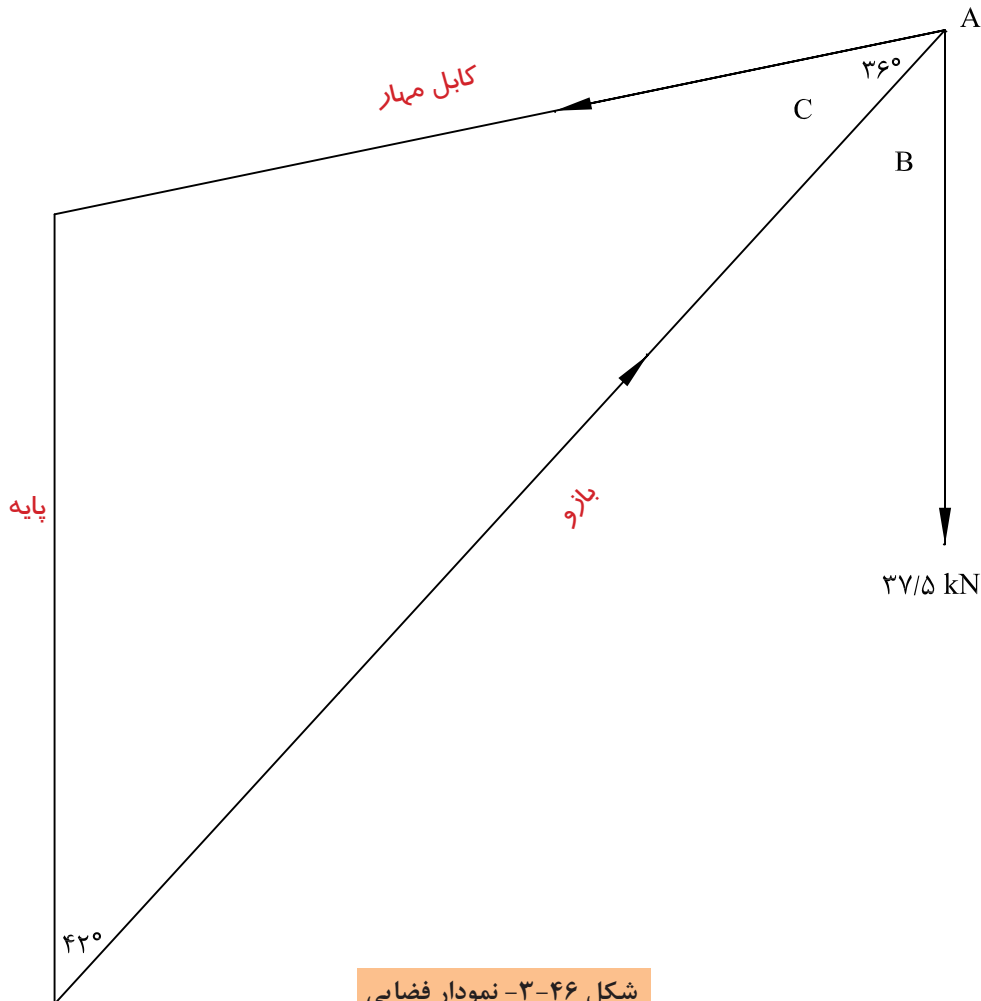
نوع ساده جرثقیل بازویی شامل یک پایه، یک بازو و یک مهار می‌شود. پایه یک ستون عمودی است، انتهای پایینی بازو به قسمت زیرین پایه متصل می‌شود. «مهار» ارتباط بین قسمت بالایی بازو و پایه را برقرار می‌کند، محل اتصال مهار و بازو به سر جرثقیل موسوم است.

در مسائل مربوط به جرثقیل بازویی غالباً بار مستقیماً از سر جرثقیل آویزان در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه یک مثلث ساده از سه نیرو تشکیل می‌شود. در مواردی قرقره‌ای در سر جرثقیل در نظر گرفته می‌شود و کابل بالابرنده بار از قرقره مزبور می‌گذرد و سر دیگر کابل به دَوّاری که در پشت جرثقیل است متصل می‌باشد. (دَوّار (Winch) دستگاهی است که موجب بالا بردن بار می‌شود). در این‌گونه موارد تعداد نیروها بیشتر از سه نیرو می‌باشد.

مثال: زاویه بین بازو و پایه یک جرثقیل بازویی برابر ۴۲ درجه و زاویه بین مهار و بازو مساوی ۳۶ درجه است. در صورتی که باری به جرم  $۳/۸۲۲ \times ۱۰^۳ \text{ kg}$  از سر جرثقیل آویزان باشد، نیروهای واقع در بازو و مهار چقدر است؟  
 حل: نیروی عمودی وارد بر سر جرثقیل (به طرف پایین) برابر است با:

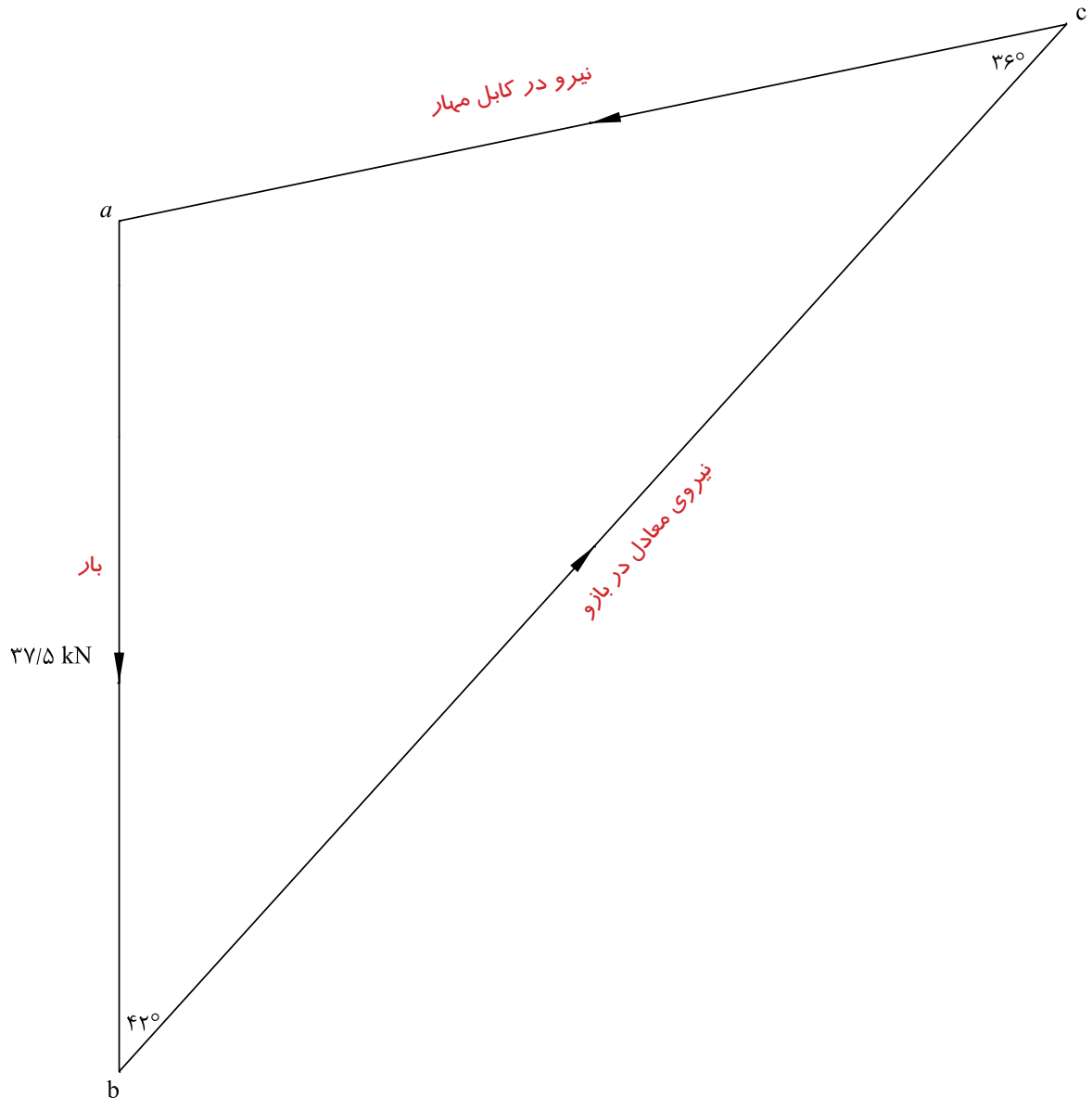
$$۳/۸۲۲ \times ۱۰^۳ \times ۹/۸۱ \text{ N} = ۳۷/۵ \times ۱۰^۳ \text{ N} = ۳۷/۵ \text{ kN}$$

در سر جرثقیل سه نیرو با یکدیگر تلاقی دارند. از بازو به سر جرثقیل فشار وارد می‌شود تا بار آویزان در جای خود نگه‌داشته شود و کابل مهار برای نگهداشتن بازو در جای خود سر جرثقیل را به طرف چپ می‌کشد، بنابراین بازو به سر جرثقیل نیرو وارد می‌کند و نیروی از سر جرثقیل به طرف چپ در کابل مهار وجود دارد.  
 نمودار فضایی مطابق شکل ۳-۴۶ قابل رسم است و پیکان مربوط به هر نیرو، جهت نیرو را نشان می‌دهد. حال می‌توان نمودار برداری را طوری که هر سه نیروی وارده به سر جرثقیل را نشان دهد مطابق شکل ۳-۴۷ رسم نمود.



شکل ۳-۴۶ - نمودار فضایی

برای رسم نمودار برداری ابتدا نیروی عمودی بار، سپس نیروهای موجود در بازو و کابل مهار رسم می‌شوند. فعلاً تنها نیروی معلوم نیروی بار است ( $37/5 \text{ N}$ ). هر یک سانتی‌متر مساوی  $2/5$  کیلو نیوتون فرض می‌شود.



شکل ۳-۴۷ نمودار برداری

ملاحظه می‌شود نمودار برداری شکل ۳-۴۷ مثلثی است مشابه اسکلت جرثقیل. با توجه به نمودار برداری (شکل ۳-۴۷)

می توان نوشت:

$$bac \text{ زاویه} = 180 - (42 + 36) = 102^\circ$$

طبق قانون سینوس می توان نوشت:

$$\frac{\text{نیروی واقع در بازو}}{\sin 102^\circ} = \frac{37/5}{\sin 36^\circ}$$

$$\text{نیروی واقع در بازو} = \frac{37/5 \times 0/9781}{0/5878} = 62/4 \text{ kN}$$

$$\frac{\text{نیروی واقع در کابل مهار}}{\sin 42^\circ} = \frac{37/5}{\sin 36^\circ}$$

$$\text{نیروی واقع در کابل مهار} = \frac{37/5 \times 0/6691}{0/5878} = 42/69 \text{ kN}$$

مثال: طول پایه و بازوی یک جرثقیل بازویی به ترتیب  $6/5$  و  $7$  متر و زاویه بین پایه و بازو  $40^\circ$  درجه است. باری به جرم  $2/854$  تن از کابلی که از روی قرقره سر جرثقیل می گذرد آویزان است و سر دیگر کابل تحت زاویه  $50^\circ$  درجه با محور عمودی در دوار پشت پایه قرار دارد. نمودار برداری نیروها را در سر جرثقیل رسم کرده و نیروی واقع در بازو و کابل مهار اندازه گیری شود.

حل: ابتدا نمودار واقعی فضایی مطابق شکل ۳-۴۸ رسم می شود. برای تعیین اندازه نیروی بار مطابق زیر عمل می شود.

$$\text{جرم بار} = 2/854 \text{ tonnes} = 2/854 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \text{اندازه بار بر حسب نیوتون} &= 2/854 \times 10^3 \times 9/81 \\ &= 27997/74 \text{ N} = 28 \text{ kN} \end{aligned}$$

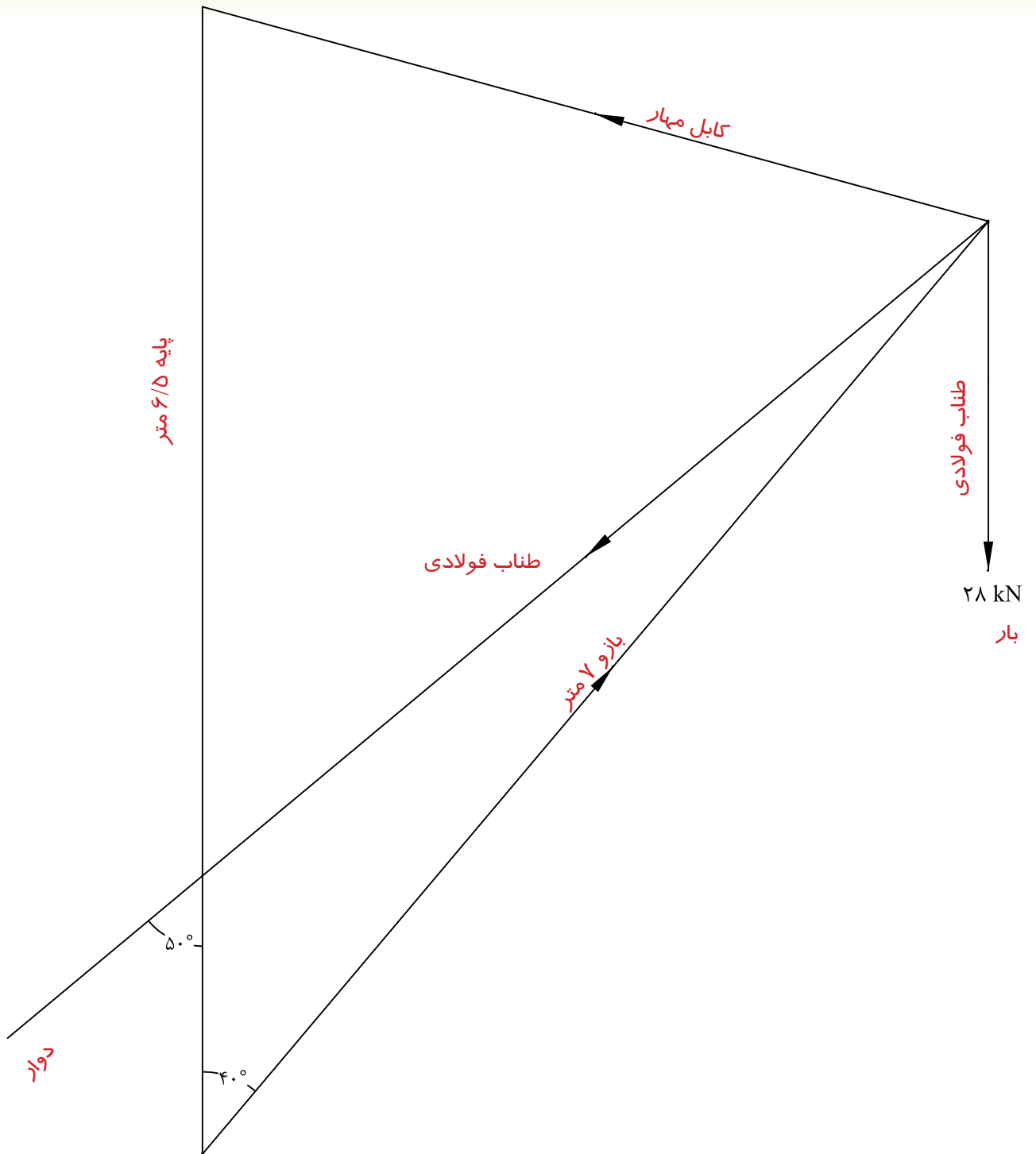
اکنون می توان برای رسم نمودار برداری اقدام کرد.

برای رسم نمودار برداری، بردارها باید موازی با نیروهای واقع در کابلها (طنابهای فولادی)، بازو و کابل مهار باشند. از روی نمودار فضایی می توان سایر زوایا را اندازه گیری نمود و در نمودار برداری استفاده کرد (این اندازه گیریها با خط کش و نقاله انجام می شود).

نیروی واقع در در همه نقاط کابل یا طناب فولادی نگهدارنده بار یکسان و برابر  $28 \text{ kN}$  است، به این ترتیب نیروی بار آویزان و نیروی کششی واقع در طناب فولادی از سر جرثقیل به دوار  $28$  کیلو نیوتون می باشد.

در حل این گونه مسئله آسان تر است که هنگام رسم نمودار برداری، بردارهایی که اندازه شان معلوم است در پی هم رسم شوند بدون آن که برداری با اندازه نامعلوم در بین بردارهای معلوم قرار گیرد. مثلاً در نمودار فضایی شکل ۳-۴۸ ملاحظه می شود؛





شکل ۳-۴۸ نمودار فضایی

- (۱) نیروی بار از سر جرثقیل به طرف پایین مساوی  $28 \text{ kN}$  (اندازه معلوم) است.
- (۲) نیروی بازو به طرف بالا با زاویه  $40^\circ$  درجه با محور عمودی و اندازه نامعلوم است.
- (۳) نیروی کششی در کابل دوار مساوی  $28 \text{ kN}$  (اندازه معلوم) است.
- (۴) نیروی کششی در کابل مهار نامعلوم است.

با توجه به نکات فوق می‌توان نمودار فضایی را برای مرتبه دوم طوری رسم نمود تا نیروهای معلوم در پی هم قرار گیرند. به این ترتیب که ابتدا نیروی عمودی بار رسم شود و سپس نیروی کششی در طناب فولادی از سر جرثقیل به دوار و بعد سایر نیروها مطابق شکل ۳-۴۹ که نمودار فضایی بازنگری شده نام دارد رسم شود. فضاهای بین نیروها با حروف A، B، C، D نام‌گذاری می‌شوند. اکنون با استفاده از نمودار فضایی بازنگری شده (شکل ۳-۴۹) نمودار برداری قابل رسم است. برای بردارهای معلوم هر چهار کیلو نیوتون برابر یک سانتی‌متر قرار داده می‌شود (لذا طول بردارهای معلوم  $7$  سانتی‌متر است).

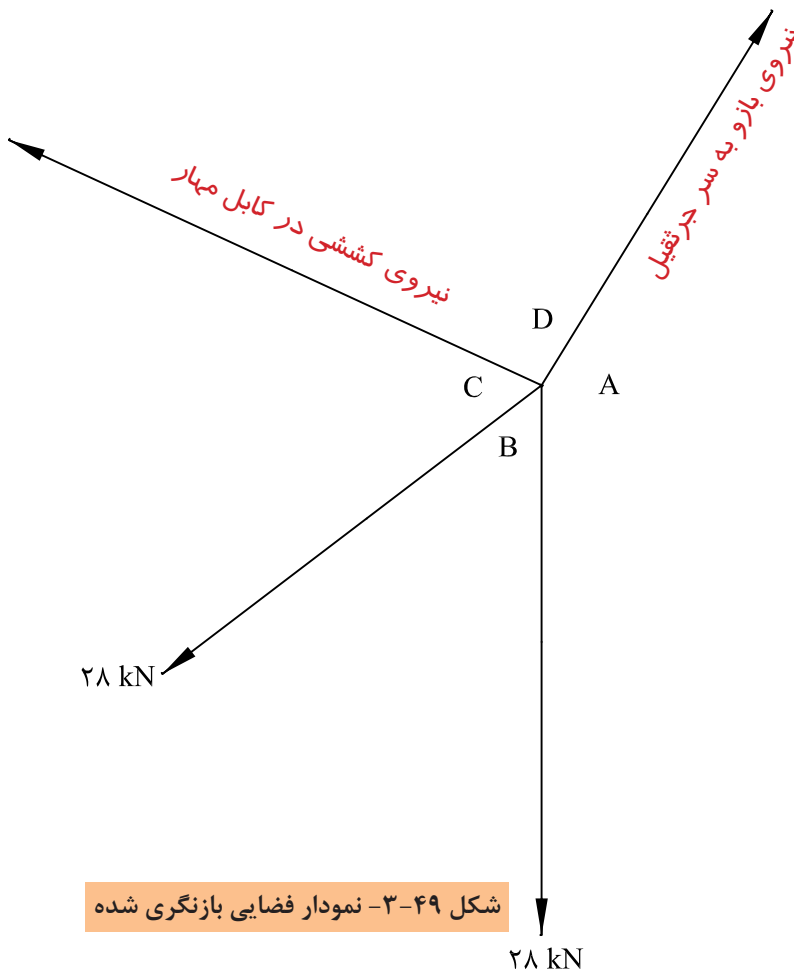
هر چهار بردار (چه بردارهای معلوم و چه بردارهای نامعلوم) دارای جهت معینی می‌باشند. محل تلاقی بردارهای نامعلوم موجب می‌شود که بردارهای نامعلوم قابل اندازه‌گیری شوند. در صورتی که رسم بردارها با دقت انجام شود و با توجه به این که هر چهار کیلو نیوتون برابر یک سانتی‌متر قرار داده شده است اندازه بردارهای نامعلوم به شرح زیر به دست می‌آید.

$$\text{نیروی بازو به سر جرثقیل} = 55/4 \text{ kN}$$

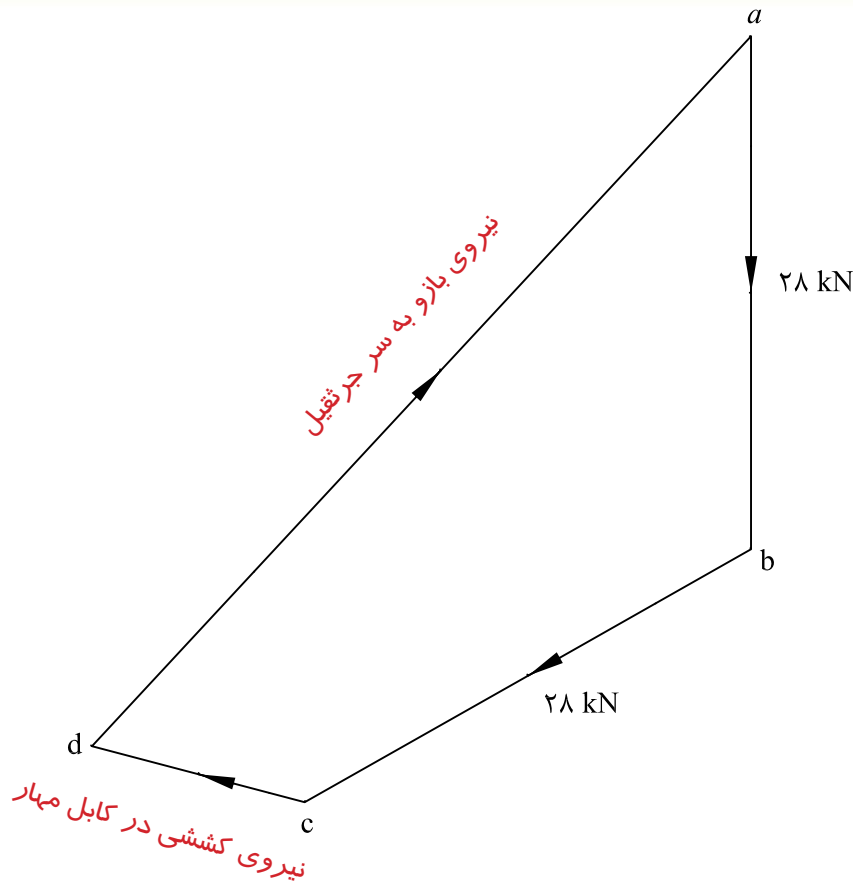
$$\text{نیروی کششی در کابل} = 14/6 \text{ kN}$$

مهار

البته بدیهی است که نیروی بازو به سر جرثقیل در واقع نیروی معادل یا خنثی‌ساز برآیند سه نیروی دیگر موجود در این مسئله است.



شکل ۳-۴۹- نمودار فضایی بازنگری شده



شکل ۵۰-۳- نمودار برداری

## تأثیر جریان آب بر سرعت و راه

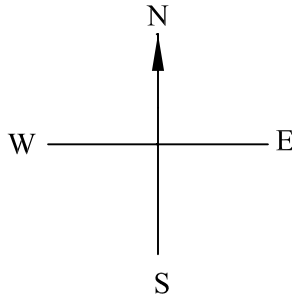
اگر کشتی‌ای که در آب آرام حرکت می‌کند وارد محیطی با «جریان آب» شود سرعت و راه کشتی تغییر می‌کند. به این صورت که سرعت و راه جدید کشتی برآیند کار پروانه و تیغه سکان در آب آرام به علاوه سرعت جریان آب می‌باشند. واژه «تندی» دارای دو مشخصه سرعت و جهت است. این دو مشخصه قابل اندازه‌گیری بوده و در نتیجه «تندی» یک کمیت برداری است (در فصل قبل نیز به این مطلب اشاره شده است) و با بردار نشان داده می‌شود. طول «بردار تندی» طوری اندازه‌گیری می‌شود که سرعت را نشان دهد. در واقع نمودار بردار تندی مانند نمودار بردار نیرو رسم می‌شود. مثال: یک کشتی با سرعت ۱۶ گره دریایی در جهت شمال وارد محیطی با جریان آب به سرعت ۴ گره دریایی به سمت جنوب شرقی می‌شود. مطلوب است برآیند سرعت و راه کشتی.

حل: مطلب مهم در این مثال جهت جریان آب است. وقتی گفته شود جهت جریان جنوب شرقی است به این معنی است

که جهت جریان با محور افقی در ناحیه SE دارای زاویه ۴۵ درجه است (البته چون زاویه ۴۵ درجه نصف زاویه ۹۰

درجه است در این مثال زاویه جریان با محور عمودی هم ۴۵ درجه می‌باشد). بنابراین نمودار فضایی مطابق شکل ۳-۵۱

رسم می‌شود.



نمودار برداری مطابق شکل ۳-۵۲ قابل رسم است. نمودار برداری سرعت و جهت اولیه کشتی (یعنی سرعت و جهت در آب آرام) و سرعت و جهت جریان آب که کشتی وارد آن می‌شود را نشان می‌دهد. بردار برآیند همانطور که قبلاً گفته شد برآیند سرعت و جهت است که «برآیند تندی» نامیده می‌شود.

