بسم الله الرحمن الرحیم

هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

دورهٔ پیش‌دانشگاهی

رشتهٔ علوم ریاضی

۱۳۹۱

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **شورای برنامه‌ریزی درسی متوسطه، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی**

نام کتاب : **هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی ـ ۲۹۴/۱**

مؤلّفان : **دکتر محمّدرضا پورنکی، دکتر یحیی تابش**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع :**ادارهٔ کلّ چاپ و توزیع کتابهای درسی**

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت: **www.chap.sch.ir**

رسام : **مریم دهقان‌زاده**

صفحه‌آرا : **معصومه چهره‌آرا ضیابری**

طراح جلد : **مریم کیوان**

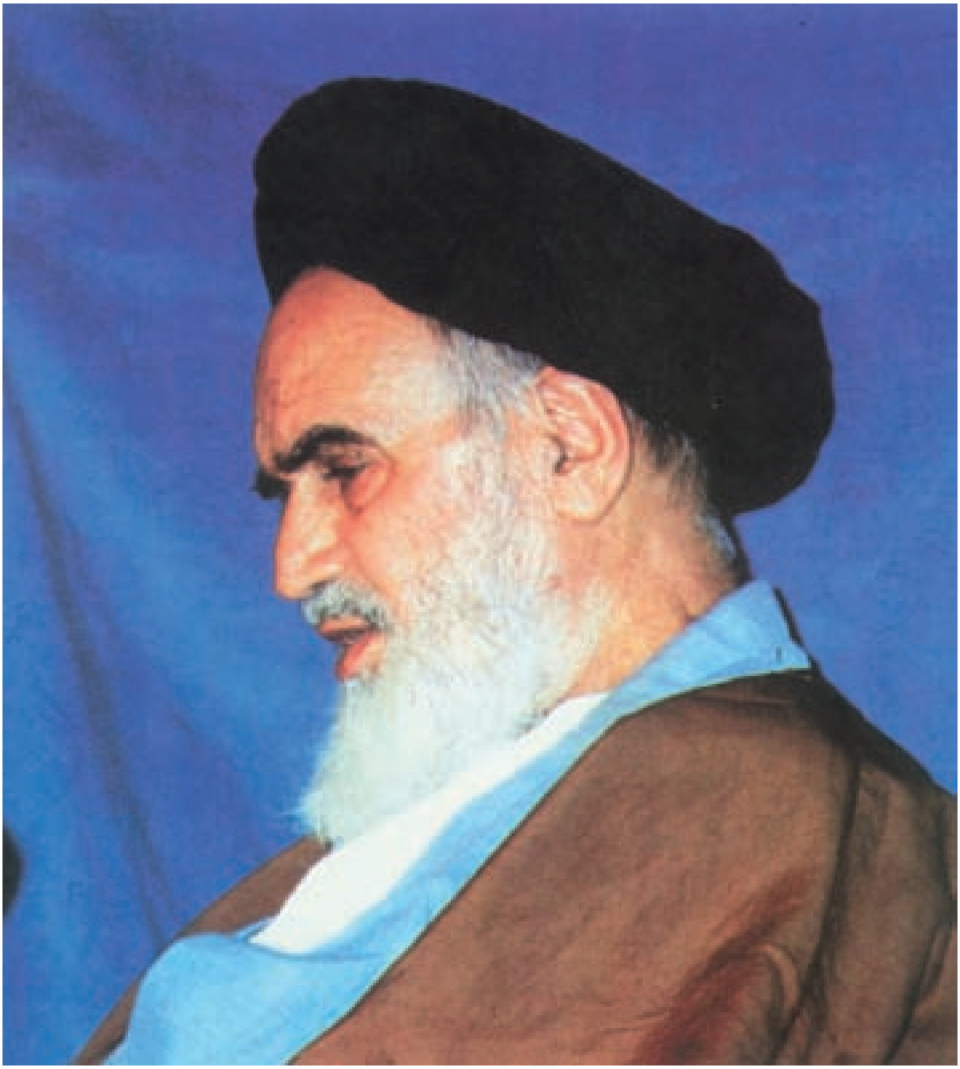
ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

تلفن: ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ دوازدهم ۱۳۹۱**

شابک ۵-۰۹۵۱-۰۵-۹۶۴ ISBN 964-05-0951-5



اساس همهٔ شکست‌ها و پیروزی‌ها از خود آدم شروع می‌شود. انسان اساس پیروزی است و اساس شکست است. باور انسان اساس تمام امور است.

امام خمینی (ره)

فهرست مطالب

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره‌ی مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۳۶۳ ۱۵۸۵۵ ـ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

یادداشت

۱. از سپیده‌دم تاریخ **عدد**، **شمارش** و **هندسه** راهگشای مسائل گوناگون در زندگی بشر بوده‌اند. با ادامهٔ این روند ریاضیات از یک سو به‌عنوان **ابزار حل مسأله** در خدمت عموم قرار گرفت و از سوی دیگر موجب پیدایش **ساختارهای منطقی** و **دستگاه‌های اصولی** شد که به‌عنوان ابزار تربیت فکر، خود به تولید فرآورده‌های جدیدی پرداخت که بعضاً در خدمت عموم قرار گرفت. این فرآیند موجب پیدایش شاخه‌های مختلفی در ریاضیات گردید.

از نظر تاریخی حساب و به دنبال آن جبر از یک سو و هندسه از سویی دیگر، از بررسی مسائل و پدیده‌های مختلفی نشأت می‌گیرند. با این حال حتی از دوران باستان، ایجاد ارتباط میان بینش هندسی و طرز تفکّر حسابی جبری، ثمرات چشمگیری برای ریاضیات به ارمغان آورده است. شاید نخستین مورد اسلوب‌مند از این ارتباط، نسبت دادن یک عدد (طول) به هر پاره خط است که می‌توان آن را سرآغاز هندسهٔ تحلیلی یک بعدی، یا حساب هندسی از دیدگاه دیگر، تلقی کرد. این اقدام به کشف اعداد ناگویا و پیدایش مفهوم عدد حقیقی منجر گردید. به دنبال پایه‌گذاری جبر توسط خوارزمی و موفقیّت این شاخه از ریاضیات در حل و رده‌بندی مسائل حساب، کوششهای گوناگونی برای استفاده از آن در بررسی مسائل هندسی نیز صورت گرفت که در قرن هفدهم میلادی توسط ریاضیدانان فرانسوی دکارت و فرما به‌صورتی منسجم در چارچوب هندسهٔ تحلیلی ظاهر گردید. هندسهٔ تحلیلی بستر پیدایش و تکوین‌بخش عظیمی از ریاضیات جدید است. بالاخص حساب دیفرانسیل و انتگرال در چارچوب هندسهٔ تحلیلی مطرح می‌شود و صورتهای جدید هندسه مانند هندسهٔ دیفرانسیل و هندسهٔ جبری از هندسهٔ تحلیلی آغاز شده‌اند. نیمی از این کتاب به مباحث هندسهٔ تحلیلی اختصاص دارد. در نیمهٔ دیگر، ماتریس به‌عنوان یک شئ ریاضی و سپس به‌عنوان یک تبدیل هندسی مطرح می‌شود که از جبر ماتریسی آغاز کرده و با کاربردهای متنوع ماتریس‌ها ادامه می‌دهیم. چه ماتریس‌ها به‌عنوان یک ابزار پردازشهای کامپیوتری در عصر فن‌آوری اطّلاعات هم‌چنان از اهمیت زیادی برخوردار است. و بالاخره در این کتاب کوشش بر

این نیز بوده است که حتی‌المقدور ثمرات ارتباط متقابل جبر و هندسه مورد تأکید قرار گیرد و دانش‌آموز با شمّه‌هایی از تجلّی وحدت ریاضیات در مقابل انشعابات اجتناب‌ناپذیر ناشی از رشد و گسترش این دانش آشنا گردد.

****

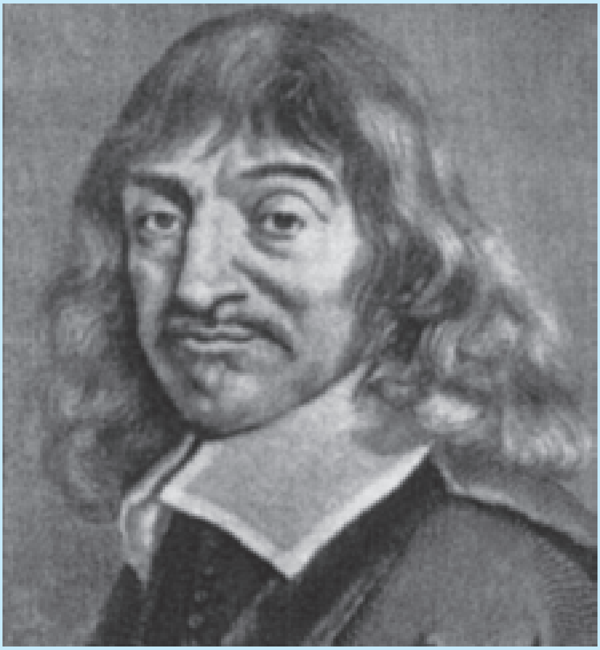
۲. نظام جدید آموزش متوسطه و به دنبال آن پیش‌دانشگاهی، نهضت نوسازی و نوگرایی در آموزش و پرورش کشورمان تلقی می‌شود که می‌توان ثمره‌های مثبت زیادی بر آن برشمرد. ولی هر تغییر و تحوّلی نیاز به بازنگری و تصحیح مسیر پیموده شده دارد. **کتاب هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی** نیز از این مسیر طبیعی مستثنی نیست. کمیتهٔ برنامه‌ریزی دورهٔ پیش‌دانشگاهی، درس هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی را با توجه به نظر کارشناسان، سنتهای آموزش کشور، و تجربه سایر کشورها و روند جهانی به‌عنوان یکی از مواد درسی دورهٔ پیش‌دانشگاهی تصویب کرد. سپس کمیتهٔ برنامه‌ریزیِ گروه ریاضیِ دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی با توجه به‌ضرورت پیشتاز بودن در آموزش ریاضی و با توجه به این‌که در برنامهٔ نظام جدید ابتدا قرار بود فقط عده‌ای از دانش‌آموزان (حداکثر دو برابر ظرفیت دانشگاهها) به دورهٔ پیش‌دانشگاهی راه یابند و بقیه جذب دوره‌های کاردانی و آموزشهای کاربردی شوند، برنامهٔ این درس را به گونه‌ای تنظیم و تصویب کرد که تألیف نخستین کتاب براساس آن تدوین شد. ولی با تحوّل برنامه و راه یافتن عموم دانش‌آموزان به دورهٔ پیش‌دانشگاهی عملاً اجرای برنامهٔ تصویب شده دچار مشکلاتی شد که منجر به حذف بخش‌های زیادی از کتاب قبلی گردید. با توجه به این تحوّلات و با توجه به اظهارنظرهای همکاران دبیر ریاضی در سرتاسر کشور، برنامهٔ جدید با حفظ اصول اوّلیه و با نگرشی کاربردی تدوین شد و ویرایش جدید کتاب به همهٔ دانش‌آموزان ایرانی تقدیم می‌شود. دانش‌آموزانی که در هزارهٔ میلادی جدید به چالشی جهانی فراخوانده شده‌اند که ...

حضوری گر همی خواهی از او غایب مشو حافظ.

ویرایش جدید کتاب هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی برای بار اوّل در سال تحصیلی ۸۱ــ۱۳۸۰ منتشرشد. پس از آن دبیران محترم شرکت کننده در دورهٔ آموزش ضمن‌خدمت در تابستان۱۳۸۰ و هم‌چنین بعضی از دبیران محترم از سرتاسر کشور نظر اصلاحی خود را برای مؤلفان ارسال داشتند. مؤلفان با سپاس از همکاری آنان، بعضی از این نظرها را درچاپ جدید سال ۱۳۸۱ مورد توجه قرار داده و در متن کتاب تغییرات لازم را اعمال کرده‌اند. دریافت هرگونه نظر سازنده از سوی دبیران محترم موجب مزیدتشکر مؤلفان خواهد بود.

پیدایش هندسهٔ تحلیلی

در سال ۱۶۳۷ میلادی **رنه دکارت** ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی با ادغام جبر و هندسه، انقلابی در ریاضیات پدید آورد. دکارت، محل قرار گرفتن یک نقطه را در صفحه (یا فضا) با دوتایی (یا سه تایی) مرتبی از اعداد حقیقی بیان کرد و توانست اشکال هندسی را با معادلات جبری بیان نماید. امروزه این بخش از ریاضیات که توسط دکارت ابداع شد و توسعه یافت به **هندسهٔ تحلیلی** موسوم است.



دکارت

۱

بردارها

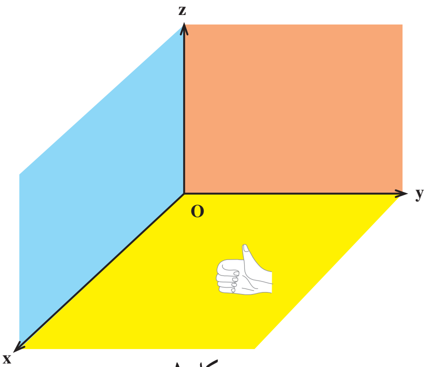
۱.۱ معرفی فضای $\mathbb{R}^۳$

قبلاً با فضای $\mathbb{R}^۲$ به‌عنوان مجموعهٔ تمام زوج‌های مرتب (x,y) که x و y اعداد حقیقی‌اند آشنا شده‌ایم : $\mathbb{R}^۲ = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$. همچنین دیده‌ایم که می‌توان برای نمایش هندسی آن از یک دستگاه مختصات قائم، مرکب از دو خط جهت‌دار متعامد، به نام محورهای مختصات استفاده کرد. اکنون آماده‌ایم که فضای $\mathbb{R}^۳$ را معرفی کنیم.

منظور از **فضای $\mathbb{R}^۳$**، مجموعهٔ تمام سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) است که در آنها x، y و z اعداد حقیقی‌اند :

$$\mathbb{R}^۳ = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

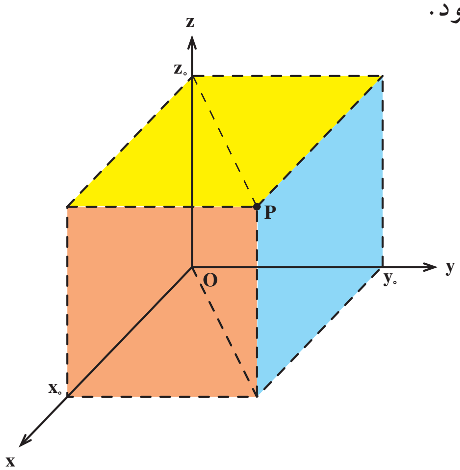
برای نمایش هندسی $\mathbb{R}^۳$، یک **دستگاه مختصات قائم**، مرکب از سه خط جهت‌دار دوبه‌دو متعامد، به نام **محورهای مختصات** را معرفی می‌کنیم که در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند و O مبدأ مشترکی است که از آن نقطه، فاصله در امتداد هر سه خط با یک واحد طول سنجیده می‌شود. خطوط Ox، Oy و Oz به ترتیب **محور xها**، **محور yها** و **محور zها** نامیده می‌شوند و خود نقطهٔ O **مبدأ مختصات** نام دارد. این محورها سه صفحهٔ مختصات دو به‌دو متعامد مشخص می‌کنند : **صفحهٔ xy** که شامل محور xها و yها، **صفحهٔ yz** که شامل محور yها و zها و **صفحهٔ xz** که شامل محور xها و zها است. برای مثال در شکل ۱، صفحهٔ yz صفحهٔ کاغذ است و جهت مثبت (جهت مثبت روی محورها با علامت پیکان مشخص شده است) محور xها به خارج صفحهٔ کاغذ و در زاویهٔ قائم با صفحهٔ yz اشاره دارد. این دستگاه یک دستگاه **راستگرد** نامیده می‌شود، زیرا که با انگشتان



شکل ۱

دست راست جهت‌های مثبت روی محورها، مطابق شکل ۱ مشخص می‌شوند.

با معلوم بودن سه تایی مرتب $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از $\mathbb{R}^3$، نقطه به طول $x_\circ$ را بر محور xها، نقطه به‌طول $y_\circ$ را بر محور yها و نقطه به طول $z_\circ$ را بر محور zها رسم می‌کنیم. سپس صفحهٔ گذرا از $x_\circ$ و موازی صفحهٔ yz، صفحهٔ گذرا از $y_\circ$ و موازی صفحهٔ xz و صفحهٔ گذرا از $z_\circ$ و موازی با صفحهٔ xy را می‌کشیم. نقطهٔ منحصر به فرد P که در آن، سه صفحه متقاطع‌اند (به شکل ۲ نگاه کنید) نقطه به‌مختصات $x_\circ$ ، $y_\circ$ و $z_\circ$ یا دقیقتر، نقطه به طول $x_\circ$ ، عرض $y_\circ$ و ارتفاع $z_\circ$ نامیده می‌شود.



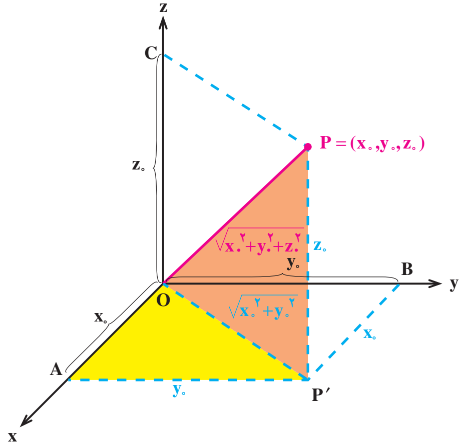
شکل ۲

برعکس اگر صفحات گذرا از نقطهٔ P در فضا به ترتیب موازی صفحات yz، xz و xy، محور xها، yها و zها را در نقاط به طول $x_\circ$ ، عرض $y_\circ$ و ارتفاع $z_\circ$ قطع کند، در این صورت P سه تایی مرتب $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از $\mathbb{R}^3$ را مشخص می‌کند و این تناظر بین سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) از اعداد حقیقی و نقاط فضا دو سویی است. واضح است که در این تناظر O با $(\circ, \circ, \circ)$ متناظر می‌گردد.

توجه می‌کنیم که به خاطر نکاتی که در بالا به آن اشاره کردیم در صحبت از $\mathbb{R}^3$، **زبان هندسی** آزادانه بکار می‌رود. مثلاً معمولاً به جای «نقطه به طول x، عرض y و ارتفاع z» می‌گوییم نقطهٔ (x,y,z). بالاخص $P = (x, y, z)$ یعنی P نقطهٔ (x,y,z) است. همچنین $O = (\circ, \circ, \circ)$ را **نقطهٔ صفر** می‌نامیم.

واضح است که دو نقطهٔ $P=(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ و $Q=(x_{1},y_{1},z_{1})$ **بر هم منطبق‌اند** اگر و فقط اگر مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند، یعنی $x_{\circ}=x_{1}$، $y_{\circ}=y_{1}$ و $z_{\circ}=z_{1}$. در این حالت می‌نویسیم $P=Q$.

اکنون می‌خواهیم فاصلهٔ بین یک نقطه از $\mathbb{R}^{3}$ را از مبدأ مختصات پیدا کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم P نقطه‌ای به مختصات $(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ باشد و فاصلهٔ نقطهٔ P از مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ $O=(\circ,\circ,\circ)$، را با $|OP|$ نشان می‌دهیم (به شکل ۳ نگاه کنید).

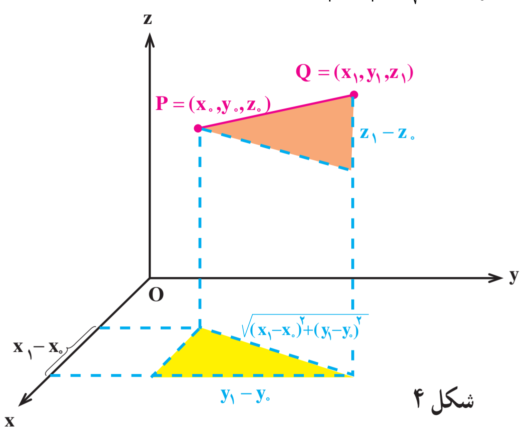


شکل ۳

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAP'، طول وتر OP' برابر $\sqrt{x_{\circ}^{2}+y_{\circ}^{2}}$ است و در مثلث قائم‌الزاویه OPP' نیز طول وتر OP برابر $\sqrt{x_{\circ}^{2}+y_{\circ}^{2}+z_{\circ}^{2}}$ خواهد بود. پس

$$|OP|=\sqrt{x_{\circ}^{2}+y_{\circ}^{2}+z_{\circ}^{2}}\,. \qquad (1)$$

حال، اگر P نقطه‌ای به مختصات $(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ و Q نیز نقطه‌ای به مختصات (x_{1},y_{1},z_{1}) باشد، آنگاه طول PQ، یعنی $|PQ|$، را نیز می‌توانیم به کمک شکل ۴ به‌دست بیاوریم. با توجه



شکل ۴

به شکل ۴ داریم:

$$|PQ| = \sqrt{(x_۱ - x_۰)^۲ + (y_۱ - y_۰)^۲ + (z_۱ - z_۰)^۲} \,. \qquad (۲)$$

مثال ۱. اگر $P = (-۱, ۳, ۶)$ و $Q = (۴, ۰, ۵)$، مقادیر $|PQ|$، $|OP|$ و $|OQ|$ را در زیر محاسبه کرده‌ایم.

$$|PQ| = \sqrt{(۴ - (-۱))^۲ + (۰ - ۳)^۲ + (۵ - ۶)^۲} = \sqrt{۳۵} \,,$$
$$|OP| = \sqrt{(-۱)^۲ + ۳^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۴۶},$$
$$|OQ| = \sqrt{۴^۲ + ۰^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۴۱} \,.$$

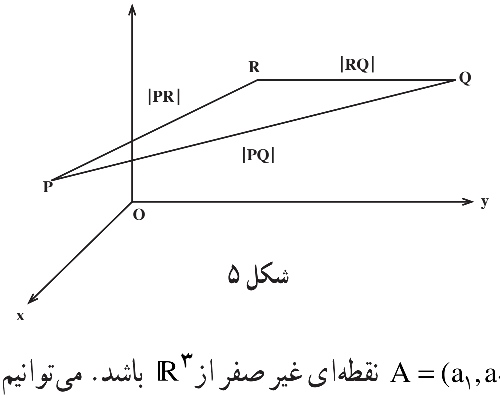
با توجه به حقایق هندسی، سه ویژگی زیر برای طول پاره‌خطِ بین دو نقطهٔ P و Q از $\mathbb{R}^۳$ برقرار است.

ویژگی ۱ طول. $|PQ| = ۰$ اگر و فقط اگر $P = Q$،

ویژگی ۲ طول. $|PQ| = |QP|$،

ویژگی ۳ طول. به‌ازای هر نقطهٔ دلخواه R از $\mathbb{R}^۳$، $|PQ| \le |PR| + |RQ|$ (نامساوی مثلث).

توجه می‌کنیم که برقراری ویژگی ۳ از آنجا است که در هر «مثلث»[۱]، طول هر ضلع کوچکتر از یا مساوی با مجموع طول‌های دو ضلع دیگر است (به شکل ۵ نگاه کنید).



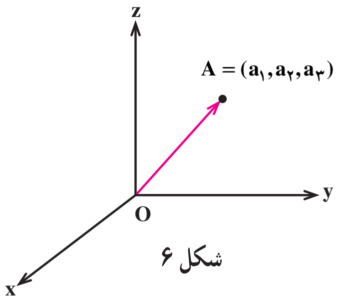
شکل ۵

بردارها در $\mathbb{R}^۳$

فرض کنیم $A = (a_۱, a_۲, a_۳)$ نقطه‌ای غیر صفر از $\mathbb{R}^۳$ باشد. می‌توانیم به نقطهٔ A یک پاره‌خط

۱ـ در اینجا منظور از «مثلث»، مثلث یا خط راست می‌باشد.

جهت‌دار نسبت دهیم. در واقع این پاره‌خط جهت‌دار را پاره‌خطی با نقطهٔ شروع $O=(\circ,\circ,\circ)$ و نقطهٔ پایان $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ در نظر می‌گیریم (به شکل ۶ نگاه کنید).

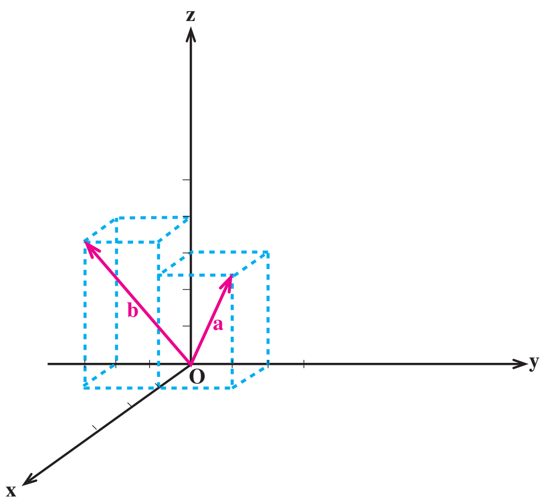


شکل ۶

برعکس اگر یک پاره‌خط جهت‌دار داشته باشیم که نقطهٔ شروع آن $O=(\circ,\circ,\circ)$ باشد، آنگاه نقطهٔ پایان آن، نقطه‌ای غیر صفر مانند $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را نمایش خواهد داد. در نتیجه یک تناظر دوسویی بین پاره‌خط‌های جهت‌دار با نقطهٔ شروع $O=(\circ,\circ,\circ)$ و نقاط غیر صفرِ $\mathbb{R}^۳$ موجود است.

تعریف. به هر پاره‌خط جهت‌دار با نقطهٔ شروع $O=(\circ,\circ,\circ)$ یک **بردار در $\mathbb{R}^۳$** یا به اختصار یک **بردار** می‌گوییم. اگر این بردار را با a نمایش دهیم و نقطهٔ پایان این بردار $(a_۱,a_۲,a_۳)$ باشد، می‌نویسیم «بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$». در هر بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$، $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ **مؤلفه‌های بردار a** نامیده می‌شوند.

مثال ۲. بردارهای $a=(۱,۲,۳)$ و $b=(۱,-۲,۴)$ را در شکل ۷ نمایش داده‌ایم.