در نمودار برداری دو ضلع مثلث و زاویه بین آنها معلوم و معین هستند. با استفاده از قانون کسینوس اندازه ضلع سوم و با استفاده از قانون سینوس جهت (زاویه بین بردار برآیند و محور عمودی) محاسبه می‌شوند. مطابق قانون کسینوس می‌توان نوشت:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

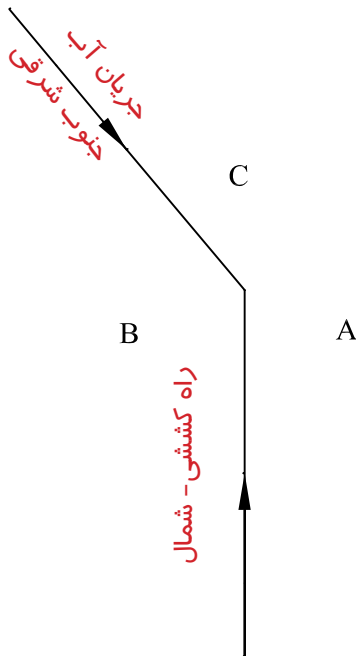
قانون کسینوس برای مثلث شکل ۳-۵۲ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} (ac)^2 &= (ab)^2 + (bc)^2 - 2(ab)(bc) \cos \beta \\ &= 16^2 + 4^2 - 2 \times 16 \times 4 \cos 45^\circ \\ &= 256 + 16 - 90.51 = \sqrt{181/49} \\ \Rightarrow ac &= 13/47 \text{ گره دریایی} \end{aligned}$$

مطابق قانون سینوس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sin \alpha} &= \frac{13/47}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \sin \alpha = 0.21 \\ \alpha &= 12^\circ 7' \end{aligned}$$

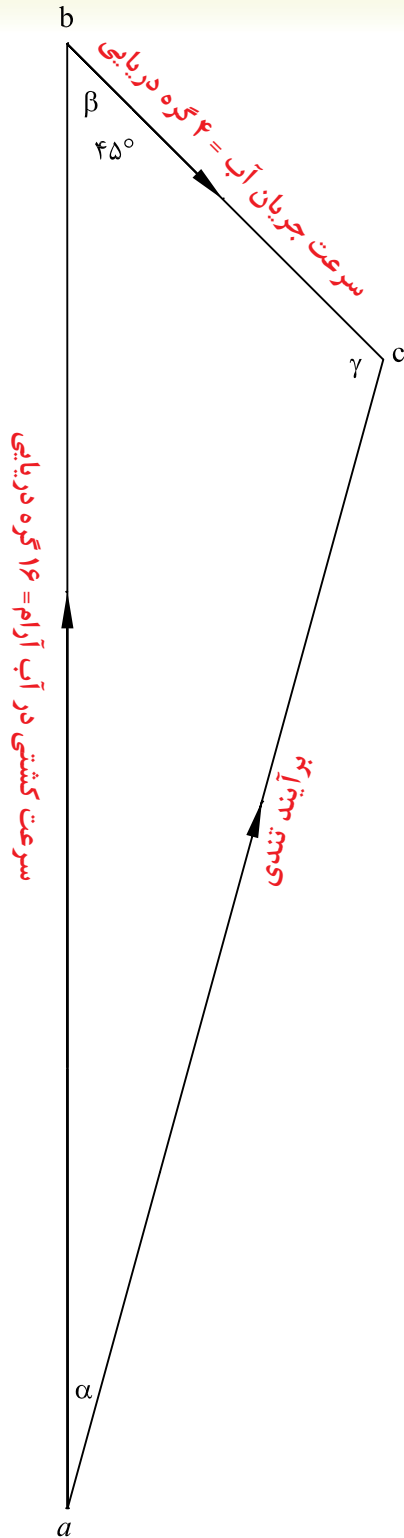
شکل ۳-۵۱ نمودار فضایی



بنابراین برآیند سرعت (سرعت کشتی در جریان آب) و راه کشتی به شرح زیر می‌باشند.

گره دریایی ۱۳/۴۷ = سرعت کشتی در جریان آب

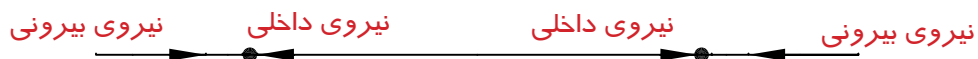
۱۲°۷' = راه کشتی در جریان آب



شکل ۳-۵۲ نمودار فضایی

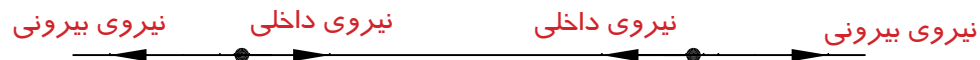
## عضوهای سازه ساده

هر سازه ساده از تعدادی تیر و ستون‌های راست تشکیل می‌شود. هر عضو در دو انتهای خود به عضو دیگر متصل است. اگرچه ممکن است اتصال به وسیله جوش یا پرچ اجرا شود ولی معمولاً در طراحی فرض می‌شود که اتصال به وسیله پین یا لولا برقرار می‌گردد طوری که هر عضو یا مستقیماً تحت کشش است یا تحت تراکم. اگر نیروهای بیرونی که به دو انتهای یک عضو وارد می‌شوند تمایل به کوتاه کردن عضو داشته باشند، عضو تحت تراکم محسوب می‌شود و «عضو تراکمی» نامیده می‌شود. در این عضو نیروهای عکس‌العملی به طرف بیرون به دو انتهای عضو وارد می‌شوند (مانند شکل الف ۳-۵۳).



الف - دو انتهای این عضو تحت تراکم قرار دارند. این عضو، عضو تراکمی نامیده می‌شود. جهت نیروهای بیرونی به طرف داخل و جهت نیروهای عکس‌العملی داخلی به طرف بیرون است.

شکل ۳-۵۳ (الف)



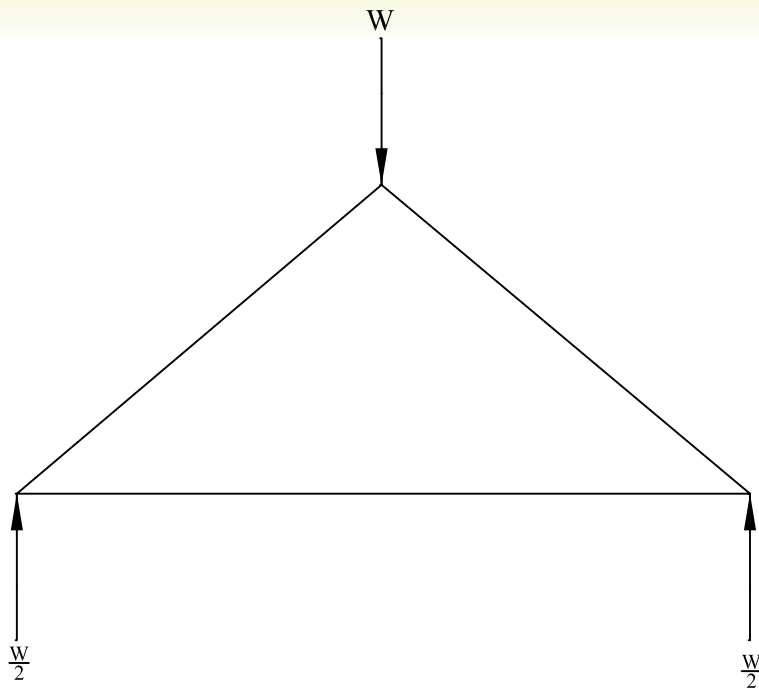
ب - دو انتهای این عضو تحت کشش قرار دارند. این عضو، عضو کششی نامیده می‌شود. جهت نیروهای بیرونی به طرف بیرون و جهت نیروهای عکس‌العملی داخلی به طرف داخل است.

شکل ۳-۵۳ (ب)

اگر نیروهای بیرونی که به دو انتهای یک عضو وارد می‌شود تمایل به طولی کردن عضو داشته باشند، عضو تحت کشش محسوب می‌شود و «عضو کششی» نامیده می‌شود. در این عضو نیروهای عکس‌العملی دو انتهای عضو را به طرف داخل می‌کشند (مانند شکل ب ۳-۵۳).

## تحلیل سازه ساده

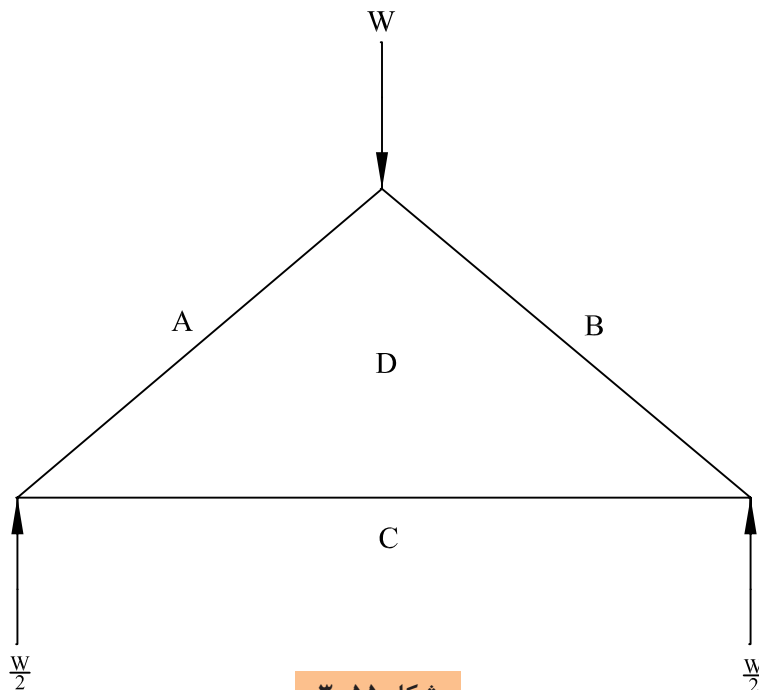
یک سازه ساده و متقارن سقف شیروانی یک خانه (در واقع یک خرپای ساده) را مطابق شکل ۳-۵۴ ملاحظه می‌کنیم. این سازه از یک تیر افقی و دو تیر شیب‌دار تشکیل شده است. فرض می‌شود انتهای تیرها با پین به یکدیگر متصل هستند



و باری به اندازه  $W$  به رأس سازه وارد می‌شود. سازه در دو نقطه دارای تکیه‌گاه است و نیروی عکس‌العمل هر تکیه‌گاه مساوی با نصف  $W$  می‌باشد. با استفاده از روش نامگذاری، ابتدا فضای مابین نیروهای بیرونی نامگذاری می‌شود.  $A$  به عنوان فضای بین تکیه‌گاه چپ و بار  $W$ ،  $B$  به عنوان فضای بین تکیه‌گاه راست و بار  $W$ ،  $C$  به عنوان فضای بین دو تکیه‌گاه و  $D$  به عنوان فضای داخل خرپا نامگذاری می‌شوند.

شکل ۳-۵۴

به این ترتیب شکل ۳-۵۵ حاصل می‌شود.

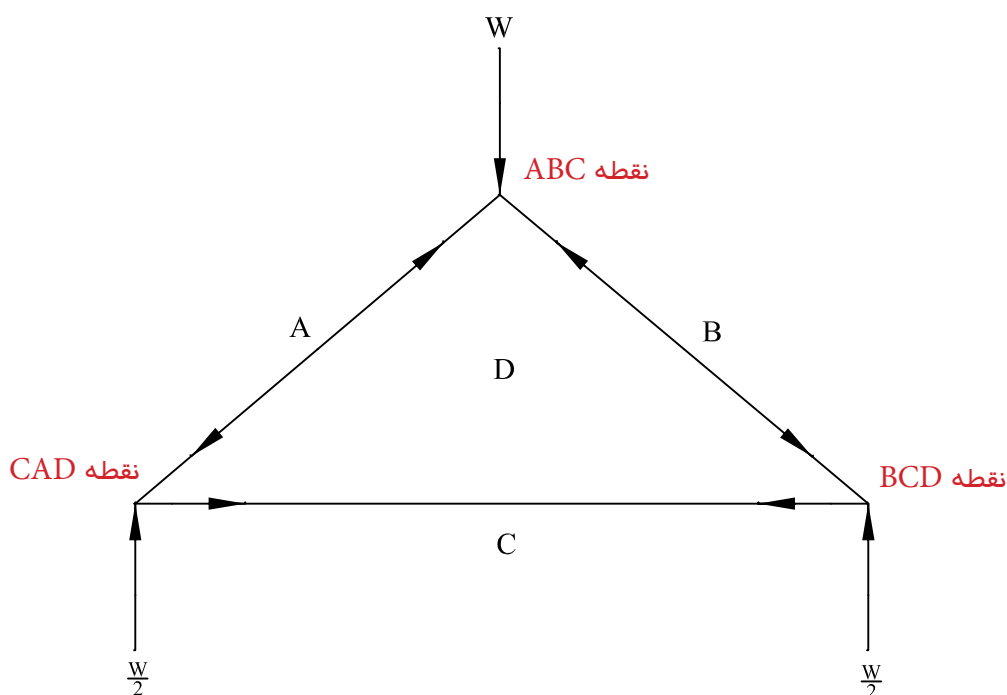


شکل ۳-۵۵

اکنون پیکان‌های نشان دهنده جهت نیروها در هر یک از نقاط تقاطع رسم می‌شود. پیکان‌ها با دلیل گذارده می‌شوند. نقطه برخورد نیروها در تکیه‌گاه سمت چپ نقطه CAD، نقطه برخورد نیروها در تکیه‌گاه سمت راست نقطه BCD و نقطه برخورد نیروها در رأس نقطه ABD نامیده می‌شود.

تکیه‌گاه سمت چپ در نقطه CAD به سمت بالا نیرو وارد می‌کند. اندازه این نیرو (نیروی عکس‌العمل در نقطه CAD) مساوی  $\frac{W}{2}$  است. برای این که این نقطه در تعادل باشد باید نیروی از بالا به پایین وجود داشته باشد. عضو افقی دارای نیروی با مؤلفه عمودی نیست. بنابراین عضو مورب سمت چپ باید به نقطه CAD نیرو وارد کند، نیروی وارده از عضو مورب سمت چپ بر نقطه CAD دارای دو مؤلفه عمودی و افقی است. جهت مؤلفه عمودی به طرف پایین و جهت مؤلفه افقی به سمت چپ است. پس برای این که نقطه تقاطع عضو مورب سمت چپ و عضو افقی در تعادل باشد، باید نیروی افقی در جهت راست بر عضو افقی وارد شود. لذا پیکان عضو مورب به جهت پایین و پیکان عضو افقی به جهت راست رسم می‌شوند.

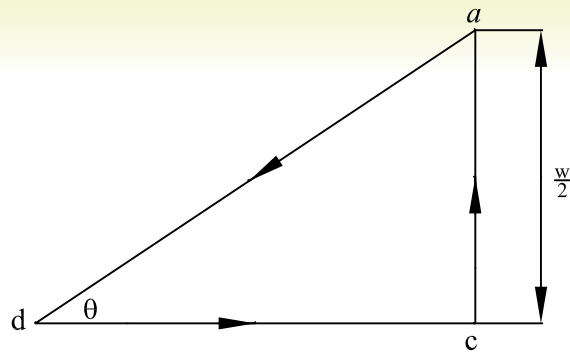
با استفاده از همین شیوه، پیکان‌های نشان‌دهنده جهت نیروها در نقطه تقاطع سمت راست (نقطه BCD) هم رسم می‌شوند. باید توجه کرد دو پیکان یک عضو حتماً در جهت‌های مخالف هم رسم می‌شوند، چون هر عضو یا تحت کشش و یا تحت تراکم می‌باشد. شکل ۳-۵۶ هر سه عضو را با پیکان‌ها نشان می‌دهد.



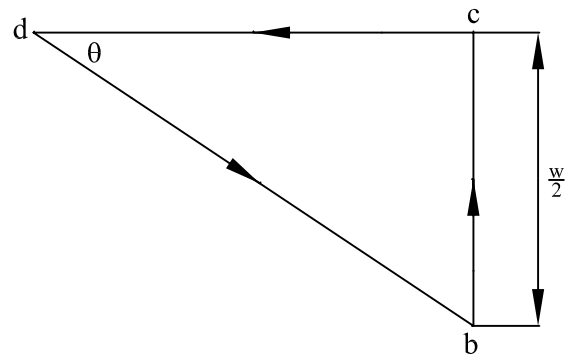
شکل ۳-۵۶

حال مطابق شکل ۳-۵۷ نمودار برداری برای هر نقطه تقاطع به طور جداگانه رسم می‌شود.

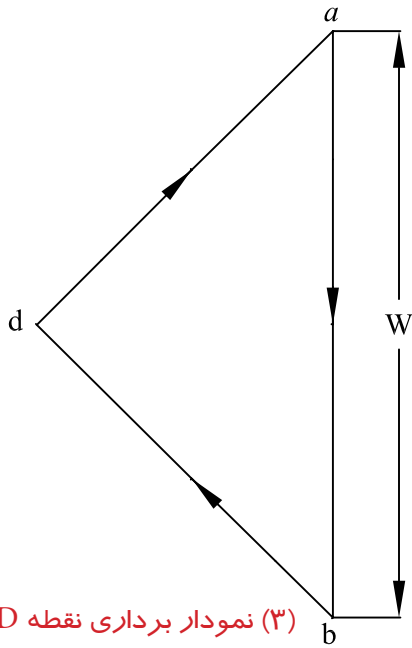




(۱) نمودار برداری نقطه CAD



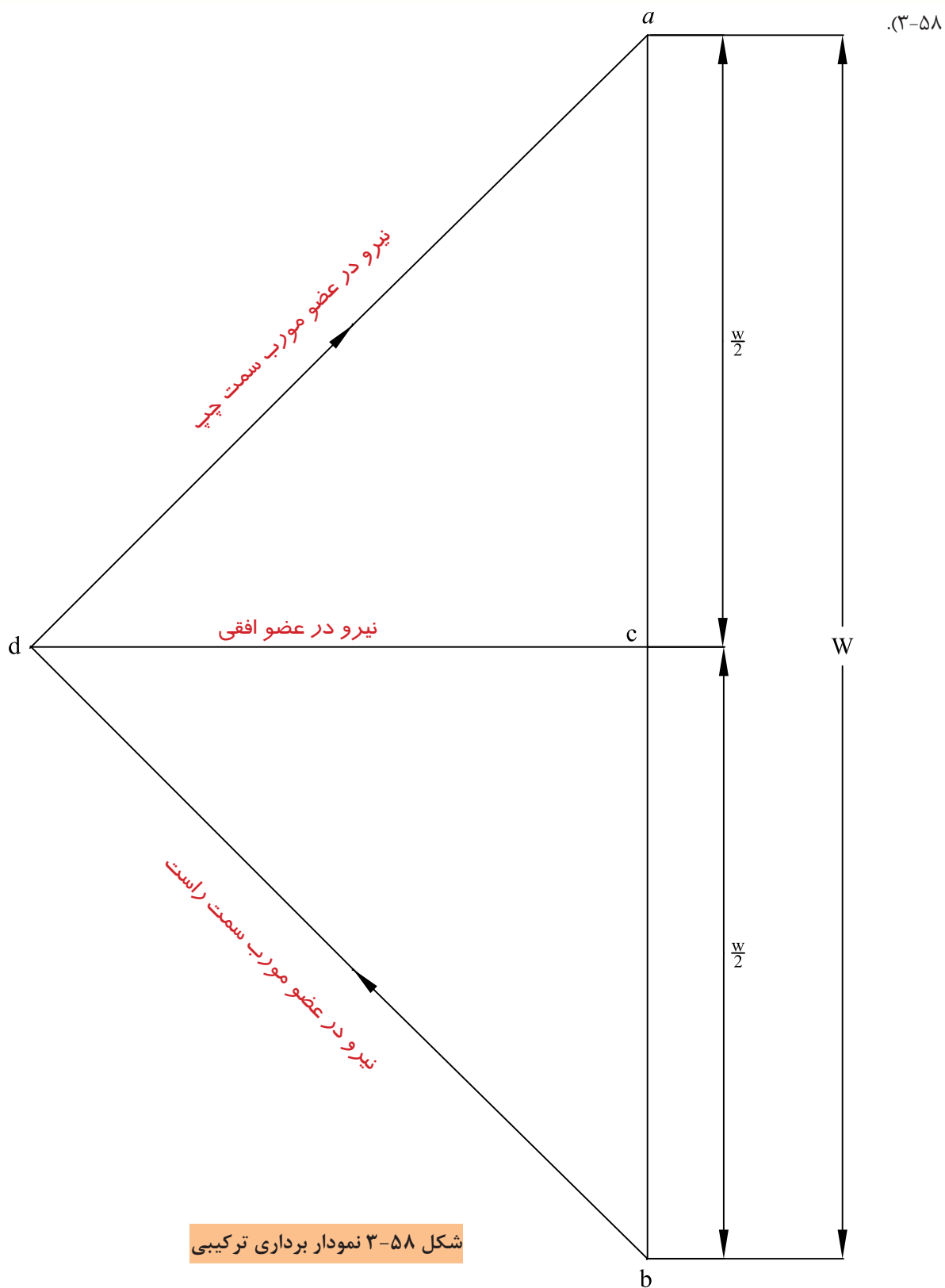
(۲) نمودار برداری نقطه BCD



(۳) نمودار برداری نقطه ABD

شکل ۳-۵۷

با قرار دادن نمودارهای (۱) و (۲) روی نمودار جدید حاصل می‌شود که نمودار برداری ترکیبی نام دارد (شکل



شکل ۳-۵۸ نمودار برداری ترکیبی

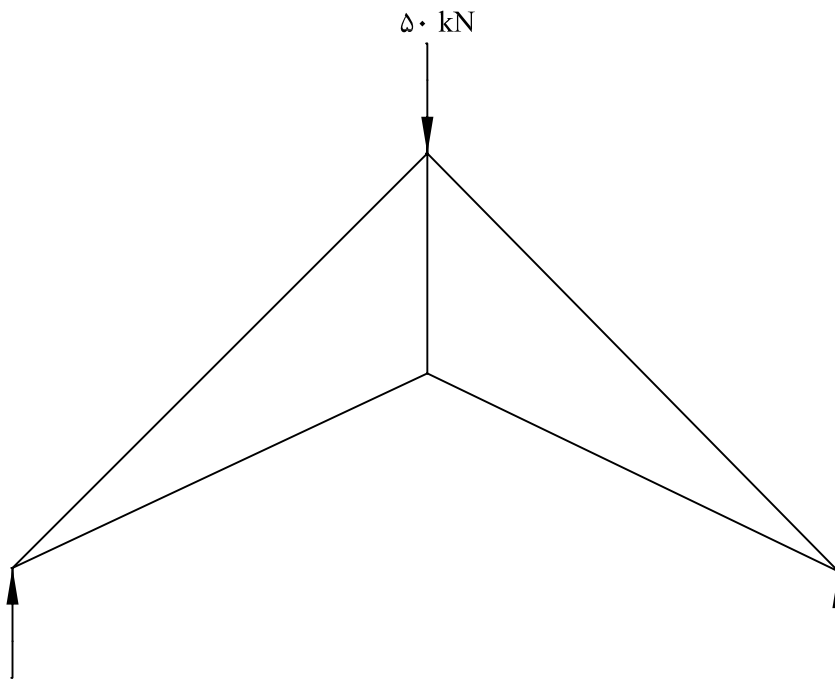
در این نمودار ترکیبی پیکان‌های نشان‌دهنده جهت نیروها حذف می‌شوند زیرا هر کدام از تیرهای سازه در هر دو نقطه انتهای خود نیروهایی در جهت مخالف به وجود می‌آورند.

با توجه به این که طول  $ab$ ،  $bc$  و  $ca$  متناسب با مقدار  $W$  و  $\frac{W}{2}$  رسم می‌شود اندازه نیروهای موجود در هر کدام از تیرهای افقی و مورب قابل اندازه‌گیری می‌باشد.

حال می‌توانیم روش آسانی برای رسم نمودار برداری ترکیبی خرپای ساده شکل ۳-۵۴ معرفی کنیم. به این ترتیب که ابتدا بردار نیروهای بیرونی را رسم می‌کنیم. اولین نیرو، نیروی بار  $W$  است که به صورت خط عمودی  $ab$  قابل رسم است. سپس از نقطه  $b$  به اندازه  $\frac{W}{2}$  روی خط  $ab$  بالا می‌رویم و نقطه  $c$  را تعیین می‌کنیم.  $bc$  نشان‌دهنده نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه راست و  $ca$  نشان‌دهنده نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه چپ است.

اکنون می‌توانیم نمودار برداری هر نقطه تقاطع را رسم کنیم تا نمودار برداری ترکیبی حاصل شود. در مثال بعدی رسم این نمودار را تمرین می‌کنیم.

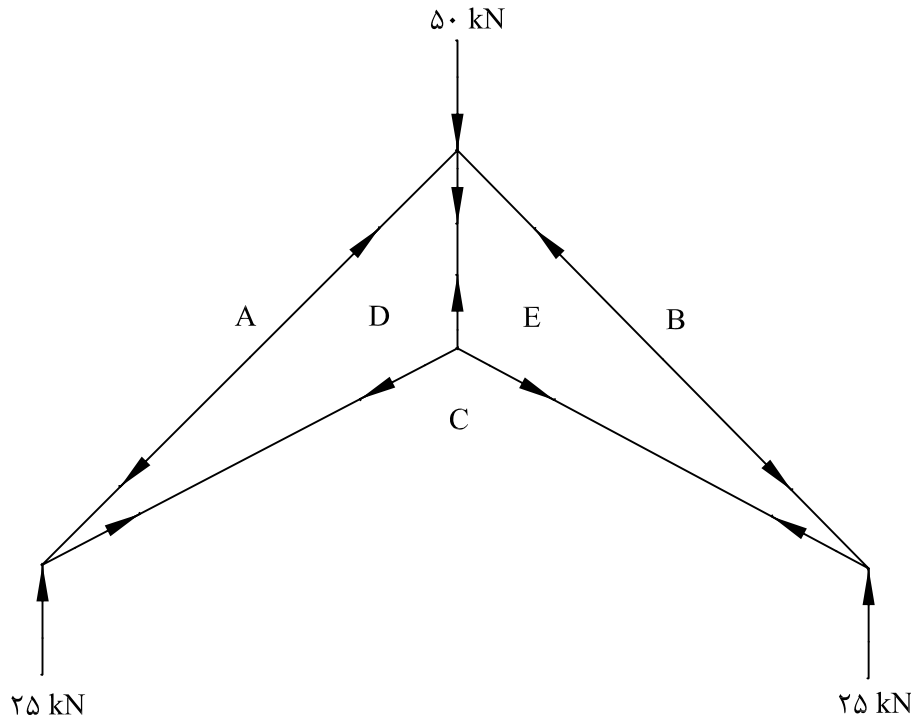
مثال: در شکل ۳-۵۹ نقشه ساده و بدون اندازه سازه یک سقف شیروانی ملاحظه می‌شود. عضوهای شیب‌دار پایینی با زاویه  $15^\circ$  درجه و عضوهای شیب‌دار بالایی با زاویه  $45^\circ$  درجه با محور افقی بنا شده‌اند. سازه در دو طرف دارای تکیه‌گاه است و باری به اندازه  $50 \text{ kN}$  از رأس سازه وارد می‌شود. نمودار برداری سازه را رسم کرده، نیروی موجود در هر عضو را اندازه‌گیری کنید. برای هر عضو تعیین کنید که تحت کشش است یا تحت تراکم.



شکل ۳-۵۹ - نمودار فضایی

راه حل:

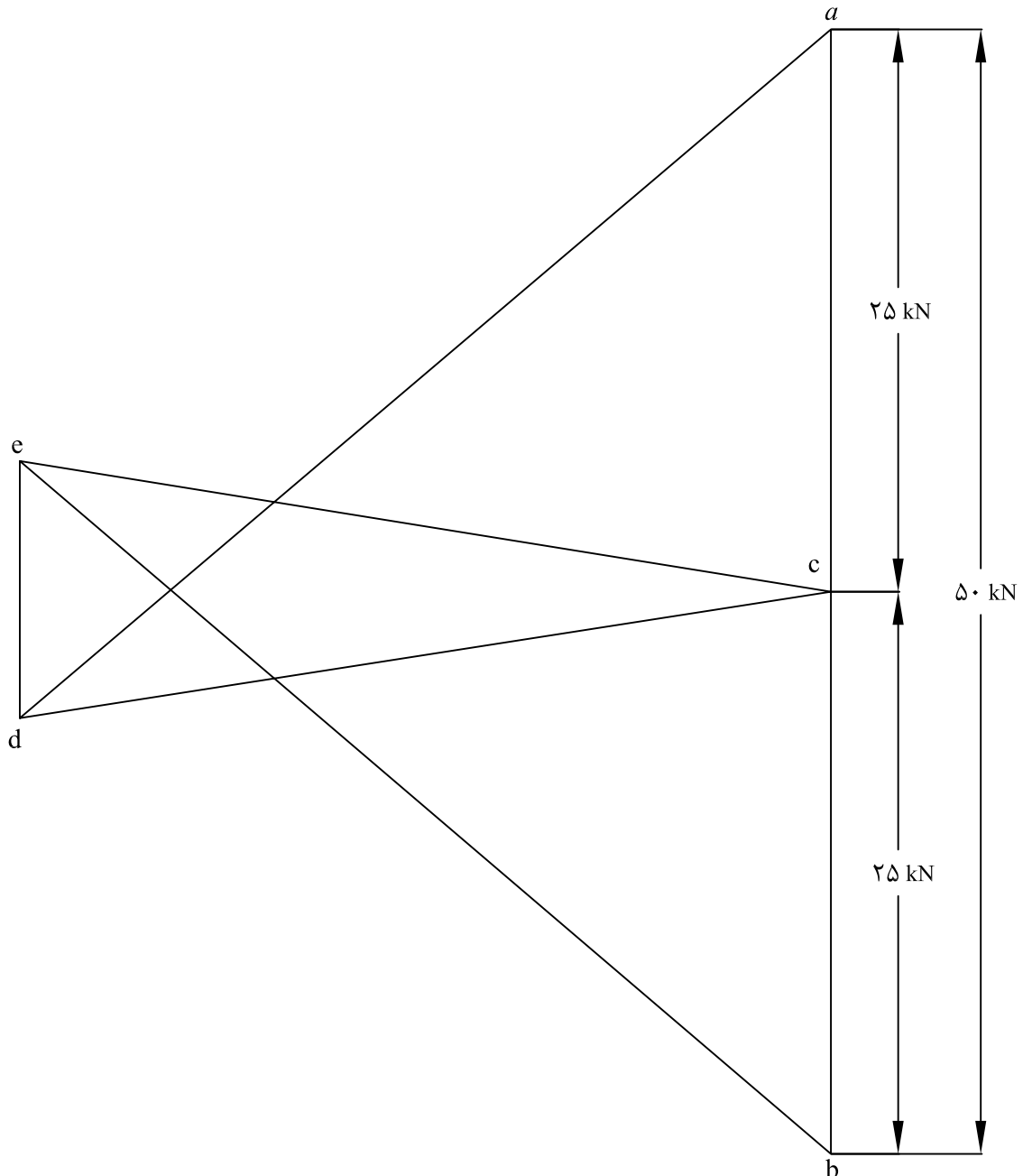
با توجه به متقارن بودن سازه هر تکیه‌گاه نیمی از بار یعنی  $25 \text{ kN}$  را تحمل می‌کند. مطابق شکل ۳-۶۰ نمودار فضایی قابل رسم است. در نمودار فضایی ابتدا نیروهای بیرونی را رسم می‌کنیم و فضاها را نامگذاری می‌نماییم. سپس با استدلال جهت نیروهای موجود در هر عضو را تعیین و پیکان نشان‌دهنده جهت را درج می‌کنیم.



شکل ۳-۶۰ - نمودار فضایی

- برای رسم نمودار برداری به صورت زیر عمل می‌کنیم (شکل ۳-۶۱)
- (۱) بردار  $ab$  بردار  $50 \text{ kN}$  می‌باشد که به رأس سازه وارد شده است.
  - (۲)  $ca$  و  $bc$  به ترتیب بردار نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها می‌باشند.
  - (۳) نمودار برداری نقطه تقاطع CAD به صورت بردار  $ab$  موازی عضو شیب‌دار بالایی سمت چپ از نقطه  $a$  و بردار  $cd$  موازی با عضو شیب‌دار پایینی سمت چپ از نقطه  $c$  رسم می‌شوند.
  - (۴) نمودار برداری نقطه تقاطع BCE به صورت بردارهای  $be$  و  $ce$  رسم می‌شوند.
  - (۵) برای رسم نمودار برداری نقطه تقاطع DEC بردار  $de$  موازی با عضو عمودی سازه رسم می‌شود. سایر بردارهای این نقطه یعنی  $ec$  (موازی با عضو شیب‌دار پایینی سمت راست) و  $cd$  (موازی با عضو شیب‌دار پایینی سمت چپ) قبلاً رسم شده‌اند.

(۶) ملاحظه می‌شود نمودار برداری نقطه ABED (رأس سازه) با اجرای موارد فوق رسم شده است.



شکل ۳-۶۱

با اندازه‌گیری نیروها مطابق مقیاسی که انتخاب می‌کنیم (مثلاً هر سانتی‌متر مساوی ۲/۵ کیلو نیوتون) و با توجه به جهت نیروها اندازه نیروی موجود در هر عضو و نیز تحت کشش یا تحت تراکم بودن عضو به شرح زیر مشخص می‌شود.

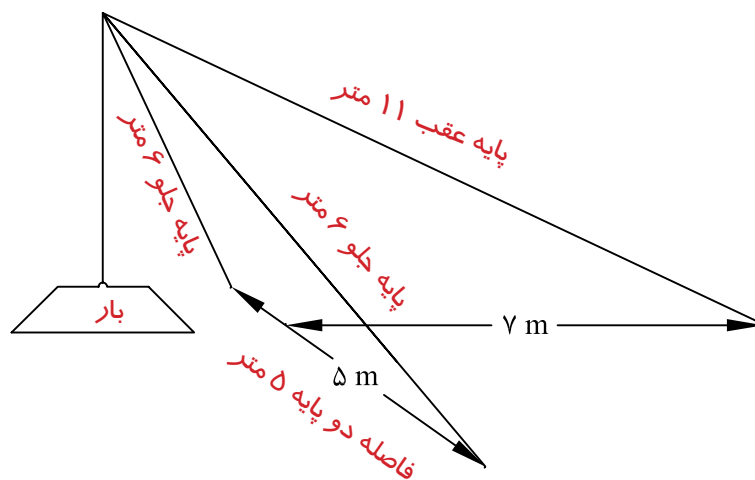
نوع نیرو	اندازه نیرو	عضو
تراکمی	(بر عهده دانش آموز)	AD (عضو شیب‌دار بالایی سمت چپ)
تراکمی	(بر عهده دانش آموز)	BE (عضو شیب‌دار بالایی سمت راست)
کششی	(بر عهده دانش آموز)	DC (عضو شیب‌دار پایینی سمت چپ)
کششی	(بر عهده دانش آموز)	EC (عضو شیب‌دار پایینی سمت راست)
کششی	(بر عهده دانش آموز)	DE (عضو عمودی)

### نیروهای غیر واقع در یک صفحه

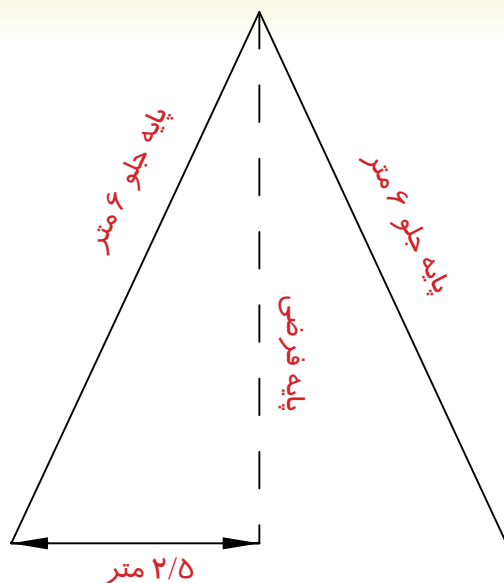
برخی مواقع لازم است به حل مسائلی بپردازیم که در آنها نیروها در یک صفحه مشابه قرار ندارند. در این گونه مسائل می‌توانیم یک عضو فرضی را به جای هر جفت از عضوهای قرینه در نظر بگیریم و مجموعه نیروها را به یک صفحه منتقل کنیم.

مثال: جرثقیلی با سه پایه در شکل ۳-۶۲ نشان داده شده است، طول پایه‌های جلو ۶ متر است که با هم قرینه بوده و با فاصله ۵ متر از یکدیگر به زمین تکیه داده‌اند. طول پایه عقب ۱۱ متر است و تکیه‌گاه آن به فاصله ۷ متر از وسط خط راست مابین پایه‌های جلو قرار دارد. جرم ۱۵/۲۹ تن از جرثقیل آویزان است. اندازه نیروهای موجود در هر پایه را با اندازه‌گیری از نمودار برداری (روش ترسیمی) و نیز با انجام محاسبه تعیین کنید.  
حل ترسیمی: اندازه بار بر حسب کیلو نیوتون برابر است با:

$$۱۵/۲۹ \text{ tonne} \times ۱۰^۳ \text{ (kg)} \times ۹/۸۱ \text{ (N)} = ۱۵۰ \text{ kN}$$



شکل ۳-۶۲



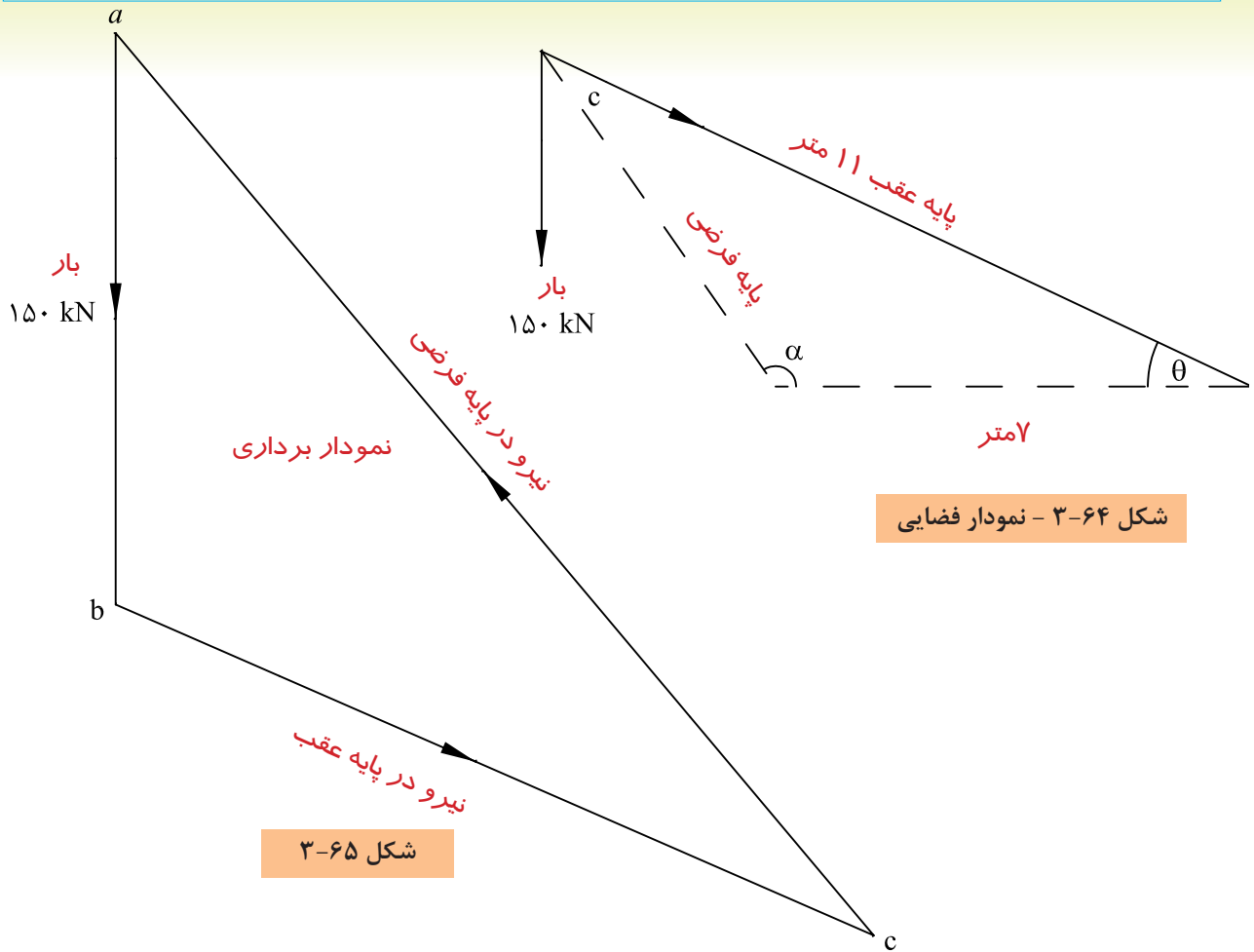
مطابق شکل ۳-۶۳ دو پایه جلو را موقتی با یک پایه فرضی که در صفحه وسط تکیه‌گاه‌های دو پایه جلو قرار دارد جانشین می‌کنیم.

طول پایه فرضی به صورت زیر قابل تعیین است.

$$\text{طول پایه فرضی} = \sqrt{6^2 - 2/5^2} = 5/455 \text{ m}$$

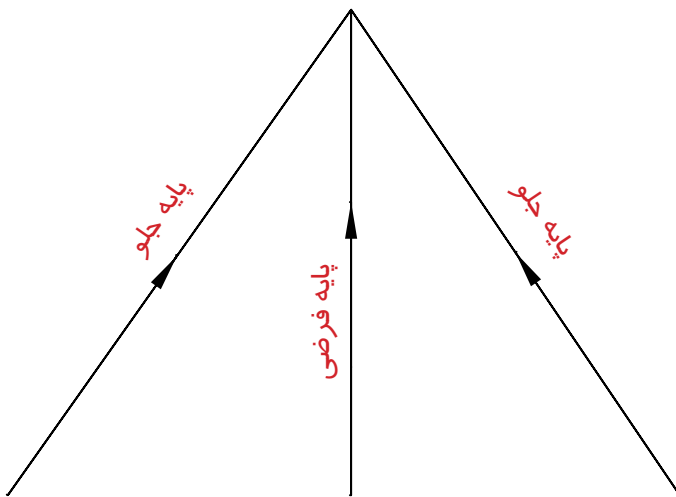
شکل ۳-۶۳

حال نمودار فضایی نیروها قابل رسم است. نمودار فضایی شامل نیروی  $150 \text{ kN}$ ، نیروی پایه عقب و نیروی پایه فرضی جلو (که جانشین دو پایه جلو شده است) می‌شود. هر سه نیروی مزبور در یک صفحه قرار دارند. مطابق شکل ۳-۶۴ نمودار فضایی با توجه به اندازه‌های هر سه عضو و نیروها رسم می‌شود. حال نمودار برداری که در آن بردارها موازی با نیروهای موجود در نمودار فضایی هستند. مطابق شکل ۳-۶۵ قابل رسم است.



شکل ۳-۶۴ - نمودار فضایی

شکل ۳-۶۵

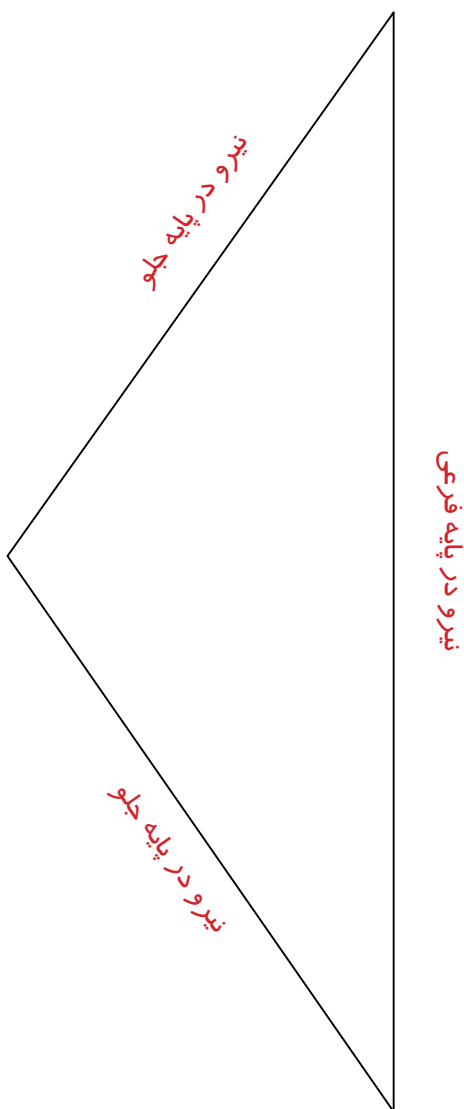


شکل ۳-۶۶

برای رسم نمودار برداری هر یک سانتی متر را مساوی مقدار مناسبی از نیرو بر حسب کیلو نیوتون قرار می‌دهیم و با اندازه‌گیری طول بردارها، نیروی موجود در پایه فرضی و پایه عقب قابل تعیین می‌باشند.

با توجه به این که نیروی موجود در پایه فرضی برآیند نیروهای موجود در دو پایه جلو می‌باشد، مطابق شکل ۳-۶۶ نمودار فضایی مربوطه مجدداً رسم می‌شود. سپس نمودار برداری از روی نمودار فضایی مطابق شکل ۳-۶۷ رسم و با اندازه‌گیری بردارها در نمودار ۳-۶۸ اندازه نیروی هر پایه جلو تعیین می‌شود.





شکل ۳-۶۷

حل محاسبه‌ای: با مراجعه به نمودار فضایی شکل ۳-۶۴ و قانون کسینوس می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos C = \frac{11^2 + 5/455^2 - 7^2}{2 \times 11 \times 5/455} = 0.848$$

با استفاده از جداول مثلثات C برابر ۳۲ درجه می‌باشد.

با استفاده از قانون سینوس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{5/455}{\sin \theta} = \frac{7}{\sin 32^\circ}$$

$$\sin \theta = \frac{5/455 \times 0.5299}{7} = 0.4130$$

با استفاده از جداول مثلثات اندازه تقریبی زاویه  $\theta$  برابر ۲۴ درجه و ۲۴ دقیقه (۲۴°۲۴') می‌باشد. در نتیجه اندازه  $\alpha$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\alpha = 180^\circ - (32^\circ + 24^\circ 24') = 123^\circ 36'$$

اندازه زاویه  $a$  با استفاده از شکل ۳-۶۴ و ۳-۶۵ برابر است با اندازه زاویه  $\alpha$  منهای  $90^\circ$  یعنی:

$$a = \alpha - 90^\circ = 123^\circ 36' - 90^\circ = 33^\circ 36'$$

اندازه زاویه  $b$  با استفاده از شکل‌های ۳-۶۴ و ۳-۶۵ برابر است با زاویه  $\theta = 24^\circ 24'$  بعلاوه  $90^\circ$  یا:

$$b = 24^\circ 24' + 90^\circ = 114^\circ 24'$$

با استفاده از قانون سینوس می‌نویسیم (شکل ۳-۶۵)

$$\frac{\text{نیرو در پایه عقب}}{\sin \alpha} = \frac{\text{بار}}{\sin c}$$

$$\text{نیرو در پایه عقب} = \frac{\sin 33^\circ 36' \times 150 \text{ kN}}{\sin 32^\circ} = 156/6 \text{ kN}$$

برای تعیین اندازه نیرو در پایه فرضی می‌نویسیم:

$$\frac{\text{نیرو در پایه فرضی}}{\sin b} = \frac{\text{بار}}{\sin c}$$

$$\text{نیرو در پایه فرضی} = \frac{150 \times \sin 114^\circ 24'}{\sin 32^\circ} = 257/8 \text{ kN}$$

با استفاده از شکل‌های ۳-۶۶ و ۳-۶۷ می‌نویسیم:

$$\text{نیرو در هر پایه واقعی جلو} = \frac{257/8}{2} \times \frac{6}{5/455} = 141/8 \text{ kN}$$

دانش‌آموز می‌تواند نتایج حاصل از حل مسئله به روش ترسیمی را با حل مسئله به روش محاسبه‌ای مقایسه کند.

## خود آزمایی :



- ۱- نیروی عمودی بالابرنده به اندازه  $90\text{ N}$  بر جسم ساکن وارد می‌شود. همزمان یک نیروی  $120\text{ N}$  جسم را به سمت خود در راستای محور افقی می‌کشد. اندازه و جهت نیروی برآیند را تعیین کنید.
- ۲- دو نیرو بر جسمی اثر می‌کنند. نیروی اول به اندازه  $20\text{ N}$  در راستای افقی جسم را به سمت راست می‌کشد. نیروی دوم به اندازه  $17\text{ N}$  در راستای محور عمودی و به طرف پایین جسم را می‌کشد. اندازه و جهت نیروی سوم که اثر این دو نیرو را خنثی می‌کند تعیین کنید.
- ۳- اندازه و جهت نیروی معادل (خنثی‌ساز برآیند) دو نیرو با مشخصه‌های زیر را تعیین کنید.
  - (۱) نیروی  $10$  نیوتونی در راستای افقی.
  - (۲) نیروی  $20$  نیوتونی که با نیروی اول زاویه  $50$  درجه می‌سازد.
- ۴- سه نیرو که جسمی را به طرف خود می‌کشند در تعادل قرار دارند. جهت نیروی اول به طرف جنوب است. نیروی دوم با زاویه  $75$  درجه شمال شرقی و نیروی سوم با زاویه  $40$  درجه شمال غربی می‌باشند. اگر اندازه نیروی جنوبی  $35$  نیوتون باشد اندازه دونیروی دیگر را تعیین کنید.
- ۵- یک قطعه چوب مکعب مستطیل شکل روی میز افقی بوسیله نیروی  $25\text{ N}$  که دارای زاویه  $20$  درجه با محور افقی (از بالا) است کشیده می‌شود. اندازه مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی مزبور چقدر است؟
- ۶- دو طناب فولادی به طول مساوی از یک تیر افقی آویزان می‌باشند. انتهای هر دو طناب به حلقه‌ای متصل است و از حلقه باری به وزن  $30\text{ kN}$  آویزان است. دو طناب با تیر افقی تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند. نیروی موجود در هر طناب چقدر است؟
- ۷- انتهای دو طناب فولادی به یک شِگِل متصل و باری به اندازه  $25\text{ kN}$  از شِگِل آویزان است. زاویه طناب‌ها با محور

عمودی به ترتیب ۳۲ و ۴۲ درجه است. نیروی کشش در هر طناب چقدر است؟

۸- شافتی به جرم  $5/097$  تن بوسیله دو زنجیر از یک قلاب جرثقیل آویزان می‌باشد. طول هر زنجیر ۴ متر و فاصله بین نقاط اتصال زنجیرها به شافت نیز ۴ متر است. فاصله مرکز ثقل شافت از یکی از نقاط اتصال شافت و زنجیر  $1/25$  متر است. نیروی کششی در هر زنجیر چقدر است؟

۹- طناب فولادی به طول  $25/5$  متر بین دو دیوار عمودی و موازی با فاصله ۲۱ متر از یکدیگر بسته شده است. فاصله دو سر طناب از زمین مساوی و دو نقطه اتصال طناب به دیوارها روبه‌روی هم قرار دارند. قرقره‌ای با بست لغزنده از طناب آویزان می‌باشد. باری به اندازه  $30 \text{ kN}$  بوسیله قرقره حمل می‌شود. یک نیروی افقی قرقره را تا فاصله ۸ متری از یک دیوار حرکت می‌دهد.

مطلوب است؛

(۱) اندازه نیروی کششی در طناب

(۲) اندازه نیروی افقی

۱۰- زاویه بین بازو و پایه عمودی یک جرثقیل بازویی  $40^\circ$  درجه و زاویه بین بازو و مهار  $45^\circ$  درجه است. باری به اندازه

$15 \text{ kN}$  از سر جرثقیل آویزان می‌باشد. اندازه نیروی موجود در بازو و مهار چقدر است؟

۱۱- ابعاد پایه عمودی، بازو و مهار یک جرثقیل بازویی به ترتیب  $9.13, 8$  و  $13.8$  متر است. باری به اندازه  $20 \text{ kN}$  از سر

جرثقیل آویزان است. اندازه نیروها در بازو و مهار را تعیین کنید.

۱۲- طول پایه، بازو و مهار یک جرثقیل بازویی به ترتیب  $4/2, 6/6$  و  $3/6$  متر می‌باشد. باری به اندازه  $45 \text{ kN}$  از کابلی

که از روی قرقره سر جرثقیل می‌گذرد آویزان است و سر دیگر کابل تحت زاویه  $45^\circ$  درجه با محور عمودی در دوار پشت پایه قرار دارد. بار با سرعت یکنواخت بالابرده می‌شود. نمودار برداری نیروها را در سر جرثقیل رسم کرده و مقدار نیرو در بازو و مهار اندازه‌گیری شود؟

۱۳- یک کشتی با سرعت  $18$  گره دریایی در

جهت شرق وارد محیطی با جریان آب به سرعت  $3$

گره دریایی در جهت  $40^\circ$  درجه شمال شرقی می‌شود.

مطلوب است برآیند سرعت و راه کشتی.

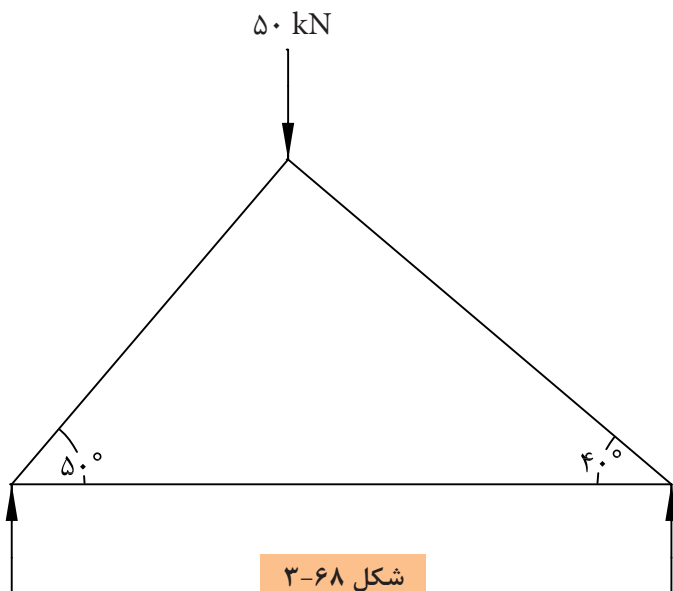
۱۴- باری به اندازه  $50 \text{ kN}$  از رأس سازه شکل

$3-68$  وارد می‌شود. نمودار برداری سازه را رسم

کرده، نیروی موجود در هر عضو را محاسبه نموده و

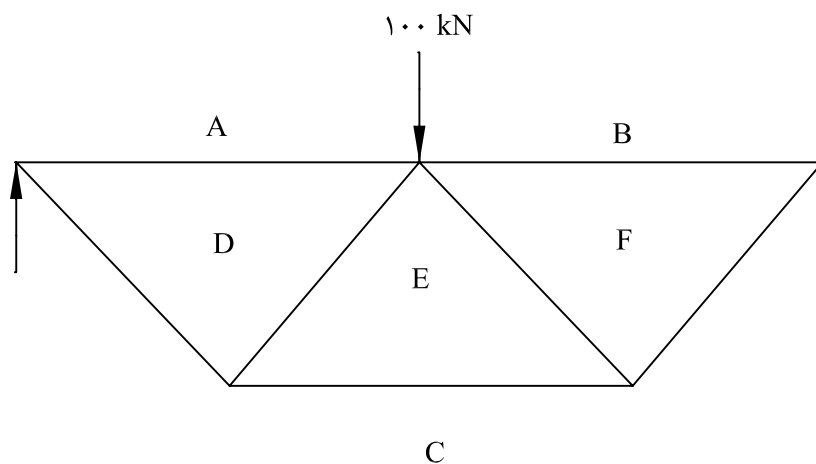
ماهیت نیروها (کششی یا تراکمی) را تعیین کنید.