شکل ۷

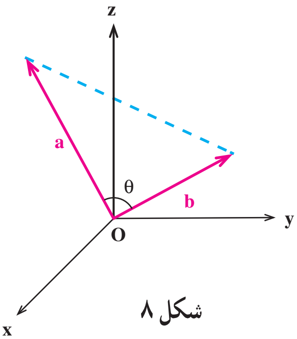
بنابر آنچه در بالا به آن اشاره کردیم یک تناظر دوسویی بین بردارهای $\mathbb{R}^۳$ و نقاط غیرصفرِ $\mathbb{R}^۳$ موجود است. قرارداد می‌کنیم که نقطهٔ صفرِ $\mathbb{R}^۳$ یعنی $O=(۰,۰,۰)$ را **بردار صفر** بنامیم. لذا یک تناظر دوسویی بین بردارهای $\mathbb{R}^۳$ و نقاط $\mathbb{R}^۳$ به‌وجود می‌آید. در این تناظر نقطهٔ $O=(۰,۰,۰)$ با بردار صفرِ $o=(۰,۰,۰)$ متناظر می‌شود.

بنابر تعریف، دو بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ **مساوی‌اند** اگر و فقط اگر مؤلفه‌های آنها نظیر به نظیر مساوی باشند، یعنی $a_۱=b_۱$، $a_۲=b_۲$ و $a_۳=b_۳$. در این حالت می‌نویسیم $a=b$.

همچنین بنابر (۱) **طول** یک بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ که با $|a|$ نشان داده می‌شود، برابر است با

$$|a|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}\ .$$

زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر a و b را زاویه‌ای مانند θ در نظر می‌گیریم که $۰\le\theta\le\pi$ (به شکل ۸ نگاه کنید).



شکل ۸

تعریف. فرض کنیم $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند. **حاصلجمع** این دو بردار را که با $a+b$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a+b=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,a_۳+b_۳)\,.$$

اگر r یک عدد حقیقی باشد، **حاصلضرب** r در a نیز چنین است

$$ra=(ra_۱,ra_۲,ra_۳)\,.$$

$-۱a$ را با $-a$ نشان می‌دهیم و به آن **قرینهٔ** a می‌گوییم، یعنی $-a=(-a_۱,-a_۲,-a_۳)$.

همچنین **تفاضل** b از a را که با $a-b$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a-b=a+(-b)\,.$$

مثال ۳. برای بردارهای $a=(۱,-۳,۲)$ و $b=(-۴,-۱,۰)$، $a+b$، $a-b$ و $-\frac{۱}{۲}a$ را پیدا می‌کنیم.

$$a+b=(۱+(-۴),-۳+(-۱),۲+۰)=(-۳,-۴,۲),$$

$$a-b=(۱-(-۴),-۳-(-۱),۲-۰)=(۵,-۲,۲),$$

$$-\frac{۱}{۲}a=(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲},-۱).$$

قضیهٔ ۱. فرض کنیم a، b و c سه بردار دلخواه، $o=(۰,۰,۰)$ بردار صفر و r و s دو عدد حقیقی باشند. در این صورت داریم

۱) $a+b=b+a$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،

۲) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (خاصیت شرکتپذیری جمع)،

۳) $a+o=o+a=a$،

۴) $a+(-a)=(-a)+a=o$،

۵) $r(a+b)=ra+rb$،

۶) $(r+s)a=ra+sa$،

۷) $(rs)a=r(sa)$،

۸) $۱a=a$،

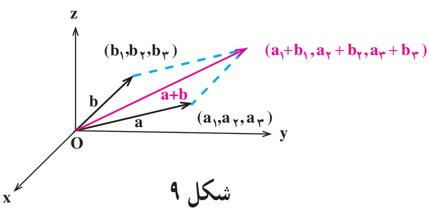
۹) $۰a=o$،

۱۰) $ro=o$.

اثبات. درستی تمام این ویژگی‌ها به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود که آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم. ■

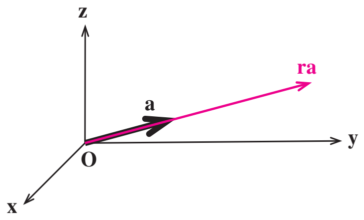
تعبیر هندسی

دیدیم که حاصلجمع دو بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ برداری مانند $a+b$ است که $a+b=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,a_۳+b_۳)$. شکل ۹ در زیر تعبیر هندسی از $a+b$ را نشان می‌دهد.



شکل ۹

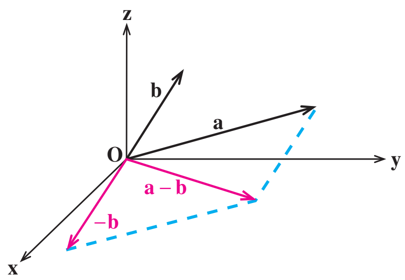
و در مورد حاصلضرب یک عدد حقیقی r در بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ که بردار $ra=(ra_۱,ra_۲,ra_۳)$ است نیز در حالت $r>۱$ تعبیر هندسی در شکل ۱۰ دیده می‌شود.



شکل ۱۰

دو بردار غیر صفرِ a و b را **هم‌راستا** می‌نامیم اگر یک عدد حقیقی غیر صفرِ r موجود باشد که $b=ra$. واضح است که $|b|=|r||a|$ ، که در آن $|r|$ قدرمطلق عدد حقیقی r را نمایش می‌دهد و $|a|$ و $|b|$ به ترتیب نمایانگر طول بردارهای a و b است.

در مورد تفاضل b از a، یعنی $a-b=a+(-b)$ ، و قرینهٔ b، یعنی $-b$ ، شکل ۱۱ تعبیر هندسی موردنظر را ارائه می‌دهد.



شکل ۱۱

بردارهای یکّه

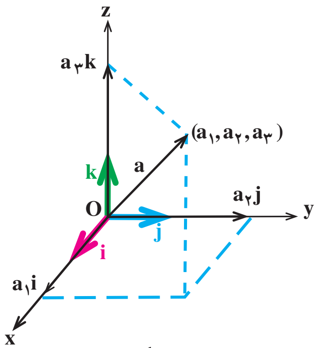
بردار یکّه برداری است با طول واحد. در بین بردارهای یکّه، سه بردار

$$i=(۱,۰,۰),\quad j=(۰,۱,۰),\quad k=(۰,۰,۱)$$

در بیان بردارها از اهمیت و کاربرد ویژه‌ای برخوردار هستند. به سادگی و با استفاده از ویژگی‌های جمع دو بردار و ضرب آنها در یک عدد حقیقی، هر بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را می‌توانیم به‌صورت ترکیب بردارهای i، j و k بنویسیم

$$\begin{aligned} a &= (a_۱, a_۲, a_۳) \\ &= (a_۱, ۰, ۰) + (۰, a_۲, ۰) + (۰, ۰, a_۳) \\ &= a_۱(۱, ۰, ۰) + a_۲(۰, ۱, ۰) + a_۳(۰, ۰, ۱) \\ &= a_۱ i + a_۲ j + a_۳ k . \end{aligned}$$

پس بردار $a = (a_۱, a_۲, a_۳)$ به صورت $a = a_۱ i + a_۲ j + a_۳ k$ قابل نمایش است (به شکل ۱۲ نگاه کنید).



شکل ۱۲

به ازای هر بردار غیر صفرِ a، **بردارِجهت** a برداری با طول واحد است که هم راستا و هم‌جهت با a می‌باشد. اگر بردارِ جهت a را با e_a نمایش دهیم آنگاه

$$e_a = \frac{۱}{|a|} a .$$

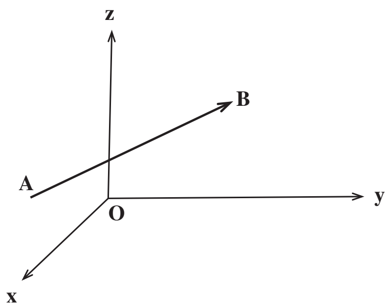
در واقع e_a جهت a را مستقل از طول آن مشخص می کند و

$$a = |a| e_a .$$

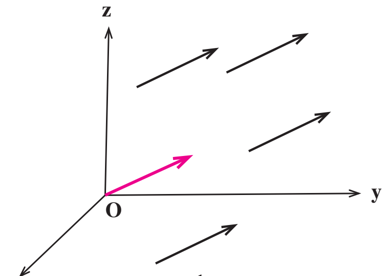
یعنی هر بردار با یک کمیّت عددی غیرمنفی $|a|$ که طول آن است، و یک جهت e_a مشخص می‌شود.

تذکر. هر پاره‌خط جهت‌دار در $\mathbb{R}^۳$ نظیر AB در شکل ۱۳ را یک **پیکان** می‌نامیم. اگر A نقطهٔ ابتدای پیکان و B نقطهٔ انتهای آن باشد، پیکان را با نماد $\overrightarrow{AB}$ نمایش می‌دهیم. هر پیکان را می‌توانیم با مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی آن مشخص کنیم.

پیکان‌های موازی و هم جهت که از لحاظ هندسی

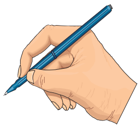


شکل ۱۳



شکل ۱۴

هم طول هستند را با یکدیگر **هم‌ارز** می‌گیریم، زیرا برای این نوع پیکان‌ها طول و جهت اهمیت دارد. از این‌رو بین پیکان‌های هم‌ارز پیکانی که از مبدأ مختصات شروع می‌شود، یعنی همان بردار را در نظر می‌گیریم. لذا از این پس پیکان و بردار را یکی می‌گیریم و به جای پیکان‌ها، بردارهای متناظر آن را در نظر می‌گیریم (به شکل ۱۴ نگاه کنید). از نظر مختصاتی بردار متناظر با پیکانی که از $P=(x_0,y_0,z_0)$ شروع می‌شود و به $Q=(x_1,y_1,z_1)$ ختم می‌شود، عبارت است از $(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ و آن را بردار هم‌ارز با $\overrightarrow{PQ}$ می‌نامیم.



تمرین

۱. نقاطی با مختصات (۱،۱،۱)، (۲−،۰،۰)، (۱،۲−،۲) و (۱−،۲−،۳−) را در یک دستگاه مختصات قائم نمایش دهید.

۲. رؤوس یک مکعب عبارتند از (۰،۰،۰)، (۲،۰،۰)، (۰،۲،۰)، (۰،۰،۲)، (۲،۲،۰)، (۰،۲،۲)، (۲،۰،۲) و (۲،۲،۲). این مکعب را در یک دستگاه مختصات قائم نمایش دهید.

۳. قرینهٔ مکعب تمرین ۲ را نسبت به هر یک از صفحات مختصات قائم با مشخص کردن مختصات رؤوس پیدا کنید.

۴. در هر یک از حالات زیر، فاصلهٔ P از Q را پیدا کنید.

الف) $P=(\sqrt{2},0,0)$ ، $Q=(0,1,1)$ ،

ب) $P=(1,0,-\frac{1}{2})$ ، $Q=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$.

۵. محیط مثلث ABC را با فرض $A=(-1,0,0)$ ، $B=(2,0,\sqrt{7})$ و $C=(3,\sqrt{2},\sqrt{7})$ پیدا کنید.

۶. مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط PQ را که $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ پیدا کنید.

۷. طول میانهٔ AM از مثلث ABC را که در تمرین ۵ ذکر شده است به‌دست آورید.

۸. قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۹. در هر یک از حالات زیر، بردار هم‌ارز با پیکان $\overrightarrow{PQ}$ را به‌صورت $ai+bj+ck$ بنویسید.

الف) $P=(3,-4,10)$ ، $Q=(0,0,0)$ ،

ب) $P=(3,-1,3)$ ، $Q=(1,-3,2)$ ،

ج) $P=(2,1+\sqrt{2},1+\sqrt{3})$ ، $Q=(2,1,1)$.

۱۰. در هر یک از حالات زیر بردارهای $a+b$ ، $a-b$ و ra را پیدا کنید.

الف) $a=2i-5j+10k$ ، $b=-i+2j-3k$ ، $r=2$ ،

ب) $a=i+j-3k$ ، $b=\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-3k$ ، $r=-1$ ،

ج) $a=2i$ ، $b=j+k$ ، $r=\frac{1}{3}$.

۱۱. در هر یک از حالات زیر طول بردار a را پیدا کنید.

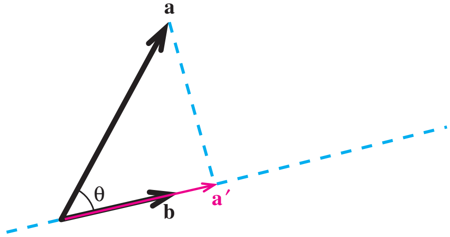
الف) $a=i-j+k$ ، ب) $a=-3i+4j-12k$ ،

ج) $a=\sqrt{2}\,i-j+k$ ، د) $a=4i-8j+8k$.

۱۲. به ازای هر یک از بردارهای a که در تمرین ۱۱ ذکر شده‌اند، بردار e_a را پیدا کنید.

۲.۱ ضرب داخلی

دو بردار غیرصفر a و b را که زاویهٔ بین آنها θ است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $0 \neq \theta \neq \frac{\pi}{2}$ (به شکل ۱ نگاه کنید). می‌خواهیم تصویر قائم a را روی امتداد b پیدا کنیم. این تصویر قائم را بردار a' می‌نامیم.



شکل ۱

واضح است که a' در امتداد b و هم جهت با آن است، پس $a' = rb$ و $r > 0$. در نتیجه $|a'| = |rb| = r|b|$ و لذا $r = \frac{|a'|}{|b|}$. امّا از آنجایی که $\cos\theta = \frac{|a'|}{|a|}$ پس $|a'| = |a|\cos\theta$ و در نتیجه $r = \frac{|a|\cos\theta}{|b|}$ و بدین ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$a' = \frac{|a|\cos\theta}{|b|} b ,$$

یا

$$a' = \frac{|a||b|\cos\theta}{|b|^{2}} b . \qquad (1)$$

به‌عنوان تمرین بررسی کنید که در حالت $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ و حالات خاص $\theta = 0$، $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = \pi$ نیز تصویر قائم a روی امتداد b، یعنی a'، از فرمول (۱) به‌دست می‌آید. عدد $|a||b|\cos\theta$ که در فرمول (۱) ظاهر شده است، عددی است وابسته به دو بردار غیرصفر a و b و زاویهٔ بین آنها θ. در ریاضیات این عدد وابسته به دو بردار غیرصفر بسیار ظاهر می‌شود و لذا شایستهٔ داشتن نامی است. این عدد وابسته به دو بردار غیرصفر را ضرب داخلی این دو بردار می‌نامند.

تعریف. فرض کنیم a و b دو بردار غیرصفر باشند و θ زاویهٔ بین آنها. در این صورت **ضرب داخلی** a در b را که با نماد $a.b$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a.b = |a||b|\cos\theta .$$

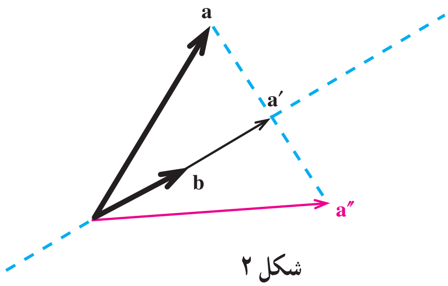
اگر یکی از دو بردار a یا b و یا هر دو برابر صفر باشند، آنگاه زاویهٔ بین آنها قابل تعریف نیست. در این حالت قرارداد می‌کنیم که $a.b = 0$.

تذکر. ضرب داخلی به دلیل وجود نقطه در $a.b$ اغلب **ضرب‌نقطه‌ای** نیز نامیده می‌شود. همچنین، به خاطر این که حاصل $a.b$ یک عدد می‌باشد، به ضرب داخلی، **ضرب اسکالر** نیز می‌گویند.

اکنون با توجه به تعریف بالا می‌توانیم فرمول (۱) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$a' = \text{تصویر قائم بردار غیرصفر } a \text{ روی امتداد بردار غیرصفر } b = \frac{a.b}{|b|^{2}} b . \qquad (1')$$

در زیر فرمولی نیز برای محاسبهٔ قرینهٔ یک بردار غیرصفر نسبت به امتداد بردار غیرصفر دیگر پیدا می‌کنیم. برای این منظور گیریم a و b دو بردار غیرصفر باشند و a′ را قرینهٔ a نسبت به امتداد b فرض می‌کنیم (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

توجه می‌کنیم که

$$a' = a + 2(a' - a)$$
$$= 2a' - a .$$

لذا بنابر فرمول (۱′) به‌دست می‌آوریم

$$a' = b \text{ قرینهٔ بردار غیرصفر } a \text{ نسبت به امتداد بردار غیرصفر } = \frac{2a.b}{|b|^2}b - a . \qquad (۲)$$

ویژگی‌های ضرب داخلی

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم ضرب داخلی را بیان خواهیم کرد.

ویژگی ۱ ضرب داخلی. برای هر دو بردار a و b، $a.b = b.a$.

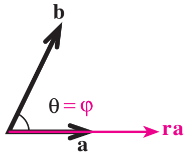
برای بررسی درستی ویژگی ۱ ملاحظه می‌کنیم که اگر یکی از بردارهای a یا b و یا هر دو بردار صفر باشد، آنگاه a.b و b.a هر دو بنابر قرارداد برابر صفر می‌باشند و لذا تساوی برقرار است. پس فرض می‌کنیم a و b دو بردار غیرصفر باشند که زاویهٔ بین آنها θ است. در این حالت نیز داریم

$$a.b = |a||b|\cos\theta = |b||a|\cos\theta = b.a .$$

ویژگی ۲ ضرب داخلی. برای هر دو بردار a و b و هر عدد حقیقی r، $ra.b = r(a.b) = a.rb$.

در ویژگی ۲، فقط درستی تساوی اوّل را بررسی می‌کنیم. درستی تساوی دوم به عنوان تمرین رها می‌شود. اگر یکی از بردارهای a یا b و یا هر دو بردار صفر باشد و یا $r = ۰$ ، دو طرف تساوی اوّل برابر صفر است و لذا تساوی اوّل برقرار است. پس فرض می‌کنیم a و b هر دو بردارهای غیرصفر

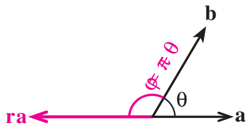
هستند و $r \neq 0$. زاویهٔ بین a و b را θ و زاویهٔ بین ra و b را φ می‌گیریم. اکنون با توجه به این که



شکل ۳

$$\varphi = \begin{cases} \theta & : \text{اگر } r > 0 \\ \pi - \theta & : \text{اگر } r < 0 \end{cases}$$ (به شکل ۳ و ۴ نگاه کنید)

داریم



شکل ۴

$$\cos\varphi = \begin{cases} \cos\theta & : \text{اگر } r > 0 \\ -\cos\theta & : \text{اگر } r < 0 \end{cases} = \frac{r}{|r|}\cos\theta .$$

لذا به‌دست می‌آوریم

$$ra.b = |ra||b|\cos\varphi = |r||a||b|\frac{r}{|r|}\cos\theta = r(|a||b|\cos\theta) = r(a.b) .$$

ویژگی ۳ ضرب داخلی. برای هر بردار a، $a.a = |a|^2$.

اگر a بردار صفر باشد، طرفین تساوی برابر صفر است و لذا تساوی برقرار است. اگر a برداری غیرصفر باشد، با توجه به این که زاویهٔ بین a و خودش برابر صفر است به‌دست می‌آوریم

$$a.a = |a||a|\cos 0 = |a|^2 .$$

با توجه به ویژگی ۳ واضح است که $a.a \geq 0$. همچنین $a.a = 0$ اگر و فقط اگر $|a|^2 = 0$ اگر و فقط اگر $|a| = 0$ اگر و فقط اگر $a = 0$.

ویژگی ۴ ضرب داخلی. برای هر دو بردار غیرصفر a و b، a بر b عمود است اگر و فقط اگر $a.b = 0$.

برای بررسی درستی ویژگی ۴، گیریم θ زاویهٔ بین دو بردار غیرصفرِ a و b باشد. در این صورت

$$a.b = 0 \Leftrightarrow |a||b|\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = 0$$ با توجه به غیرصفر بودن بردارهای a و b

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

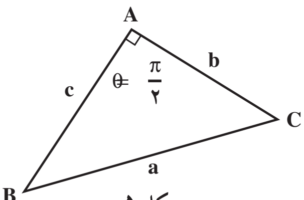
. a و b بر هم عمود باشند $\Leftrightarrow$

مثال ۱. توجه می‌کنیم که بردارهای i، j و k دو به‌دو برهم عمودند، لذا بنابر ویژگی ۴ ضرب داخلی $i.j = j.i = j.k = k.j = k.i = i.k = ۰$. همچنین با توجه به این که $|i| = |j| = |k| = ۱$ ، بنابر ویژگی ۳ ضرب داخلی به‌دست می‌آوریم $i.i = j.j = k.k = ۱$.

اکنون فرمولی برای محاسبهٔ a.b برحسب مختصات a و b بیان می‌کنیم. برای این منظور به قضیه‌ای از هندسه نیازمندیم که ابتدا در زیر به آن اشاره می‌کنیم. به کمک این قضیه که به قضیهٔ کسینوسها معروف است قضیهٔ ۲ را ثابت خواهیم کرد که همان ارائه فرمولی برای محاسبهٔ a.b برحسب مختصات a و b است.

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ کسینوسها). مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. گیریم a، b و c طول اضلاع این مثلث باشد که به ترتیب روبه‌روی زوایای A، B و C هستند. اگر θ زاویهٔ بین AB و AC باشد، آنگاه

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\theta .$$

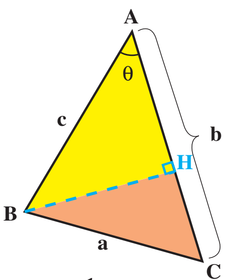


شکل ۵

اثبات[1]**.** ابتدا فرض می‌کنیم $\theta = \frac{\pi}{۲}$ (به شکل ۵ نگاه کنید).

در این صورت $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{۲} = ۰$ و لذا حکم قضیه به‌صورت $a^۲ = b^۲ + c^۲$ تبدیل می‌شود که همان قضیهٔ فیثاغورس است و برقرار می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم $۰ \neq \theta \neq \frac{\pi}{۲}$ (به شکل ۶ نگاه کنید).



شکل ۶

BH، ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم

$$a^۲ = BH^۲ + HC^۲ . \quad (۱)$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم

$$c^۲ = BH^۲ + AH^۲ . \quad (۲)$$

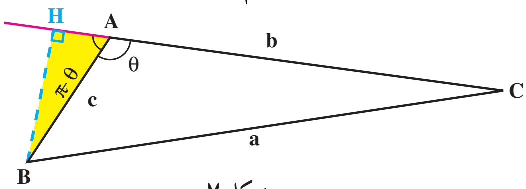
۱ــ در اثبات این قضیه، برای راحتی طول پاره‌خط X را به جای |X| با X نمایش داده‌ایم.

اکنون بنابر رابطهٔ (۱) می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} a^2 &= BH^2 + HC^2 \\ &= BH^2 + (b - AH)^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + b^2 - 2bAH \\ &= c^2 + b^2 - 2bAH . \qquad \text{(بنابر رابطهٔ (۲))} \end{aligned}$$

امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، $\cos\theta = \frac{AH}{c}$ و لذا $AH = c\cos\theta$. در نتیجه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ که درستی حکم را در این حالت به‌دست می‌دهد.

اکنون آنچه باقی می‌ماند حالت $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ می‌باشد (به شکل ۷ نگاه کنید).



شکل ۷

BH، ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم

$$a^2 = BH^2 + HC^2 . \qquad (۳)$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم

$$c^2 = BH^2 + AH^2 . \qquad (۴)$$

اکنون بنابر رابطهٔ (۳) می‌توانیم بنویسیم

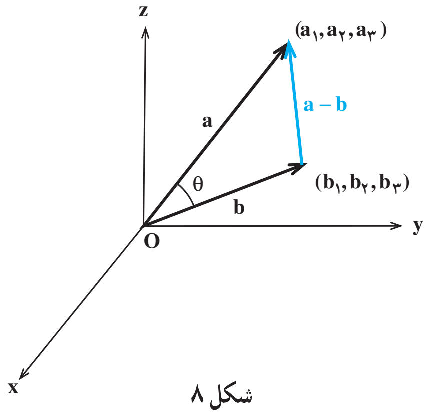
$$\begin{aligned} a^2 &= BH^2 + HC^2 \\ &= BH^2 + (b + AH)^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + b^2 + 2bAH \\ &= c^2 + b^2 + 2bAH . \qquad \text{(بنابر رابطهٔ (۴))} \end{aligned}$$

امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، $\cos(\pi - \theta) = \frac{AH}{c}$ و چون $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ ، لذا $AH = -c\cos\theta$. در نتیجه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ که درستی حکم را در این حالت نیز به‌دست می‌دهد. ■

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. دراین صورت $a.b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

اثبات. اگر یکی از a یا b و یا هر دو بردار صفر باشد آنگاه دو طرف تساوی صفر است و لذا تساوی برقرار می‌باشد. پس فرض می‌کنیم a و b هر دو بردارهای غیرصفر باشند و θ زاویهٔ بین آنها.

اگر $\theta \neq \circ$ و π، آنگاه بردارهای a، b و $a-b$ مثلثی تشکیل می‌دهند (به شکل ۸ نگاه کنید).



شکل ۸

در مثلث شکل ۸، با استفاده از قضیهٔ کسینوسها داریم

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\theta \cdot$$

در حالات $\theta=\circ$ یا $\theta=\pi$، از بردارهای a، b و $a-b$ مثلثی به‌وجود نمی‌آید، ولیکن در این دو حالت نیز تساوی بالا مجدداً برقرار است (چرا؟). لذا در هر صورت

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2a.b\,,$$

پس

$$a.b=\frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2-|a-b|^2\right).$$

اکنون با توجه به این که $a-b=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$ به‌دست می‌آوریم

$$a.b=\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2-(a_3-b_3)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3)$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,. \quad \blacksquare$$

مثال ۲. می‌خواهیم تصویر قائم بردار $a=(۱,۲,-۲)$ را روی امتداد بردار $b=(۱,۲,۲)$ پیدا کنیم. توجه می‌کنیم که $a.b=(۱)(۱)+(۲)(۲)+(-۲)(۲)=۱$. چون $|b|^۲=۱^۲+۲^۲+۲^۲=۹$ لذا فرمول $(۱')$ نتیجه می‌دهد که

$$a' = \underset{\text{روی امتداد بردار غیرصفر b}}{\text{تصویر قائم بردار غیرصفر a}} = \frac{a.b}{|b|^۲}b=\frac{۱}{۹}(۱,۲,۲)=(\frac{۱}{۹},\frac{۲}{۹},\frac{۲}{۹}).$$

مثال ۳. برای بردارهای معرفی شده در مثال قبل، قرینهٔ بردار a نسبت به امتداد بردار b به‌کمک فرمول (۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$a' = \underset{\text{نسبت به امتداد بردار غیرصفر b}}{\text{قرینهٔ بردار غیرصفر a}} = \frac{۲a.b}{|b|^۲}b-a=\frac{۲}{۹}(۱,۲,۲)-(۱,۲,-۲)=(\frac{-۷}{۹},\frac{-۱۴}{۹},\frac{۲۲}{۹}).$$

مثال ۴. نشان می‌دهیم بردارهای $a=(-۴,۵,۷)$ و $b=(۱,-۲,۲)$ بر هم عمودند. بنابر قضیهٔ ۲ داریم

$$a.b=(-۴)(۱)+(۵)(-۲)+(۷)(۲)=۰,$$

و لذا بنابر ویژگی ۴ ضرب داخلی، a بر b عمود است.