اندازه عکس‌العمل هر تکیه‌گاه را نیز تعیین کنید.



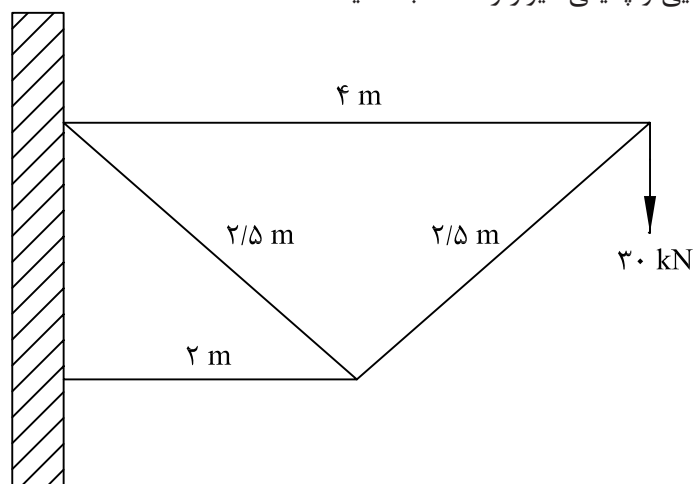
شکل ۳-۶۸

۱۵- در سازه شکل ۳-۶۹ کلیه عضوهای مورب دارای زاویه  $45^\circ$  درجه با عضو مجاور خود هستند. باری به اندازه  $100 \text{ kN}$  در وسط سازه قرار دارد. نمودار برداری نیروهای موجود در اعضا را رسم کرده و اندازه گیری کنید. اندازه نیروها و ماهیت آنها را در یک جدول بنویسید.



شکل ۳-۶۹

۱۶- نمودار برداری سازه شکل ۳-۷۰ را که باری به اندازه  $30 \text{ kN}$  را در انتهای خود حمل می کند رسم کنید. نیروهای عکس العمل نقاط اتصال بالایی و پایینی دیوار را محاسبه کنید.



شکل ۳-۷۰

## فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلام و ایران

اگرچه هیچ شاهد تاریخی برای استفاده از جرثقیل در کشتی حضرت نوح (ع) وجود ندارد ولی محققان عقیده دارند برای ساخت این گونه کشتی به جرثقیلی مشابه این تصاویر نیاز است.



# فصل چهارم

## تجزیه و تحلیل ماشین‌های گردشی

### هدف کلی: تجزیه و تحلیل ماشین‌های گردشی

- هدفهای رفتاری: فراگیر پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود
- ۱- جابه‌جایی زاویه‌ای را در دستگاه‌های گردشی محاسبه کند.
  - ۲- شتاب زاویه‌ای را در دستگاه‌های گردشی محاسبه کند.
  - ۳- تندی زاویه‌ای را در دستگاه‌های گردشی محاسبه کند.
  - ۴- اثر ترمز بر گردش را تجزیه و تحلیل کند.
  - ۵- ارتباط حرکت خطی و حرکت زاویه‌ای را تجزیه و تحلیل کند.

### پیش آزمون (۴)

- ۱- روش محاسبه فاصله پیموده شده یک چرخ طیار چگونه است؟
- ۲- روش محاسبه تندی در چرخ دنده‌ها چگونه است؟



## تجزیه و تحلیل ماشین‌های گردشی

### ۴-۱ - ماشین‌های گردشی

در فصل‌های قبل مفاهیم و مسائل مکانیک کاربردی و به خصوص استاتیک بررسی و مرور شد. در فصل سوم دانش‌آموز موفق به حل مسائل استاتیک با استفاده از روش‌های آسان گردید. یکی از هدف‌های این کتاب حل مسائل کاربردی به شیوه‌های آسان است. در فصل‌های قبل چندان از دانسته‌های قبلی دانش‌آموز از درس فیزیک مکانیک استفاده نشد بلکه قدم به قدم و به تدریج مطالب مختلف با تنوع نسبت به آموخته‌های قبلی و به صورت کاربردی مطرح و بررسی و تجزیه و تحلیل گردید. اکنون دانش‌آموز آمادگی دارد تا آنچه را که در درس فیزیک مکانیک راجع به شتاب، سرعت، تندی، حرکت، کار، توان، انرژی و اصطکاک آموخته است به شیوه‌ها و روش‌های آسان در آمیزد و مسائل مربوط با ماشین‌ها را که نه تنها در کشتی بلکه در زندگی و کار روزمره با آنها سرکار دارد تجزیه و تحلیل و در نهایت حل نماید. ماشین‌ها نقش مهمی در کار و زندگی در ساحل و دریا دارند. برای مثال نیرو را منتقل می‌کنند طوری که کار مطابق و متناسب با خواسته بشر انجام می‌شود یا اجسام نسبتاً سنگین و حتی سنگین را جابه‌جا می‌کنند. در فصل سوم یک نمونه از این گونه ماشین‌ها (جرثقیل) معرفی شد. در این فصل دستگاه‌های گردشی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند و مسائل مربوط به آنها با استفاده از روش‌های آسان حل می‌شود.

### ۴-۲ - حرکت در ماشین‌های گردشی

در درس اصول مکانیک دریایی با چرخ طیار آشنا شده‌ایم. حرکت خطی و حرکت زاویه‌ای را نیز در درس فیزیک مکانیک آموخته‌ایم. با تعاریف جابه‌جایی، تندی و شتاب در حرکت خطی آشنا هستیم. این تعاریف عیناً برای حرکت زاویه‌ای نیز قابل بیان هستند. حرف یونانی  $\theta$  (بخوانید تتا Theta) نشان دهنده جابه‌جایی زاویه‌ای است. جابه‌جایی زاویه‌ای عموماً بر مبنای رادیان بیان می‌شود.

رادیان اندازه‌ تغییر در موضع زاویه‌ای است. فاصله زاویه‌ای مانند فاصله خطی قابل بیان است. به عبارتی فاصله زاویه‌ای عبارت است از اندازه مجموع زوایایی که با گردش یک جسم چرخشی به وجود می‌آید.

مثال ۱: چرخ طیار شکل ۴-۱ بیست مرتبه در جهت ساعتگرد می‌چرخد. فاصله پیموده شده زاویه‌ای آن چقدر است؟ فاصله را برحسب رادیان و درجه تعیین کنید.

راه حل: فاصله پیموده شده زاویه‌ای را با  $\theta_D$  نشان می‌دهیم.

هر مرتبه چرخش برابر با  $2\pi \text{ radian}$  (که به صورت  $2\pi \text{ radian}$  نشان داده می‌شود) است. برای بیست مرتبه چرخش

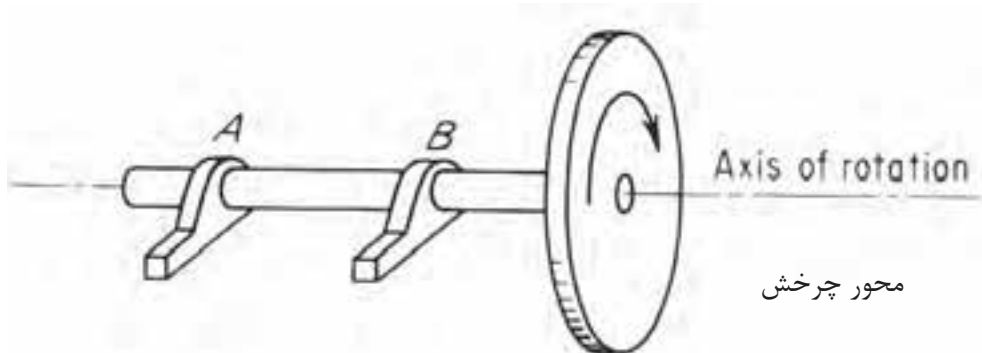
داریم:

$$\theta_D = 20 (2\pi \text{ rad}) = 40\pi \text{ rad} = 125.6 \text{ rad}$$

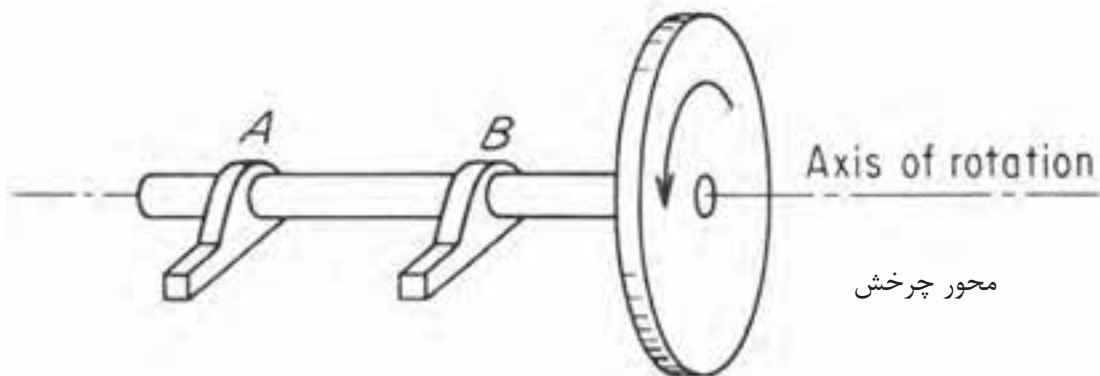
با توجه به اینکه هر  $2\pi$  radian برابر  $360$  درجه است.

$$40\pi \text{ rad} = 20 \times 2\pi \text{ rad} = 20 \times 360 = 7200 \text{ درجه}$$

مثال ۲: چرخ طیار شکل ۲-۴،  $10/5$  مرتبه در جهت پادساعتگرد می‌چرخد. فاصله پیموده شده زاویه‌ای آن چقدر است؟



شکل ۱-۴



شکل ۲-۴

راه حل:

$$\theta_{D_r} = 10/5(2\pi \text{ rad}) = 21\pi \text{ rad} = 65/94 \text{ rad}$$

$$21\pi \text{ rad} = 10/5 \times 2\pi \text{ rad} = 10/5 \times 360 = 3780 \text{ درجه}$$

مثال ۳: با توجه به مثال‌های ۱ و ۲ مطلوب است:

(۱) مجموع فاصله زاویه‌ای پیموده شده به وسیله چرخ طیار

(۲) جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ طیار

راه حل:

مجموع فاصله زاویه‌ای پیموده شده برابر است با:

$$\theta_{D_{1,r}} = 125/6 \text{ rad} + 65/94 \text{ rad} = 191/54 \text{ rad}$$

این فاصله برحسب درجه برابر است با  $\theta_{D_{1,r}} = 7200 + 3780 = 10980$

جابه‌جایی زاویه‌ای عبارت می‌شود از فاصله‌ای که در جهت ساعتگرد پیموده شده است منهای فاصله‌ای که در جهت

پادساعتگرد چرخیده شده است. اگر جهت ساعتگرد را مثبت فرض کنیم داریم:

$$\theta = 125/6 \text{ rad} - 65/94 \text{ rad} = 59/66 \text{ rad} \quad \text{در جهت ساعتگرد}$$

اما اگر جهت ساعتگرد را منفی فرض کنیم داریم:

$$\theta = 65/94 \text{ rad} - 125/6 \text{ rad} = -59/66 \text{ rad} \quad \text{در جهت پادساعتگرد}$$

### ۱-۲-۴- اثر ترمز بر گردش

در این بخش اثر ترمز بر گردش چرخ طیار را بررسی می‌کنیم. در ابتدا سه رابطه را از درس فیزیک مکانیک مرور می‌کنیم.

$$x = v_f t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (4-1)$$

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} \quad (4-2)$$

$$2ax = v_f^2 - v_i^2 \quad (4-3)$$

$X$  فاصله پیموده شده،  $v_i$  تندی اولیه،  $t$  مدت زمان،  $a$  شتاب،  $v_f$  تندی نهایی می‌باشند. تندی زاویه‌ای را با  $\omega$  (بخوانید امگا) نشان می‌دهیم. میانگین تندی زاویه‌ای را با  $\omega_{ave}$  مشخص می‌کنیم (فاصله طی شده / زمان). میانگین شتاب زاویه‌ای با  $\alpha_{ave}$  نشان داده می‌شود (تفاوت تندی نهایی و تندی اولیه / زمان). برای تجزیه و تحلیل مسائل مربوط به اجسام گردشی از رابطه‌های زیر متناسب با روابط (۴-۱)، (۴-۲) و (۴-۳) استفاده می‌شود.

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (4-4)$$

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} \quad (4-5)$$

$$2\alpha\theta = \omega_f^2 - \omega_i^2 \quad (4-6)$$

$$\theta = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2\alpha} \quad (4-7)$$

$$\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2\theta} \quad (4-8)$$

مثال ۴: چرخ طیار شکل ۴-۱ به وسیله عملکرد یک ترمز در مدت ۱۵ ثانیه به طور یکنواخت از تندی ۱۸۰۰ دور در دقیقه (۱۸۰۰ RPM) در جهت پادساعتگرد می‌ایستد. شتاب زاویه‌ای مؤثر بر چرخ طیار و جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ طیار در مدت ۱۵ ثانیه را محاسبه کنید. RPM اختصار Revolutions Per Minute (تعداد دور در دقیقه) است. راه حل: ابتدا یکاهای تندی اولیه را به رادیان بر ثانیه تبدیل می‌کنیم.

$$\omega_i = 1800 \cdot \frac{\text{rev}}{\text{دقیقه}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{دقیقه}}{60 \text{ ثانیه}} = 60\pi \text{ rad/ثانیه یا } 60\pi \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{0 - 60\pi \text{ rad/s}}{15\text{s}} = -12/5\pi \text{ rad/s}^2$$

علامت منفی شتاب به این معنی است که چرخ طیار دچار واشتاب (شتاب منفی) است و تندی آن کاهش می‌یابد. برای تعیین جابه‌جایی زاویه‌ای در مدت ۱۵ ثانیه از رابطه (۴-۴) استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} \theta &= \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ &= 60\pi(15) - \frac{1}{2} 4\pi(15)^2 \\ &= 450\pi \text{ rad} = 1413 \text{ rad} \end{aligned}$$

مثال ۵: تندی پروانه یک کشتی با شتاب یکنواخت و با انجام ۱۰۰ مرتبه گردش از ۳۰۰ دور در دقیقه (۳۰۰ RPM) به ۵۰۰ دور در دقیقه یا ۵۰۰ RPM می‌رسد. شتاب زاویه‌ای و مدت زمان لازم برای تغییر تندی را تعیین کنید. راه حل: ابتدا مقادیر مربوط به جابه‌جایی و تندی را به ترتیب به رادیان و رادیان بر ثانیه تبدیل می‌کنیم. سپس از روابط ۴-۵ و ۴-۶ برای محاسبه شتاب زاویه‌ای و مدت زمان لازم استفاده می‌کنیم.

$$\omega_i = 300 \text{ RPM} = 300 \times \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ ثانیه}} = 31/4 \text{ rad/s}$$

تبدیل تندی اولیه برحسب رادیان بر ثانیه:

$$\omega_f = 50 \cdot \text{RPM} = 50 \cdot \times \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ ثانیه}} = 52/3 \text{ rad/s}$$

تبدیل تندی نهایی برحسب رادیان بر ثانیه:

تعیین مقدار جابه‌جایی زاویه‌ای طی ۱۰۰ مرتبه گردش پروانه

$$\theta = 100 \cdot (2\pi \text{ rad}) = 200 \cdot \pi \text{ rad} = 628 \text{ rad}$$

تعیین شتاب زاویه‌ای (رابطه ۴-۸)

$$\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2\theta} = \frac{(52/3)^2 - (31/4)^2}{2(628)} = \frac{(2735/29 - 985/96)(\text{rad/s})^2}{1256 \text{ rad}}$$

$$\alpha = 1/39 \text{ rad/s}^2$$

تعیین مدت زمان لازم برای افزایش تندی از ۳۰ RPM به ۵۰ RPM (استفاده از رابطه ۴-۵)

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

$$t = \frac{\omega_f - \omega_i}{\alpha} = \frac{(52/3 - 31/4) \text{ rad/s}}{1/39 \text{ rad/s}^2} = 15 \text{ s}$$

### ۳-۴ - ارتباط حرکت خطی و حرکت زاویه‌ای

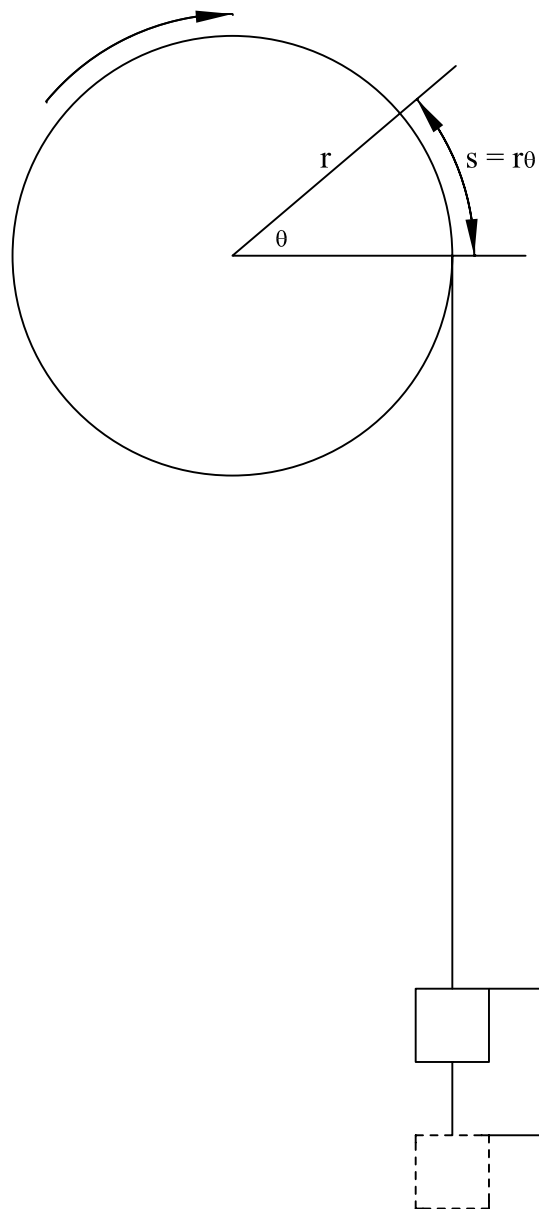
شکل ۳-۴ جسمی را نشان می‌دهد که از طنابی آویزان است. طناب به دور قرقره‌ای با شعاع  $r$  پیچیده شده است. وقتی قرقره در جهت ساعتگرد به اندازه زاویه  $\theta$  می‌چرخد، طناب به اندازه طول  $s$  از قرقره بیرون می‌آید. اگر قرقره یک دور کامل بچرخد، جسم به فاصله‌ای مساوی با محیط قرقره پایین می‌رود ( $s = 2\pi r$ ). مقدار  $2\pi r$  برحسب رادیان می‌باشد.

می‌دانیم  $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ . بنابراین اگر قرقره نیم‌دور بچرخد ( $180^\circ$ ) به اندازه  $\pi \text{ rad}$  چرخیده است. اگر  $\frac{4}{5}$  دور بچرخد ( $90^\circ$ ) به اندازه  $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$  می‌چرخد. اگر فرض کنیم  $\theta$  مساوی  $360^\circ$  درجه باشد در رابطه  $s = 2\pi r$  به جای  $2\pi$  می‌توانیم  $\theta$  را قرار دهیم. در نتیجه خواهیم داشت  $s = r\theta$  (برحسب رادیان). بنابراین همواره می‌توان گفت که چنانچه

قرقره به اندازه زاویه‌ای مانند  $\theta$  بچرخد فاصله‌ای که جسم پایین می‌رود برابر است با

$$s = r\theta \quad (4-9)$$

حال به روابط بین عوامل موجود در حرکت خطی و حرکت زاویه‌ای می‌پردازیم.



شکل ۳-۴

اگر دو طرف رابطه ۴-۹ را بر زمان  $t$  تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{s}{t} = r \frac{\theta}{t}$$

در واقع  $\frac{s}{t} = v$  یا تندی خطی و  $\frac{\theta}{t} = \omega$  یا تندی زاویه‌ای است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$v = r\omega \quad (4-10)$$

اگر دو طرف رابطه 4-10 را نیز بر زمان  $t$  تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{v}{t} = r \frac{\omega}{t}$$

با توجه به اینکه  $\frac{v}{t} = a$  شتاب خطی است و  $\frac{\omega}{t} = \alpha$  شتاب زاویه‌ای است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$a = r\alpha \quad (4-11)$$

مثال 6: مطابق شکل 4-4 وزنه‌های A و B از سیم‌هایی که به دور قرقره دو شیاره پیچیده شده‌اند آویزان‌اند. تندی وزنه A در مدت دو ثانیه با آهنگ یکنواخت از 9 متر در ثانیه به 15 متر در ثانیه می‌رسد. شتاب و مقدار جابه‌جایی وزنه‌های A و B و جابه‌جایی زاویه‌ای قرقره را محاسبه کنید.

حل: برای تعیین  $a_A$  و  $s_A$  از روابط (4-2) و (4-3)  $a = \frac{v_f - v_i}{t}$  و  $s = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}$  استفاده می‌شود.

$$a_A = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{15 - 9}{2} = 3 \text{ m/s}^2 \quad \text{شتاب خطی وزنه A}$$

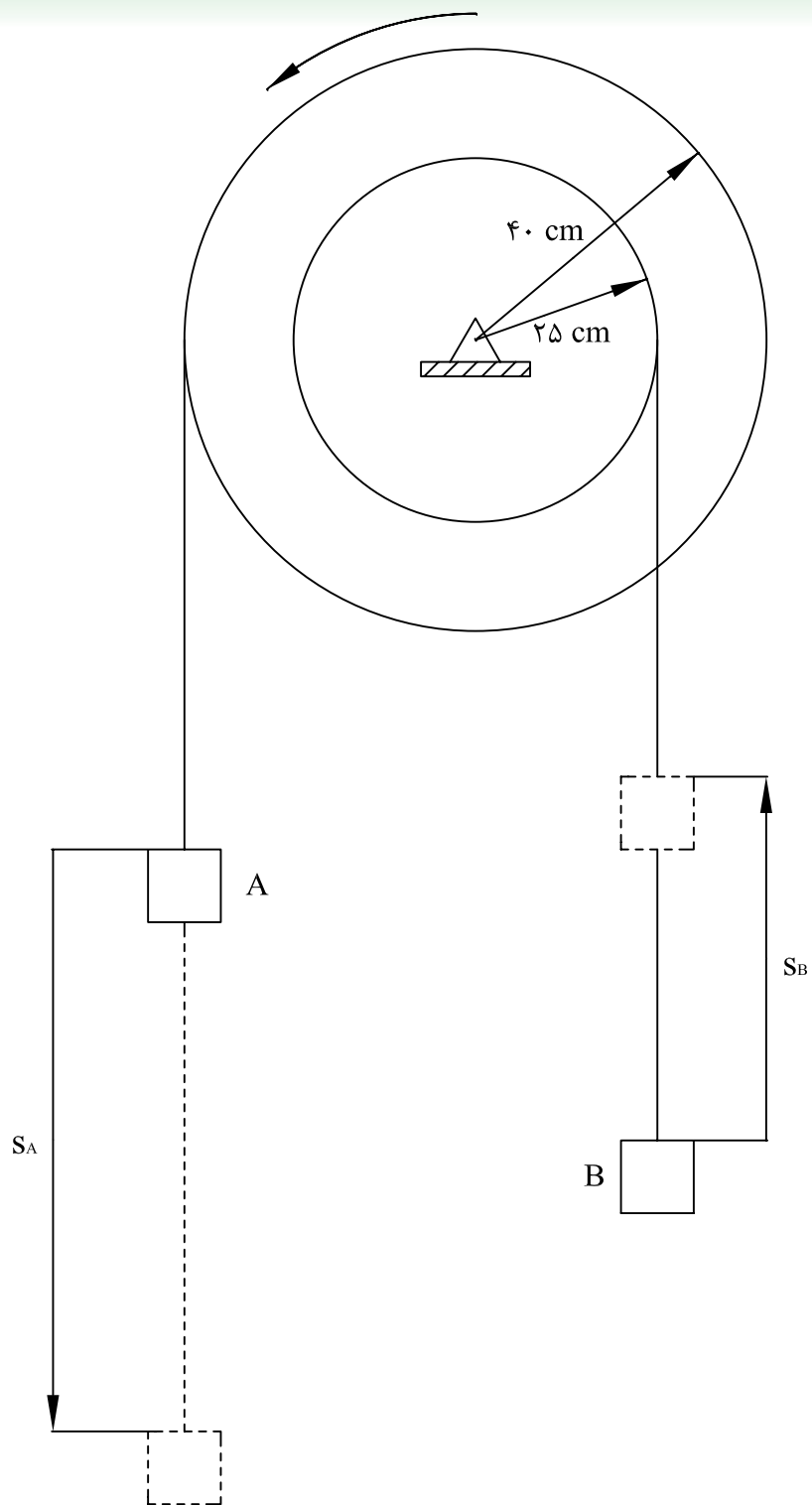
$$s_A = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} = \frac{(15)^2 - (9)^2}{2(3)} = 24 \text{ m} \quad \text{جابه‌جایی خطی وزنه A}$$

برای تعیین جابه‌جایی زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای قرقره از روابط 4-9 و 4-11 استفاده می‌شود.

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{24}{0.4} = 60$$

با توجه به اینکه مقدار  $\theta$  (جابه‌جایی زاویه‌ای) برحسب رادیان است پس  $\theta = 60 \text{ rad}$ .

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{3}{0.4} = 7.5$$



شکل ۴-۴



مقدار  $\alpha$  بر حسب رادیان بر مجذور ثانیه است پس  $\alpha = 7/5 \text{ rad/s}^2$ .  
برای تعیین جابه‌جایی خطی و شتاب خطی وزنه B از روابط  $s = r\theta$  و  $a = r\alpha$  استفاده می‌شود.

$$s_B = r\theta = 0.25(60) = 15 \text{ m}$$

$$a_B = r\alpha = 0.25(7/5) = 1/875 \text{ m/s}^2$$

از دانش‌آموز انتظار می‌رود با توجه به متن درس، روابط معرفی شده و شکل‌های ۳-۴ و ۴-۴ علت اینکه اندازه  $\theta$  برابر  $60 \text{ rad}$  و اندازه  $\alpha$  برابر  $7/5 \text{ rad/s}^2$  می‌شود را تحلیل کند.  
مثال ۷: چرخ دنده A در شکل ۴-۵ موجب چرخیدن دو چرخ دنده دیگر و انتقال نیرو می‌شود. جهت چرخش دنده A پادساعتگرد و تندی زاویه‌ای آن  $1800 \text{ RPM}$  است. تندی زاویه‌ای چرخ دنده‌های B و C را محاسبه کند.  
حل: نکته مهم در این‌گونه مسئله کاربردی توجه به اندازه تندی خطی در نقاط تماس است. اگرچه تندی زاویه‌ای دو چرخ دنده A و B با هم مساوی نیستند ولی تندی خطی نقطه تماس برای هر دو چرخ دنده مساوی است (همواره نقطه‌ای مانند P نقطه تماس دو چرخ دنده است و در این نقطه سرعت خطی هر دو مساوی است). لذا با استفاده از رابطه ۱۰-۴ ( $v = r\omega$ ) می‌توان نوشت:

$$v_P = r_A \omega_A = r_B \omega_B = v_P = r_C \omega_C$$

در نقطه P

$$r_A = 9 \text{ cm} ; \omega_A = 1800 \text{ RPM}$$

$$r_B = 6 \text{ cm}$$

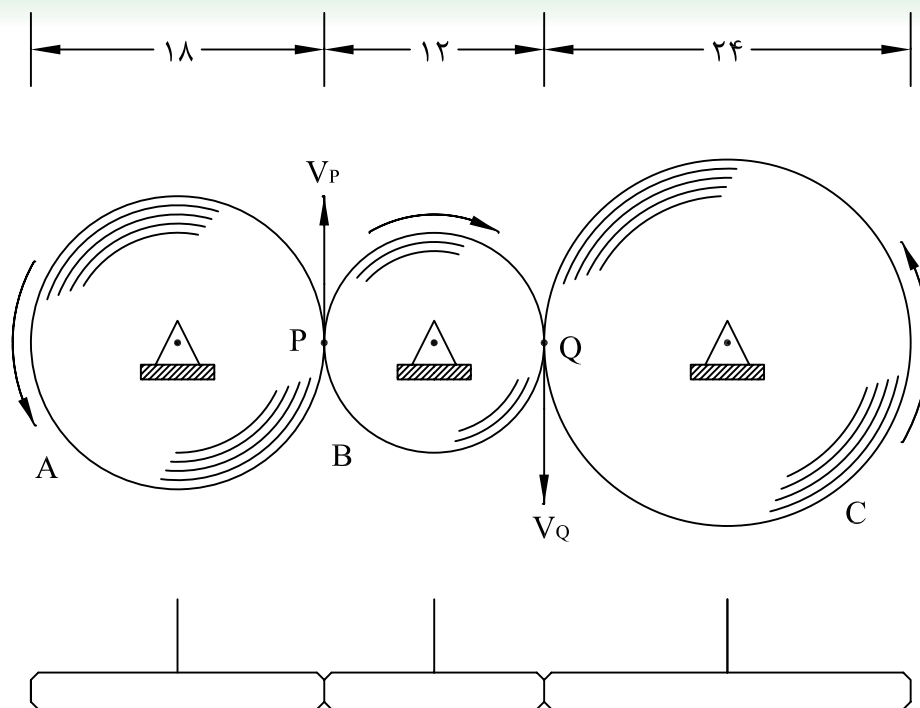
$$9 \times 1800 = 6 \omega_B ; \omega_B = \frac{9 \times 1800}{6} = 2700 \text{ RPM}$$

به نحو مشابه، تندی خطی نقطه تماس دو چرخ دنده B و C برای هر دو چرخ دنده مساوی است لذا می‌توان نوشت:

$$v_Q = r_B \omega_B = r_C \omega_C$$

$$r_C = 12 \text{ cm}$$

$$6 \times 2700 = 12 \omega_C , \quad \omega_C = \frac{6 \times 2700}{12} = 1350 \text{ PRM}$$



شکل ۵-۴

# خود آزمایی :



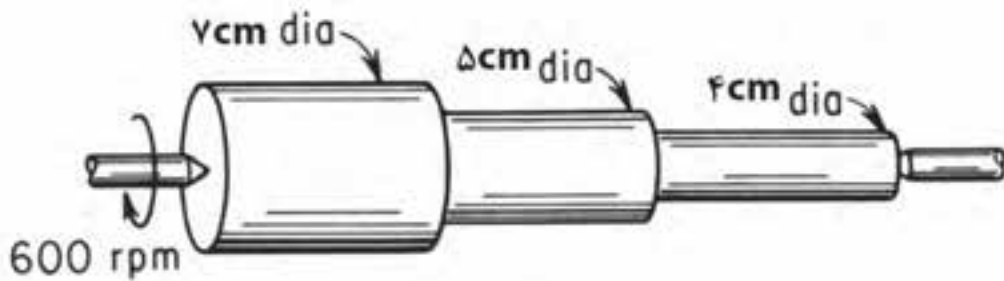
- ۱- چرخ طیار شکل ۲-۴ به مدت ۳۰ ثانیه در جهت ساعتگرد و با شتاب زاویه‌ای  $4 \text{ rad/s}^2$  می‌چرخد. جابه‌جایی زاویه‌ای آن را برای شرایط زیر تعیین کنید.
  - (۱) اگر حرکت از حالت توقف شروع شود.
  - (۲) تندی زاویه‌ای اولیه در جهت ساعتگرد  $10 \text{ rad/s}$  باشد.
  - (۳) تندی زاویه‌ای اولیه در جهت پادساعتگرد  $10 \text{ rad/s}$  باشد.
- ۲- تندی زاویه‌ای میانگین پروانه یک موتور برون نصب را که در عرض ۲۰ دقیقه ۱۰۰۰ دور می‌چرخد بر حسب  $\text{rad/s}$  تعیین کنید.
- ۳- شتاب زاویه‌ای  $100 \text{ RPM/min/s}$  را بر حسب
 

(۱) $\text{rad/s}^2$ دور	(۲) $\text{rad/s}^2$	(۳) $\text{rad/min}^2$
--------------------------	----------------------	------------------------

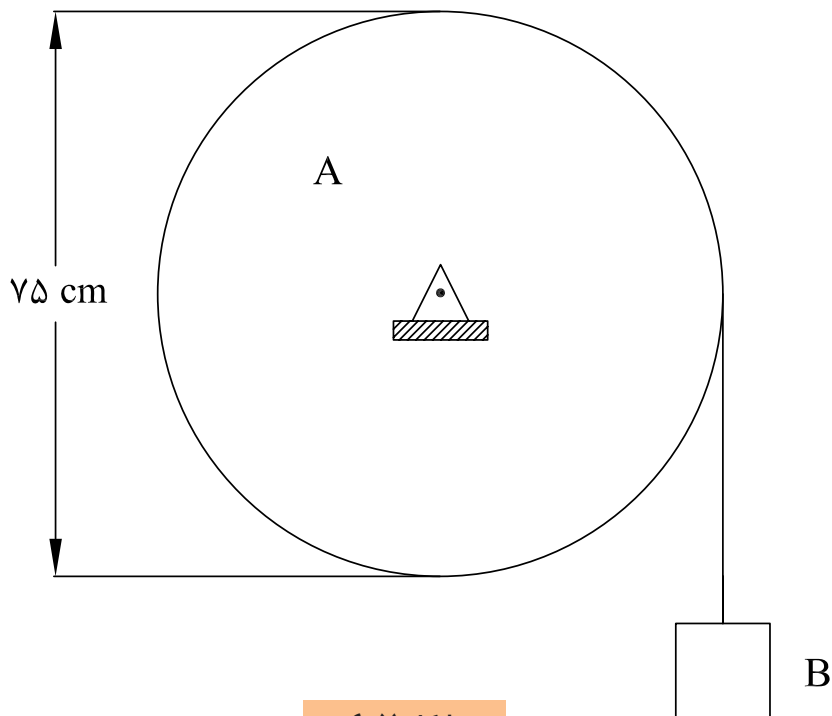
 محاسبه کنید.
- ۴- تندی چرخ طیار شکل ۲-۴ به طور یکنواخت طی ۲۰ دور چرخش از  $60 \text{ RPM}$  به  $12 \text{ RPM}$  می‌رسد. شتاب زاویه‌ای و زمان لازم برای رسیدن به تندی نهایی را محاسبه کنید.
- ۵- شتاب زاویه‌ای و جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ طیار شکل ۲-۴ را در صورتی که تندی آن در مدت ۴۵ ثانیه به طور کامل از  $1800 \text{ RPM}$  ساعتگرد به  $1800 \text{ RPM}$  پادساعتگرد معکوس شود تعیین کنید.
- ۶- تندی یک چرخ طیار در مدت ۲۰ ثانیه از  $1800 \text{ RPM}$  به  $600 \text{ RPM}$  می‌رسد. میانگین وشتاب زاویه‌ای را محاسبه کنید.
- ۷- یک شبانه‌روز در سیاره زهره تقریباً ۳۰ ساعت است. در صورتی که قطر سیاره  $12390$  کیلومتر باشد تندی زاویه‌ای و سرعت خطی نقطه‌ای روی دایره مرکزی آن را محاسبه کنید.
- ۸- قطر سیاره مشتری (بزرگترین سیاره منظومه شمسی)  $91600$  کیلومتر است. این سیاره هر  $9/9$  ساعت یک مرتبه دور خود می‌گردد. سرعت خطی یک نقطه روی خط استوای آن را تعیین کنید.

۹- میله پله‌دار شکل ۶-۴ با سرعت ۶۰۰ RPM در یک دستگاه تراش می‌چرخد. تندی خطی یک نقطه را برحسب متر در ثانیه در موارد زیر محاسبه کنید.

- (۱) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۷ سانتی‌متر است.
- (۲) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۵ سانتی‌متر است.
- (۳) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۴ سانتی‌متر است.



شکل ۶-۴



شکل ۷-۴

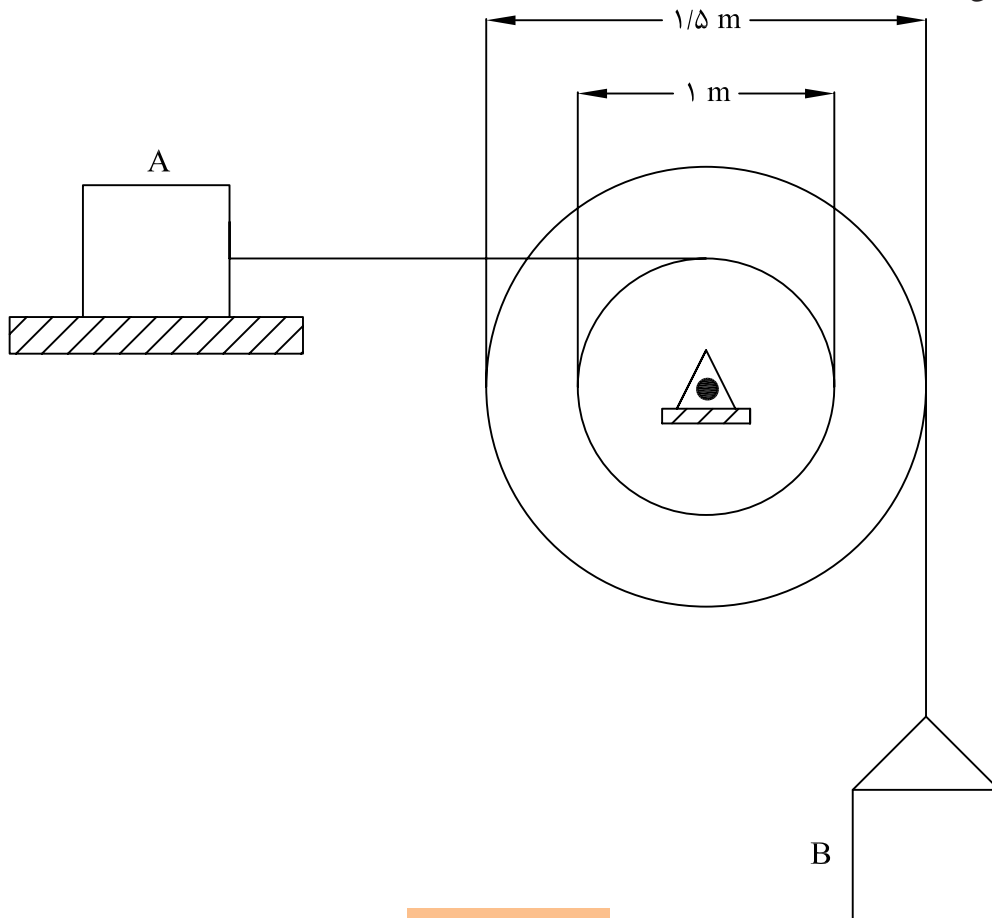
۱۰- تندی وزنه B در شکل ۷-۴ در مدت ۲ ثانیه از صفر به ده متر بر ثانیه می‌رسد. جابه‌جایی زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای قرقره را محاسبه کنید.

۱۱- مطابق شکل ۸-۴ تندی وزنه B در حالی که ۳ متر پایین می‌آید از ۳ متر بر ثانیه به ۹ متر بر ثانیه می‌رسد. شتاب جسم A در این مدت چقدر است؟

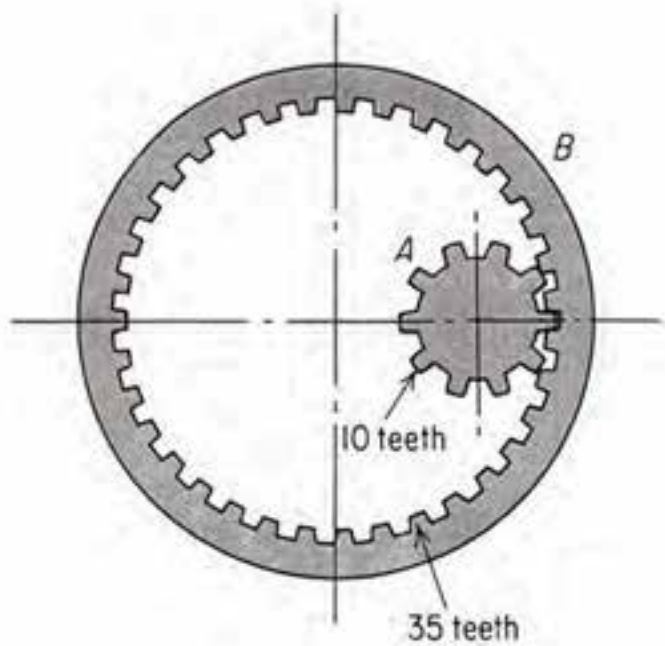
۱۲- در شکل ۹-۴ یک جفت چرخ دنده با دندانه‌های داخلی صاف و محورهای موازی مشاهده می‌شود. تندی چرخ طیار دنده A طی ۲۰ ثانیه با شتاب یکنواخت از حالت توقف به ۱۲۰۰ RPM می‌رسد. جابه‌جایی زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای دنده B را تعیین کنید.

۱۳- چرخ دنده A در مجموعه انتقال نیروی شکل ۱۰-۴ با تندی زاویه‌ای ۶۰۰ RPM می‌چرخد. تندی زاویه‌ای چرخ دنده‌های B و C را تعیین کنید.

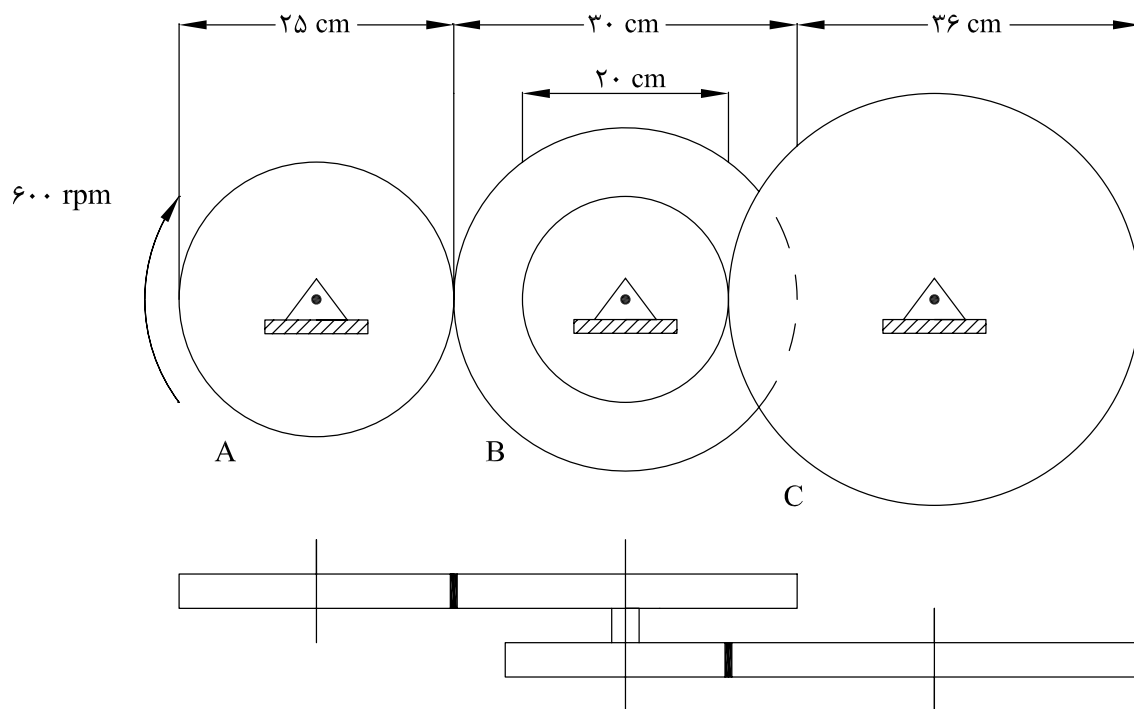
۱۴- تندی چرخ دنده C در شکل ۱۰-۴ طی ده ثانیه از توقف به ۹۰۰ RPM می‌رسد. جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ دنده‌های A و B را تعیین کنید.



شکل ۸-۴



شکل ۹-۴



شکل ۱۰-۴

## فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلام و ایران

تلمبه پارسی (Persian wheel) قرن‌ها به عنوان پیشرفته‌ترین تلمبه بالابر آب استفاده می‌شد. معروف به Saqiya، سقایه یا سقاییت (به کسر سین و فتح یا) به معنای جای آب یا ظرف یا پیمانه آب یا پیشه کسی است که به دیگران آب بدهد. واژه‌های ساقی، سقا و سقاخانه نیز از همین ریشه می‌باشند. سقایه در واقع همان «چرخ آب ایرانی» یا «دولاب» است.



# فصل پنجم

## تجزیه و تحلیل ابزار و ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

### هدف کلی: تجزیه و تحلیل ابزار و ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

هدفهای رفتاری: فراگیر پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود

- ۱- اهرم‌ها را محاسبه و تجزیه و تحلیل کند.
- ۲- قرقره و طناب را محاسبه و تجزیه و تحلیل کند.
- ۳- ترکیب‌های مختلف قرقره و طناب را محاسبه و استفاده کند.
- ۴- نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ترکیب‌های مختلف قرقره و طناب را محاسبه کند.
- ۵- قرقره زنجیری را تجزیه و تحلیل کند.
- ۶- چرخ و محور را تجزیه و تحلیل کند.
- ۷- مسائل قرقره سگکی را حل کند.
- ۸- چرخ و محور دو پله‌ای را تجزیه و تحلیل کند.
- ۹- حلزون و چرخ حلزون بالابر را تجزیه و تحلیل کند.



**پیش آزمون (۵)**

- ۱- روش محاسبه بهره مکانیکی اهرم را بیان کنید.
- ۲- انواع سه گانه اهرم را مثال بزنید.
- ۳- روش محاسبه بهره مکانیکی و نسبت تندی را در قرقره و طناب توضیح دهید.
- ۴- روش محاسبه بهره مکانیکی و نسبت تندی را در قرقره زنجیری توضیح دهید.
- ۵- علت افزایش بهره مکانیکی به واسطه استفاده از قرقره سگکی را بیان کنید.

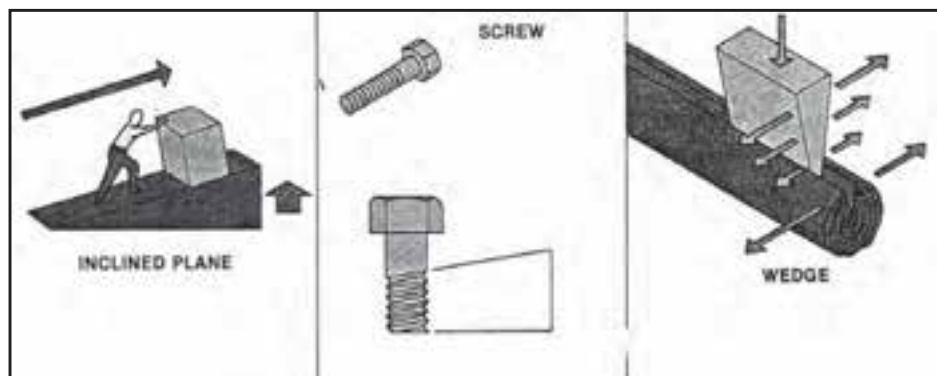
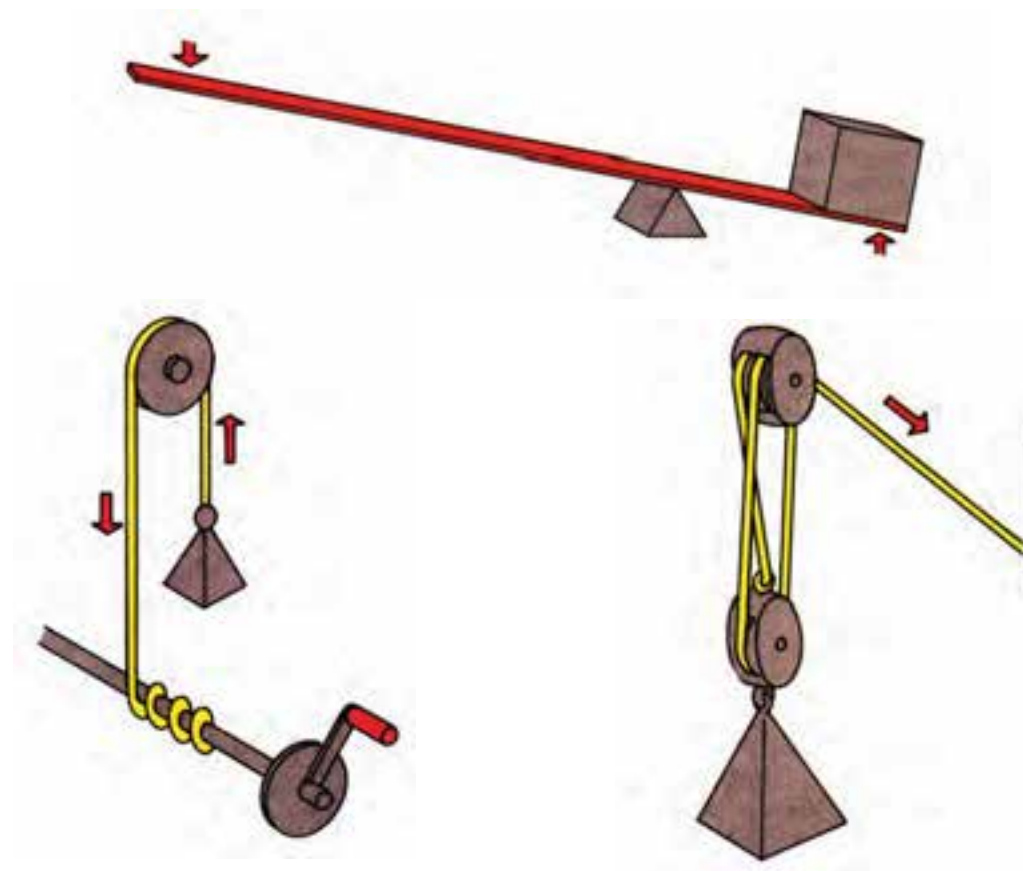
### تجزیه و تحلیل ابزار و ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

ابزارها توانایی بشر را برای انجام فرآیندها افزایش می‌دهند. ماشین‌ها را می‌توان نوعی ابزار و یا مجموعه‌ای از ابزارها تلقی نمود. ابزارها موجب افزایش قدرت، سرعت، راندمان، دقت و بهره‌وری می‌شوند. ما نمی‌توانیم میخ را با دست خالی در یک تخته چوبی فرو کنیم ولی با کمک چکش دستی (یعنی یک ابزار ساده) انجام این فرآیند امکان‌پذیر می‌شود. بطور کلی می‌توان ابزارها را تحت عنوان ابزارهای دستی، ابزارهای دستی برقی و ماشین‌ها طبقه‌بندی نمود. ابزارهای دستی ساده‌ترین نوع ابزارند طوری که نیروی لازم برای اجرای فرآیند به وسیله بشر و بدون کمک وسایل دیگر تأمین می‌شود. اژه دستی و پیچ گوشتی از این قبیل ابزارها هستند. ابزارهای دستی برقی نوع بهبود یافته ابزار دستی‌اند. در این نوع ابزار، دست بشر برای نگهداری و حرکت دادن آن به کار می‌رود ولی قدرت به وسیله یک موتور الکتریکی تأمین می‌شود. اژه برقی دستی نمونه‌ای از این نوع ابزار است.

ماشین‌های ساده مبنای کار ماشین‌ها و سیستم‌های مرکب می‌باشند. اهرم‌ها، قرقره‌ها، چرخ دنده‌ها، سطوح شیب‌دار، پیچ‌ها و گوه‌ها که نمونه‌ای از آنها در شکل ۱-۵ ملاحظه می‌شود جزء ماشین‌های ساده هستند.

ماشین‌های ساده بدون تغییر در مقدار کار، اجرای فرآیند را آسان می‌کنند. در واقع بهره مکانیکی را افزایش می‌دهند طوری که در نهایت اندازه نیرو در انجام کار افزایش می‌یابد. افزایش بهره مکانیکی (یا بزرگ شدن نیرو در انجام کار) به تدریج توضیح داده می‌شود.

بدون یک چکش دستی بشر نمی‌تواند میخ را در دیوار فرو کند. با گرفتن چکش در دست و بالا بردن دست، اهرم ایجاد می‌شود. اهرم بهره مکانیکی را برای ورود نیرو به میخ افزایش می‌دهد و میخ با عملکرد گوه‌ای به دیوار فرو می‌رود. برای بیرون کشیدن میخ از میخ‌کش استفاده می‌شود. دست بشر نیروی کمی بر دسته میخ‌کش وارد می‌کند ولی به علت ایجاد اهرم، نیروی بزرگی در چنگال میخ‌کش موجب بیرون کشیدن میخ می‌شود.