مثال ۵. می‌خواهیم زاویهٔ بین دو بردار $a=(۲,-۱,۲)$ و $b=(۱,-۱,۰)$ را پیدا کنیم. بنابر قضیهٔ ۲ داریم

$$a.b=(۲)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۳.$$

حال گیریم θ زاویهٔ بین a و b باشد، پس $a.b=|a||b|\cos\theta$ و یا

$$۳=\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(۲)^۲}\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲}\cos\theta.$$

در نتیجه $۳=۳\sqrt{۲}\cos\theta$، پس $\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و لذا $\theta=\frac{\pi}{۴}$.

ویژگی ۵ ضرب داخلی. برای هر سه بردار a، b و c، $a.(b+c)=a.b+a.c$ و $(a+b).c=a.c+b.c$.

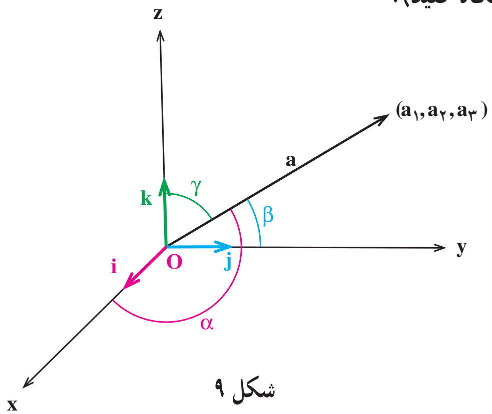
برای بررسی درستی ویژگی ۵ کافی است قرار دهیم $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$، $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ و

$c=(c_۱,c_۲,c_۳)$. در این صورت $b+c=(b_۱+c_۱,b_۲+c_۲,b_۳+c_۳)$ و لذا بنابر قضیهٔ ۲ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a.(b+c) &= a_۱(b_۱+c_۱)+a_۲(b_۲+c_۲)+a_۳(b_۳+c_۳) \\ &= (a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)+(a_۱c_۱+a_۲c_۲+a_۳c_۳) \\ &= a.b+a.c\,. \end{aligned}$$

درستی تساوی دوم به‌عنوان تمرین رها می‌شود.

به کمک قضیهٔ ۲ می‌توانیم زوایایی که یک بردار غیرصفر با محورهای مختصات می‌سازد پیدا کنیم. گیریم بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ با محور xها، محور yها و محور zها به ترتیب زوایای α، β و γ بسازد (به شکل ۹ نگاه کنید).



شکل ۹

چون $i=(۱,۰,۰)$، $j=(۰,۱,۰)$ و $k=(۰,۰,۱)$، لذا قضیهٔ ۲ نتیجه می‌دهد که $a.i=a_۱$، $a.j=a_۲$ و $a.k=a_۳$. در نتیجه

$$\begin{aligned} a_۱ &= a.i=|a||i|\cos\alpha=|a|\cos\alpha, \\ a_۲ &= a.j=|a||j|\cos\beta=|a|\cos\beta, \\ a_۳ &= a.k=|a||k|\cos\gamma=|a|\cos\gamma. \end{aligned}$$

پس α، β و γ از فرمول‌های زیر قابل محاسبه‌اند

$$\cos\alpha=\frac{a_۱}{|a|}\,,\ \cos\beta=\frac{a_۲}{|a|}\,,\ \cos\gamma=\frac{a_۳}{|a|}\,. \qquad (۳)$$

α، β و γ را **زوایای هادی** بردار a می‌نامند. توجه می‌کنیم که

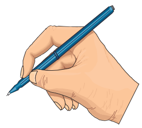
$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = \frac{a_۱^۲}{|a|^۲} + \frac{a_۲^۲}{|a|^۲} + \frac{a_۳^۲}{|a|^۲} = \frac{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}{|a|^۲} = \frac{|a|^۲}{|a|^۲} = ۱,$$

و لذا برای کسینوس زوایای هادی بردار a، تساوی زیر برقرار است.

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱. \qquad (۴)$$

مثال ۶. می‌خواهیم کسینوس زوایای هادی بردار $a = (۱۲,-۱۵,-۱۶)$ را پیدا کنیم. توجه می‌کنیم که $|a| = \sqrt{(۱۲)^۲ + (-۱۵)^۲ + (-۱۶)^۲} = ۲۵$ و لذا بنابر تساوی‌های ظاهر شده در (۳) $\cos\alpha = \frac{۱۲}{۲۵}$، $\cos\beta = \frac{-۱۵}{۲۵}$ و $\cos\gamma = \frac{-۱۶}{۲۵}$.

مثال ۷. در این مثال به کمک تساوی (۴) نشان می‌دهیم که برداری وجود ندارد که با محورهای مختصات زوایای $\alpha = \frac{\pi}{۴}$، $\beta = \frac{۳\pi}{۴}$ و $\gamma = \frac{\pi}{۳}$ بسازد. زیرا اگر چنین برداری موجود باشد زوایای هادی آن α، β و γ خواهد بود و لذا کسینوس زوایای هادی آن، یعنی $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، $\cos\beta = \cos\frac{۳\pi}{۴} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ و $\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$، لزوماً باید در تساوی (۴) صدق کنند : $(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲ = ۱$. پس $\frac{۵}{۴} = ۱$ و این تناقض است.



تمرین

۱. برای هر یک از بردارهای a و b که در زیر آمده است، زاویهٔ بین a و b را پیدا کنید.

الف) $a = (۱,۱,۰)$ ، $b = (۰,-۱,-۱)$ ،

ب) $a = (-۴,۲,-۵)$ ، $b = (\frac{۱}{۲},۶,۲)$ ،

ج) $a = (۱,۰,۰)$ ، $b = (\sqrt{۳},۱,۰)$ ،

د) $a = (۰,۰,۱)$ ، $b = (۰,\sqrt{۳},۱)$.

۲. نشان دهید بردارهای a، b و c که در زیر تعریف شده‌اند دوبه‌دو برهم عمودند.

$$a=(۲,۱,-۱)\ ,\ b=(۳,۷,۱۳)\ ,\ c=(۲۰,-۲۹,۱۱)\ .$$

۳. برای هر یک از بردارهای a و b که در زیر آمده است، تصویر قائم a را روی امتداد b و قرینهٔ a را نسبت به امتداد b پیدا کنید.

الف) $a=(۲,-۱,۲)$ ، $b=(۱,۰,۰)$ ،

ب) $a=(۱,۰,۰)$ ، $b=(-۲,۳,-۴)$ ،

ج) $a=(۱,۱,۰)$ ، $b=(-۱,۲,۴)$ ،

د) $a=(۲,۳,۱)$ ، $b=(۳,۲,۱)$.

۴. فرض کنید a، b و c بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱، ۲ و ۳ با این خاصیت که $a+b+c=o$. مقدار $a.b+b.c+c.a$ را محاسبه کنید.

۵. فرض کنید a، b و c سه بردار غیرصفر باشند. اگر $a.b=a.c$ ، با مثالی نشان دهید که لزومی ندارد $b=c$.

۶. تصویر قائم بردار $a=(۴,-۳,۲)$ را برامتداد برداری که با قسمت مثبت محورهای مختصات زوایای حادهٔ مساوی می‌سازد به‌دست آورید.

۷. فرض کنید $a=(۳,-۶,-۱)$ ، $b=(۱,۴,-۵)$ و $c=(۳,-۴,۱۲)$. تصویر قائم $a+b$ را برامتداد c به‌دست آورید.

۸. فرض کنید $a=(۱,-۳,۴)$ ، $b=(۳,-۴,۲)$ و $c=(-۱,۱,۴)$. تصویر قائم a را بر امتداد $b+c$ به‌دست آورید.

۹. الف) فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. نامساوی $|a.b|\le|a||b|$ را ثابت کنید (این نامساوی به نامساوی کشی ــ شوارتس معروف است)،

ب) به کمک الف ثابت کنید برای اعداد حقیقی $a_۱$ ، $a_۲$ ، $a_۳$ ، $b_۱$ ، $b_۲$ و $b_۳$ داریم

$$|a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳|\le(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)^{\frac{۱}{۲}}(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)^{\frac{۱}{۲}}،$$

ج) به کمک ب ثابت کنید برای اعداد حقیقی $a_۱$ ، $a_۲$ و $a_۳$ داریم

$$(\frac{a_۱+a_۲+a_۳}{۳})^۲\le\frac{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}{۳}\ .$$

۱۰. فرض کنید a و b دو بردار غیرصفر باشند. ثابت کنید a بر b عمود است اگر و فقط اگر $|a+b|^۲=|a|^۲+|b|^۲$ (با اثبات این تمرین، اثباتی جدید از کدام قضیهٔ معروف هندسه ارائه کرده‌اید؟).

۱۱. فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. نامساوی مثلث را ثابت کنید : $|a+b| \le |a|+|b|$ (با اثبات این تمرین، اثباتی جدید از کدام قضیهٔ معروف هندسه ارائه کرده‌اید؟).

۱۲. فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. ثابت کنید $|a+b|^۲ + |a-b|^۲ = ۲|a|^۲ + ۲|b|^۲$ (تعبیر هندسی رابطهٔ بالا چیست؟).

۱۳. فرض کنید a و b دو بردار باشند و $a+b$ و $a-b$ غیرصفر باشند. شرطی لازم و کافی برای عمود بودن $a+b$ بر $a-b$ را پیدا کنید (کدام مطلب هندسی را از حل این تمرین به‌دست آورده‌اید؟).

۳.۱ ضرب خارجی

در این بخش، برخلاف بخش قبل که به دو بردار یک عدد وابسته کردیم، می‌خواهیم به دو بردار یک بردار وابسته کنیم. این بردار را ضرب خارجی دو بردار مذکور می‌نامند.

تعریف. فرض کنیم $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند. **ضرب خارجی** a در b را که با نماد $a\times b$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a\times b=(a_۲b_۳-a_۳b_۲ \ , \ a_۳b_۱-a_۱b_۳ \ , \ a_۱b_۲-a_۲b_۱)\,.$$

مثال ۱. فرض کنیم $a=(۲,-۱,۳)$ و $b=(-۱,-۲,۴)$. در این صورت

$$\begin{aligned} a\times b &= (۲,-۱,۳)\times(-۱,-۲,۴) \\ &= \big((-۱)(۴)-(۳)(-۲) \ , \ (۳)(-۱)-(۲)(۴) \ , (۲)(-۲)-(-۱)(-۱)\big) \\ &= (۲,-۱۱,-۵)\,, \\ b\times a &= (-۱,-۲,۴)\times(۲,-۱,۳) \\ &= \big((-۲)(۳)-(۴)(-۱) \ , \ (۴)(۲)-(-۱)(۳) \ , (-۱)(-۱)-(-۲)(۲)\big) \\ &= (-۲,۱۱,۵)\,. \end{aligned}$$

توجه می‌کنیم که برای دو بردار a و b که در این مثال معرفی شده‌اند داریم $a\times b=-(b\times a)$. این موضوع تصادفی نمی‌باشد و می‌توان این مطلب را برای هر دو بردار a و b در حالت کلی ثابت کرد (به ویژگی ۱ضرب خارجی نگاه کنید).

مثال ۲. بردارهای i، j و k را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف بالا

$$i\times j=(1,0,0)\times(0,1,0)=((0)(0)-(0)(1)\ ,\ (0)(0)-(1)(0)\ ,\ (1)(1)-(0)(0))=(0,0,1)=k\,.$$

به همین ترتیب به‌عنوان تمرین می‌توانید بررسی کنید $j\times k=i$ و $k\times i=j$.

ویژگی‌های ضرب خارجی

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم ضرب خارجی را بیان خواهیم کرد.

ویژگی ۱ ضرب خارجی. برای هر دو بردار a و b، $a\times b=-(b\times a)$.

برای بررسی درستی ویژگی ۱ قرار می‌دهیم $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$. توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}a\times b&=(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)\\&=(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ a_3b_1-a_1b_3\ ,\ a_1b_2-a_2b_1),\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}b\times a&=(b_1,b_2,b_3)\times(a_1,a_2,a_3)\\&=(b_2a_3-b_3a_2\ ,\ b_3a_1-b_1a_3\ ,\ b_1a_2-b_2a_1).\end{aligned}$$

لذا به راحتی ملاحظه می‌شود که $a\times b=-(b\times a)$.

ویژگی ۲ ضرب خارجی. برای هر بردار a، $a\times a=o$.

برای بررسی درستی ویژگی ۲ توجه می‌کنیم که بنابر ویژگی ۱، $a\times a=-(a\times a)$ و لذا $2(a\times a)=o$ ، یا $a\times a=o$.

ویژگی ۳ ضرب خارجی. برای هر دو بردار a و b و هر عدد حقیقی r، $ra\times b=r(a\times b)=a\times rb$.

در ویژگی ۳، فقط درستی تساوی اوّل را بررسی می‌کنیم. درستی تساوی دوم به‌عنوان تمرین رها می‌شود. برای این منظور قرار می‌دهیم $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$. در نتیجه

$$ra\times b=(ra_1,ra_2,ra_3)\times(b_1,b_2,b_3)$$
$$=(ra_2b_3-ra_3b_2\ ,\ ra_3b_1-ra_1b_3\ ,\ ra_1b_2-ra_2b_1)$$
$$=r(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ a_3b_1-a_1b_3\ ,\ a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=r(a\times b)\,.$$

ویژگی ۴ ضرب خارجی. برای هر سه بردار a، b و c، $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ و $(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$.

در ویژگی ۴ فقط درستی تساوی اوّل را ثابت می‌کنیم. بررسی درستی تساوی دوم به صورت تمرین رها می‌شود. برای این منظور قرار می‌دهیم $a=(a_1,a_2,a_3)$، $b=(b_1,b_2,b_3)$ و $c=(c_1,c_2,c_3)$. لذا

$$a\times(b+c)=(a_1,a_2,a_3)\times(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)$$
$$=\big(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2)\ ,\ a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+c_3)\ ,$$
$$a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)\big)$$
$$=\big((a_2b_3-a_3b_2)+(a_2c_3-a_3c_2)\ ,\ (a_3b_1-a_1b_3)+$$
$$(a_3c_1-a_1c_3)\ ,\ (a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_2-a_2c_1)\big)$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ a_3b_1-a_1b_3\ ,\ a_1b_2-a_2b_1)+$$
$$(a_2c_3-a_3c_2\ ,\ a_3c_1-a_1c_3\ ,\ a_1c_2-a_2c_1)$$
$$=a\times b+a\times c\,.$$

مثال ۳. به کمک مثال ۲ و ویژگی‌های بالا می‌توانیم بنویسیم

$$i\times(i\times k)=i\times[-(k\times i)]=i\times(-j)=-(i\times j)=-k\,,$$

و

$$(i\times i)\times k=o\times k=o\,.$$

در نتیجه $i\times(i\times k)\neq(i\times i)\times k$ و این مثال نشان می‌دهد که ضرب خارجی خاصیت شرکتپذیری ندارد. یعنی این که در حالت کلی برای سه بردار a، b و c، $a\times(b\times c)\neq(a\times b)\times c$ و لذا نوشتن $a\times b\times c$، بدون درج پرانتز، بی‌معنی است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم a و b دو بردار دلخواه باشند. در این صورت

$$a.(a\times b)=۰ \;,\; b.(a\times b)=۰ .$$

اثبات. قرار می‌دهیم $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$، درنتیجه

$$a.(a\times b)=a_۱(a_۲b_۳-a_۳b_۲)+a_۲(a_۳b_۱-a_۱b_۳)+a_۳(a_۱b_۲-a_۲b_۱)=۰ ,$$

و

$$b.(a\times b)=b_۱(a_۲b_۳-a_۳b_۲)+b_۲(a_۳b_۱-a_۱b_۳)+b_۳(a_۱b_۲-a_۲b_۱)=۰ . \blacksquare$$

نتیجه. اگر a و b دو بردار غیرصفر باشند طوری که $a\times b$ نیز غیرصفر گردد، آنگاه $a\times b$ هم بر a و هم بر b عمود است.

مثال ۴. می‌خواهیم برداری پیدا کنیم که بر هر دو بردار $a=(۴,-۱,۳)$ و $b=(۲,۳,-۱)$ عمود باشد. بنابر نتیجهٔ بالا، بردار مطلوب برابر است با $a\times b=(-۸,۱۰,۱۴)$.

قضیهٔ ۲. برای هر دو بردار غیرصفر a و b که زاویهٔ بین آنها θ است داریم

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta .$$

اثبات. به کمک تعریف وبا فرض $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
|a\times b|^۲ &= (a_۲b_۳-a_۳b_۲)^۲+(a_۳b_۱-a_۱b_۳)^۲+(a_۱b_۲-a_۲b_۱)^۲\\
&= a_۲^۲b_۳^۲-۲a_۲a_۳b_۲b_۳+a_۳^۲b_۲^۲+a_۳^۲b_۱^۲-۲a_۱a_۳b_۱b_۳+a_۱^۲b_۳^۲\\
&\qquad +a_۱^۲b_۲^۲-۲a_۱a_۲b_۱b_۲+a_۲^۲b_۱^۲\\
&= (a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)-(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^۲\\
&= |a|^۲|b|^۲-(a.b)^۲\\
&= |a|^۲|b|^۲-|a|^۲|b|^۲\cos^۲\theta\\
&= |a|^۲|b|^۲(۱-\cos^۲\theta)\\
&= |a|^۲|b|^۲\sin^۲\theta\\
&= (|a||b|\sin\theta)^۲ .
\end{aligned}$$

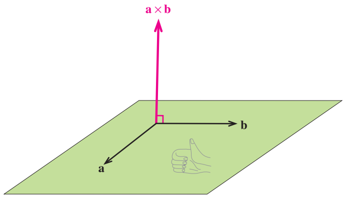
در نتیجه $|a\times b|^{2} = (|a||b|\sin\theta)^{2}$. چون $0 \le \theta \le \pi$، لذا $\sin\theta \ge 0$. در نتیجه $|a\times b|$ و $|a||b|\sin\theta$ نامنفی می‌باشند و لذا $|a\times b| = |a||b|\sin\theta$. ■

ویژگی ۵ ضرب خارجی. برای هر دو بردار غیرصفر a و b، a با b موازی است اگر و فقط اگر $a\times b = o$.

برای بررسی درستی ویژگی ۵، گیریم θ زاویهٔ بین دو بردار a و b باشد. در این صورت

$$a\times b = o \Leftrightarrow |a\times b| = 0$$
$$\Leftrightarrow |a||b|\sin\theta = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin\theta = 0 \qquad \text{با توجه به غیرصفر بودن بردارهای a و b}$$
$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi$$

$\Leftrightarrow$ a و b با هم موازی باشند.



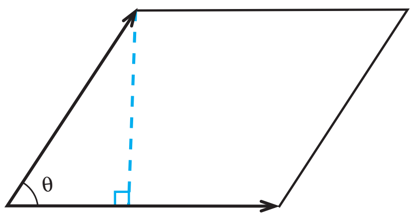
شکل ۱

تذکر. قضیهٔ ۲ و نتیجهٔ قبل ازآن، یک تعبیر هندسی از ضرب خارجی دو بردار به‌دست می‌دهد. در واقع اگر a و b دو بردار غیرصفر باشند و $a\times b$ نیز غیرصفر باشد، آنگاه از نظر هندسی، $a\times b$ برداری عمود بر صفحهٔ گذرا از a و b می‌باشد که طول آن $|a||b|\sin\theta$ است که در آن θ زاویهٔ بین a و b است. می‌توان ثابت کرد که جهت $a\times b$ نیز به سمت جهت انگشت شست دست راست است وقتی که انگشتان از طرف a به b باشند. بررسی دلیل این موضوع از برنامه درسی این کتاب خارج است (به شکل ۱ نگاه کنید).

در انتهای این بخش نشان می‌دهیم که مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار a و b ساخته می‌شود و حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار a، b و c به‌وجود می‌آید را می‌توان برحسب ضرب خارجی بردارهای تولیدکننده آن متوازی‌الاضلاع یا متوازی‌السطوح بیان کرد. این موضوع تعبیر هندسی دیگری را از ضرب خارجی به‌دست می‌دهد.

مساحت متوازی‌الاضلاع

گیریم a و b دو بردار غیرصفر باشند که زاویهٔ بین آنها θ است و فرض می‌کنیم π و $\theta \neq 0$. متوازی‌الاضلاعی که روی این دو بردار بنا می‌شود را در نظر می‌گیریم (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

واضح است که $\sin\theta = \dfrac{\text{اندازهٔ ارتفاع متوازی‌الاضلاع}}{|b|}$ و لذا $|b|\sin\theta =$ اندازهٔ ارتفاع متوازی‌الاضلاع.

در نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با

$$\text{اندازهٔ قاعده} \times \text{اندازهٔ ارتفاع} = |a||b|\sin\theta = |a\times b|.$$

توجه می‌کنیم که اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ و یا این که یکی از دو بردار a و b و یا هر دو برابر صفر باشد، آنگاه متوازی‌الاضلاع شکل ۲ به یک خط و یا یک نقطه تبدیل می‌گردد و لذا مساحت متوازی‌الاضلاع در این حالت برابر صفر است. از طرفی در این حالت $|a\times b|$ نیز صفر خواهد بود و در نتیجه در این حالات نیز مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با $|a\times b|$. پس در هر صورت داریم

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط دو بردار a و b} = |a\times b|. \qquad (۱)$$

نتیجه. مساحت مثلثی که با دو بردار a و b تولید می‌شود برابر است با $\frac{1}{2}|a\times b|$.

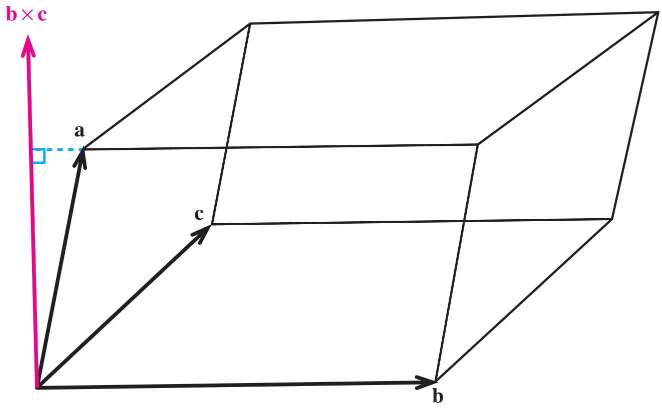
مثال ۵. می‌خواهیم مساحت مثلث ABC به رؤوس $A=(۱,۲,۰)$، $B=(۳,۰,-۳)$ و $C=(۵,۲,۶)$ را پیدا کنیم. واضح است که مساحت این مثلث با مساحت مثلثی که توسط بردارهای $a=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(۲,-۲,-۳)$ و $b=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(۴,۰,۶)$ تولید می‌شود برابر است و لذا بنابر نتیجهٔ بالا، $\frac{1}{2}|a\times b| =$ مساحت مثلث ABC. امّا بنابر تعریف ضرب خارجی،

$a\times b=(-۱۲,-۲۴,۸)$ و لذا مساحت مثلث ABC برابر است با

$$\frac{۱}{۲}|a\times b|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱۲)^{۲}+(-۲۴)^{۲}+(۸)^{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۷۸۴}=\frac{۲۸}{۲}=۱۴.$$

حجم متوازی السطوح

گیریم a، b و c سه بردار باشند که در یک صفحه واقع نباشند. متوازی السطوحی که روی این سه بردار بنا می‌شود را در نظر می‌گیریم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

واضح است که ارتفاع این متوازی‌السطوح برابر است با تصویر قائم بردار a روی بردار $b\times c$، یعنی $\frac{a.(b\times c)}{|b\times c|^{۲}}(b\times c)$. لذا اندازهٔ این ارتفاع برابر است با $\left|\frac{a.(b\times c)}{|b\times c|^{۲}}(b\times c)\right|=\frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|^{۲}}|b\times c|=\frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|}$. درنتیجه بنابر (۱) حجم متوازی‌السطوح برابر است با

$$\text{مساحت قاعده}\times\text{اندازهٔ ارتفاع}=|b\times c|\frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|}=|a.(b\times c)|.$$

در حالت خاصی که a، b و c در یک صفحه قرار بگیرند، متوازی‌السطوح به یک متوازی‌الاضلاع یا یک خط و یا یک نقطه تبدیل می‌شود (چرا؟) و لذا حجم متوازی‌السطوح دراین حالت برابر صفر است. از طرفی در این حالت خاص $|a.(b\times c)|$ نیز صفر خواهد بود (چرا؟) و در نتیجه در این حالت خاص نیز حجم متوازی‌السطوح برابر است با $|a.(b\times c)|$. توجه می‌کنیم که در

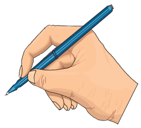
محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح می‌توانستیم هر یک از وجوه را به‌عنوان قاعده درنظر بگیریم، لذا

حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار a، b و c بنا می‌شود $= |a.(b\times c)| = |b.(c\times a)| = |c.(a\times b)|$. (۲)

مثال ۶. می‌خواهیم حجم متوازی‌السطوحی را که توسط بردارهای $a=(۱,۱,۰)$ ، $b=(۰,۱,۱)$ و $c=(۱,۰,۱)$ تولید می‌شود پیدا کنیم. چون $b\times c=(۱,۱,-۱)$ ، لذا بنابر (۲)

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = |a.(b\times c)| = |(۱,۱,۰).(۱,۱,-۱)| = |۱+۱+۰| = ۲.$$

مثال ۷. می‌خواهیم بررسی کنیم که بردارهای $a=(۲,۳,-۱)$ ، $b=(۱,-۱,۳)$ و $c=(۱,۹,-۱۱)$ هم صفحه‌اند یا نه. برای این منظور کافی است $a.(b\times c)$ را محاسبه کنیم (چرا؟). چون $b\times c=(-۱۶,۱۴,۱۰)$ پس $a.(b\times c) = -۳۲+۴۲-۱۰ = ۰$. یعنی این که حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط بردارهای a، b و c برابر صفر است که این نشان می‌دهد متوازی‌السطوح تولید شده در این جا یک متوازی‌الاضلاع یا خط است و لذا a، b و c در یک صفحه قرار می‌گیرند.