شکل ۱-۵- ماشین‌های ساده

وقتی با مبانی کار ماشین‌های ساده آشنا شویم می‌توانیم طرز کار ماشین‌های مرکب را درک کنیم. در واقع هر ماشین مرکب ترکیبی از دو یا چند ماشین ساده است.

### ۱-۵- اهرم (Lever)

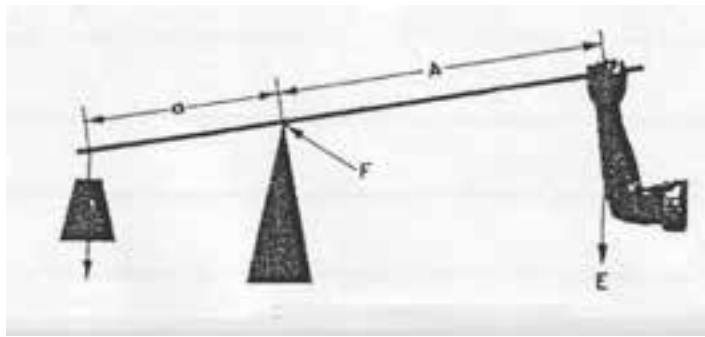
همه ما از کودکی با اهرم آشنا می‌شویم، الاکلنگ نوعی اهرم است که در دو سر آن دو نیرو وارد می‌شود. اهرم دارای سه عامل مهم است.

۱- نیروی ورودی یا نیروی کارگر (Effort)

۲- نقطه اتکا یا مرکز دوران یا تکیه‌گاه (Fulcrum)

۳- نیروی ایستادگی یا نیروی بار یا بار (Resistance)

در شکل ۲-۵ یک اهرم ساده ملاحظه می‌شود. نیروی کارگر (E) در یک سر اهرم در فاصله A با نقطه اتکا (یا مرکز دوران F) عمل می‌کند و موجب جابه‌جایی بار (R) می‌شود. در این اهرم اندازه کار برابر است با:  $R \times a = E \times A$



شکل ۲-۵- اهرم ساده

با توجه به این که  $a$  کوچک‌تر از  $A$  می‌باشد بنابراین مقدار بار بزرگتر از نیروی کارگر است. ملاحظه می‌شود اهرم ساده مزبور دارای بهره مکانیکی است که در مثال به آن می‌پردازیم.

مثال: در اهرم ساده شکل ۲-۵ فاصله  $A$  برابر  $0/5$  متر و فاصله  $a$  مساوی  $0/1$  متر است. اگر مقدار بار  $490$  نیوتون باشد

مقدار نیروی کارگر (E) چقدر است؟

$$R \times a = E \times A$$

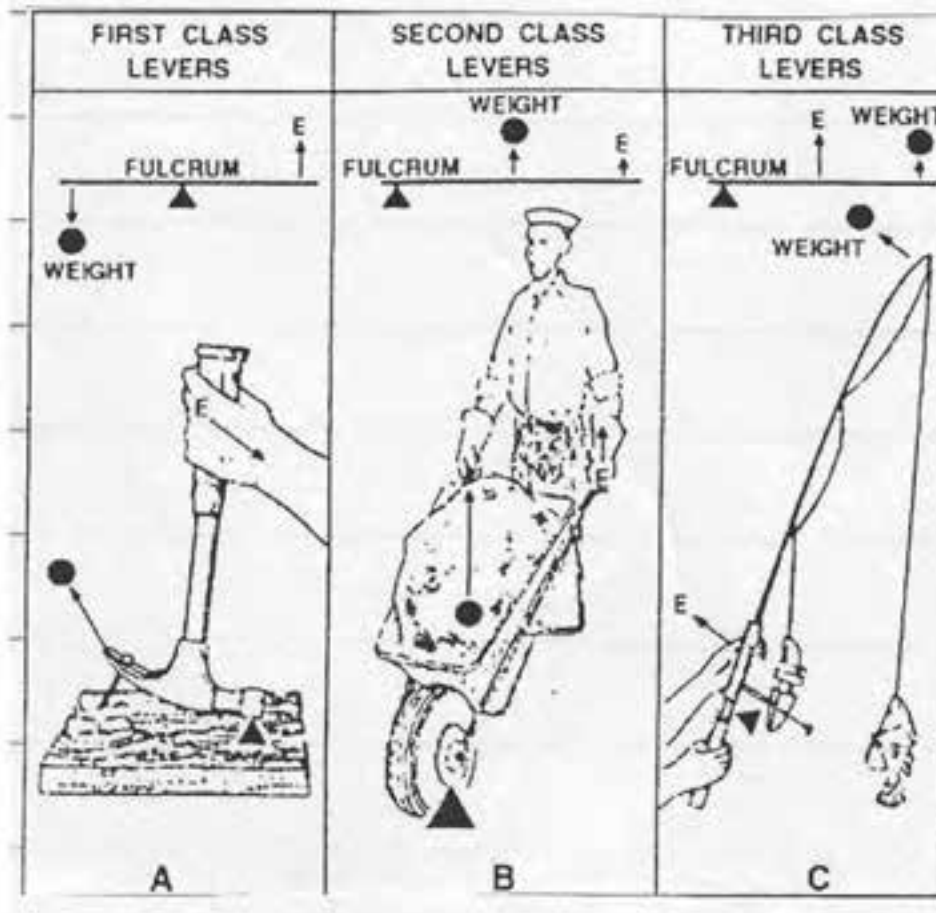
حل:

$$490 \times 0/1 = 0/5 \times E$$

$$E = 98 \text{ نیوتون}$$

## ۵-۱-۱- انواع اهرم

در شکل ۵-۳ سه نوع اهرم نشان داده شده است. نوع اهرم با توجه به محل قرارگیری نقطه اتکا یا مرکز دوران نسبت به نیروی کارگر و نیروی بار تعیین می‌شود.



شکل ۵-۳- انواع سه‌گانه اهرم

## ۵-۱-۱-۱- اهرم نوع اول

در اهرم نوع اول (مطابق بخش A در شکل ۵-۳) نقطه اتکا بین نیروی کارگر و نیروی مقاوم (بار) قرار دارد. در این شکل از چکش میخ‌کش برای بیرون کشیدن میخ استفاده می‌شود.

الاکلنگ نمونه خوبی از اهرم نوع اول است. در این نوع اهرم مقدار نیروی بار و فاصله آن از نقطه اتکا (یا تکیه‌گاه) با

توجه به نیاز فرآیند قابل تغییر است. مثال‌های زیر این مطلب را توضیح می‌دهد.

مثال ۱: شخصی به وزن ۷۰۰ نیوتون در یک سر الاکلنگ نشسته است. طول الاکلنگ دو متر می‌باشد و تکیه‌گاه در فاصله نیم متری این شخص قرار دارد. شخصی با وزن ۵۰۰ نیوتون در طرف دیگر الاکلنگ می‌نشیند. برای ایجاد موازنه، فاصله شخص دوم از تکیه‌گاه چقدر باید باشد؟

حل:

$$R \times a = E \times A$$

$$E = 700 \text{ نیوتون} = \text{وزن شخص اول}$$

$$A = 0.5 \text{ متر}$$

$$R = 500 \text{ نیوتون} = \text{وزن شخص دوم}$$

$$500 \times a = 700 \times 0.5$$

$$a = 0.7 \text{ متر}$$

مثال ۲: در صورتی که وزن شخص اول ۸۰۰ نیوتون باشد فاصله شخص دوم از تکیه‌گاه باید چقدر باشد؟

حل:

$$R \times a = E \times A$$

$$E = 800 \text{ نیوتون} = \text{وزن شخص اول}$$

$$A = 0.5 \text{ متر}$$

$$R = 500 \text{ نیوتون}$$

$$a = \text{فاصله شخص دوم از تکیه‌گاه}$$

$$500 \times a = 800 \times 0.5$$

$$a = 0.8 \text{ متر}$$

بنابراین ملاحظه می‌شود با افزایش نیرو در یک سر الاکلنگ (اهرم نوع اول) فاصله بازوی نیروی مقاوم افزایش می‌یابد. نمونه دیگر از اهرم نوع اول در شکل ۴-۵ ملاحظه می‌شود. در این شکل محل اتکا پارو بر قایق مرکز دوران اهرم می‌باشد. آب به عنوان نیروی مقاوم (بار) و نیروی بازوی ملوان به عنوان نیروی کارگر می‌باشند. بدین صورت پارو یک اهرم نوع اول محسوب می‌شود.

دیلم، قیچی و انبر دست نیز اهرم نوع اول محسوب می‌شوند.

## ۲-۱-۱-۵- اهرم نوع دوم

در اهرم نوع دوم (مطابق بخش B در شکل ۳-۵) نقطه اتکا در انتها و نیروی کارگر در سر اهرم ولی نیروی مقاوم (بار) در بین نقطه اتکا و نیروی کارگر قرار دارد. در این شکل فرغون ملاحظه می‌شود.

مثال ۱: اگر نیروی کارگر بر دسته‌های فرغون در شکل ۵-۵ برابر ۲۲۰ نیوتون در فاصله ۱/۲ متری از نقطه اتکا (چرخ فرغون) باشد و فاصله مرکز ثقل نیروی بار از نقطه اتکا برابر ۰/۳ متر باشد مقدار نیروی مقاوم (بار) که به وسیله ملوان قابل بلند کردن است چقدر است؟

حل:

$$۲۲۰ \times ۱/۲ = R \times ۰/۳$$

$$R = ۸۸۰ \text{ نیوتون}$$

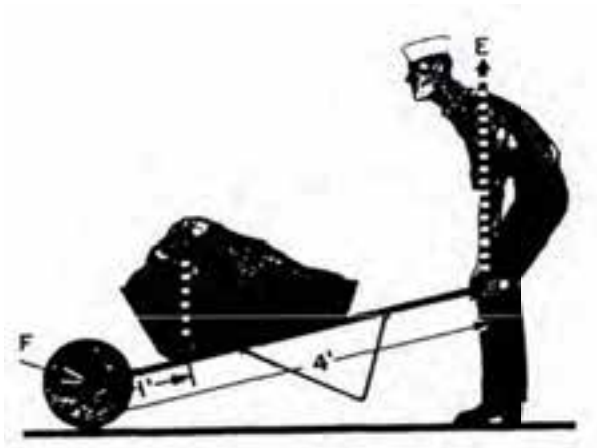
مثال ۲: چنانچه فاصله مرکز ثقل بار از چرخ فرغون ۰/۳۵ متر شود اندازه نیروی کارگر چقدر باید باشد؟

$$۸۸۰ \times ۰/۴ = E \times ۱/۲$$

$$E = ۲۹۳/۳ \text{ نیوتون}$$



شکل ۴-۵- پارو اهرم نوع اول است



شکل ۵-۵- اهرم نوع دوم

بنابراین در صورت افزایش فاصله بار از نقطه اتکا نیروی کارگر باید افزایش یابد.

مثال ۳: چنانچه فاصله مرکز ثقل بار از چرخ فرغون  $0/2$  متر شود اندازه نیروی کارگر چقدر باید باشد؟

$$880 \times 0/4 = E \times 1/2$$

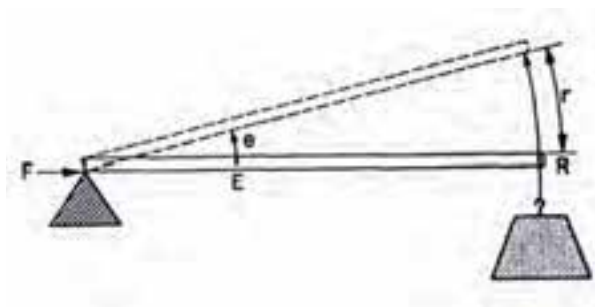
$$E = 146/6 \text{ نیوتون}$$

ملاحظه می‌شود در صورت کاهش فاصله بار از نقطه اتکا نیروی کارگر قابل کاهش است.

### ۳-۱-۱-۵- اهرم نوع سوم

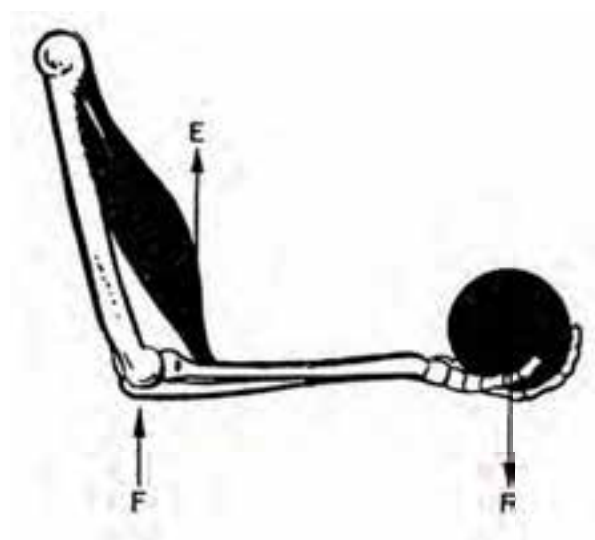
در اهرم نوع سوم (مطابق بخش C در شکل ۵-۳) نیروی کارگر بین نقطه اتکا و نیروی مقاوم (بار) قرار می‌گیرد. در این نوع اهرم سرعت حرکت بار زیاد است ولی نیروی کارگر باید بزرگ باشد. همانطور که در شکل ملاحظه می‌شود نقطه اتکا در محل نگهداشتن دسته قلاب ماهی‌گیری با دست راست صیاد قرار دارد. نیروی مقاوم (بار) که ماهی صید شده می‌باشد در انتهای اهرم است و نیروی کارگر که به وسیله دست چپ صیاد وارد می‌شود بین نقطه اتکا و بار قرار دارد. برای آسان‌تر شدن درک مطلب به شکل ۵-۶ مراجعه شود. همچنان که نیروی E فاصله e را می‌پیماید نیروی مقاوم (بار) R فاصله r را طی می‌کند. ملاحظه می‌شود فاصله r بزرگتر از فاصله e می‌باشد. در نتیجه سرعت حرکت R باید بزرگ‌تر از سرعت حرکت E باشد زیرا R و E دو فاصله مختلف را در مدت زمان مشابه و معین طی می‌کنند. این پدیده عیناً در مورد صیاد و ماهی به وجود می‌آید.





شکل ۶-۵- اهرم نوع سوم

حال به شکل ۷-۵ نگاه کنید. گلوله R به وسیله انگشتان و کف دست نگه داشته شده است. نقطه اتکا F در آرنج قرار دارد و محل اجرای نیروی کارگر E بین آرنج و کف دست است.



شکل ۷-۵- بازو اهرم نوع سوم

مثال: چنانچه در شکل ۶-۵ فاصله E و R از F به ترتیب ۲/۵ و ۴۵ سانتی‌متر و مقدار R برابر ۴۰ نیوتون باشد. مقدار نیروی E چقدر است؟

$$E \times 2/5 = 40 \times 45$$

$$E = 720 \text{ نیوتون}$$

حل:

نتیجه می‌گیریم در اهرم نوع سوم نیروی کارگر بزرگ‌تر از نیروی مقاوم (بار) می‌باشد.

## ۴-۱-۱-۵ - بهره مکانیکی

ملاحظه شد که در اهرم‌های نوع اول و دوم مقدار بار بزرگ‌تر از مقدار نیروی کارگر می‌شود. افزایش نیروها در اهرم نوع اول و دوم به بهره مکانیکی مثبت موسوم است. در اهرم نوع سوم بهره مکانیکی مثبت وجود ندارد و در واقع عیب مکانیکی وجود دارد زیرا نیروی کارگر بیش‌تر از نیروی مقاوم (بار) می‌باشد. بهره مکانیکی (Mechanical Advantage) به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\text{بهره مکانیکی (Mechanical Advantage)} = \frac{\text{Resistance (بار)}}{\text{Effort (نیروی کارگر)}}$$

یا

$$M.A. = \frac{R}{E}$$

بهره مکانیکی در مثال شکل ۴-۵ برابر است با:

$$M.A. = \frac{880}{210} = 4$$

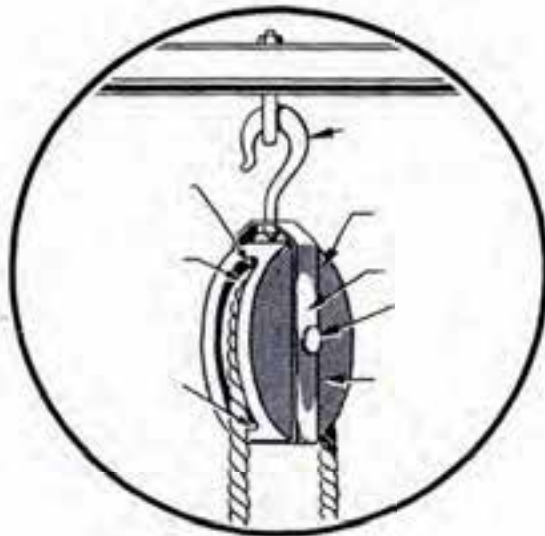
این مطلب به صورت یک قانون برای همه ماشین‌ها صدق می‌کند. لذا در کلیه ماشین‌ها بهره مکانیکی برابر است با خارج قسمت مقدار بار (نیروی مقاوم) بر نیروی کارگر.

البته بهره مکانیکی یک اهرم را می‌توان با تقسیم طول بازوی نیروی کارگر بر طول بازوی نیروی مقاوم نیز به دست آورد یعنی اینکه:

$$\text{بهره مکانیکی (Mechanical Advantage)} = \frac{\text{بازوی نیروی کارگر}}{\text{بازوی نیروی مقاوم}}$$

$$M.A. = \frac{1/2}{0/3} = 4 \quad \text{بهره مکانیکی در مثال شکل ۵-۵ برابر است با:}$$

برای اهرم نوع سوم به مثال شکل ۵-۶ مراجعه می‌کنیم. در این مثال نیروی  $E$  مساوی  $720$  نیوتون و نیروی  $R$  برابر  $40$  نیوتون است. بهره مکانیکی آن برابر است با  $\frac{40}{720}$  یا  $\frac{1}{18}$  یا  $5.56\%$  که کمتر از عدد یک است. بنابراین مجدداً نتیجه می‌گیریم در اهرم نوع سوم بهره مکانیکی به معنی بهره مکانیکی در اهرم نوع اول و دوم نیست و می‌تواند عیب مکانیکی محسوب شود.



- (۱) قلاب
- (۲) صفحه قرقره
- (۳) نوار حافظ
- (۴) پین
- (۵) ورق بیرونی
- (۶) محفظه طناب بخور
- (۷) شیار قرقره
- (۸) نشیمنگاه قرقره

شکل ۸-۵- قسمت‌های مختلف قرقره

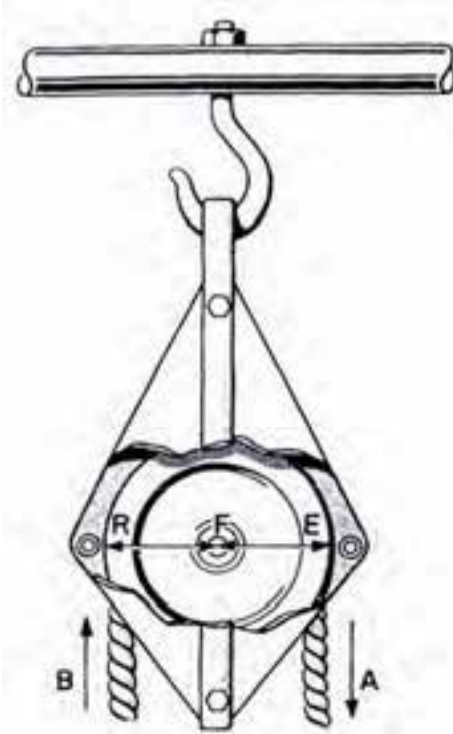
### ۲-۵- قرقره و طناب (Block and Tackle)

قرقره وسیله مدوری است که حول محور خود حرکت دورانی دارد. روی محیط قرقره شیار برای قرار گرفتن طناب وجود دارد. قسمت‌های مختلف یک قرقره در شکل ۵-۸ مشاهده می‌شود. در شکل ۹-۵ از قرقره ثابت تک شیاره برای بالا بردن پرچم استفاده شده است. همچنان که شخص طناب را پایین می‌کشد پرچم بالا می‌رود. این قرقره را قرقره تک شیاره ثابت می‌نامیم. در شکل ۱۰-۵ همین قرقره در محل نصب مشاهده می‌شود. نیروی کارگر  $E$  در طناب  $A$  و نیروی مقاوم  $R$  در طناب  $B$  اعمال می‌شوند. مشاهده می‌شود که اندازه بازوی  $EF$  مساوی بازوی  $FR$  است. در این دستگاه با اعمال نیروی کارگر کوچک جهت کشش تغییر می‌کند.



- (۱) قلاب
- (۲) صفحه قرقره
- (۳) نوار حافظ
- (۴) پین
- (۵) ورق بیرونی
- (۶) محفظه طناب بخور
- (۷) شیار قرقره
- (۸) نشیمنگاه قرقره

شکل ۹-۵- قرقره و طناب در قرقره ثابت تک شیاره



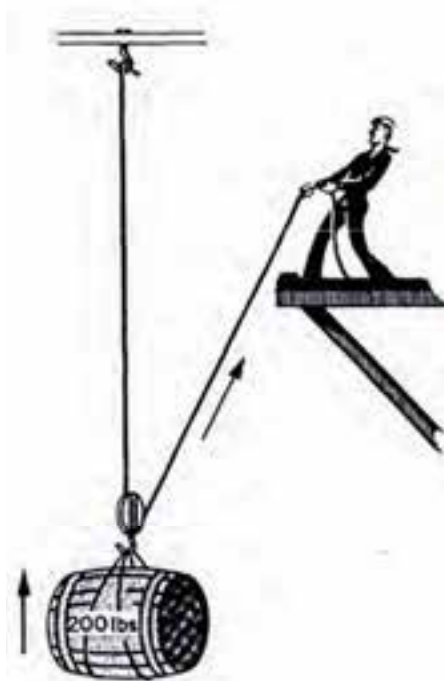
شکل ۱۰-۵- این قرقره فاقد بهره مکانیکی است

قرقره ثابت تک شیاره نوعی اهرم نوع اول با بازوهای مساوی است. بنابراین اندازه بهره مکانیکی در آن برابر با  $\frac{EF}{FR} = 1$  می باشد، لذا اگر در نقطه A طناب با یک نیروی ۵ نیوتونی پایین کشیده می شود در نقطه B طناب با همان مقدار بالا می رود.

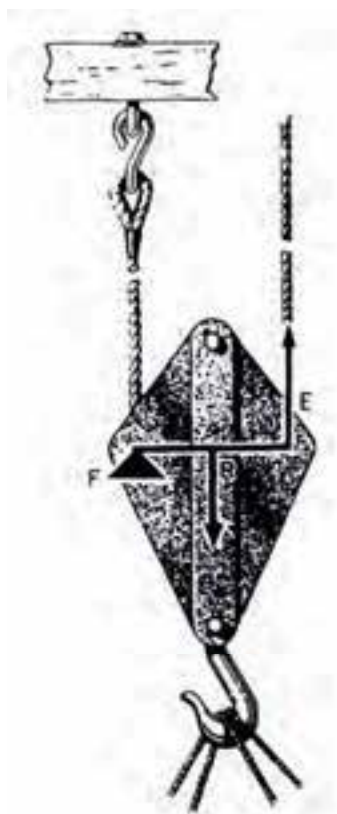
در شکل ۱۱-۵ همان قرقره به کار می رود. در این شکل یک انتهای طناب از سقف آویزان است و انتهای دیگر در دست فرد است. بشکه ای به وزن ۸۰۰ نیوتون به وسیله قرقره و طناب تحمل می شود. با کشیدن طناب، قرقره و بشکه با هم بالا می آیند. وقتی قرقره و طناب به این صورت استفاده شود مجموعه آن قرقره متحرک نامیده می شود. با توجه به این که وزن بشکه ۸۰۰ نیوتون است، هر نیمه از طناب به همراه قرقره ۴۰۰ نیوتون از بار را تحمل می کنند.

بهره مکانیکی برابر است با:

$$M.A. = \frac{R}{E} = \frac{800}{400} = 2$$



شکل ۱۱-۵- قرقره متحرک



شکل ۱۲-۵- قرقره متحرک با نسبت ۲ به ۱

در این دستگاه، قرقره متحرک تک شیاره اهرم نوع دوم می‌باشد. توضیح چگونگی اعمال نیروها در شکل ۱۲-۵ داده می‌شود. نیروی  $E$  روی بازوی  $EF$  که قطر چرخ قرقره است وارد می‌شود. نیروی مقاوم (بار)  $R$  روی بازوی  $FR$  که شعاع چرخ قرقره است مقاومت می‌کند. با توجه به این که اندازه قطر دو برابر شعاع است بنابراین بهره مکانیکی دستگاه برابر ۲ می‌باشد. باید توجه کرد وقتی نیروی  $E$  به اندازه یک متر به طرف بالا حرکت می‌کند بار در محل  $R$  فقط به اندازه نیم‌متر بالا می‌رود. اگرچه در این دستگاه بهره مکانیکی حاصل می‌شود ولی طول کابلی که به وسیله دست کارگر بالا کشیده می‌شود بیش‌تر از فاصله‌ای است که بار بالا می‌آید. البته استفاده از قرقره و طناب به صورت شکل ۱۱-۵ مشکل است و برای بالا کشیدن یک جسم مشابه، از دو قرقره مطابق شکل ۱۳-۵ بهره‌برداری می‌شود. در این سیستم قرقره پایین متحرک و قرقره بالایی ثابت است. قرقره ثابت فقط جهت کشش را تغییر می‌دهد و بهره مکانیکی دو برابر می‌باشد.

مجموعه قرقره و طناب را می‌توان برحسب نیاز و بهره مکانیکی مورد نظر استفاده کرد.



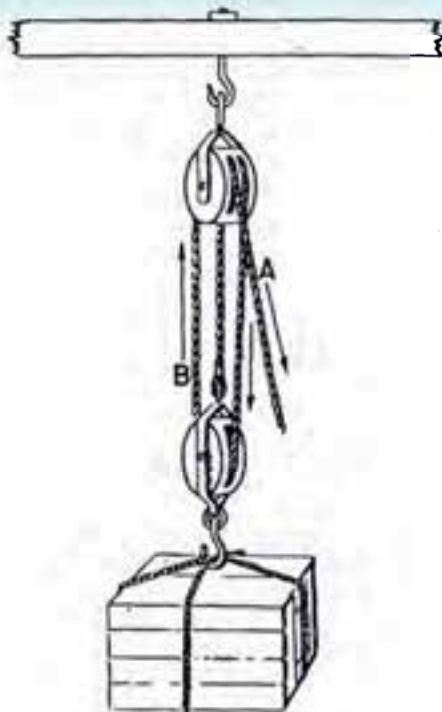
شکل ۱۳-۵- مجموعه دو قرقره‌ای تک شیاره (همسان)

برای مثال در شکل ۱۴-۵ مجموعه قرقره و طناب متشکل از قرقره ثابت دو شیاره و قرقره متحرک تک شیاره مشاهده می‌شود. در این مجموعه بار از قرقره متحرک آویزان است. قرقره متحرک نیز به وسیله سه بخش از طناب تحمل می‌شود. هر بخش از طناب به اندازه مساوی بار را تحمل می‌کند. اگر وزن صندوق ۳۰۰۰ نیوتون باشد، هر طناب به اندازه ۱۰۰۰ نیوتون از بار را تحمل می‌کند. اگر نیروی وارد بر طناب B برابر ۱۰۰۰ نیوتون باشد کارگر مجبور است یک نیروی ۱۰۰۰ نیوتون برای کشیدن طناب A وارد کند تا بتواند صندوق را بالا ببرد.

بهره مکانیکی برابر است با:

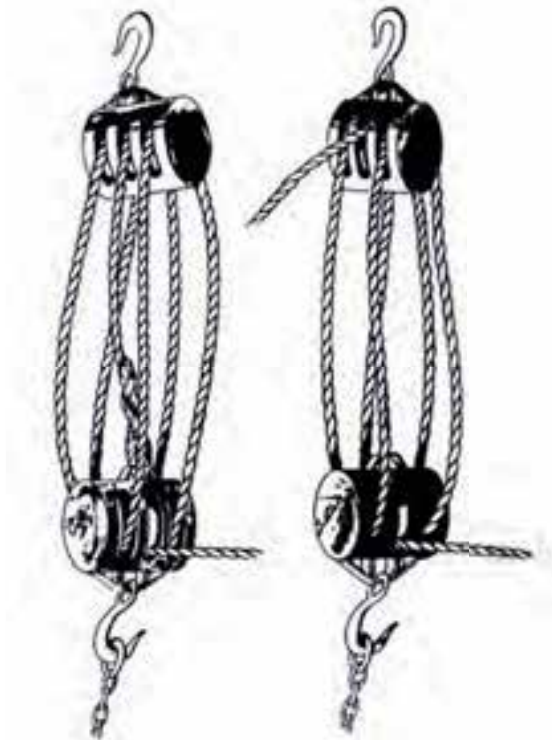
$$M.A. = \frac{R}{E} = \frac{3000}{1000} = 3$$

ملاحظه می‌شود وقتی بار به وسیله دو بخش از طناب تحمل می‌شود، بهره مکانیکی برابر ۲ و وقتی به وسیله سه بخش از طناب تحمل می‌گردد بهره مکانیکی برابر ۳ می‌باشد. این نتیجه راهنمای خوبی برای محاسبه بهره مکانیکی انواع مجموعه‌های قرقره و طناب است. به این ترتیب که تعداد بخش‌هایی از طناب که بار به وسیله آنها تحمل می‌شود مساوی بهره مکانیکی است. نکته مهم اطمینان یافتن از استحکام و مناسب بودن طناب برای تحمل بار است.



شکل ۱۴-۵- مجموعه قرقره ثابت دوشیاره و قرقره متحرک تک شیاره (ناهمسان)

ترکیب‌های مختلفی از مجموعه قرقره و طناب می‌توان بوجود آورد. دو ترکیب در شکل ۱۵-۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۵-۵- دو مجموعه قرقره و طناب با قرقره‌های سه و دو شیاره

اکنون آنچه را که در مورد قرقره و طناب آموختیم بطور خلاصه در زیر می‌آوریم تا بطور عملی قابل استفاده در کشتی باشد.

- تنها مزیت قرقره ثابت تک شیاره تغییر در جهت کشیدن طناب است و بهره مکانیکی آن برابر عدد یک است.
- در قرقره متحرک تک شیاره بهره مکانیکی برابر عدد ۲ است.
- مجموعه قرقره و طناب را می‌توان به صورت‌های مختلف با ترکیب قرقره‌های تک شیاره، دو شیاره و سه شیاره و بهره مکانیکی بزرگ‌تر استفاده نمود.
- تعداد بخش‌های طناب که از یک قرقره متحرک می‌گذرند مشخص‌کننده تقریبی بهره مکانیکی آن هستند.
- اگر انتهای طناب به یک قرقره متحرک محکم شود بهره مکانیکی به اندازه عدد یک افزایش می‌یابد.

### ۳-۵ - راندمان ماشین

تاکنون آموختیم که مجموعه قرقره و طناب در واقع نوعی ماشین بالابر است. ماشین بالابر مکانیزمی برای جابه‌جایی بار در امتداد قائم و امتداد افقی و یا هر دو می‌باشد.

در این فرآیند نیروهای ورودی و مصرفی به نیروی کارگر و نیروی مقاوم به بار موسوم است. کار انجام شده به وسیله یک ماشین نمی‌تواند بیش از کار ورودی به آن باشد. بنابراین هیچ ماشینی دارای راندمان صد در صد نیست و مقدار معینی از کار ورودی به علت اصطکاک بین اجزاء و قطعات از دست می‌رود.

روابط موجود برای کار ورودی، کار مفید و اصطکاک به شرح زیر است:

$$(۱) \text{ کار ورودی به ماشین} = \text{کار از دست رفته به علت اصطکاک} + \text{کار مفید}$$

$$(۲) \text{ تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر} \times \text{نیروی کارگر} = \text{کار ورودی}$$

$$(۳) \text{ تغییر مکان بار} \times \text{بار} = \text{کار مفید}$$

اگر موقتاً اصطکاک نادیده گرفته شود رابطه (۴) رامی‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۴) \text{ تغییر مکان بار} \times \text{بار} = \text{تغییر مکان بوسیله نیروی کارگر} \times \text{نیروی کارگر}$$

نسبت تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر به تغییر مکان بار به نسبت تندی (Velocity Ratio) یا به اختصار v.r. موسوم است. اندازه نسبت تندی برای هر ماشین خاص ثابت است و بستگی به طراحی دارد. نسبت تندی با انجام آزمایش به دست می‌آید. به هر حال رابطه (۵) به صورت زیر می‌باشد.

$$(۵) \text{ تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر} = \text{نسبت تندی (v.r.)} \times \text{تغییر مکان بار}$$

$$\text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{A}{a}$$



راندمان یک ماشین عبارت است از نسبت کار مفید به کار ورودی

یا

$$\text{راندمان} = \frac{\text{کار مفید}}{\text{کار ورودی}} = \frac{\text{تغییر مکان بار} \times \text{بار}}{\text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر} \times \text{نیروی کارگر}}$$

$$\text{راندمان} = \frac{R \times a}{E \times A} \quad (۶)$$

در بخشهای قبل آموختیم که  $\frac{R}{E}$  = بهره مکانیکی (M.A.) و نیز  $\frac{A}{a}$  = نسبت تندی (v.r.)

بنابراین رابطه (۷) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{راندمان} = (\text{M.A.}) \times \frac{1}{\text{v.r.}} = \frac{\text{M.A.}}{\text{v.r.}} = \frac{\text{بهره مکانیکی}}{\text{نسبت تندی}} \quad (۷)$$

راندمان رابطه (۷) به صورت کسری بیان شده است. برای بیان راندمان به صورت درصد، راندمان در عدد صد ضرب می شود.

در صورتی که از اصطکاک صرف نظر شود یا وجود نداشته باشد نیروی کارگر فقط باید بار را جابه جا کند. این گونه نیروی کارگر به نیروی کارگر مطلوب موسوم است. اگر از لحاظ تئوری یک ماشین کاملاً بدون اصطکاک وجود داشته باشد، راندمان آن صد در صد یا مساوی عدد یک است. در این گونه ماشین بهره مکانیکی مساوی با نسبت تندی است و می توان نوشت:

$$\text{M.A.} = \text{v.r.}$$

$$\frac{R}{E_1} = \text{v.r.}$$

$$E_1 = \frac{R}{\text{v.r.}} \quad (۸)$$

$E_1$  نیروی کارگر مطلوب می باشد.

البته با توجه به این که در ماشین های واقعی اصطکاک وجود دارد رابطه زیر در هر ماشین واقعی برقرار است.

نیروی کارگر مطلوب - نیروی کارگر واقعی = نیروی کارگر برای جبران اصطکاک

$$\text{نیروی کارگر برای جبران اصطکاک} = E - \frac{R}{v.r.} \quad (9)$$

بر فرض این که در ماشین اصطکاک وجود نداشته باشد، باری که به وسیله یک نیروی کارگر معین جابه‌جا می‌شود به بار مطلوب موسوم است و می‌توان نوشت:

$$\text{بار مطلوب} = E \times v.r. \quad (10)$$

ولی با توجه به این که در ماشین‌های واقعی اصطکاک وجود دارد رابطه زیر قابل بیان است:

بار واقعی - بار مطلوب = بار قابل جابه‌جایی به علت اصطکاک

$$\text{بار قابل جابه‌جایی به علت اصطکاک} = E \times v.r. - R \quad (11)$$

از روابط فوق در حل مسائل نمونه استفاده خواهد شد.

مسئله: مجموعه قرقه و طناب مطابق شکل ۱۶-۵ باری به وزن ۴۰۵ نیوتون را به فاصله یک متر بالا می‌کشد. اگر نیروی کارگر مساوی ۹۰ نیوتون باشد راندمان مجموعه چقدر است؟  
حل:

با توجه به این که بار به وسیله پنج بخش از طناب تحمل می‌شود بنابراین فاصله طی شده به وسیله نیروی کارگر برابر ۵ متر و فاصله طی شده بوسیله بار مساوی یک متر است.

$$v.r. (\text{نسبت تندی}) = \frac{5}{1} = 5$$

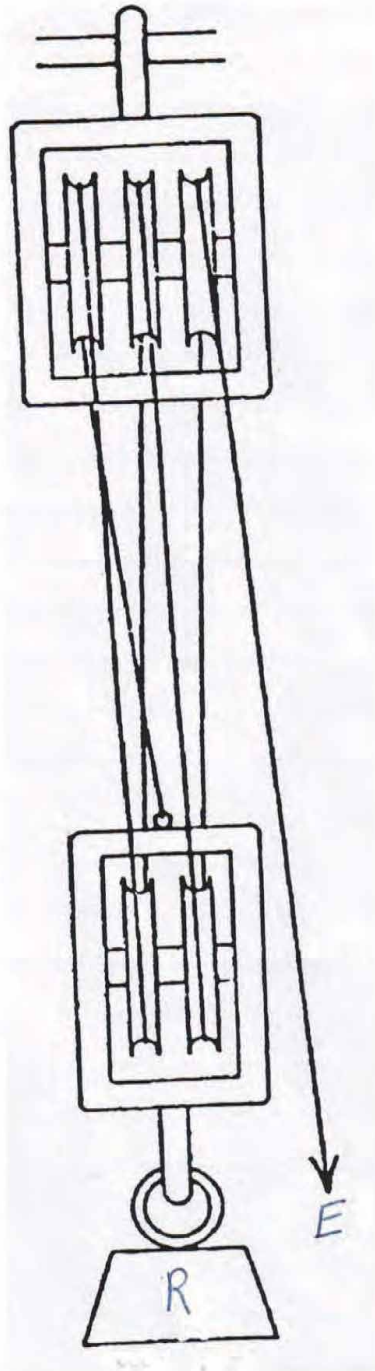
$$M.A. (\text{بهره مکانیکی}) = \frac{E}{R} = \frac{405}{90} = 4/5$$

(توضیح: بهره مکانیکی به علت وجود اصطکاک کم‌تر از ماشین مطلوب است)

$$\text{راندمان} = \frac{M.A.}{v.r.} \times 100$$

$$\text{راندمان} = \frac{4/5}{5} \times 100$$

$$\text{راندمان} = 16\%$$



شکل ۱۶-۵

### ۴-۵- تأثیر استقرار معکوس

در شکل ۵-۱۷ دو شیوه ترکیب قرقره و طناب ثابت و متحرک دو شیاره نشان داده شده است. قرقرها به ترتیب با حروف A و B نشان داده شده‌اند.

در ترکیب اول، قرقره A به یک بست محکم شده و بار R از قرقره B آویزان است. از این ترکیب غالباً برای بلند کردن بار استفاده می‌شود. ملاحظه می‌شود جهت حرکت نیروی کارگر E مخالف جهت حرکت بار R است.

چهار بخش طناب، بار R را متحمل می‌شوند و نسبت تندی برابر ۴ می‌باشد. در ترکیب دوم، همان قرقرها معکوس شده‌اند. قرقره B به بست محکم شده و بار به وسیله قرقره A جابه‌جا می‌شود. جهت حرکت نیروی کارگر موافق جهت حرکت بار است. در این ترکیب هر پنج بخش طناب، بار R را تحمل می‌کنند و نسبت تندی برابر عدد ۵ است.

ملاحظه می‌شود اگر قرقرها برای بلند کردن بار استفاده شوند، نسبت تندی مساوی با تعداد شیارها می‌باشد، اما اگر از قرقرها برای جابه‌جایی بار در امتداد افقی استفاده شود، در ترکیب اول نسبت تندی مساوی با تعداد شیارها و در ترکیب دوم مساوی با مجموع تعداد شیارها به علاوه یک است.

در حل این‌گونه مسائل در صورتی که چگونگی استقرار قرقرها معین نشده باشد محاسبه دو پاسخ امکان‌پذیر است و هر دو باید داده شود.

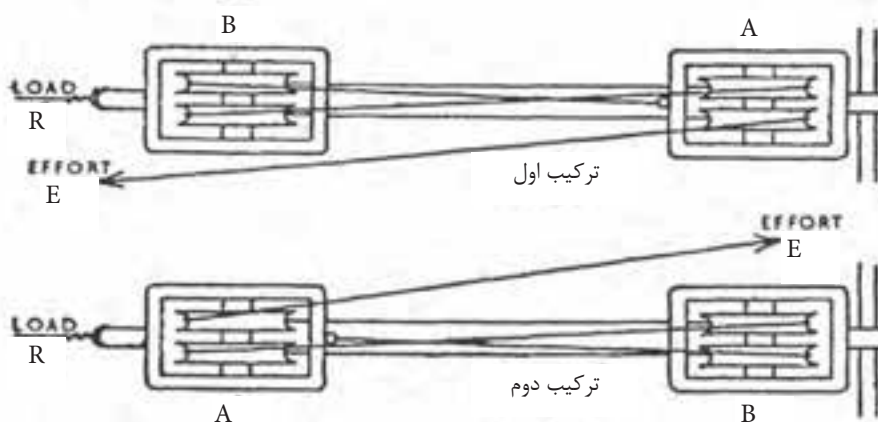
مسئله:

در صورتی که مطابق شکل ۵-۱۷ باری به وزن ۴۵۰۰ نیوتون در امتداد افقی حرکت داده شود و ضریب اصطکاک بار و زمین ۰/۴۵ و راندمان ماشین ۰/۸ باشد اندازه نیروی کارگر چقدر است؟

حل:

نیوتون  $\mu R = 0.45 \times 4500 = 2025$  = نیروی لازم برای جبران اصطکاک

$$E = \frac{R}{(v.r.) \times \text{راندمان ماشین}} \quad \text{راندمان ماشین} = \frac{R}{E \times v.r.} = \frac{\text{بهره مکانیکی}}{\text{نسبت تندی}}$$



شکل ۵-۱۷

در ترکیب اول که E در جهت مخالف R است نسبت تندی برابر ۴ و در ترکیب دوم که E در جهت موافق R است نسبت

تندی برابر ۵ است در نتیجه:

$$\text{نیوتون } E = \frac{2025}{4 \times 0/8} = 632/8 \text{ در ترکیب اول}$$

$$\text{نیوتون } E = \frac{2025}{5 \times 0/8} = 506/2 \text{ در ترکیب دوم}$$

### ۵-۵ - قرقه زنجیری (Chain hoist)

قرقه زنجیری که قرقه اختلافی (Differential Pulley) نیز نامیده می‌شود معمولاً از سقف موتور خانه کشتی و یا کارگاه ساحلی به وسیله روروک آویزان است و برای جابه‌جایی عمودی و افقی اجسام و بارهای سنگین استفاده می‌شود. قرقه مزبور در شکل ۵-۱۸ نشان داده شده است. ماشین شامل دو قرقه متحدالمرکز به عنوان قرقه ثابت و یک قرقه تک شیاره متحرک می‌باشد. هر دو قرقه فوقانی همزمان با هم می‌چرخند.

وقتی نیروی کارگر بر زنجیر وارد می‌شود یک سوی قرقه متحرک به طرف قرقه بزرگ A کشیده می‌شود ولی سوی دیگر آن با چرخیدن قرقه کوچک B پایین می‌آید. در نتیجه جابه‌جایی رو به بالای قرقه متحرک و بار به شرح زیر می‌باشد.

اگر D و d به ترتیب قطر قرقه بزرگ A و قرقه کوچک B باشند، با یک دور چرخش کامل قرقه ثابت داریم:

$$\pi D = \text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر}$$

$$\text{تغییر مکان بار} = \frac{(\pi D - \pi d)}{2}$$

$$\text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{\text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}}$$

$$\text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{\pi D}{\frac{1}{2}(\pi D - \pi d)}$$

$$\text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{2\pi D}{(\pi D - \pi d)} = \frac{2\pi(2R)}{2\pi R - 2\pi r} = \frac{2R}{R - r}$$

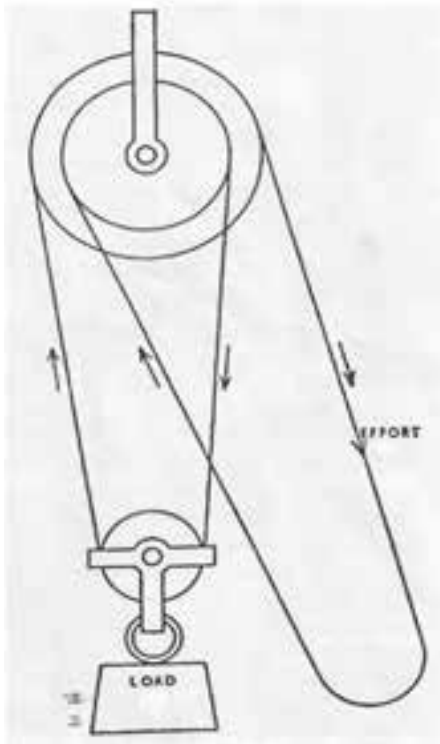
مثال:

چنانچه در شکل ۵-۱۸ شعاع قرقه بزرگ R برابر ۱۶ سانتی‌متر و شعاع قرقه کوچک r مساوی ۱۴ سانتی‌متر باشد

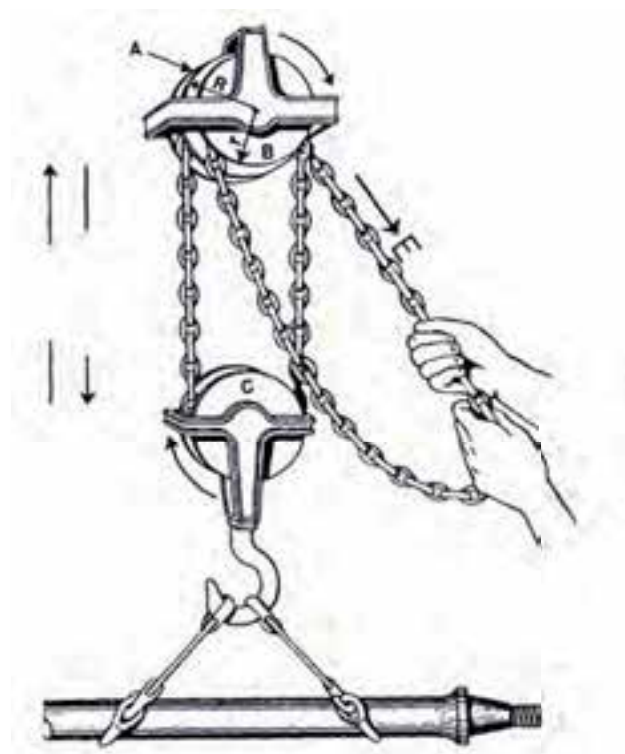
نسبت تندی ماشین چقدر است؟

حل:

$$v.r. = \frac{2(16)}{16 - 14} = \frac{32}{2} = 16$$



شکل ۵-۱۸ ب- قرقره زنجیری (اختلافی)



شکل ۵-۱۸ الف- قرقره زنجیری (اختلافی)

اگرچه نسبت تندی بزرگ حاکی از بهره مکانیکی بزرگ می‌باشد ولی این ماشین دارای اصطکاک نسبتاً زیادی است لذا بهره مکانیکی واقعی آن بسیار کوچک‌تر از بهره مکانیکی مطلوب است. در این ماشین از زنجیر استفاده می‌شود. قرقره‌ها دارای دندانه هستند طوری که زنجیر قابل استفاده باشد. گام دندانه‌ها ثابت است لذا داریم:

$$\text{در برابر تعداد دندانه‌ها در قرقره بزرگ} \\ \text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{\text{تفاوت تعداد دندانه‌ها در دو قرقره}}{\text{تعداد دندانه‌ها در قرقره بزرگ}}$$

$$v.r. = \frac{2D}{D-d} = \frac{2R}{R-r}$$

مسئله:

قطر قرقره‌های بزرگ و کوچک در یک قرقره زنجیری به ترتیب ۱۲۰ و ۱۱۰ میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار ۲/۴ کیلو نیوتون نیروی کارگر به مقدار ۲۵۰ نیوتون لازم است. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان را تعیین کنید. همچنین مقدار نیروی کارگر که برای جبران اصطکاک مصرف می‌شود را محاسبه کنید.

حل:

$$v.r. = \frac{2D}{D-d} = \frac{2 \times 120}{120-110} = 24$$

$$M.A. = \frac{R}{E} = \frac{2400}{250} = 9.6$$

$$\text{راندمان} = \frac{M.A.}{v.r.} = \frac{9.6}{24} = 0.4 \text{ یا } 40\%$$

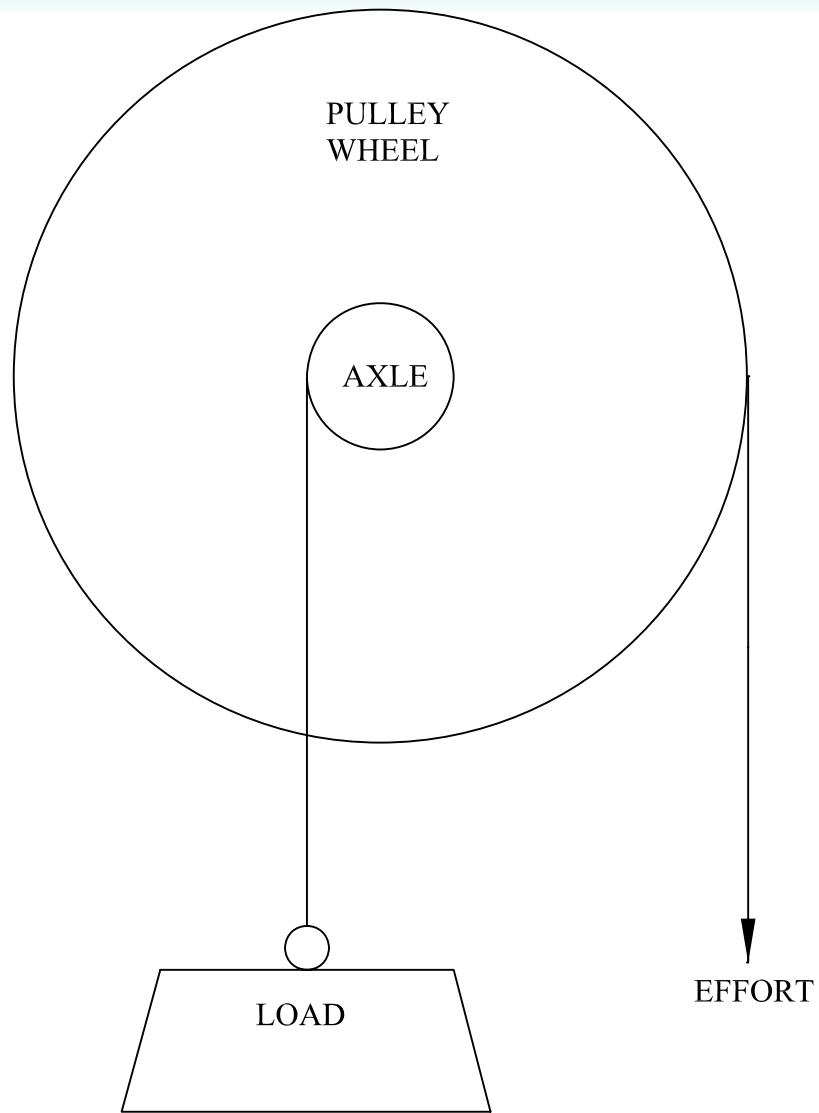
$$\text{نیوتون کارگر مطلوب} = \frac{R}{v.r.} = \frac{2400}{24} = 100$$

نیروی کارگر مطلوب - نیروی کارگر حقیقی = نیروی کارگر مصرف شده برای اصطکاک

$$= 250 - 100 = 150 \text{ نیوتون}$$

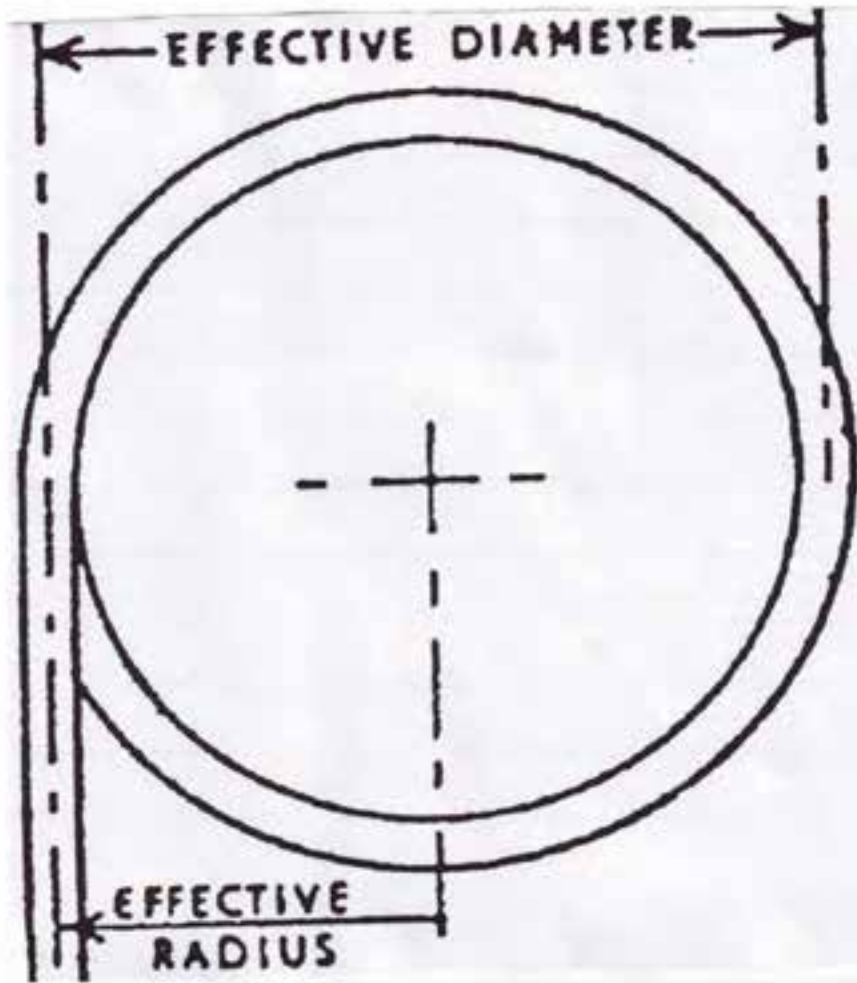
### ۵-۶ - چرخ و محور (The Wheel and Axle)

این ماشین شامل یک قرقره تک شیاره به همراه یک محور است. یک سر طناب یا سیمی که قلاب بار از آن آویزان می‌شود به محور متصل و محکم شده و به دور آن می‌پیچد. یک سر طناب یا سیمی که نیروی کارگر آن را می‌کشد به دور قرقره می‌پیچد. این ماشین در شکل ۱۹-۵ نشان داده شده است. طناب بار و طناب نیروی کارگر در دو جهت مخالف به دور محور و قرقره پیچیده می‌شوند. با اعمال نیروی کارگر قرقره می‌چرخد و طناب به طرف کارگر کشیده می‌شود. همزمان طناب بار در جهت مخالف به دور محور می‌پیچد و بار بالا می‌رود.