تمرین

۱. برای هر یک از بردارهای a، b و c که در زیر آمده است، $b\times c$ و $a.(b\times c)$ را محاسبه کنید. $|b\times c|$ و $|a.(b\times c)|$ نمایانگر چه هستند؟

الف) $a=(۱,۱,۰)$ ، $b=(۰,۱,۱)$ و $c=(-۱,-۳,۴)$ ،

ب) $a=(-۳,۱,۱)$ ، $b=(۱,۰,-۱)$ و $c=(۱,۱,-۱)$.

۲. برداری عمود بر دو بردار $a=(۱,-۳,۲)$ و $b=(-۲,۱,-۵)$ پیدا کنید.

۳. فرض کنید a، b و c سه بردار غیرصفر باشند. اگر $a\times b = a\times c$ ، با مثالی نشان دهید که لزومی ندارد $b=c$.

۴. فرض کنید a و b بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند. مساحت مثلثی را که توسط بردارهای $a-۲b$ و $۳a+۲b$ تولید می‌شود پیدا کنید.

۵. بردارهای a و b مفروض‌اند با این خاصیت که $|a|=۳$ ، $|b|=۲۶$ و $|a\times b|=۷۲$. مقدار

$a.b$ را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید a، b و c بردارهایی دلخواه و i، j و k بردارهای یکّه باشند. عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $i\times(j+k)-j\times(i+k)+k\times(i+j+k)$،

ب) $(a+b+c)\times c+(a+b+c)\times b+(b-c)\times a$،

ج) $(۲a+b)\times(c-a)+(b+c)\times(a+b)$،

د) $۲i.(j\times k)+۳j.(i\times k)+۴k.(i\times j)$.

۷. فرض کنید a، b و c سه بردار باشند با این خاصیت که $a+b+c=o$. ثابت کنید $a\times b=b\times c=c\times a$.

۸. فرض کنید a، b، c و d بردارهایی باشند با این خاصیت که $a\times b=c\times d$ و $a\times c=b\times d$. ثابت کنید اگر بردارهای $a-d$ و $b-c$ غیر صفر باشند، آنگاه با هم موازیند.

۹. فرض کنید a، b و c بردارهایی باشند با این خاصیت که $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=o$. ثابت کنید بردارهای a، b و c در یک صفحه قرار می‌گیرند.

۱۰. فرض کنید a، b و c بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید

$$a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c.$$

۱۱. فرض کنید a، b و c بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=o.$$

۱۲. فرض کنید p، q، r و s بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید بردارهای $a=p\times s$، $b=q\times s$ و $c=r\times s$ در یک صفحه قرار می‌گیرند.

ابوریحان بیرونی

ابوریحان بیرونی

ابوریحان محمدبن احمد بیرونی
در سال ۳۶۲ قمری/ ۳۵۲ شمسی/ ۹۷۳میلادی در
بیرون خوارزم متولد شد.
در سال ۴۴۲ قمری / ۴۲۹ شمسی /۱۰۵۰ میلادی
در خوارزم درگذشت.
ریاضیدان، منجم و دانشمند و یکی از مفاخر بی‌نظیر
دنیای علم بود.

کارهای ریاضی او عبارتند از :

۱. تعریف مفاهیم اولیه ریاضی برای دانش‌آموزان نجوم در کتاب التفهیم
۲. بررسی عمیق روی مسأله‌ی تثلیث زاویه
۳. محاسبه‌ی تقریبی وتر یک درجه و طول قوس بدون استفاده از قاعده‌ی انتگرال‌گیری
۴. محاسبه‌ی مجموع سری $\sum_{۰} ۲^k$
۵. دستور محاسبه‌ی طول قوس
۶. محاسبه‌ی تقریبی ضلع نه‌ضلعی منتظم به‌وسیله‌ی معادله‌ی درجه‌ی سه $۱+۳x=x^۳$

منابع

۱. بیرونی‌نامه، ابوالقاسم قربانی
۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۷۹
۳. دائرةالمعارف فارسی جلد ۱ صفحه‌ی ۳۰
۴. دانشنامه‌ی جهان اسلام جلد ۵ صفحه‌ی ۱۶۳
۵. زندگی‌نامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی صفحه‌ی ۱۷۶
۶. زندگی‌نامه‌ی علمی دانشوران بنیاد دانشنامه‌ی بزرگ فارسی جلد ۱ صفحه‌ی ۲۷۹
۷. لغت‌نامه‌ی دهخدا تحت نام ابوریحان بیرونی

۲

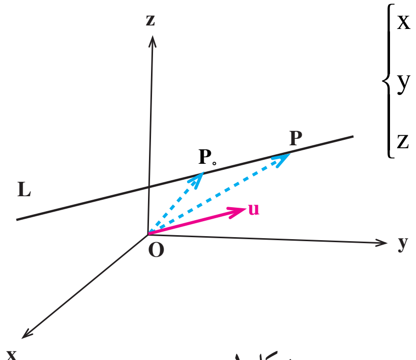
معادلات خط و صفحه

۱.۲ خط در فضا

یک خط مانند L با نقطهٔ معلومی چون $P_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ روی L و بردار ناصفر $u=(p,q,r)$ موازی با L به‌طور منحصر به‌فرد مشخص می‌شود. اکنون می‌خواهیم معادلهٔ خط L را پیدا کنیم. برای این منظور فرض کنیم $P=(x,y,z)$ نقطهٔ دلخواهی باشد. در این‌صورت P روی خط L است اگر و فقط اگر بردارهای u و $\overrightarrow{P_\circ P}$ با هم موازی باشند (به شکل ۱ نگاه کنید) و این معادل است با این‌که عدد حقیقی t موجود باشد با این ویژگی که $\overrightarrow{P_\circ P}=tu$. امّا $\overrightarrow{P_\circ P}=(x-x_\circ,y-y_\circ,z-z_\circ)$ و درنتیجه $\overrightarrow{P_\circ P}=tu$ معادل است با این‌که $(x-x_\circ,y-y_\circ,z-z_\circ)=t(p,q,r)$.

بنابراین نقطهٔ $P=(x,y,z)$ روی خط L است اگر و فقط اگر عدد حقیقی t موجود باشد که $x=x_\circ+pt$ ، $y=y_\circ+qt$ و $z=z_\circ+rt$. درنتیجه معادلهٔ خط L که از نقطهٔ معلومی چون $P_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ می‌گذرد و با بردار $u=(p,q,r)$ موازی است عبارت است از :

$$\begin{cases} x=x_\circ+pt \\ y=y_\circ+qt \\ z=z_\circ+rt \end{cases},t\in\mathbb{R}. \qquad (۱)$$



شکل ۱

این شکل از معادلات خط به **معادلات پارامتری خط** موسوم‌اند، و در آن t **پارامتر** نامیده می‌شود. درواقع به‌ازای هر t، یک نقطه از خط L به‌دست می‌آید و برعکس هر نقطه از خط L، به‌ازای tای در معادلات (۱) صدق می‌کند و لذا وقتی t در $\mathbb{R}$ تغییر می‌کند تمام نقاط خط L به‌وجود می‌آید.

مثال ۱. معادلات پارامتری خطی که از نقطهٔ $P_۰ = (۲,-۴,۱)$ می‌گذرد و موازی با بردار $u = (۳,\frac{۱}{۲},-۱)$ است با توجه به آنچه در بالا ذکر کردیم به‌صورت زیر است

$$\begin{cases} x = ۲+۳t \\ y = -۴+\frac{۱}{۲}t \\ z = ۱-t \end{cases} \quad ,t\in\mathbb{R}.$$

اکنون می‌خواهیم شکل دیگری از معادلهٔ خط را پیدا کنیم. با توجه به معادلات پارامتری خط L که از نقطهٔ $P_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰)$ می‌گذرد و موازی با بردار $u = (p,q,r)$ است و در (۱) به آن اشاره شد و با فرض این‌که p، q و r هر سه مخالف صفر باشند به‌دست می‌آوریم $\frac{x-x_۰}{p} = t$ ، $\frac{y-y_۰}{q} = t$ و $\frac{z-z_۰}{r} = t$. لذا از حذف پارامتر t به معادلات زیر می‌رسیم

$$\frac{x-x_۰}{p} = \frac{y-y_۰}{q} = \frac{z-z_۰}{r}. \qquad (۲)$$

این معادلات را **معادلات متقارن** خط L می‌نامیم.

مثال ۲. معادلات متقارن خط L را که از دو نقطهٔ $P_۱ = (۴,-۶,۵)$ و $P_۲ = (۲,-۳,۰)$ می‌گذرد پیدا می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که این خط موازی با بردار $\overrightarrow{P_۱P_۲} = (-۲,۳,-۵)$ می‌باشد و لذا می‌توانیم فرض کنیم $u = (-۲,۳,-۵)$. اکنون با توجه به این‌که $P_۱ = (۴,-۶,۵)$ نقطه‌ای از این خط است، معادلات متقارن خط L به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{x-۴}{-۲} = \frac{y+۶}{۳} = \frac{z-۵}{-۵}.$$

تذکر. توجه می‌کنیم که در محاسبهٔ معادلات متقارن یک خط فرض کردیم که p، q و r هر سه مخالف صفر هستند. اکنون اگر یکی از p، q یا r صفر باشد، مثلاً $p=0$ ، معادلات پارامتری خط به‌صورت

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases} ,t \in \mathbb{R},$$

تبدیل خواهد شد و لذا معادلات متقارن خط در این حالت به‌صورت زیر است

$$x = x_0 \ , \ \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} .$$

در حالات دیگر نیز در مورد صفر شدن یکی یا دو تا از p، q یا r از روی معادلات پارامتری می‌توان معادلات متقارن را به‌دست آورد.

مثال ۳. می‌خواهیم معادلات متقارن خطی را که از نقطهٔ $P_1 = (-۲,-۲,۱)$ می‌گذرد و موازی با بردار $u = (۰,۲,-۳)$ است به‌دست آوریم. با توجه به آنچه در بالا اشاره کردیم این معادلات به‌صورت زیر است

$$x = -۲ \ , \ \frac{y+۲}{۲} = \frac{z-۱}{-۳} .$$

مثال ۴. می‌خواهیم معادلات متقارن خطی را که از دو نقطهٔ $P_1 = (۲,۳,-۱)$ و $P_2 = (۲,۳,۴)$ می‌گذرد به‌دست آوریم. برای این منظور توجه می‌کنیم که این خط موازی با بردار $u = \overrightarrow{P_1P_2} = (۰,۰,۵)$ می‌باشد و چون از نقطهٔ P_1 نیز می‌گذرد، لذا معادلات متقارن آن به‌صورت زیر خواهد بود

$$x = ۲ \ , \ y = ۳ .$$

فاصلهٔ یک نقطه از یک خط

می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ مفروض P را که خارج خط L قرار دارد از آن پیدا کنیم. قضیهٔ زیر برای این منظور کارساز است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم L خطی باشد که با بردار غیر صفر u موازی است و P را نقطه‌ای

می‌گیریم که خارج (یا روی) L قرار دارد. در این‌صورت فاصلهٔ P از L، یعنی D، برابر است با

$$D=\frac{|u\times \overrightarrow{P_\circ P}|}{|u|},$$

که در آن $P_\circ$ نقطهٔ دلخواهی روی L است.

اثبات. فرض کنیم θ زاویهٔ بین بردارهای u و $\overrightarrow{P_\circ P}$ باشد، پس $0\le\theta\le\pi$.

اگر $0<\theta<\frac{\pi}{2}$، آنگاه با توجه به شکل ۲ داریم $\sin\theta=\frac{D}{|\overrightarrow{P_\circ P}|}$ و لذا $D=|\overrightarrow{P_\circ P}|\sin\theta$.

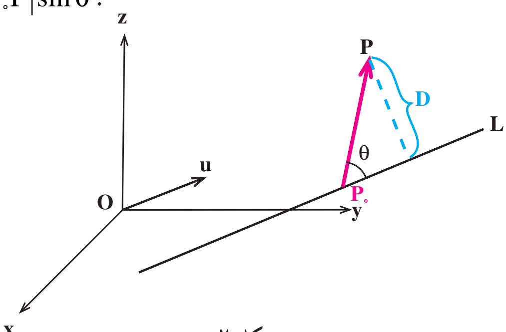
توجه می‌کنیم که اگر $\theta=0$ یا $\theta=\frac{\pi}{2}$، مجدداً تساوی اخیر برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ و با توجه به شکل ۳ به‌دست می‌آوریم $\sin(\pi-\theta)=\frac{D}{|\overrightarrow{P_\circ P}|}$

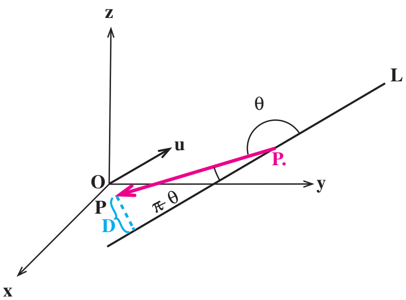
و درنتیجه $D=|\overrightarrow{P_\circ P}|\sin(\pi-\theta)$. چون $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$، لذا در این حالت نیز به‌دست می‌آوریم $D=|\overrightarrow{P_\circ P}|\sin\theta$. اگر $\theta=\pi$، نیز تساوی اخیر برقرار است.

پس در هر حال داریم

$$D=|\overrightarrow{P_\circ P}|\sin\theta.$$



شکل ۲



شکل ۳

امّا با توجه به این‌که $|u\times\overrightarrow{P_\circ P}|=|u||\overrightarrow{P_\circ P}|\sin\theta$، به‌دست می‌آوریم $|u\times\overrightarrow{P_\circ P}|=|u|D$ و لذا

$$D=\frac{|u\times\overrightarrow{P_\circ P}|}{|u|}.\ \blacksquare$$

مثال ۵. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $P=(۵,-۶,۲)$ را از خط L که با معادلات پارامتری زیر داده شده است پیدا کنیم

$$\begin{cases} x=۱ \\ y=-۱+۴t \\ z=۲-۳t \end{cases} \quad , \ t\in\mathbb{R}\,.$$

برای این منظور نقطهٔ $P_\circ=(۱,-۱,۲)$ را روی L درنظر می‌گیریم. بردار $u=(\circ,۴,-۳)$ موازی خط L است و درنتیجه

$$D=\frac{|u\times \overrightarrow{P_\circ P}|}{|u|}=\frac{|(\circ,۴,-۳)\times(۴,-۵,\circ)|}{|(\circ,۴,-۳)|}=\frac{|(-۱۵,-۱۲,-۱۶)|}{|(\circ,۴,-۳)|}$$

$$=\frac{\sqrt{(-۱۵)^۲+(-۱۲)^۲+(-۱۶)^۲}}{\sqrt{\circ^۲+۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{\sqrt{۶۲۵}}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۲۵}{۵}=۵\,.$$

وضعیت نسبی دو خط در فضا

به‌طور کلی دو خط متمایز در فضا یکی از سه وضعیت نسبی **موازی**، **متقاطع** یا **متنافر** را دارند. گیریم $L_۱$ و $L_۲$ دو خط متمایز باشند که به‌ترتیب با بردارهای $u_۱=(p_۱,q_۱,r_۱)$ و $u_۲=(p_۲,q_۲,r_۲)$ موازی‌اند.

حالت اوّل: $L_۱$ و $L_۲$ موازی هستند.

$L_۱$ و $L_۲$ موازی‌اند اگر و فقط اگر $u_۱$ و $u_۲$ موازی باشند. یعنی معادلاً $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ موجود باشد که $u_۲=\lambda u_۱$، یا $(p_۲,q_۲,r_۲)=\lambda(p_۱,q_۱,r_۱)$. پس $L_۱$ و $L_۲$ موازی‌اند اگر و فقط اگر $p_۲=\lambda p_۱$، $q_۲=\lambda q_۱$ و $r_۲=\lambda r_۱$.

مثال ۶. می‌خواهیم وضعیت نسبی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را که با معادلات $L_۱:\frac{x-۱}{-۲}=\frac{y+۱}{۱}=\frac{z-۱}{۲}$ و $L_۲:\frac{x}{۱}=\frac{y}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{z}{-۱}$ داده شده‌اند بررسی کنیم. چون $L_۱$ و $L_۲$ به‌ترتیب با $u_۱=(-۲,۱,۲)$ و $u_۲=(۱,-\frac{۱}{۲},-۱)$ موازی‌اند و داریم $-۲=-۲(۱)$، $۱=-۲(-\frac{۱}{۲})$ و $۲=-۲(-۱)$، پس $L_۱$ و $L_۲$ موازی خواهند بود.

حالت دوم: $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع هستند.

$L_۱$ و $L_۲$ متقاطع‌اند اگر یک نقطهٔ مشترک داشته باشند که در این‌صورت این نقطهٔ مشترک منحصر به فرد است (چرا؟).

مثال ۷. نشان می‌دهیم دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات $L_۱: \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۲}{۱} = \frac{z-۲}{-۱}$ و $L_۲: \frac{x-۱}{۱} = \frac{y}{-۲} = \frac{z}{۲}$ (که موازی نمی‌باشند (چرا؟)) متقاطع‌اند و نقطهٔ تقاطع آنها را پیدا می‌کنیم. برای این منظور نقطه‌ای پیدا می‌کنیم که مختصات آن در معادلات هر دو خط صدق کند. معادلات پارامتری خط $L_۱$ به‌صورت زیر است

$$L_۱: \begin{cases} x = ۲ + ۲t \\ y = -۲ + t \\ z = ۲ - t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \cdot$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم به‌ازای چه tای نقطه‌ای از این خط روی خط $L_۲$ قرار دارد. اگر یکی از نقاط خط $L_۱$ روی خط $L_۲$ قرار بگیرد، باید مختصات آن نقطه از $L_۱$ در معادلات $L_۲$ صدق کند. پس باید معادلات $\frac{(۲+۲t)-۱}{۱} = \frac{-۲+t}{-۲} = \frac{۲-t}{۲}$ را حل کنیم. از این معادلات جواب $t = ۰$ به‌دست می‌آید (چرا؟). پس $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع هستند و به‌ازای $t = ۰$ نقطهٔ تقاطع $L_۱$ و $L_۲$ یعنی $P = (۲, -۲, ۲)$ به‌دست می‌آید.

حالت سوم: $L_۱$ و $L_۲$ متنافر هستند.

اگر $L_۱$ و $L_۲$ نه موازی باشند و نه متقاطع، آنگاه $L_۱$ و $L_۲$ را متنافر می‌نامیم.

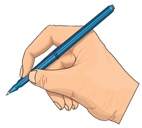
مثال ۸. وضعیت نسبی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات $L_۱: \frac{x+۱}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z+۲}{۱}$ و $L_۲: \frac{x}{۱} = \frac{y}{۲} = \frac{z}{۳}$ را بررسی می‌کنیم. $L_۱$ موازی بردار $u_۱ = (۲, -۱, ۱)$ و $L_۲$ موازی بردار $u_۲ = (۱, ۲, ۳)$ است. چون $u_۱$ و $u_۲$ موازی نمی‌باشند، پس $L_۱$ و $L_۲$ نیز موازی نمی‌باشند. وجود نقطهٔ مشترک را روی $L_۱$ و $L_۲$ تحقیق می‌کنیم. معادلات پارامتری $L_۲$ به‌صورت زیر است

$$L_۲: \begin{cases} x = t \\ y = ۲t \\ z = ۳t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \cdot$$

این مقادیر را در معادلات $L_۱$ جایگزین می‌کنیم

$$\frac{t+۱}{۲}=\frac{۲t}{-۱}=\frac{۳t+۲}{۱}\,.$$

این معادلات جواب ندارند زیرا $\frac{t+۱}{۲}=\frac{۲t}{-۱}$ به‌ازای $t=\frac{-۱}{۵}$ برقرار است و $\frac{۳t+۲}{۱}=\frac{۲t}{-۱}$ به‌ازای $t=\frac{-۲}{۵}$. پس $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع نیز نمی‌باشند، یعنی $L_۱$ و $L_۲$ متنافرند.



تمرین

۱. در هر یک از حالات زیر معادلات پارامتری و متقارن خطوطی را که یک نقطه از آنها داده شده است و امتداد آنها نیز موازی بردار مفروض u است پیدا کنید.

الف) $(-۲,۱,۰)$ ، $u=(۳,-۱,۵)$ ،

ب) $(-۱۰,۱۳,۲۰)$ ، $u=(۱۱,-۱۳,-۱۵)$ ،

ج) $(۷,-۱,۲)$ ، $u=(-۱,۱,۰)$ ،

د) $(-۳,۶,۲)$ ، $u=(۱,-۱,۰)$.

۲. معادلات پارامتری خط گذرا از نقطهٔ $(۳,-۱,۲)$ و موازی خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-۱}{۴}=\frac{y+۳}{۲}=z\,.$$

۳. معادلات پارامتری خط گذرا از نقاط $(-۲,۵,۷)$ و $(-۱,۱,۰)$ را پیدا کنید.

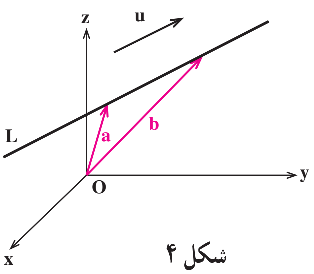
۴. نشان دهید خط گذرا از نقاط $(۰,۰,۵)$ و $(۱,-۱,۴)$ عمود بر خط زیر است.

$$\frac{x}{۷}=\frac{y-۳}{۴}=\frac{z+۹}{۳}\,.$$

۵. a و b را طوری تعیین کنید تا نقطهٔ $(a,b,۱)$ روی خط گذرا از نقطهٔ $(۲,۵,۷)$ و $(۰,۳,۲)$ قرار گیرد.

۶. u را برداری می‌گیریم که موازی خط مفروض L است. نشان دهید اگر a و b بردارهایی باشند که از مبدأ مختصات شروع شوند و انتهای آنها روی L قرار گیرد، آنگاه

$$u\times a=u\times b\,.$$



شکل ۴

۷. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از خط گذرا از نقطهٔ $(-۳,-۳,۳)$ و موازی بردار $(۴,-۲,-۴)$ پیدا کنید.

۸. فاصلهٔ دو خط موازی زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z-۲}{-۲} \quad \text{و} \quad \frac{x}{۲}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z-۳}{-۲}.$$

۹. فاصلهٔ نقطهٔ $(۵,۰,-۴)$ را از خط زیر پیدا کنید.

$$x-۱=\frac{y+۲}{-۲}=\frac{z+۱}{۲}.$$

۱۰. فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,۱,۰)$ را از خط زیر پیدا کنید.

$$x=-۲\ ,\ y+۱=z.$$

۱۱. وضعیت نسبی خطوط ذکر شده در تمرین ۱ را به‌ترتیب زیر تعیین کنید.

(الف و ب)، (ب و ج)، (ج و د)

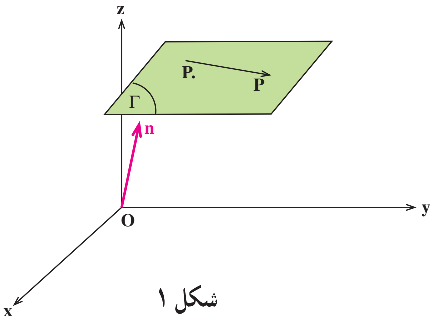
۲.۲ صفحه در فضا

یک صفحه مانند Γ با نقطهٔ معلومی چون $P_{\circ}=(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ در Γ و بردار ناصفر $n=(a,b,c)$ عمود بر Γ به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌شود. اکنون می‌خواهیم معادلهٔ صفحهٔ Γ را پیدا کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم $P=(x,y,z)$ نقطه‌ای دلخواه باشد. در این صورت P روی صفحهٔ Γ است اگر و فقط اگر بردارهای n و $\overrightarrow{P_{\circ}P}$ بر هم عمود باشند (به شکل ۱ نگاه کنید) و این معادل است با این‌که ضرب داخلی $n.\overrightarrow{P_{\circ}P}$ برابر صفر باشد. امّا $\overrightarrow{P_{\circ}P}=(x-x_{\circ},y-y_{\circ},z-z_{\circ})$ و درنتیجه

$$n.\overrightarrow{P_{\circ}P}=a(x-x_{\circ})+b(y-y_{\circ})+c(z-z_{\circ})،$$

بنابراین نقطهٔ $P=(x,y,z)$ روی صفحهٔ Γ است اگر و فقط اگر

$$a(x-x_{\circ})+b(y-y_{\circ})+c(z-z_{\circ})=۰.$$



شکل ۱

درنتیجه معادلهٔ صفحهٔ Γ که از نقطهٔ معلومی چون $P_{\circ}=(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ می‌گذرد و بر بردار ناصفر $n=(a,b,c)$ عمود است عبارت است از

$$a(x-x_{\circ})+b(y-y_{\circ})+c(z-z_{\circ})=۰.$$

اگر معادلهٔ بالا را بسط دهیم و به‌جای $ax_0+by_0+cz_0$ که عددی ثابت است، d قرار دهیم می‌توانیم معادلهٔ صفحهٔ Γ را به‌صورت زیر نیز بنویسیم

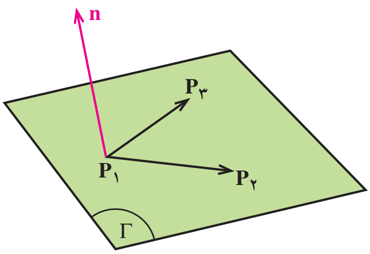
$$ax+by+cz=d\,.$$

مثال ۱. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $P_0=(-۲,۴,۵)$ و عمود بر بردار $n=(۷,۰,-۶)$ با توجه به آنچه در بالا گفتیم عبارت است از $۷(x+۲)+۰(y-۴)+(-۶)(z-۵)=۰$، یا $۷x-۶z=-۴۴$.

مثال ۲. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $P_0=(\frac{۱}{۲},۰,۳)$ و عمود بر خط L با معادلات $\frac{x+۱}{۴}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z}{۵}$ را پیدا می‌کنیم. توجه می‌کنیم که خط L با بردار $(۴,-۱,۵)$ موازی است و لذا صفحهٔ مطلوب بر بردار $n=(۴,-۱,۵)$ عمود خواهد بود. درنتیجه معادلهٔ آن عبارت است از $۴(x-\frac{۱}{۲})+(-۱)(y-۰)+۵(z-۳)=۰$، یا $۴x-y+۵z=۱۷$.

مثال ۳. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از سه نقطهٔ $P_1=(۱,۰,۲)$، $P_2=(-۱,۳,۴)$ و $P_3=(۳,۵,۷)$ را پیدا می‌کنیم. توجه می‌کنیم که این صفحه شامل دو بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ و $\overrightarrow{P_1P_3}$ است (به شکل ۲ نگاه کنید). لذا برداری که بر این دو بردار عمود باشد بر این صفحه نیز عمود است و می‌تواند نقش n را بازی کند. امّا برداری که بر این دو بردار عمود است را می‌توانیم ضرب خارجی این دو بردار درنظر بگیریم:

$n=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$. چون $\overrightarrow{P_1P_2}=(-۲,۳,۲)$ و $\overrightarrow{P_1P_3}=(۲,۵,۵)$. درنتیجه $n=(۵,۱۴,-۱۶)$. یعنی این‌که معادلهٔ صفحهٔ مطلوب عبارت است از $۵(x-۱)+۱۴(y-۰)-۱۶(z-۲)=۰$ یا $۵x+۱۴y-۱۶z=-۲۷$.



شکل ۲

فاصلهٔ یک نقطه از یک صفحه

می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ مفروض P را که خارج صفحهٔ Γ قرار دارد از آن پیدا کنیم.

قضیهٔ زیر برای این منظور کارساز است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم Γ صفحه‌ای باشد که بر بردار n عمود است و P را نقطه‌ای می‌گیریم که خارج (یا روی) Γ قرار دارد. در این صورت فاصلهٔ P از Γ، یعنی D، برابر است با

$$D = \frac{|n.\overrightarrow{P_0P}|}{|n|},$$

که در آن P_0 نقطهٔ دلخواهی روی Γ است.

اثبات. فرض کنیم θ زاویهٔ بین بردار n و بردار $\overrightarrow{P_0P}$ باشد، پس $0 \le \theta \le \pi$.

اگر $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$، آنگاه با توجه به شکل ۳ داریم $\cos\theta = \frac{D}{|\overrightarrow{P_0P}|}$ و لذا $D = |\overrightarrow{P_0P}|\cos\theta$.

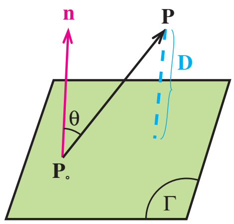
توجه می‌کنیم که اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \frac{\pi}{2}$، مجدداً تساوی اخیر برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ و با توجه به شکل ۴ به‌دست می‌آوریم $\cos(\pi - \theta) = \frac{D}{|\overrightarrow{P_0P}|}$

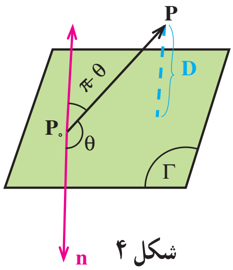
و درنتیجه $D = |\overrightarrow{P_0P}|\cos(\pi - \theta)$. چون $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$، لذا در این حالت به‌دست می‌آوریم $D = |\overrightarrow{P_0P}|(-\cos\theta)$. اگر $\theta = \pi$، نیز تساوی اخیر برقرار است.

پس برای $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ داریم $D = |\overrightarrow{P_0P}|\cos\theta$ و برای $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ داریم $D = |\overrightarrow{P_0P}|(-\cos\theta)$، پس در هر حال

$$D = |\overrightarrow{P_0P}||\cos\theta| \cdot$$



شکل ۳



شکل ۴

امّا با توجه به این‌که $|n.\overrightarrow{P_\circ P}|=|n||\overrightarrow{P_\circ P}||\cos\theta|$ به‌دست می‌آوریم $|n.\overrightarrow{P_\circ P}|=|n|D$ و لذا

$$D=\frac{|n.\overrightarrow{P_\circ P}|}{|n|}. \blacksquare$$

مثال ۴. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $P=(\circ,۲,۱)$ را از صفحهٔ Γ به معادلهٔ $x+y+\sqrt{۲}z+۲-\sqrt{۲}=\circ$ به‌دست آوریم. برای این منظور نقطهٔ $P_\circ=(\sqrt{۲},-۲,\circ)$ را روی Γ درنظر می‌گیریم. بردار $n=(۱,۱,\sqrt{۲})$ بر صفحهٔ Γ عمود است و درنتیجه

$$D=\frac{|n.\overrightarrow{P_\circ P}|}{|n|}=\frac{|(۱,۱,\sqrt{۲}).(-\sqrt{۲},۴,۱)|}{|(۱,۱,\sqrt{۲})|}=\frac{۴}{۲}=۲.$$

وضعیت نسبی دو صفحه در فضا

دو صفحهٔ متمایز $\Gamma_۱$ به معادلهٔ $a_۱x+b_۱y+c_۱z=d_۱$ و $\Gamma_۲$ به معادلهٔ $a_۲x+b_۲y+c_۲z=d_۲$ را درنظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که $\Gamma_۱$ بر بردار $n_۱=(a_۱,b_۱,c_۱)$ و $\Gamma_۲$ بر بردار $n_۲=(a_۲,b_۲,c_۲)$ عمود است. $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ یا با هم **موازی** هستند و یا موازی نیستند که در این حالت $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ را **متقاطع** می‌نامیم.

حالت اوّل: $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ موازی هستند.

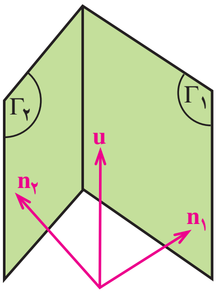
دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ موازی‌اند اگر و فقط اگر $n_۱$ و $n_۲$ موازی باشند. یعنی معادلاً $r\in\mathbb{R}$ موجود باشد که $n_۱=rn_۲$، یا $(a_۱,b_۱,c_۱)=r(a_۲,b_۲,c_۲)$. پس $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ موازی‌اند اگر و فقط اگر $a_۱=ra_۲$، $b_۱=rb_۲$ و $c_۱=rc_۲$.

مثال ۵. دو صفحه به معادلات $۲x+۴y+۳z=۸$ و $۴x+۸y+۶z=۱$ موازی‌اند.

حالت دوم: $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ متقاطع هستند.

اگر $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ در یک نقطه متقاطع باشند، در این صورت فصل مشترک $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ یک خط خواهد بود. واضح است که این خط با برداری که بر $n_۱$ و $n_۲$ عمود است موازی می‌باشد و لذا می‌توانیم فرض کنیم با ضرب خارجی $u=n_۱\times n_۲$ موازی است. حال با داشتن یک نقطه که روی

این خط باشد، معادلهٔ آن به‌راحتی قابل محاسبه است (به شکل ۵ نگاه کنید).



شکل ۵

مثال ۶. فصل مشترک دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ به معادلهٔ $۳x-۲y+z=۱$ و $\Gamma_۲$ به معادلهٔ $۵x+۴y-۶z=۲$ را به‌دست می‌آوریم. این فصل مشترک خطی است که با بردار $u=n_۱\times n_۲$ موازی است که در آن $n_۱=(۳,-۲,۱)$ و $n_۲=(۵,۴,-۶)$ و درنتیجه $u=(۸,۲۳,۲۲)$. حال کافی است نقطه‌ای روی این خط پیدا کنیم. چون نقطهٔ $(۰,-۱,-۱)$ روی هر دو صفحه قرار دارد، پس روی خط فصل مشترک است و لذا معادلات خط فصل مشترک دو صفحه به‌صورت $\frac{x}{۸}=\frac{y+۱}{۲۳}=\frac{z+۱}{۲۲}$ می‌باشد.

وضعیت نسبی یک خط و یک صفحه در فضا

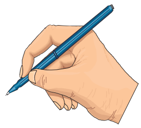
خط L به معادلات $t\in\mathbb{R}$, $\begin{cases}x=x_۰+pt\\y=y_۰+qt\\z=z_۰+rt\end{cases}$ و صفحهٔ Γ به معادلهٔ $ax+by+cz=d$ را درنظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که L با بردار (p,q,r) موازی است و Γ بر بردار (a,b,c) عمود. L و Γ یا با هم **موازی** هستند که معادلاً در این حالت بردار عمود بر صفحه بر خط L نیز باید عمود باشد و این معادل است با این‌که $(a,b,c).(p,q,r)=۰$ یا $ap+bq+cr=۰$ ؛ و یا با هم موازی نیستند که دراین‌صورت **متقاطع**اند.

مثال ۷. وضعیت نسبی خط L به معادلات $\frac{x-۱}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{-۱}$ و صفحهٔ Γ به معادلهٔ $۲x+y-z=۲$ را تعیین می‌کنیم. خط L با بردار $(۱,۲,-۱)$ موازی است و صفحهٔ Γ بر بردار $(۲,۱,-۱)$ عمود. چون $(۱,۲,-۱).(۲,۱,-۱)=۵\neq۰$ ، لذا، L و Γ موازی نمی‌باشند. اکنون نقطهٔ

تقاطع L و Γ را پیدا می‌کنیم. معادلات پارامتری خط L به‌صورت زیر است

$$\begin{cases} x = ۱ + t \\ y = ۲t \\ z = -t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم به‌ازای چه tای نقطه‌ای از این خط روی صفحهٔ Γ قرار می‌گیرد. برای این منظور باید معادلهٔ $۲(۱+t)+۲t+t=۲$ را حل کنیم. امّا این معادله به‌صورت $۵t=۰$ ساده می‌شود که تنها جواب آن $t=۰$ است. یعنی به‌ازای $t=۰$، نقطهٔ $(۱,۰,۰)$ از صفحهٔ Γ روی خط L واقع می‌شود و این یعنی L و Γ متقاطع‌اند.



تمرین

۱. در هر یک از حالات زیر معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $P_۰$ و عمود بر بردار n را پیدا کنید.

الف) $P_۰ = (-۱,۲,۴)$ ، $n = (-۴,۱۵,\frac{-۱}{۲})$ ،

ب) $P_۰ = (۲,۰,-۲)$ ، $n = (۲,۳,-۴)$ ،

ج) $P_۰ = (۹,۱۷,-۱۷)$ ، $n = (۲,۰,-۳)$ ،

د) $P_۰ = (۲,۳,-۵)$ ، $n = (۰,۱,۰)$.

۲. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از سه نقطهٔ $(۲,-۱,۴)$ ، $(۵,۳,۵)$ و $(۲,۴,۳)$ را پیدا کنید.

۳. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $(۱,-۱,۲)$ و خط $x+۲=y+۱=\frac{z+۵}{۲}$ را پیدا کنید.

۴. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از دو خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-۱}{۳}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۵}{۴}, \qquad \frac{x+۳}{۳}=\frac{y-۴}{۲}=\frac{z}{۴}.$$

۵. معادلهٔ فصل مشترک صفحه‌های $x-z=۱$ و $۲x-۳y+۴z=۲$ را پیدا کنید.

۶. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $(-۹,۱۲,۱۴)$ و عمود بر دو صفحهٔ تمرین ۵ را پیدا کنید.

۷. فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,-۱,۴)$ را از صفحهٔ $۲x-y+۲z=۵$ پیدا کنید.

۸. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از صفحهٔ $ax+by+cz=d$ پیدا کنید.

۹. آیا چهار نقطهٔ $(۲,۳,۲)$ ، $(۱,-۱,-۳)$ ، $(۱,۰,-۱)$ و $(۵,۹,۵)$ همگی روی یک صفحه

قرار دارند؟

۱۰. خط $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+5}{7}$ و صفحهٔ $\Gamma:2(x-1)+2(y+3)-z=0$ مفروض است. دو نقطه روی L به فاصلهٔ ۳ از Γ پیدا کنید.

۱۱. کدامیک از صفحه‌های زیر بر هم منطبق‌اند، یا با هم موازی‌اند، یا بر هم عمودند.

الف) $x+2y-3z=2$،

ب) $15x-9y-z=2$،

ج) $-2x-4y+6z+4=0$،

د) $5x-3y-\frac{1}{3}z-1=0$.

۱۲. در هر یک از موارد زیر وضعیت نسبی خط و صفحهٔ داده شده را بررسی کنید.

الف) $\frac{x-3}{8}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+3}{-1}$ ، $x-3y+5z=12$،

ب) $\frac{x}{8}=\frac{y+1}{23}=\frac{z+1}{22}$ ، $5x+4y-6z=2$،

ج) $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{7}$ ، $x-2y+2z=5$.

۱۳. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $(-1,2,3)$ را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

الف) با صفحهٔ xy موازی باشد،

ب) بر محور xها عمود باشد،

ج) بر محور yها عمود باشد.

۱۴. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $(2,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ و عمود بر خط زیر را پیدا کنید.

$$\begin{cases} x=2t+3 \\ y=6t+6 \\ z=9t \end{cases} \quad , \quad t\in\mathbb{R}.$$

۱۵. معادلهٔ خط گذرا از نقطهٔ $(2,-1,0)$ و عمود بر صفحهٔ $2x-3y+4z=5$ را پیدا کنید.

۱۶. خط L با معادلات $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{3}=-z$ و صفحهٔ Γ با معادلهٔ $3x-2y+4z=-1$ مفروض است.

الف) نقطهٔ $P_\circ$، نقطهٔ تقاطع L و Γ را پیدا کنید،

ب) معادلهٔ صفحهٔ عمود بر L در نقطهٔ $P_\circ$ را پیدا کنید،

ج) معادلهٔ خط گذرا از $P_\circ$ و عمود بر Γ را نیز پیدا کنید.

۱۷. معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $(۳,۱,۰)$ و $(۵,-۱,۳)$ را پیدا کنید.

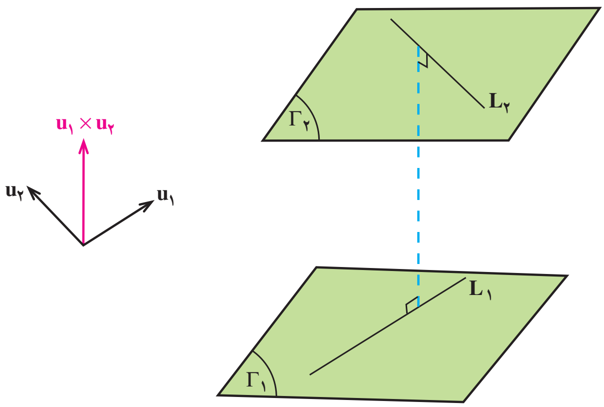
۱۸. نقاط فصل مشترک دو به دوی هر دسته از صفحه‌های زیر را پیدا کنید. آیا هر دسته از صفحه‌های زیر یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؟

الف) $x+y=۱$ ، $y+z=۲$ ، $x+z=۳$ ،

ب) $x+y-z=۲$ ، $-x+۲y-z=۳$ ، $x-y-z=۰$.

۱۹. برای دو خط متنافر $L_۱$ با معادلات $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z+۲}{۱}$ و $L_۲$ با معادلات $\frac{x}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}$ کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط (طول عمود مشترک) را پیدا کنید.

(راهنمایی: طول مورد نظر، طول پاره‌خطی است که محصور بین دو خط داده شده است و بر هر دو عمود است (به شکل ۶ نگاه کنید). راستای این عمود مشترک در راستای $u_۱ \times u_۲$ قرار دارد که $u_۱$ و $u_۲$ به‌ترتیب دو بردار موازی با $L_۱$ و $L_۲$ هستند. حال صفحه‌های $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ که راستای عمود بر هر دوی آنها $u_۱ \times u_۲$ است را درنظر می‌گیریم. فاصلهٔ این دو صفحه، فاصلهٔ مطلوب است.)



شکل ۶

خواجه نصیرالدین طوسی


خواجه نصیر طوسی

ابوجعفر محمدبن حسن معروف به خواجه نصیر طوسی

در سال ۵۹۷ قمری/ ۵۷۹ شمسی/ ۱۱۹۰میلادی در طوس متولد شد.

در سال ۶۷۲ قمری/ ۶۵۲ شمسی/ ۱۲۷۳ میلادی در کاظمین درگذشت.

منجم، سیاستمدار و ریاضیدان

کارهای ریاضی او عبارتند از :

۱. نگارش کتاب کشف‌القناع در اسرار شکل‌القطاع درباره‌ی مثلثات مسطح و کروی و تعیین شکل قطاع کروی و مقاطع مخروطی

۲. نگارش کتاب جامع‌الحساب درباره‌ی نظریه‌ی اعداد و تلفیق حساب و هندسه

منابع

۱. تاریخ علم جرج سارتن، جلد ۱ صفحات ۴۱۷ تا ۴۲۵

۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۸۲

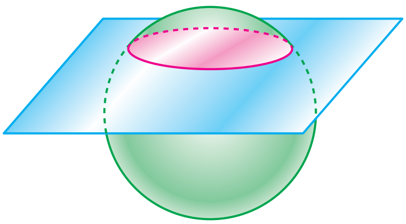
۳. زندگینامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی، صفحه‌ی ۴۸۶

۴. زندگینامه‌ی علمی دانشوران جلد ۳ صفحات ۵۰۸ تا ۵۱۴

۵. لغت‌نامه‌ی دهخدا تحت نام نصیرالدین طوسی

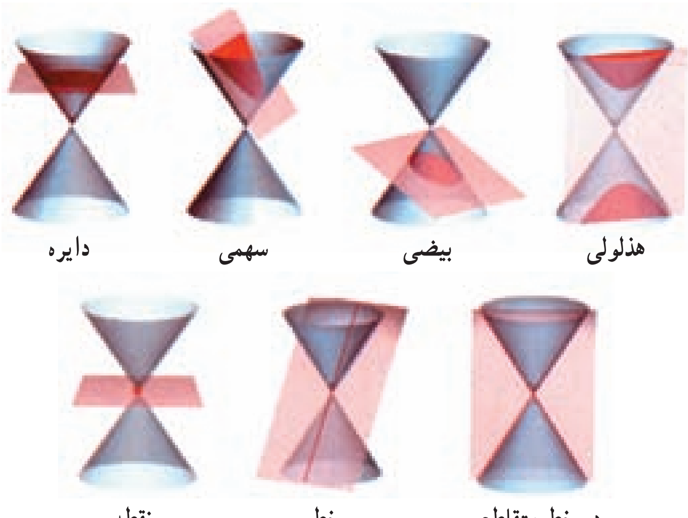
۳

مقاطع مخروطی



شکل ۱

اگر یک رویهٔ کروی مانند یک توپ را با یک صفحه قطع کنیم، در محل تقاطع صفحه و کره چه شکلی حاصل می‌شود؟ بله درست است. به هر ترتیب که این‌کار را انجام دهیم، یک دایره به‌دست می‌آید که اندازه‌های آن متفاوت است و اگر این دایره از مرکز کره بگذرد، بزرگترین دایرهٔ ممکن حاصل می‌شود (به شکل ۱ نگاه کنید). حال یک رویهٔ مخروطی را درنظر می‌گیریم. اگر این رویه را با یک صفحه قطع کنیم، فصل مشترک صفحه و رویه چه شکلی دارد؟ در اینجا دیگر همواره یک شکل نخواهیم داشت و بسته به وضعیت صفحه نسبت به مخروط چند شکل متفاوت حاصل می‌شود (به شکل‌های زیر نگاه کنید).



شکل ۲

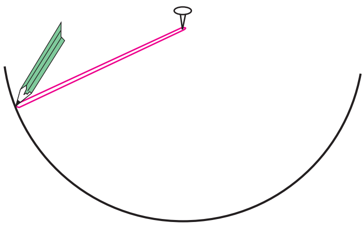
برای مشاهدهٔ این شکل‌ها یک برگ کاغذ را به‌صورت یک مخروط درآورید و با یک قیچی با ایجاد برشهای مختلف در آن (به‌صورت فصل مشترک یک صفحه با مخروط) این مقاطع را که به **مقاطع مخروطی** معروفند به دست آورید.

در این فصل می‌خواهیم با این مقاطع مخروطی آشنا شویم و ویژگی‌های آنها را مشخص کنیم.

۱.۳ دایره

تعریف. **دایره** مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که فاصلهٔ آنها از یک نقطهٔ ثابتِ O درآن صفحه به‌نام **مرکز** مقدارِ مثبتِ ثابتی باشد.

برای رسم یک دایره کافی است یک مداد را به یک تکه نخ ببندیم. اکنون با ثابت نگاهداشتن یک سر نخ می‌توانیم دایره را رسم کنیم. طول نخ همان مقدار ثابتی است که در تعریف آمده است و **شعاع** دایره نامیده می‌شود.



شکل ۱

حال یک دستگاه مختصات قائم را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ (x,y) روی دایره‌ای به شعاع r و به مرکز مبدأ مختصات است اگر و فقط اگر فاصلهٔ آن نقطه از مرکز دایره برابر r باشد. پس نقطهٔ (x,y) روی دایرهٔ مذکور است اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r,$$

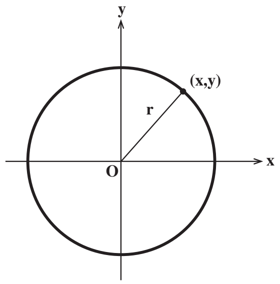
اگر و فقط اگر

$$x^2+y^2=r^2.$$

در نتیجه می‌توانیم بگوییم

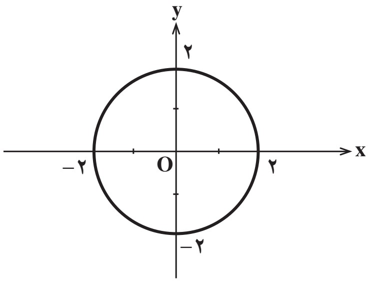
$$x^2+y^2=r^2,$$

معادلهٔ دایره‌ای به شعاع r و به مرکزمبدأ مختصات است.



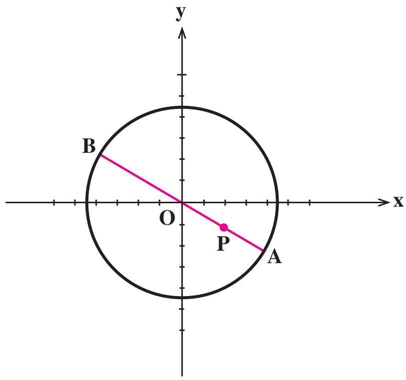
شکل ۲

مثال ۱. $x^۲ + y^۲ = ۴$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ می‌باشد. این دایره را در زیر رسم کرده‌ایم.



شکل ۳

مثال ۲. دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۰$ را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم بررسی کنیم نقطهٔ $P = (۲,-۱)$ داخل دایره است یا خارج آن. توجه می‌کنیم که $(۲)^۲ + (-۱)^۲ = ۵ < ۲۰$. درنتیجه نقطهٔ P داخل دایره قرار دارد (چرا؟). اکنون کمترین و بیشترین فاصلهٔ P را از نقاط دایره پیدا می‌کنیم. واضح است نقاطی از دایره که کمترین و بیشترین فاصله را از نقطهٔ P دارند از برخورد قطر گذرا از P با دایره به‌دست می‌آیند (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

معادلهٔ قطر گذرا از P، $y = \frac{-۱}{۲}x$ می‌باشد. اکنون برای به‌دست آوردن مختصات نقاط A و B کافی است دستگاه معادلات صفحهٔ بعد را حل کنیم

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۲۰ \\ y = \frac{-۱}{۲} x \end{cases}$$

درنتیجه مختصات A و B به‌صورت $A = (۴, -۲)$ و $B = (-۴, ۲)$ به‌دست می‌آیند. لذا

$$|PA| = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (-۲+۱)^۲} = \sqrt{۵} \ ,$$

$$|PB| = \sqrt{(-۴-۲)^۲ + (۲+۱)^۲} = ۳\sqrt{۵} \ ,$$

به‌ترتیب کمترین و بیشترین فاصلهٔ P از نقاط دایره است.

مثال ۳. می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند $P = (x, y)$ را پیدا کنیم که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $A = (۲, ۴)$، $\sqrt{۲}$ برابر فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $B = (۱, ۲)$ باشد. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$|AP| = \sqrt{۲}|BP| \ ,$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-۲)^۲ + (y-۴)^۲} = \sqrt{۲}\sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲} \ ,$$

اگر و فقط اگر

$$(x-۲)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲\left[(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲\right] \ ,$$

اگر و فقط اگر

$$x^۲ + y^۲ = ۱۰ \ .$$

پس مکانِ مطلوب دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt{۱۰}$ است.

تمرین

۱. نمودار هر یک از دایره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $x^۲ + y^۲ = ۹$ ،

ب) $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ ،

ج) $x^{۲} + y^{۲} = ۱۰۰$،

د) $x^{۲} + y^{۲} = ۵۰$

۲. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که از نقطهٔ $(-۱,۲)$ بگذرد.

۳. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که بر خط $۴x + ۳y = ۱۰$ مماس باشد.

۴. معادلهٔ خطی را بنویسید که در نقطهٔ $(۳,۴)$ بر دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} = ۲۵$ مماس باشد.

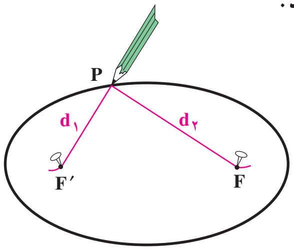
۵. از نقطهٔ $(۳,۰)$ دو مماس بر دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} = ۳$ رسم می‌کنیم تا بر دایره در نقاط A و B مماس شوند. مختصات A و B را پیدا کنید.

۲.۳ بیضی

یکی دیگر از مقاطع مخروطی بیضی است که در این بخش به بررسی آن می‌پردازیم.

تعریف. **بیضی** مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت و متمایزِ F و F' در آن صفحه به‌نام **کانون** مقدارِ مثبتِ ثابتی باشد.