شکل ۱۹-۵- چرخ و محور





شکل ۲۰-۵- اندازه قطر و شعاع مؤثر در چرخ و محور

در صورتی که  $D$  و  $R$  به ترتیب قطر و شعاع قرقره و  $d$  و  $r$  قطر و شعاع محور می‌باشند با فرض این که نیروی کارگر قرقره و محور را یک دور کامل بچرخاند می‌توان نوشت:

$$\text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{\text{طول محیط قرقره}}{\text{طول محیط محور}} = \frac{\text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}}$$

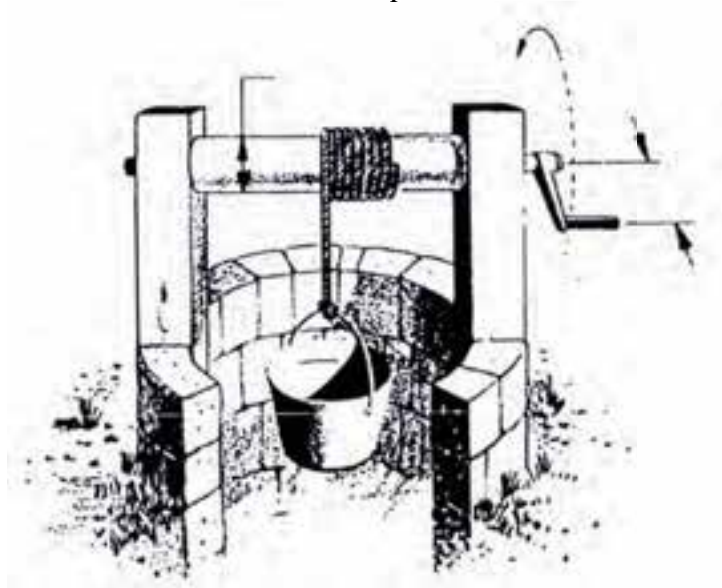
$$(v.r.) = \frac{\pi D}{\pi d} = \frac{D}{d} = \frac{R}{r}$$

در این ماشین ممکن است قطر طناب در محاسبات منظور شود. لذا در حل مسائل وقتی که اندازه طناب داده می‌شود ۱۵۳

طول مؤثر محیط یا طول شعاع مؤثر مطابق شکل ۲۰-۵ از وسط طناب در یک سر تا وسط طناب در سر دیگر اندازه‌گیری می‌شود.

البته عملاً ممکن است به‌جای قرقره از یک دسته (هندل) برای چرخاندن محور استفاده شود. در این صورت فاصله مرکز محور تا دسته (L) معادل شعاع قرقره (R) خواهد بود و خواهیم داشت (مانند چرخ چاه در شکل ۲۱-۵)

$$v.r. = \frac{L}{r}$$



شکل ۲۱-۵- چرخ چاه

مسئله:

در یک ماشین چرخ و محور، قطر قرقره و محور به ترتیب ۲۲۰ و ۴۰ میلی‌متر است. قطر طنابهای بار و نیروی کارگر به ترتیب ۱۰ و ۵ میلی‌متر است. در صورتی که راندمان ماشین ۰/۹۲ باشد مقدار نیروی کارگر برای بالا بردن باری به مقدار ۴۰۰ نیوتون را محاسبه کنید.

حل: قطر طناب نیروی کارگر + قطر قرقره = قطر مؤثر قرقره

$$= ۲۲۰ + ۵ = ۲۲۵ \text{ میلی‌متر}$$

قطر طناب بار + قطر محور = قطر مؤثر محور

$$= ۴۰ + ۱۰ = ۵۰ \text{ میلی‌متر}$$

$$(v.r.) \quad \text{نسبت تندی} = \frac{D}{d} = \frac{225}{50} = 4/5$$

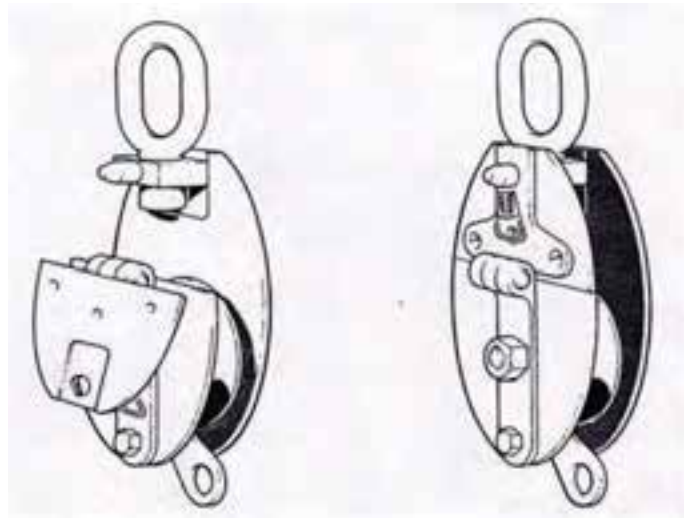
$$(M.A.) \quad \text{راندمان ماشین} = \text{بهره مکانیکی} \times v.r. \\ = 0.92 \times 4/5 \\ = 4/14$$

$$E = \text{نیروی کارگر} = \frac{R}{M.A.} = \frac{400 \text{ N}}{4/14} = 96/61 \text{ N}$$

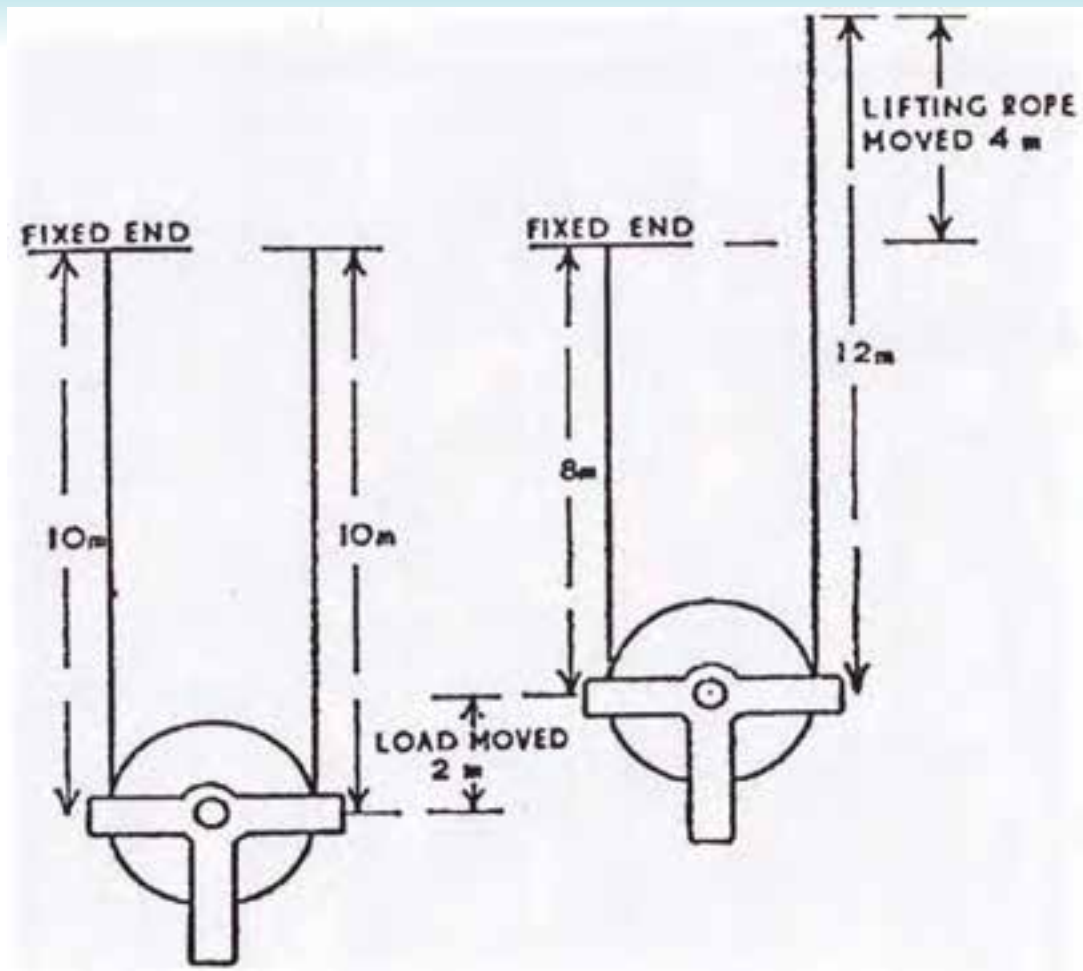
### ۷-۵ - قرقه سگکی ( Snatch Block )

در بسیاری از ماشین‌های بالابر به جای آویزان شدن بار از طناب بار، از قرقه سگکی برای آویزان کردن بار استفاده می‌شود. این نوع قرقه دارای یک شیار است. مطابق شکل ۲۲-۵ با باز کردن سگک می‌توان طناب را در داخل قرقه قرار داد. یک سر طناب به ماشین بالابر محکم است و از داخل قرقه می‌گذرد و سر آزاد طناب به وسیله نیروی کارگر بالا کشیده می‌شود.

شکل ۲۳-۵ یک مثال عددی از طرز کار قرقه سگکی را نشان می‌دهد. قبل از اجرای نیروی کارگر طول هر کابل ده متر است. وقتی نیروی کارگر کابل بالارونده را به اندازه چهار متر بالا می‌برد طول کابل بار به هشت متر می‌رسد. یعنی این که قرقه سگکی فقط دو متر بالا می‌رود.



شکل ۲۲-۵ - قرقه سگکی

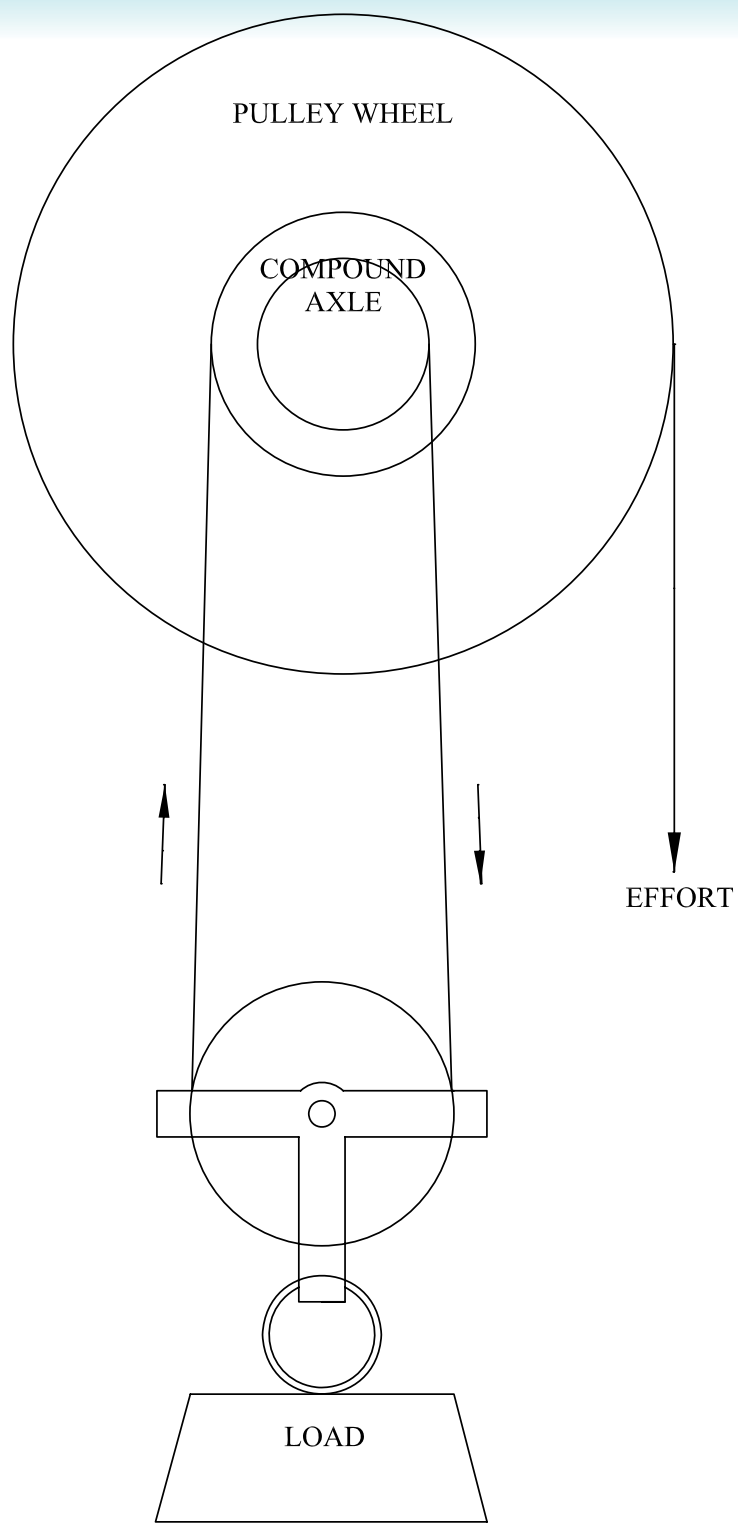


شکل ۵-۲۳ - طرز استفاده از قرقره سگکی

### ۵-۸ - چرخ و محور دو پله‌ای (Wheel and Differential Axle)

این ماشین مشابه چرخ و محور است با این فرق که محور این ماشین از دو محور متحدالمرکز با دو قطر متفاوت تشکیل شده است. مطابق شکل ۵-۲۴ با چرخش قرقره کارگر به وسیله طناب نیروی کارگر و همزمان با پیچیده شدن طناب به دور محور بزرگ‌تر، طناب از دور محور کوچک‌تر باز می‌شود. طناب محورها از داخل یک قرقره سگکی می‌گذرد و بار به وسیله قرقره سگکی تحمل می‌شود.

$D$  قطر قرقره کارگر،  $d_1$  قطر محور بزرگ‌تر و  $d_2$  قطر محور کوچک‌تر است. با یک دور چرخش قرقره کارگر، طناب بالای  $\pi d_1$  بالا می‌رود و طناب پایین‌رو به اندازه  $\pi d_2$  پایین می‌آید. بنابراین طناب حامل قرقره سگکی به اندازه  $\pi d_1 - \pi d_2$  کوتاه می‌شود. در طرز کار قرقره سگکی ملاحظه شد تغییر مکان واقعی بار  $\frac{\pi d_1 - \pi d_2}{2}$  برابر می‌باشد.



شکل ۲۴-۵- چرخ و محور دوپله‌ای

با توجه به این که تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر در یک دور چرخش کامل قرقره کارگر به اندازه  $\pi D$  است

بنابراین

$$v.r. = \frac{\text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}} = \text{نسبت تندی (v.r.)}$$

$$v.r. = \frac{\pi D}{\frac{1}{2}(\pi D_1 - \pi d_2)} = \frac{2D}{\pi d_1 - \pi d_2}$$

$$= \frac{2D}{d_1 - d_2} = \frac{2R}{r_1 - r_2}$$

می توان مانند چرخ و محور معمولی (بخش ۶-۵) از یک دسته (هندل) به جای قرقره کارگر استفاده کرد. در این صورت فاصله مرکز محور تا دسته چرخش معادل شعاع قرقره کارگر خواهد بود.

مسئله: مطابق شکل ۲۴-۵ شعاع قرقره کارگر برابر ۳۰ سانتی متر، شعاع محور بزرگ تر ( $r_1$ ) مساوی ۱۰ سانتی متر و شعاع محور کوچک تر ( $r_2$ ) مساوی ۶ سانتی متر است. در صورتی که نیروی کارگر به مقدار ۵۰ نیوتون باشد چه مقدار بار را می توان بالا برد. راندمان دستگاه ۰/۹ می باشد.

حل:

$$v.r. = \frac{2R}{r_1 - r_2} = \frac{2 \times 30}{10 - 6} = \frac{60}{4} = 15$$

$$v.r. \times \text{راندمان دستگاه} = \text{بهره مکانیکی (M.A.)}$$

$$= 0.9 \times 15 = 13.5$$

$$E = \text{نیوتون} = 50$$

$$E = \frac{R}{\text{M.A.}} \Rightarrow R = E \times \text{M.A.} = 50 \times 13.5 = 675 \text{ نیوتون}$$

### ۹-۵- میله حلزون و چرخ حلزون بالابر (Worm and Worm Wheel Lifting Gear)

مطابق شکل ۲۵-۵ ماشین بالابر میله حلزون و چرخ حلزون (که به حلزون و چرخ حلزون معروف است) شامل حلزون یا میله حلزون (Worm)، چرخ حلزون (Worm Wheel)، قرقره بار (Load Wheel)، قرقره کارگر (Effort Wheel)، زنجیر کارگر (Effort Chain)، قلاب بار (Load Hook) و زنجیر یا کابل بار (Load Cable) می شود. برخی موارد به جای قلاب بار از قرقره سگکی استفاده می گردد. در این موارد یک سر کابل قرقره سگکی به بدنه ماشین متصل و محکم می شود. با اعمال نیروی کارگر بر زنجیر کارگر، قرقره کارگر و سپس میله حلزون، چرخ حلزون و قرقره بار به چرخش درمی آیند و بار بالا می رود.

در این ماشین  $D$  قطر قرقره کارگر،  $d$  قطر قرقره بار و  $N$  تعداد دندانه‌های چرخ حلزون است. معمولاً از میله حلزون یک راهه استفاده می‌شود.

به‌ازای یک دور گردش چرخ حلزون، میله حلزون باید  $N$  مرتبه بچرخد. برای یک دور گردش چرخ حلزون تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر برابر  $\pi DN$  و تغییر مکان بار به اندازه  $\pi d$  است:

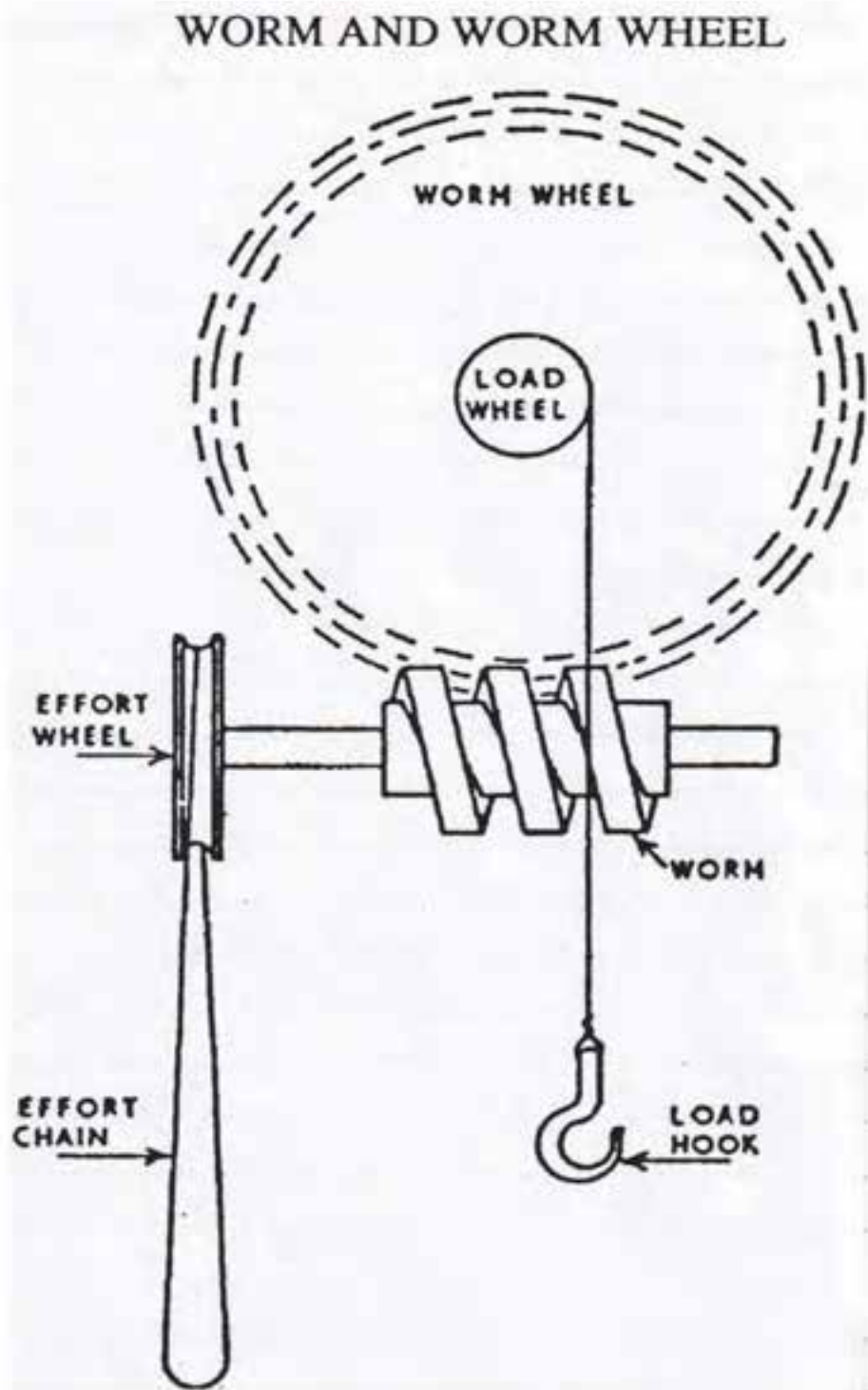
در صورت استفاده از قلاب بار

تغییر مکان به‌وسیله نیروی کارگر  
تغییر مکان بار = نسبت تندی (v.r.)

$$= \frac{\pi DN}{\pi d} = \frac{DN}{d}$$

در صورت استفاده از قرقره سگکی

نسبت تندی (v.r.) =  $\frac{2DN}{d}$



شکل ۲۵-۵- حلزون و چرخ حلزون



## خود آزمایی :



- ۱- از یک مجموعه قرقره و 'اب' 'م' 'ترتره' سه شیاره از بالا و قرقره دو شیاره در پایین، نیروی کارگر به مقدار ۳۰۰ نیوتون برای بالا بردن باری به مقدار ۱/۲۶ کیلو نیوتون مصرف می‌شود. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ماشین را در این بار تعیین کنید.
- ۲- یک مجموعه قرقره و طناب شامل دو قرقره ۴ شیاره در بالا و پایین است. راندمان ماشین برای بالا بردن باری به مقدار ۲/۸ کیلو نیوتون برابر ۷۰٪ است. نیروی کارگر چقدر است؟
- ۳- در یک ماشین بالابر نوع چرخ و محور دوپله‌ای از دسته اهرم به طول ۲۴۰ میلی‌متر به جای قرقره کارگر استفاده می‌شود. قطر محورهای دوپله‌ای به ترتیب ۱۱۰ و ۸۰ میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار ۱/۱۲ کیلو نیوتون به نیروی کارگر معادل ۸۰ نیوتون نیاز است. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ماشین را تعیین کنید.
- ۴- راندمان یک قرقره زنجیری (اختلافی) در بالا بردن یک بار ۱/۸۹ کیلو نیوتونی برابر ۳۵ درصد است. تعداد دندانه‌های قرقره‌های بزرگ و کوچک به ترتیب ۲۷ و ۲۴ عدد می‌باشد. نیروی کارگر برای بالا بردن بار چقدر است؟
- ۵- قطر قرقره کوچک یک مجموعه قرقره زنجیری (اختلافی) ۱۳۰ میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار ۵۶۰ نیوتون نیروی کارگر به مقدار ۵۰ نیوتون لازم است. در صورتی که راندمان ماشین ۴۰ درصد باشد. قطر قرقره بزرگ چقدر است؟
- ۶- قطر قرقره کارگر یک ماشین حلزون و چرخ حلزون ۲۰۰ میلی‌متر است. میله حلزون یک راهه و چرخ حلزون دارای ۴۰ دندانه است. قطر قرقره بار ۱۲۵ میلی‌متر است و بار به وسیله قرقره سگکی تحمل می‌شود. نیروی کارگر ۱۵۰ نیوتونی برای بالا بردن باری به مقدار ۶/۷۲ کیلو نیوتون لازم است. راندمان ماشین برای بالا بردن این بار چقدر است؟  
نیروی کارگر مطلوب و نیروی مصرف شده برای جبران اصطکاک چقدر است؟

## منابع

## الف – منابع فنی

- 1-Reed's Applied Mechanics For Engineers  
Volume 2  
William Embleton, Leslie Jackson  
Thomas Reed Publications  
Fifth Edition 1994 , surrey , UK
- 2-Reed's Applied Mechanics For Engineers  
Volume 2  
William Embleton , J.T. Gunn  
Thomas Reed Publications  
Fourth Edition , Reprint , 1989 , London , UK
- 3-Introduction to Mechanics  
Irving J. Levinson  
Prentice – Hall , Inc. 1968 , Englewood C Liffs , N.J , USA
- 4-Manufacturing Technology  
Stanley A. Komacek ; Ann E. Lawson ; Andrew C. Horton  
Delmar Publishers Ins , 1990  
Albany , New york , USA
- 5- Technology Made Simple  
Don Mecloy  
Heinemann , 1984 , London , UK
- ۶-Admiralty Manual of Seamanship  
Volume 2,1992  
London , UK
- 7-Basic Machines  
Naval Education and Training Professional  
Development and Technology Center , 1994  
USA

**ب – منابع فرهنگ و تمدن اسلام و ایران**

۱- ترجمه تفسیر المیزان

علامه سید محمد حسین طباطبایی

ترجمه سید محمد باقر موسوی همدانی

کانون انتشارات محمدی، تهران، ۱۳۶۴

۲- تاریخ مصور تکنولوژی اسلامی

احمد یوسف حسن، دانالد ر. هیل

ترجمه ناصر موفقیان

شرکت انتشارات علمی و فرهنگی

تهران، ۱۳۷۵

**پ – منابع فرهنگ و تمدن دینی و باستانی**

1-The Holy Bible

King James Version

American Bible Society

New york , 1972 , USA

2-The Dartmouth Bible

Santry Edition

Roy B. chamberlin ; Herman Feldman

Houghton Mifflin Company

Boston , 1961 , USA

3-Could Noah Lift Heavy Objects?

Tim Lovett