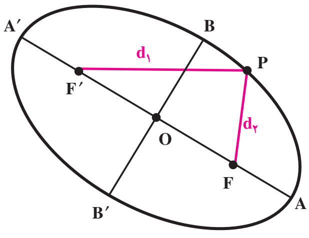
برای رسم بیضی یک تکه نخ به طول مقدار ثابت مورد نظر، درنظر گرفته و دو سر آن را در محل دو کانون ثابت می‌کنیم. حال یک مداد را داخل این نخ کرده و با گرداندن مداد داخل نخ، بیضی مورد نظر را رسم می‌کنیم.



$d_۱ + d_۲$ همیشه مقدار ثابت طول نخ است.

شکل ۱

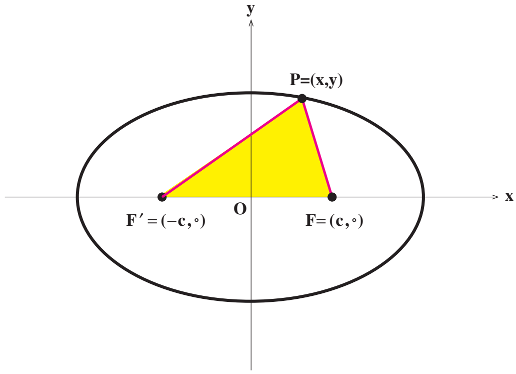
AA' **قطر بزرگ** و BB' **قطر کوچک** بیضی نامیده می‌شود. F و F' کانونهای بیضی هستند و نقطهٔ O وسط FF' را **مرکز** بیضی می‌نامیم.



$d_۱ + d_۲ =$ ثابت

شکل ۲

حال می‌خواهیم با استفاده از تعریف، معادلهٔ بیضی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا کنیم. مرکز بیضی را در مبدأ مختصات فرض می‌کنیم و کانونهای آن را دو نقطهٔ قرینهٔ $F=(c,0)$ و $F'=(-c,0)$ روی محور xها می‌گیریم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

نقطهٔ دلخواه P را روی بیضی مذکور درنظر می‌گیریم. مجموع فواصل P از F و F′ مقدار ثابتی است که آن را برابر ۲a می‌گیریم که در آن a مثبت است (دلیل این انتخاب به‌خاطر ساده شدن محاسبات می‌باشد). ملاحظه می‌کنیم که

$$|PF'|+|PF|>|F'F|,$$

$$2a>2c,$$

$$a>c.$$

فرض کنیم نقطهٔ $P=(x,y)$ روی بیضی مذکور قرار داشته باشد. در این‌صورت

$$|PF'|+|PF|=2a\ ,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\ ,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,$$

$$cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,$$

$$c^2x^2+a^4-2ca^2x=a^2x^2+a^2c^2-2ca^2x+a^2y^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\ ,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

برعکس، گیریم نقطهٔ $P=(x,y)$ این ویژگی را داشته باشد که

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

می‌توانیم بنویسیم

$$(a^۲-c^۲)x^۲+a^۲y^۲=a^۲(a^۲-c^۲)\ ,$$

$$x^۲+y^۲+c^۲=a^۲+\frac{c^۲}{a^۲}x^۲.$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}|PF'|+|PF|&=\sqrt{(x+c)^۲+y^۲}+\sqrt{(x-c)^۲+y^۲}\\&=\sqrt{a^۲+\frac{c^۲}{a^۲}x^۲+۲cx}+\sqrt{a^۲+\frac{c^۲}{a^۲}x^۲-۲cx}\\&=\sqrt{(a+\frac{c}{a}x)^۲}+\sqrt{(a-\frac{c}{a}x)^۲}\\&=\left|a+\frac{c}{a}x\right|+\left|a-\frac{c}{a}x\right|.\end{aligned}$$

امّا $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{a^۲-c^۲}=۱$ با توجه به $a^۲-c^۲>۰$ نتیجه می‌دهد که $۱\le\frac{x^۲}{a^۲}\le۰$ و $۱\le\frac{y^۲}{a^۲-c^۲}\le۰$.

پس $-۱\le\frac{x}{a}\le۱$، یا $-c\le\frac{c}{a}x\le c$. لذا $۰<a-c\le a+\frac{c}{a}x\le a+c$ و $۰<a-c\le a-\frac{c}{a}x\le a+c$. درنتیجه $\left|a+\frac{c}{a}x\right|=a+\frac{c}{a}x$ و $\left|a-\frac{c}{a}x\right|=a-\frac{c}{a}x$.

لذا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}|PF'|+|PF|&=\left|a+\frac{c}{a}x\right|+\left|a-\frac{c}{a}x\right|\\&=a+\frac{c}{a}x+a-\frac{c}{a}x\\&=۲a.\end{aligned}$$

درنتیجه P روی بیضی قرار دارد.

پس نقطهٔ $P=(x,y)$ روی بیضی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{a^۲-c^۲}=۱.$$

توجه می‌کنیم که $a^۲ - c^۲ > ۰$. قرار می‌دهیم $b = \sqrt{a^۲ - c^۲}$ و درنتیجه نقطهٔ $P = (x, y)$ روی بیضی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ ,$$

که در آن $b^۲ = a^۲ - c^۲$.

از آنچه در بالا به آن اشاره کردیم می‌توانیم نتیجه بگیریم معادلهٔ بیضی به مرکز مبدأ مختصات که کانونهای آن $F = (c, ۰)$ و $F' = (-c, ۰)$ می‌باشند و مقدار ثابت آن برابر $۲a$ است عبارت از

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

می‌باشد که در آن $b^۲ = a^۲ - c^۲$.

نقاط تقاطع این بیضی با محور xها، نقاط $(a, ۰)$ و $(-a, ۰)$ و نقاط تقاطع آن با محور yها، نقاط $(۰, b)$ و $(۰, -b)$ است (چرا؟). بنابراین طول قطر بزرگ برابر $۲a$ و طول قطر کوچک برابر $۲b$ است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که طول قطر بزرگ واقعاً از طول قطر کوچک بزرگتر است :

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ \quad , \quad (a, b, c > ۰),$$

$$b^۲ - a^۲ < ۰,$$

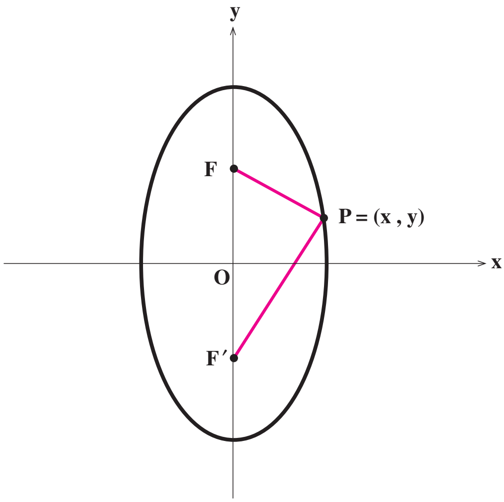
$$(b - a)(b + a) < ۰ ,$$

$$b - a < ۰, \qquad \text{چون } (b + a) \text{ مثبت است}$$

$$۲b < ۲a.$$

لذا طول قطر بزرگ، بزرگتر است از طول قطر کوچک.

ممکن است از ابتدا نقاط کانون را روی محور yها درنظر بگیریم. یعنی $F = (۰, c)$ و $F' = (۰, -c)$ را کانونهای بیضی بگیریم (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

در این صورت معادلهٔ بیضی عبارت است از :

$$\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱,$$

که $a > b$ و رابطهٔ بین a، b و c همان رابطهٔ $b^۲ = a^۲ - c^۲$ است. مرکز هم‌چنان در مبدأ مختصات است ولی قطر بزرگ در امتداد محور yها و قطر کوچک در امتداد محور xها قرار می‌گیرد.

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه تاکنون به دست آورده‌ایم را می‌نویسیم.

معادلهٔ استاندارد بیضی

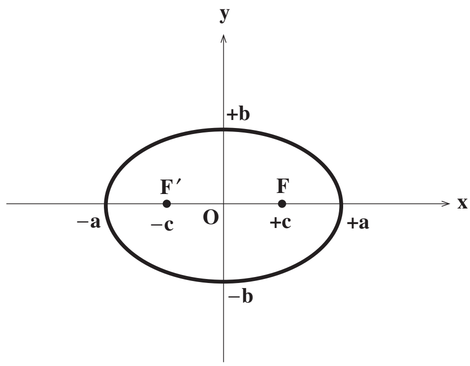
۱) $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ ، $a > b > ۰$.

نقاط تقاطع با محور xها : $(a,۰)$ و $(-a,۰)$.

نقاط تقاطع با محور yها : $(۰,b)$ و $(۰,-b)$.

کانونها : $F = (c,۰)$ و $F' = (-c,۰)$ که $c^۲ = a^۲ - b^۲$.

طول قطر بزرگ ۲a، و طول قطر کوچک ۲b.



شکل ۵

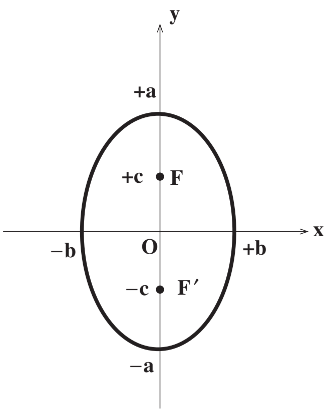
۲) $\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱$ ، $a>b>۰$.

نقاط تقاطع با محور xها : $(b,۰)$ و $(-b,۰)$.

نقاط تقاطع با محور yها : $(۰,a)$ و $(۰,-a)$.

کانونها : $F=(۰,c)$ و $F'=(۰,-c)$ که $c^۲=a^۲-b^۲$.

طول قطر بزرگ ۲a، و طول قطر کوچک ۲b.

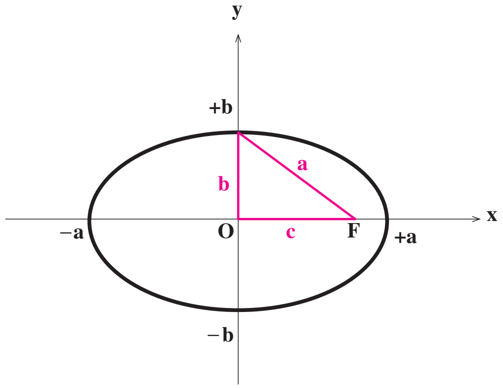


شکل ۶

در هر دو حالت بالا، محور xها و محور yها محورهای تقارن بیضی و مبدأ مختصات نیز مرکز تقارن بیضی است.

تذکر. در بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ $\left(\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱\right)$ ، $a>b>۰$ ، فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع بیضی با

محور yها (با محور xها) از کانونها برابر a است (چرا؟).



شکل ۷

مثال ۱. می‌خواهیم بیضی‌های زیر را رسم کنیم :

الف) $۹x^۲ + ۱۶y^۲ = ۱۴۴$،   ب) $۲x^۲ + y^۲ = ۱۰$.

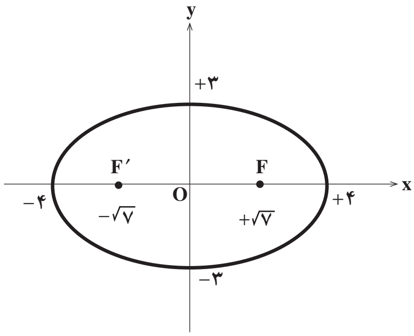
برای رسم الف توجه می‌کنیم که

$$۹x^۲ + ۱۶y^۲ = ۱۴۴,$$

$$\frac{۹x^۲}{۱۴۴} + \frac{۱۶y^۲}{۱۴۴} = ۱,$$

$$\frac{x^۲}{۱۶} + \frac{y^۲}{۹} = ۱.$$

$a^۲ = ۱۶$ و $b^۲ = ۹$. پس نقاط تقاطع با محور xها عبارت است از $(۴,۰)$ و $(−۴,۰)$. همچنین نقاط تقاطع با محور yها $(۰,۳)$ و $(۰,−۳)$ می‌باشد. چون $c^۲ = ۱۶ − ۹$ لذا $c^۲ = ۷$ ، $c = \sqrt{۷}$. پس کانونها عبارتند از $F = (\sqrt{۷},۰)$ و $F' = (−\sqrt{۷},۰)$. طول قطر بزرگ برابر است با $۸ = ۴ × ۲$ و طول قطر کوچک $۶ = ۳ × ۲$.



شکل ۸

برای رسم ب نیز به‌صورت زیر عمل می‌کنیم

$$۲x^۲+y^۲=۱۰,$$

$$\frac{۲x^۲}{۱۰}+\frac{y^۲}{۱۰}=۱,$$

$$\frac{x^۲}{۵}+\frac{y^۲}{۱۰}=۱.$$

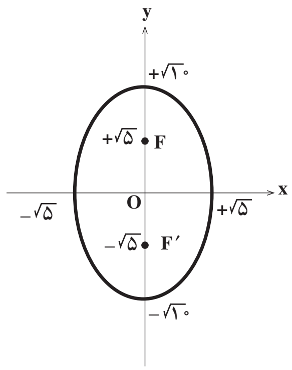
نقاط تقاطع با محور xها عبارتند از $(\sqrt{۵},۰)$ و $(-\sqrt{۵},۰)$. نقاط تقاطع با محور yها نیز $(۰,\sqrt{۱۰})$ و $(۰,-\sqrt{۱۰})$ می‌باشند. چون

$$c^۲=a^۲-b^۲,$$

$$c^۲=۱۰-۵,$$

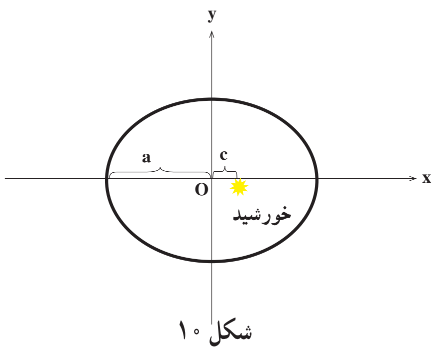
$$c=\sqrt{۵},$$

پس $F=(۰,\sqrt{۵})$ و $F'=(۰,-\sqrt{۵})$ کانونها هستند. طول قطر بزرگ برابر $۲\sqrt{۱۰}$ و طول قطر کوچک برابر $۲\sqrt{۵}$ است.



شکل ۹

مثال ۲. مدار گردش زمین به دور خورشید، یک بیضی است که خورشید در یکی از کانونهای آن قرار دارد. اگر بیشترین فاصلهٔ زمین از خورشید ۱۵۲/۱ میلیون کیلومتر و نزدیکترین فاصلهٔ آن ۱۴۷/۱ میلیون کیلومتر باشد، طول قطرهای بزرگ و کوچک آن را پیدا می‌کنیم. برای این منظور همانطور که از روی شکل ۱۰ دیده می‌شود داریم



شکل ۱۰

$$\begin{cases} a+c=۱۵۲/۱ \\ a-c=۱۴۷/۱ \end{cases}$$

پس

$$\begin{cases} a=۱۴۹/۶ \\ c=۲/۵ \end{cases}$$

در نتیجه

$$b=\sqrt{(۱۴۹/۶)^۲-(۲/۵)^۲}\cong ۱۴۹/۵۷$$

پس طول قطر بزرگ تقریباً برابر $۲\times ۱۴۹/۶=۲۹۹/۲$ و طول قطر کوچک تقریباً برابر $۲\times ۱۴۹/۵۷=۲۹۹/۱۴$ میلیون کیلومتر است. همانطور که ملاحظه می‌کنیم قطرهای بزرگ و کوچک با هم اختلاف زیادی ندارند که از آن می‌توان نتیجه گرفت که مدار زمین به دایره خیلی نزدیک است.

یوهان کپلر (۱۶۳۰ــ۱۵۷۱) منجم آلمانی کشف کرد که مدار گردش زمین به دور خورشید بیضی است.

شکل ۱۱

تذکر. همانطورکه در مثال فوق دیدیم، بعضی از بیضی‌ها ممکن است به دایره نزدیک باشند ولی بعضی از بیضی‌ها نیز ممکن است کاملاً کشیده باشند. در بیضی $\dfrac{x^۲}{a^۲}+\dfrac{y^۲}{b^۲}=۱$ $\left(\dfrac{x^۲}{b^۲}+\dfrac{y^۲}{a^۲}=۱\right)$ که $a>b>۰$ و $c^۲=a^۲-b^۲$، نسبت $\dfrac{c}{a}$ که با e نشان داده می‌شود را **خروج از مرکز** بیضی می‌نامیم.

درواقع خروج از مرکز شاخص کشیدگی بیضی است. هر چقدر خروج از مرکز کوچکتر باشد و به‌صفر نزدیکتر شود، بیضی به دایره نزدیکتر است و هر چقدر خروج از مرکز بزرگتر باشد، بیضی کشیده‌تر است. در مثال ۲ خروج از مرکز برابر است با

$$e=\frac{۲/۵}{۱۴۹/۶}\cong ۰/۰۱۷,$$

که کوچک بودن آن بیانگر این است که مدار گردش زمین به دور خورشید به دایره نزدیک است.

تمرین

۱. نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده، خروج از مرکز آنها را نیز مشخص کنید.

الف) $\frac{x^2}{۲۵}+\frac{y^2}{۴}=۱$، ب) $\frac{x^2}{۹}+\frac{y^2}{۴}=۱$، ج) $\frac{x^2}{۴}+\frac{y^2}{۲۵}=۱$.

۲. نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده و خروج از مرکز آنها را مشخص کنید.

الف) $x^2+۹y^2=۹$، ب) $۴x^2+y^2=۴$، ج) $۱۶x^2+۲۵y^2=۴۰۰$.

۳. نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده و خروج از مرکز آنها را مشخص کنید.

الف) $۳x^2+۲y^2=۲۴$، ب) $۴x^2+۷y^2=۲۸$، ج) $۲x^2+۳y^2=۲۴$.

۴. مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $(۲,۰)$ برابر نصف فاصلهٔ آنها از خط $x=۸$ باشد.

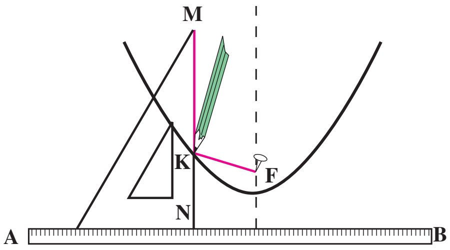
۵. مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $(۰,۹)$ برابر $\frac{۳}{۴}$ فاصلهٔ آنها از خط $y=۱۶$ باشد.

۳.۳ سهمی

فصل مشترک یک صفحه با مخروط ممکن است یک سهمی باشد. در این بخش تعریف دقیق سهمی را ذکر کرده و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم.

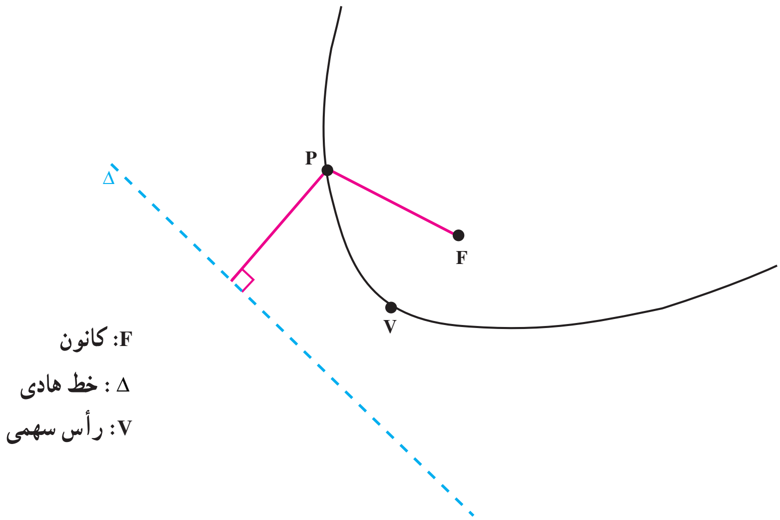
تعریف. **سهمی** مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک

خط ثابتِ Δ در آن صفحه و یک نقطهٔ ثابتِ F خارج از Δ و در آن صفحه به یک فاصله باشند. نقطهٔ ثابت F را **کانون** و خط ثابت Δ را **خط هادی** سهمی می‌نامیم.



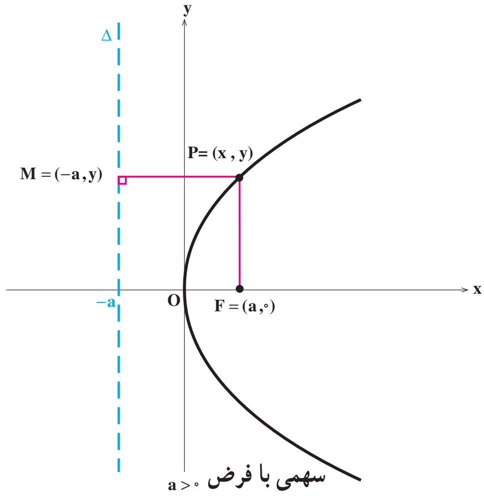
شکل ۱

برای رسم سهمی خط‌کشی مانند AB به‌عنوان هادی درنظر گرفته و یک تکه نخ به اندازهٔ طول یک ضلع MN از یک گونیا را نیز انتخاب می‌کنیم. یک سر نخ را در نقطهٔ M ثابت می‌کنیم و سر دیگر را در نقطهٔ F، یعنی کانون سهمی. مداد را مطابق شکل در یک نقطهٔ K قرار داده به‌طوری‌که تکه‌نخ بین نقاط F، K و M محکم قرار گرفته باشد. با لغزاندن گونیا در امتداد AB نوک مداد یک سهمی رسم می‌کند.

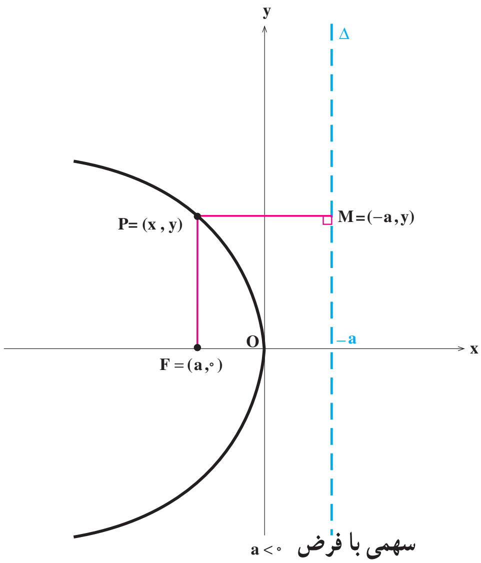


شکل ۲

حال معادلهٔ سهمی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا می‌کنیم. کانون سهمی را نقطهٔ F به مختصات $(a,0)$ می‌گیریم و رأس سهمی را در مبدأ مختصات فرض می‌کنیم. لذا خط هادی آن خط $x=-a$ خواهد بود. بسته به این‌که $a>0$ یا $a<0$ دهانهٔ سهمی به ترتیب به سمت راست و یا به سمت چپ باز می‌شود (به شکل‌های ۳ و ۴ نگاه کنید).



شکل ۳



شکل ۴

حال در هر دو حالت نقطهٔ $P=(x,y)$ روی سهمی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$|PM|=|PF|$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x+a)^{۲}+(y-y)^{۲}}=\sqrt{(x-a)^{۲}+(y-\circ)^{۲}}\ ,$$

اگر و فقط اگر

$$(x+a)^2=(x-a)^2+y^2\,,$$

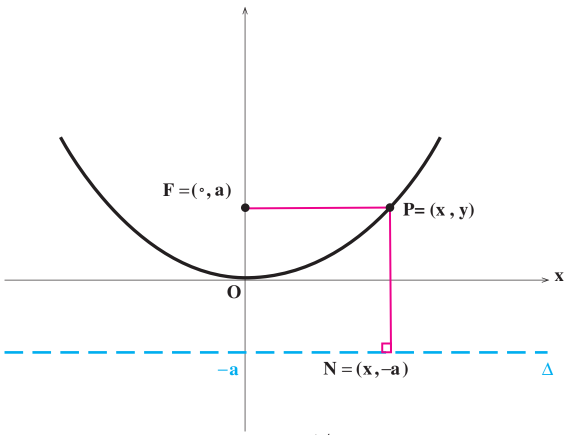
اگر و فقط اگر

$$x^2+2ax+a^2=x^2-2ax+a^2+y^2,$$

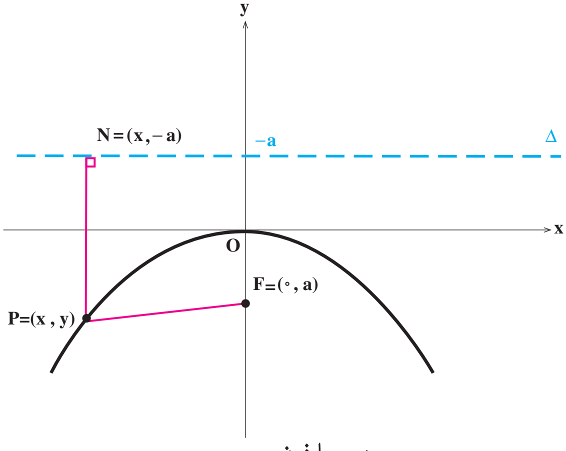
اگر و فقط اگر

$$y^2=4ax\,.$$

بدین ترتیب رابطهٔ اخیر معادلهٔ سهمی است. ممکن است کانون سهمی را روی محور yها بگیریم. یعنی کانون را نقطهٔ F به مختصات $(0,a)$ بگیریم. اگر رأس سهمی در مبدأ مختصات باشد، خط هادی آن خط $y=-a$ خواهد بود و بازهم بسته به این‌که $a>0$ یا $a<0$ حالتهای زیر را داریم.



شکل ۵ سهمی با فرض $a>0$



شکل ۶ سهمی با فرض $a<0$

در این حالت نیز با محاسباتی مشابه قبل به دست می‌آوریم

$$x^2 = 4ay .$$

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه را که در این بخش مطرح شد می‌آوریم.

معادلهٔ استاندارد سهمی

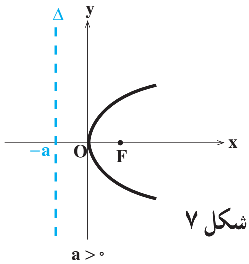
۱) $y^2 = 4ax$.

رأس : $(0,0)$.

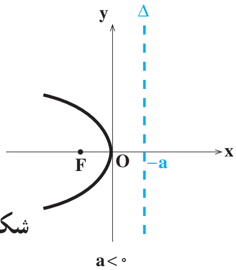
کانون : $F=(a,0)$.

خط هادی : $x=-a$.

محور تقارن : محور xها.



شکل ۷



شکل ۸

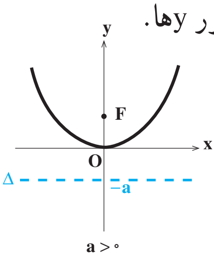
۲) $x^2 = 4ay$.

رأس : $(0,0)$.

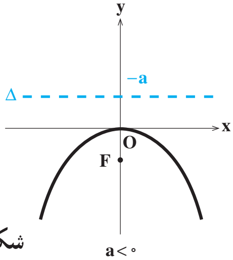
کانون : $F=(0,a)$.

خط هادی : $y=-a$.

محور تقارن : محور yها.



شکل ۹



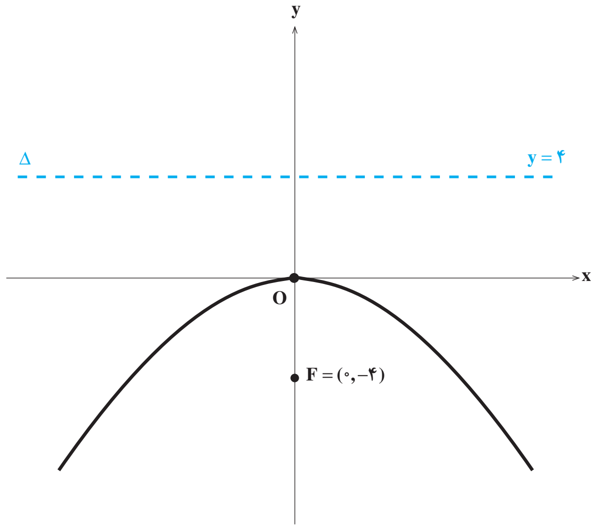
شکل ۱۰

مثال ۱. می‌خواهیم سهمی $x^۲ = -۱۶y$ را رسم کنیم و کانون و خط هادی آن را مشخص کنیم. توجه می‌کنیم که معادلهٔ فوق معادلهٔ یک سهمی است که کانون آن روی محور yها قرار دارد. از طرفی

$$۴a = -۱۶ ,$$

$$a = -۴ .$$

پس $F = (۰,-۴)$ کانون این سهمی و خط به معادلهٔ $y = -(-۴) = ۴$ خط هادی آن است.



شکل ۱۱

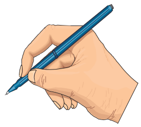
مثال ۲. می‌خواهیم معادلهٔ یک سهمی را که مبدأ مختصات رأس آن بوده و محور yها محور تقارن آن باشد و از نقطهٔ $(-۵,-۱۰)$ بگذرد پیدا کنیم و مختصات کانون و خط هادی آن را به‌دست آوریم. توجه می‌کنیم که معادلهٔ این سهمی به‌صورت $x^۲ = ۴ay$ است. اکنون با توجه به این‌که مختصات نقطهٔ $(-۵,-۱۰)$ در معادلهٔ اخیر صدق می‌کند، a به‌دست می‌آید :

$$(-۱۰)^۲ = ۴a(-۵) ,$$

$$۱۰۰ = -۲۰a ,$$

$$a = -۵ .$$

پس معادلهٔ این سهمی $x^۲ = -۲۰y$ است. واضح است که $F = (۰,-۵)$ کانون این سهمی و خط به معادلهٔ $y = ۵$ خط هادی آن است.



تمرین

۱. سهمی‌های زیر را رسم کرده، مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی آنها را نیز تعیین کنید.

الف) $y^{۲} = ۴x$ ، ب) $x^{۲} = ۴y$ ، ج) $x^{۲} = -۸y$ ،

د) $x^{۲} = ۵۸y$ ، هـ) $y^{۲} = -۹۳x$ ، و) $x^{۲} = -۱۰۵y$.

۲. معادلهٔ هر یک از سهمی‌های زیر را که محور تقارن آنها مشخص شده و یک نقطه از آنها نیز داده شده است پیدا کنید. در هر مورد مختصات کانون و معادلهٔ خط‌هادی را نیز تعیین کنید.

الف) محور xها، $(۴,۸)$ ، ب) محور yها، $(۴,۲)$ ،

ج) محور xها، $(-۵,۱۰)$ ، د) محور xها، $(-۳,۶)$ ،

هـ) محور yها، $(-۶,-۹)$ ، و) محور xها، $(-۶,-۱۲)$.

۳. با استفاده از تعریف سهمی، معادلهٔ یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطهٔ $(۲,۲)$ و خط هادی آن $y = ۴$ باشد.

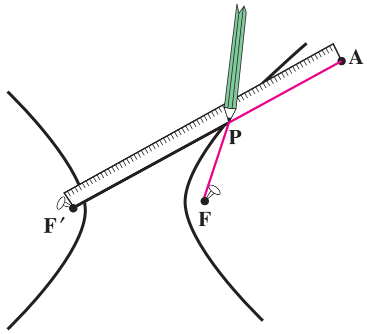
۴. با استفاده از تعریف سهمی، معادلهٔ یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطهٔ $(۶,۴)$ و خط هادی آن $x = ۲$ باشد.

۴.۳ هذلولی

هذلولی یکی دیگر از مقاطع مخروطی است که از دو قطعهٔ متمایز تشکیل شده است. ابتدا به تعریف آن توجه کنید.

تعریف. **هذلولی** مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که قدرمطلق تفاضل فاصلهٔ آنها از دو نقطهٔ ثابت و متمایزِ F و F′ در آن صفحه به نام **کانون** مقدارِ مثبت ثابتی باشد.

برای رسم یک هذلولی یک خط‌کش و یک تکه‌نخ که طول آن از طول خط‌کش کوتاهتر است انتخاب می‌کنیم به‌طوریکه تفاضل طول خط‌کش و قطعه نخ همان مقدار ثابت موردنظر باشد. یک سر نخ را در نقطهٔ A ثابت کرده، سر دیگر آن را در یکی از کانونهای هذلولی ثابت می‌کنیم. یک سر دیگر

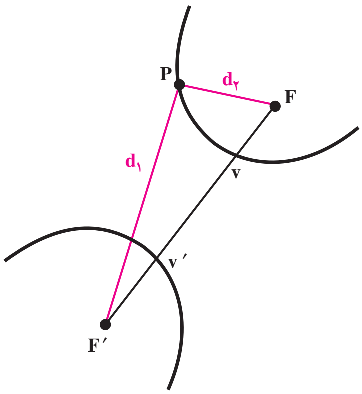


شکل ۱

خط‌کش را هم در کانون دیگر ثابت می‌کنیم. مطابق شکل یک مداد را درکنارهٔ خط‌کش و نخ قرار می‌دهیم و با دوران خط‌کش در نقطهٔ F' مسیری که مداد ایجاد می‌کند و یک شاخه از هذلولی است را رسم می‌کنیم (شاخه دیگر هذلولی مشابهاً با تعویض نقطهٔ ثابت خط‌کش به F حاصل می‌شود). حال نشان می‌دهیم که واقعاً یک هذلولی رسم شده است. برای این منظور کافی است نشان دهیم که نقطهٔ P روی هذلولی قرار دارد، یعنی قدرمطلق تفاضل فاصلهٔ P از F' و F برابر مقدار ثابت (تفاضل طول خط‌کش و طول نخ) است و این نیز برقرار است زیرا

$$\begin{aligned} |PF'| - |PF| &= |PF'| + |PA| - |PF| - |PA| \\ &= |AF'| - (|PF| + |PA|) \\ &= (\text{طول خط‌کش}) - (\text{طول نخ}) \\ &= \text{مقدار ثابت}. \end{aligned}$$

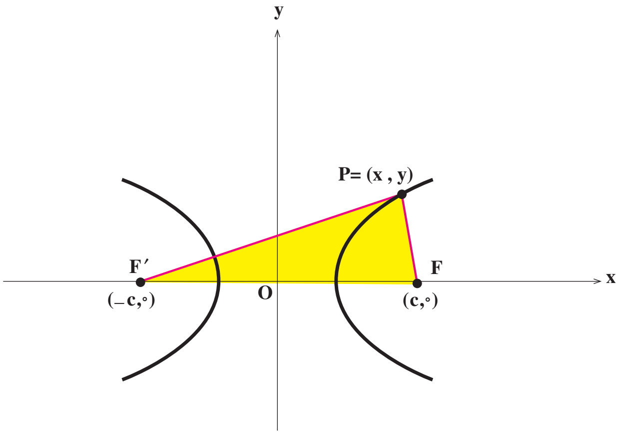
در شکل روبه‌رو F و F' کانونهای هذلولی هستند و V و V' نیز **رؤوس هذلولی** نامیده می‌شوند.



$|d_1 - d_2| =$ ثابت

شکل ۲

حال معادلهٔ هذلولی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا می‌کنیم. کانونهای هذلولی را دو نقطهٔ $F = (c, 0)$ و $F' = (-c, 0)$ می‌گیریم.



شکل ۳

نقطهٔ دلخواه P را روی هذلولی مذکور در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مقدار تفاضل ثابت با ۲a نشان داده شود که در آن a مثبت است. ملاحظه می‌کنیم که

$$|PF'| - |PF| < |FF'|,$$

$$۲a < ۲c\,,$$

$$a < c\,.$$

حال نقطهٔ $P = (x, y)$ روی هذلولی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$\big||PF'| - |PF|\big| = ۲a\,,$$

اگر و فقط اگر

$$\left|\sqrt{(x+c)^۲ + y^۲} - \sqrt{(x-c)^۲ + y^۲}\right| = ۲a\,,$$

اگر و فقط اگر

$$(c^۲ - a^۲)x^۲ - a^۲y^۲ = a^۲(c^۲ - a^۲)\,,$$

اگر و فقط اگر

$$\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{c^۲ - a^۲} = ۱\,.$$

برای ساده‌تر شدن معادله، با توجه به این‌که $c^۲ - a^۲ > ۰$، می‌توانیم فرض کنیم $b = \sqrt{c^۲ - a^۲}$.

پس

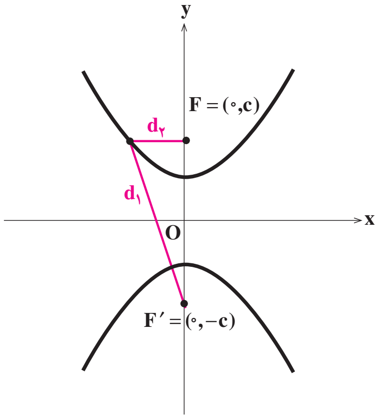
$$\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱\,,$$

معادلهٔ هذلولی مذکور می‌باشد. از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود که هذلولی در نقاط $(a,0)$ و $(-a,0)$ (رؤوس) محور xها را قطع می‌کند ولی محور yها را قطع نمی‌کند.

اگر کانون‌های هذلولی را روی محور yها انتخاب کنیم، یعنی فرض کنیم $F=(0,c)$ و $F'=(0,-c)$ کانونها باشند، به‌طور مشابه معادلهٔ هذلولی به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

که در آن $c>0$ و داریم $b^2=c^2-a^2$. مرکز هذلولی نیز هم‌چنان در مبدأ مختصات قرار دارد.



شکل ۴

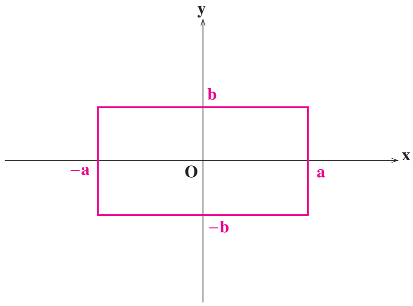
برای این‌که رسم نمودار هذلولی با سهولت و دقت بیشتری انجام شود، ملاحظات زیر را معمول می‌داریم. مثلاً هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ را درنظر می‌گیریم و ابتدا y را برحسب x استخراج می‌کنیم:

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

اگر $|x|$ بزرگ شود و به سمت بینهایت میل کند عبارت زیر رادیکال به ۱ میل خواهد کرد. پس برای مقادیر بزرگ $|x|$، نمودار هذلولی نزدیک خطهای زیر است:

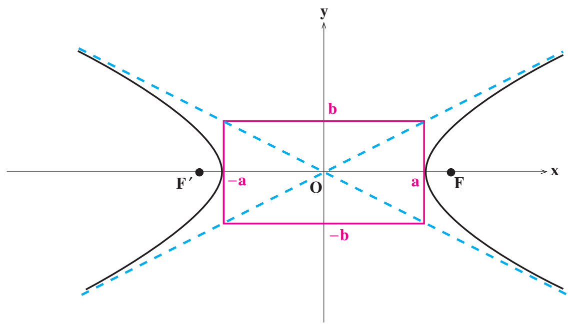
$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

این خطوط **مجانبهای** هذلولی نامیده می‌شوند، یعنی هذلولی به این خطوط رفته رفته نزدیک می‌شود. برای سهولت در رسم مجانبها و سپس هذلولی می‌توانیم ابتدا مستطیل صفحهٔ بعد را رسم کنیم.



شکل ۵

سپس اقطار این مستطیل که همان مجانبها هستند را رسم کرده و هذلولی را رسم می‌کنیم.

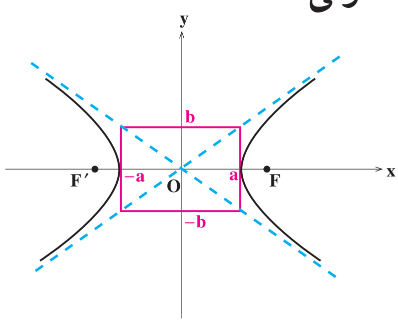


شکل ۶

با استفاده از رابطهٔ $c^۲ = a^۲ + b^۲$ ، به راحتی می‌توان دید اگر قوسی بر مرکز مبدأ مختصات و شعاعی برابر نصف قطر مستطیل رسم کنیم، آنگاه نقطهٔ تقاطع آن با محور xها، کانونهای هذلولی را مشخص می‌کند.

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه در این بخش مطرح کردیم را بیان می‌کنیم.

معادلهٔ استاندارد هذلولی



شکل ۷

۱) $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$.

رؤوس : $(a,۰)$ و $(-a,۰)$.

کانونها : $F = (c,۰)$ و $F' = (-c,۰)$

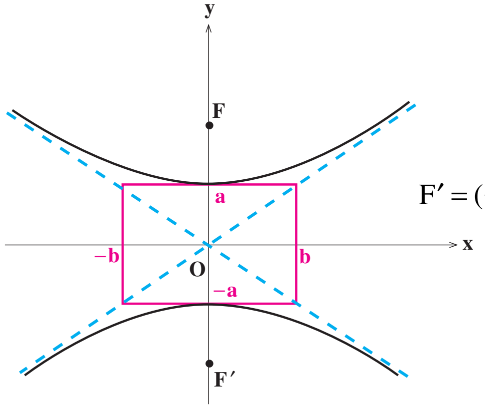
که $c^۲ = a^۲ + b^۲$.

۲) $\frac{y^۲}{a^۲}-\frac{x^۲}{b^۲}=۱$.

رؤوس : $(۰,a)$ و $(۰,-a)$.

کانونها : $F=(۰,c)$ و $F'=(۰,-c)$

که $c^۲=a^۲+b^۲$.



شکل ۸

در هر دو حالت محور xها و yها محورهای تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن هذلولی است.

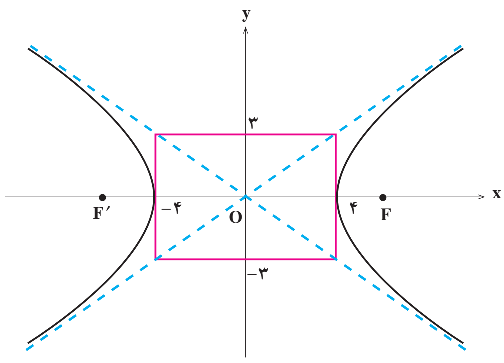
مثال ۱. در زیر هذلولی $۹x^۲-۱۶y^۲=۱۴۴$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که $\frac{x^۲}{۱۶}-\frac{y^۲}{۹}=۱$. از طرفی

$$c^۲=a^۲+b^۲,$$

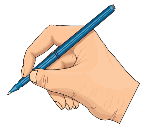
$$c^۲=۱۶+۹=۲۵,$$

$$c=۵.$$

پس $F=(۵,۰)$ و $F'=(-۵,۰)$ کانونهای هذلولی هستند و نمودار آن به‌صورت زیر است :



شکل ۹



تمرین

۱. هریک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۴}=۱$ ، ب) $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۲۵}=۱$ ،

ج) $\frac{y^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۹}=۱$ ، د) $\frac{y^۲}{۲۵}-\frac{x^۲}{۹}=۱$.

۲. هر یک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $۴x^۲-y^۲=۱۶$ ، ب) $x^۲-۹y^۲=۹$ ،

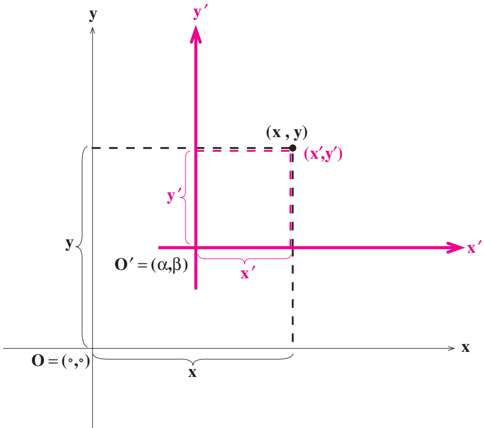
ج) $۹y^۲-۱۶x^۲=۱۴۴$ ، د) $۴y^۲-۲۵x^۲=۱۰۰$.

۵.۳ انتقال محورهای مختصات

تاکنون معادلات مقاطع مخروطی را در حالتی یافته‌ایم که مرکز آنها در مبدأ مختصات قرار داشته و محورهای آنها موازی محورهای مختصات بوده است. در این بخش می‌خواهیم معادلات مقاطع مخروطی را در حالتی پیدا کنیم که محورهای آنها موازی محورهای مختصات بوده و مرکز آنها نقطه‌ای دلخواه باشد.

برای این منظور از انتقال محورهای مختصات استفاده می‌کنیم. فرض کنیم مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ $O=(۰,۰)$ را به نقطهٔ $O'=(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم. البته این انتقال را طوری انجام می‌دهیم که محورها در حالت انتقال‌یافته با محورهای قبل از انتقال موازی باشند. می‌خواهیم بررسی کنیم که اگر یک نقطه در صفحه، نسبت به دستگاه اوّلیه دارای مختصات (x,y) باشد و نسبت به دستگاه جدیدِ منتقل شده دارای مختصات (x',y')، آنگاه این دو مختصات چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند. با توجه به شکل ۱ این رابطه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} x=x'+\alpha \\ y=y'+\beta \end{cases}$$



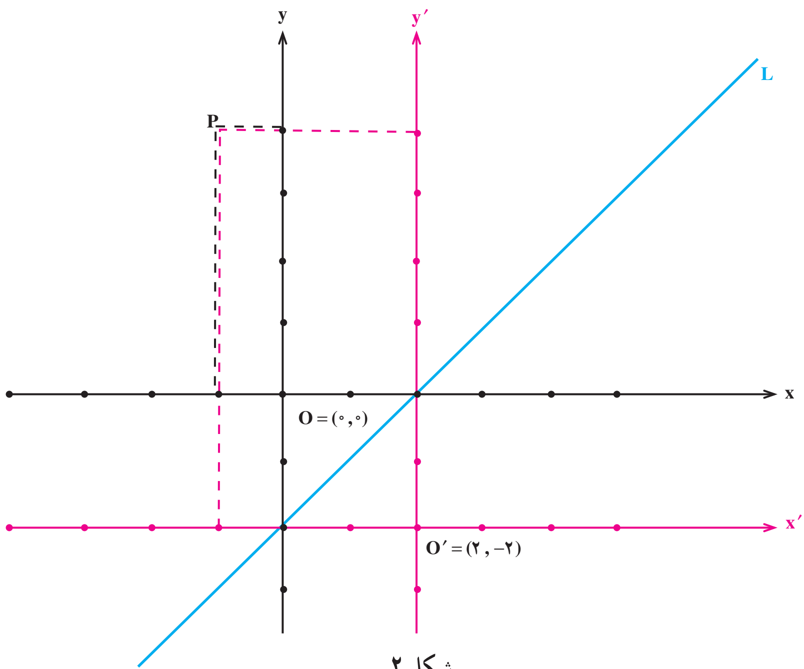
شکل ۱

مثال ۱. فرض کنیم یک دستگاه مختصات قائم با مبدأ مختصات $O=(\circ,\circ)$ داده شده است. یک نقطه در صفحهٔ این دستگاه مختصات قائم انتخاب می‌کنیم، مثلاً نقطهٔ $P=(-۱,۴)$. اکنون مبدأ مختصات را به نقطهٔ $O'=(۲,-۲)$ منتقل می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم که مختصات P در دستگاه جدید چه خواهد شد.

اگر مختصات P در دستگاه جدید (x',y') باشد، بنابر تساوی‌های بالا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} x'=-۱-۲=-۳ \\ y'=۴-(-۲)=۶ \end{cases}$$

پس مختصات P در دستگاه جدید برابر $(-۳,۶)$ است (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

اکنون فرض می‌کنیم خطی مانند L در صفحهٔ دستگاه اوّلیه داده شده است که در این صفحه معادله‌ای به‌صورت

$$x-y=۲$$

دارد. می‌خواهیم ببینیم که این خط در دستگاه جدید چه معادله‌ای دارد. نقطه‌ای دلخواه روی خط L انتخاب می‌کنیم که در دستگاه اوّلیه دارای مختصات (x,y) و در دستگاه جدید دارای مختصات

(x',y') است. چون

$$\begin{cases} x = x' + ۲ \\ y = y' - ۲ \end{cases}$$

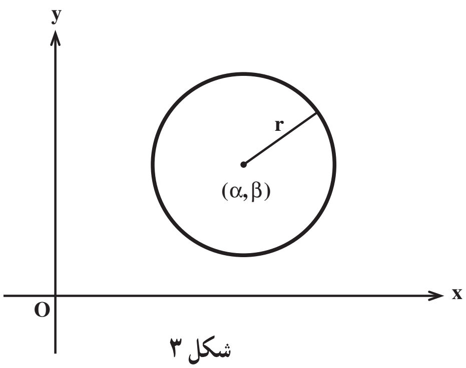
پس با توجه به این‌که $x - y = ۲$، به‌دست می‌آوریم $(x' + ۲) - (y' - ۲) = ۲$، یا $x' - y' = -۲$.

پس اگر نقطه‌ای روی خط L باشد که در دستگاه جدید دارای مختصات (x',y') باشد، آنگاه $x' - y' = -۲$. برعکس، اگر نقطه‌ای در دستگاه جدید دارای مختصات (x',y') باشد و در تساوی $x' - y' = -۲$ صدق کند، آنگاه لزوماً روی خط L است (چرا؟). پس

$$x' - y' = -۲$$

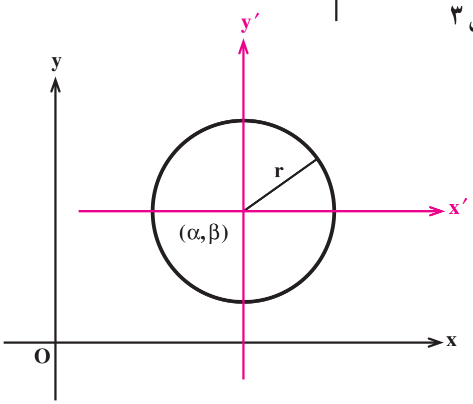
معادلهٔ خط L نسبت به دستگاه جدید است.

اکنون فرض می‌کنیم که یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. می‌خواهیم معادلهٔ دایره‌ای را که مرکز آن نقطهٔ (α,β) می‌باشد و شعاع آن r است پیدا کنیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

مبدأ مختصات دستگاه را به نقطهٔ (α,β) منتقل می‌کنیم (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

معادلهٔ دایرهٔ داده شده نسبت به دستگاه جدید به‌صورت $x'^{2}+y'^{2}=r^{2}$ است. امّا

$$\begin{cases} x'=x-\alpha \\ y'=y-\beta \end{cases}$$

و لذا $(x-\alpha)^{2}+(y-\beta)^{2}=r^{2}$ معادلهٔ دایره در دستگاه قدیم است. درنتیجه می‌توانیم بگوییم معادلهٔ دایره به شعاع r و به مرکز (α,β) به‌صورت زیر است

$$(x-\alpha)^{2}+(y-\beta)^{2}=r^{2}.$$

مثال ۲. با دسته‌بندی جملات معادلهٔ $x^{2}+y^{2}-4x+2y-4=0$ به‌صورت

$$(x^{2}-4x)+(y^{2}+2y)=4,$$

$$(x-2)^{2}-4+(y+1)^{2}-1=4,$$

$$(x-2)^{2}+(y+1)^{2}=9,$$

ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ داده شده، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(2,-1)$ و شعاع ۳ است.

مثال ۳. می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی مانند $P=(x,y)$ را پیدا کنیم که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $A=(7,1)$ دو برابر فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $B=(1,4)$ باشد. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$|AP|=2|BP|,$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-7)^{2}+(y-1)^{2}}=2\sqrt{(x-1)^{2}+(y-4)^{2}},$$

اگر و فقط اگر

$$(x-7)^{2}+(y-1)^{2}=4\left[(x-1)^{2}+(y-4)^{2}\right],$$

اگر و فقط اگر

$$3x^{2}+3y^{2}+6x-30y+18=0,$$

اگر و فقط اگر

$$x^{2}+y^{2}+2x-10y+6=0,$$

اگر و فقط اگر

$$(x+1)^{2}+(y-5)^{2}=20.$$

پس مکانِ مطلوب، دایره‌ای به مرکز $(-۱,۵)$ و به شعاع $۲\sqrt{۵}=\sqrt{۲۰}$ است.

حال گیریم یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. می‌خواهیم معادلهٔ یک بیضی را که مرکز آن نقطهٔ (α,β) می‌باشد پیدا کنیم. فرض می‌کنیم طول قطر بزرگ این بیضی $۲a$ و طول قطر کوچک آن $۲b$ باشد. کانونهای این بیضی را نیز نقاط $F=(\alpha+c,\beta)$ و $F'=(\alpha-c,\beta)$ فرض می‌کنیم (یعنی بیضی را به‌صورت افقی درنظر می‌گیریم). مانند بحث روی معادلهٔ دایره، مبدأ مختصات را به نقطهٔ (α,β) منتقل می‌کنیم. معادلهٔ این بیضی نسبت به دستگاه جدید $\frac{x'^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y'^{۲}}{b^{۲}}=۱$ است. امّا

$$\begin{cases} x'=x-\alpha \\ y'=y-\beta \end{cases}$$

و لذا $\frac{(x-\alpha)^{۲}}{a^{۲}}+\frac{(y-\beta)^{۲}}{b^{۲}}=۱$ معادلهٔ بیضی در دستگاه قدیم است. درنتیجه می‌توانیم بگوییم معادلهٔ بیضی به مرکز (α,β)، کانونهای $F=(\alpha+c,\beta)$ و $F'=(\alpha-c,\beta)$ و قطر بزرگ به طول $۲a$ و قطر کوچک به طول $۲b$ به‌صورت زیر است

$$\frac{(x-\alpha)^{۲}}{a^{۲}}+\frac{(y-\beta)^{۲}}{b^{۲}}=۱\ ,$$

که در آن $a>b$ و $c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}$.

همچنین اگر کانونها $F=(\alpha,\beta+c)$ و $F'=(\alpha,\beta-c)$ فرض شوند (یعنی بیضی را بیضی قائم درنظر بگیریم) آنگاه معادلهٔ بیضی به‌صورت زیر خواهد بود

$$\frac{(x-\alpha)^{۲}}{b^{۲}}+\frac{(y-\beta)^{۲}}{a^{۲}}=۱.$$

مثال ۴. نوع مقطع مخروطی $۴x^{۲}+y^{۲}-۳۲x+۶y+۵۷=۰$ را تعیین کرده و آن را رسم می‌کنیم. برای این منظور با دسته‌بندی معادله به‌صورت

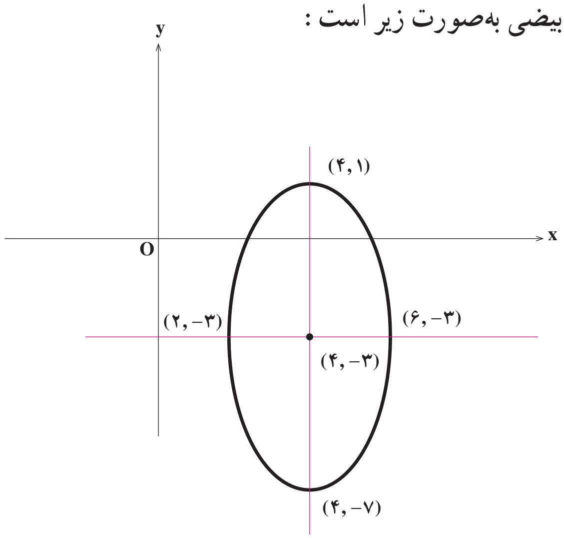
$$۴(x^{۲}-۸x)+y^{۲}+۶y+۵۷=۰,$$

$$۴(x-۴)^{۲}-۶۴+(y+۳)^{۲}-۹+۵۷=۰,$$

$$۴(x-۴)^۲+(y+۳)^۲=۱۶\,,$$

$$\frac{(x-۴)^۲}{۴}+\frac{(y+۳)^۲}{۱۶}=۱\,,$$

درمی‌یابیم که نوع مقطع مخروطی داده شده بیضی است که مرکز آن $(۴,-۳)$ می‌باشد و در آن $a=۴$ و $b=۲$. نمودار این بیضی به‌صورت زیر است :



شکل ۵

اکنون مشابه آنچه در بالا دیدیم می‌توانیم نشان دهیم که

$$(y-\beta)^۲=۴a(x-\alpha)$$

معادله یک سهمی است که رأس آن نقطهٔ (α,β) ، کانون آن نقطهٔ $F=(\alpha+a,\beta)$ و خط هادی آن دارای معادلهٔ $x=\alpha-a$ است.

همچنین

$$(x-\alpha)^۲=۴a(y-\beta)$$

نیز معادلهٔ یک سهمی است که رأس آن نقطهٔ (α,β) ، کانون آن نقطهٔ $F=(\alpha,\beta+a)$ و خط هادی آن دارای معادلهٔ $y=\beta-a$ است.

در مورد هذلولی به مرکز (α,β) نیز می‌توانیم معادلات زیر را به‌دست آوریم

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}-\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱\,,$$

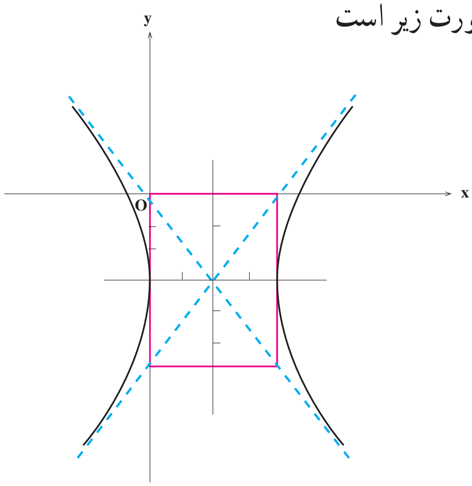
$$\frac{(y-\beta)^{۲}}{a^{۲}}-\frac{(x-\alpha)^{۲}}{b^{۲}}=۱.$$

مثال ۵. نوع مقطع مخروطی $۹x^{۲}-۴y^{۲}-۳۶x-۲۴y-۳۶=۰$ را تعیین کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم. توجه می‌کنیم که با دسته‌بندی، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

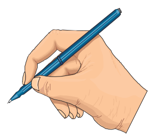
$$\frac{(x-۲)^{۲}}{۴}-\frac{(y+۳)^{۲}}{۹}=۱.$$

پس این مقطع مخروطی یک هذلولی به مرکز $(۲,-۳)$ است که در آن $a=۲$ و $b=۳$.

نمودار این هذلولی به‌صورت زیر است



شکل ۶



تمرین

۱. نشان دهید هر یک از معادلات زیر، معادلهٔ یک دایره است و شعاع و مرکز هر یک از آنها را به‌دست آورید.

الف) $x^{۲}+y^{۲}-۴y=۵$,

ب) $x^{۲}+y^{۲}-۴x+۶y=۳$,

ج) $x^{۲}+y^{۲}+۸x-۶y=۰$.

۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,-۲)$ بوده و از نقطهٔ $(۲,۳)$ بگذرد.

۳. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(۲,-۲)$ بوده و بر خط $y = x + ۴$ مماس باشد.

۴. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ $(۴,۶)$، $(-۲,-۲)$ و $(۵,-۱)$ بگذرد.

۵. مکان هندسی نقاطی مانند (x,y) را پیدا کنید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $(-۲,۱)$ نصف فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $(۴,-۲)$ باشد.

۶. نوع هریک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

الف) $۴x^۲ + ۹y^۲ - ۱۶x - ۳۶y + ۱۶ = ۰$،

ب) $۱۶x^۲ + ۹y^۲ + ۶۴x + ۵۴y + ۱ = ۰$،

ج) $x^۲ + ۸x + ۸y = ۰$،

د) $y^۲ + ۱۲x + ۴y - ۳۲ = ۰$،

هـ) $x^۲ + y^۲ + ۱۲x + ۱۰y + ۴۵ = ۰$،

و) $x^۲ + y^۲ - ۸x - ۶y = ۰$،

ز) $-۹x^۲ + ۱۶y^۲ - ۷۲x - ۹۶y - ۱۴۴ = ۰$،

ح) $۱۶x^۲ - ۲۵y^۲ - ۱۶۰x = ۰$.

۶.۳ دوران محورهای مختصات

در بخش قبل دیدیم که معادلات

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲ \ ,$$

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲} + \frac{(y-\beta)^۲}{b^۲} = ۱ \ , \quad \frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} + \frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} = ۱ \ ,$$

$$(y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha) \ , \ (x-\alpha)^۲ = ۴a(y-\beta) \ ,$$

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲} - \frac{(y-\beta)^۲}{b^۲} = ۱ \ , \quad \frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} - \frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} = ۱ \ ,$$

به‌ترتیب معادلات دایره، بیضی، سهمی و هذلولی بودند که محورهای آنها موازی محورهای مختصات بود و (α,β) برای دایره، بیضی و هذلولی مرکز و برای سهمی رأس محسوب می‌شد. اگر هریک از این معادلات را پس از به توان رساندن جملات آن و ساده کردن مرتب کنیم، معادله‌ای به‌صورت

$$ax^۲ + cy^۲ + dx + ey + f = ۰ \qquad (۱)$$

به‌دست می‌آوریم. اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند چیست. برای پاسخ به این سؤال چند حالت را در نظر می‌گیریم.

۱) $a=c=0$.

در این حالت معادلهٔ (۱) به معادلهٔ $dx+ey+f=0$ تبدیل می‌شود که یک خط، یا کل صفحه (وقتی $d=e=f=0$) را مشخص می‌کند و یا مکانی را به‌دست نمی‌دهد (وقتی $d=e=0$ و $f \neq 0$).

۲) $a=0$ و $c \neq 0$.

در این حالت معادلهٔ (۱) به معادلهٔ $cy^2+dx+ey+f=0$ تبدیل می‌شود. در این صورت اگر $d=0$، به‌دست می‌آوریم $cy^2+ey+f=0$ که یک خط، یا دو خط موازی را مشخص می‌کند و یا مکانی را به‌دست نمی‌دهد. اگر $d \neq 0$ نیز پس از مرتب کردن، به معادلهٔ

$$\left(y-\frac{-e}{2c}\right)^2=4\left(\frac{-d}{4c}\right)\left(x-\frac{e^2-4cf}{4cd}\right)$$

دست می‌یابیم که یک سهمی را مشخص می‌کند.

۳) $a \neq 0$ و $c=0$.

این حالت مشابه حالت ۲ می‌باشد و مکانی که در این حالت معادلهٔ (۱) به‌دست می‌دهد، یک خط، یا دو خط موازی و یا یک سهمی می‌باشد و یا مکانی توسط (۱) مشخص نمی‌شود.

۴) $a \neq 0$ و $c \neq 0$.

در این حالت پس از مرتب کردن معادلهٔ (۱) به‌صورت مربعات کامل خواهیم داشت

$$a\left(x-\frac{-d}{2a}\right)^2+c\left(y-\frac{-e}{2c}\right)^2=\frac{d^2c+e^2a-4acf}{4ac}.$$

پس در این حالت معادلهٔ (۱)، بجز در حالات استثنایی که یک نقطه و یا دو خط متقاطع را به دست می‌دهد ؛ یک دایره، یک بیضی و یا یک هذلولی را مشخص می‌کند و یا مکانی را به‌دست نمی‌دهد. با توجه به آنچه در بالا گفته شد می‌توانیم قضیهٔ زیر را بنویسیم.

قضیهٔ ۱. مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ

$$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$$

صدق می‌کنند، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط متقاطع و یا کل صفحه می‌باشد ؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است.

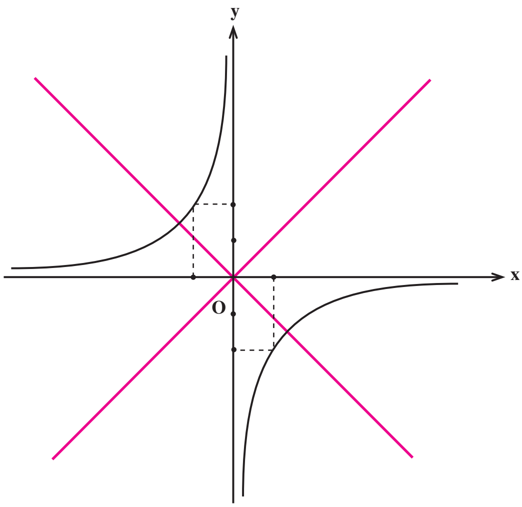
توجه می‌کنیم که معادلهٔ (۱)، یک حالت خاص از معادلهٔ درجهٔ دوم کلی زیر می‌باشد که در آن $b=0$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (2)$$

اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند چیست.

ابتدا یک حالت خاص را بررسی می‌کنیم. مثلاً فرض کنیم $a=c=d=e=0$، $b=1$ و $f=2$.

پس می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه را پیدا کنیم که در معادلهٔ $xy=-2$ صدق می‌کنند. این معادله را می‌توانیم به‌صورت $y=\frac{-2}{x}$ بنویسیم. از سال سوم به یاد داریم که این معادله یک تابع هموگرافیک را مشخص می‌کند و لذا نمودار آن به‌صورت زیر است.



شکل ۱

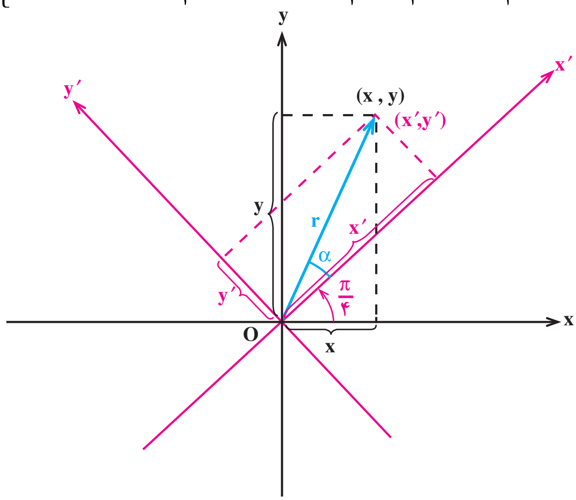
ببینیم چه اتفاقی افتاده است. نمودار $xy=-2$ به یک هذلولی شبیه شده است. سؤالی که پیش می‌آید این است که اگر واقعاً شکل بالا یک هذلولی است پس چرا معادلهٔ آن به شکل معادلاتی که در بخش ۴ مطالعه کردیم نمی‌باشد. البته این موضوع نمی‌تواند هذلولی بودن شکل بالا را زیر سؤال ببرد. درواقع اگر نمودار شکل ۱ یک هذلولی باشد خطوط قرمز موجود در شکل که موازی محورهای مختصات نمی‌باشند محورهای این هذلولی خواهند بود و لذا انتظاری نیست که معادلهٔ این هذلولی به‌صورت معادلات هذلولی‌های با محورهای موازی محورهای مختصات باشد.

اکنون می‌خواهیم سعی کنیم که نشان دهیم شکل بالا یک هذلولی است. به‌نظر شما چگونه با این مسأله برخورد کنیم. برای این منظور محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. قطعاً اگر شکل بالا هذلولی باشد، بایستی در دستگاه جدید دارای معادله‌ای باشد از نوع معادلات هذلولی‌های مطرح شده در بخش ۴، زیرا محورهای آن موازی محورهای دستگاه مختصات جدید خواهند شد.

ابتدا مسأله دوران محورها را حول مبدأ مختصات به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ بررسی می‌کنیم. گیریم یک نقطه در دستگاه قدیم دارای مختصات (x,y) و نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات (x',y') باشد. رابطهٔ بین این دو مختصات را پیدا می‌کنیم.

با توجه به شکل ۲ می‌توانیم بنویسیم $\begin{cases} x' = r\cos\alpha \\ y' = r\sin\alpha \end{cases}$ و $\begin{cases} x = r\cos(\alpha + \frac{\pi}{۴}) \\ y = r\sin(\alpha + \frac{\pi}{۴}) \end{cases}$. لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{۴} - r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \\ y = r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{۴} + r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \end{cases}$$



شکل ۲

پس اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات (x,y) باشد، در دستگاه دوران‌یافتهٔ جدید با مختصات $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y', \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y')$ ظاهر می‌شود. پس $xy = -۲$ در دستگاه جدید معادله‌ای به شکل $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y')(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y') = -۲$ ، $\frac{۱}{۲}x'^{۲} - \frac{۱}{۲}y'^{۲} = -۲$ ، یا

$$\frac{y'^{۲}}{۴} - \frac{x'^{۲}}{۴} = ۱$$

دارد که همان معادلهٔ هذلولی با محورهای موازی محورهای مختصات است، البته محورهای دستگاه جدید. پس ثابت کردیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ $xy = -۲$ صدق می‌کنند یک هذلولی است. این کار را با دوران محورهای مختصات حول مبدأ مختصات به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ در جهت مثلثاتی، بازنویسی معادلهٔ $xy = -۲$ در دستگاه جدید و علم به این‌که معادلهٔ بازنویسی شدهٔ $xy = -۲$ در دستگاه جدید معادلهٔ یک هذلولی است انجام دادیم.

حال فرض کنیم اطّلاعی از این‌که باید محورهای مختصات را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ دوران می‌دادیم تا بازنویسی شدهٔ معادلهٔ $xy = -۲$ در دستگاه جدید به‌صورتی آشنا تبدیل شود نداشتیم، ولیکن می‌دانستیم که با دوران محورهای مختصات و بازنویسی معادلهٔ $xy = -۲$ نسبت به دستگاه جدید مکان مطلوب مشخص خواهد شد، چگونه بایستی زاویهٔ مناسبِ دوران را پیدا می‌کردیم. بیایید مجدداً مسأله دوران محورهای مختصات را مطرح کنیم. گیریم یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. محورهای آن را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازهٔ زاویهٔ ثابت θ دوران می‌دهیم. می‌خواهیم ببینیم اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات (x,y) باشد و نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات (x',y') ، آنگاه این دو مختصات چه رابطه‌ای با هم دارند.

مجدداً با توجه به شکل ۲ و با فرض این‌که زاویهٔ دوران به‌جای $\frac{\pi}{۴}$ ، θ باشد می‌توانیم بنویسیم $\begin{cases} x' = r\cos\alpha \\ y' = r\sin\alpha \end{cases}$ و $\begin{cases} x = r\cos(\alpha+\theta) \\ y = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$. لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = (\cos\theta)x' - (\sin\theta)y' \\ y = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta = (\sin\theta)x' + (\cos\theta)y' \end{cases} \quad (۳)$$

پس اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات (x,y) باشد، نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات $\big((\cos\theta)x' - (\sin\theta)y', (\sin\theta)x' + (\cos\theta)y'\big)$ خواهد بود. حال فرض کنیم $xy = -۲$ معادلهٔ منحنی مورد مطالعه در دستگاه قدیم باشد. معادلهٔ این منحنی در دستگاه دوران‌یافتهٔ جدید را پیدا می‌کنیم:

$$\big((\cos\theta)x' - (\sin\theta)y'\big)\big((\sin\theta)x' + (\cos\theta)y'\big) = -۲\ ,$$

$$(\cos\theta\sin\theta)x'^{۲} + (\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta)x'y' - (\sin\theta\cos\theta)y'^{۲} + ۲ = ۰.$$

معادلهٔ اخیر، معادلهٔ منحنی مورد مطالعه در دستگاه جدید است. θ را باید چگونه انتخاب می‌کردیم تا این معادله قابل شناسایی می‌شد؟ بله پاسخ شما درست است. در اینجا جملهٔ شامل $x'y'$ یک جملهٔ مزاحم در شناسایی است و باید $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$ را طوری انتخاب کنیم که ضریب این جمله صفر شود:

$$\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta = ۰,$$

$$\cos ۲\theta = ۰,$$

$$۲\theta = \frac{\pi}{۲},$$

$$\theta = \frac{\pi}{۴}.$$

پس اگر محورها را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم (یعنی زاویه‌ای که قبلاً نیز بررسی کرده بودیم)، به معادلهٔ

$$\frac{۱}{۲}x'^{۲} - \frac{۱}{۲}y'^{۲} + ۲ = ۰,$$

یا

$$\frac{y'^{۲}}{۴} - \frac{x'^{۲}}{۴} = ۱,$$

می‌رسیم که معادلهٔ منحنی مورد مطالعه در دستگاه جدید است. مجدداً مانند قبل می‌توانیم متوجه شویم که $xy = -۲$ نیز معادلهٔ یک هذلولی بوده است، چرا که بازنویسی شدهٔ این معادله نسبت به دستگاه دوران‌یافته یک هذلولی است.

حال با همین دیدگاه به بررسی مکان هندسی نقاطی از صفحه که معادلهٔ (۲)، یعنی

$$ax^{۲} + bxy + cy^{۲} + dx + ey + f = ۰,$$

مشخص می‌کند می‌پردازیم.

گیریم محورهای مختصات را به اندازهٔ زاویهٔ θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم. منحنی که معادلهٔ (۲) مشخص می‌کند در دستگاه جدید دارای معادلهٔ

$$a\big((\cos\theta)x' - (\sin\theta)y'\big)^{۲} + b\big((\cos\theta)x' - (\sin\theta)y'\big)\big((\sin\theta)x' + (\cos\theta)y'\big)$$
$$+c\big((\sin\theta)x' + (\cos\theta)y'\big)^{۲} + d\big((\cos\theta)x' - (\sin\theta)y'\big) + e\big((\sin\theta)x' + (\cos\theta)y'\big)$$
$$+f = ۰,$$

می‌باشد. این معادله پس از به توان رساندن جملات آن و مرتب کردن جملات به‌صورت

$$Ax'^{۲} + Bx'y' + Cy'^{۲} + Dx' + Ey' + F = ۰$$

تبدیل می‌شود، که در آن ضریب $x'y'$، یعنی B، به‌صورت زیر است :

$$B = ۲(c-a)\sin\theta\cos\theta + b(\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta).$$

حال $۰ \le \theta < \frac{\pi}{۲}$ را طوری تعیین می‌کنیم که ضریب $x'y'$ برابر صفر شود، یعنی داشته باشیم $B=۰$:

$$۲(c-a)\sin\theta\cos\theta + b(\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta) = ۰,$$
$$(c-a)\sin ۲\theta + b\cos ۲\theta = ۰,$$
$$(c-a)\tan ۲\theta + b = ۰,$$
$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c}.$$

پس اگر $۰ \le \theta < \frac{\pi}{۲}$ را طوری انتخاب کنیم که $\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c}$، آنگاه بازنویسی شدهٔ معادلهٔ (۲) نسبت به دستگاه دوران یافته به اندازهٔ زاویهٔ θ به‌صورت

$$Ax'^{۲} + Cy'^{۲} + Dx' + Ey' + F = ۰,$$

خواهد بود. امّا بنابر قضیهٔ ۱، مکان هندسی نقاطی از صفحه را که معادلهٔ اخیر به‌دست می‌دهد، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط متقاطع و یا کل صفحه می‌باشد ؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است و لذا مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند نیز چنین است. پس قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۲. مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ

$$ax^{۲} + bxy + cy^{۲} + dx + ey + f = ۰,$$

صدق می‌کنند، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط

متقاطع و یا کل صفحه می‌باشد ؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است.

مثال ۱. می‌خواهیم نوع مقطع مخروطی $۱۷x^{۲} - ۶xy + ۹y^{۲} - ۷۲ = ۰$ را تعیین کنیم. در این مثال داریم $a = ۱۷$ ، $b = -۶$ ، $c = ۹$ ، $d = e = ۰$ و $f = -۷۲$. محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازهٔ زاویهٔ θ دوران می‌دهیم که در آن θ از تساوی زیر به‌دست می‌آید

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{-۶}{۱۷-۹} = \frac{-۶}{۸} = \frac{-۳}{۴}.$$

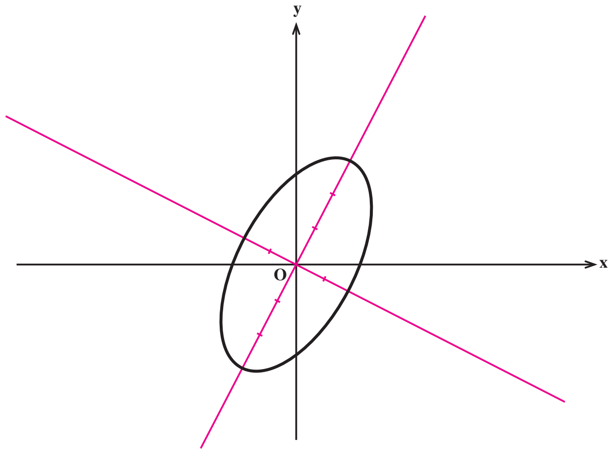
اکنون با توجه به اتحاد $۱ + \tan^{۲} ۲\theta = \frac{۱}{\cos^{۲} ۲\theta}$ به‌دست می‌آوریم $\cos ۲\theta = \frac{-۴}{۵}$ و لذا از اتحادهای $\cos^{۲}\theta = \frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\theta)$ و $\sin^{۲}\theta = \frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\theta)$ نتیجه می‌شود $\cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ و $\sin\theta = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$. اکنون معادلهٔ داده شده در مثال، نسبت به دستگاه دوران یافته با توجه به (۳) به‌صورت

$$۱۷(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}x' - \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}y')^{۲} - ۶(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}x' - \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}y')(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}x' + \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}y')$$
$$+۹(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}x' + \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}y')^{۲} - ۷۲ = ۰$$

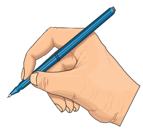
تبدیل می‌شود که پس از ساده کردن به‌صورت

$$\frac{x'^{۲}}{۹} + \frac{y'^{۲}}{۴} = ۱$$

در می‌آید. چون این معادله یک بیضی را مشخص می‌کند، لذا معادلهٔ داده شده در مثال نیز بیضی را مشخص می‌کرده است. حال با توجه به $\tan ۲\theta = \frac{-۳}{۴}$ و به کمک ماشین‌حساب‌های مهندسی می‌توانیم اندازهٔ زاویهٔ θ را به‌دست آوریم که در اینجا تقریباً برابر ۷۱/۶ درجه می‌باشد. پس برای رسم بیضی داده شده در مثال کافی است محورهای مختصات را به اندازهٔ ۷۱/۶ درجه حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم و سپس در دستگاه جدید بیضی $\frac{x'^{۲}}{۹} + \frac{y'^{۲}}{۴} = ۱$ را رسم کنیم :



شکل ۳



تمرین

۱. اگر محورهای مختصات را به اندازهٔ زاویهٔ θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم، هر یک از معادلات زیر را نسبت به دستگاه جدید بازنویسی کنید.

الف) $x^2+y^2=49 \;,\; \theta=\frac{\pi}{4} \;,$

ب) $x^2+y^2=25 \;,\; \theta=\frac{\pi}{3} \;,$

ج) $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2-10=0 \;,\; \theta=\frac{\pi}{6} \;,$

د) $x^2+8xy+y^2-75=0 \;,\; \theta=\frac{\pi}{4} \;.$

۲. با استفاده از دوران محورهای مختصات به اندازه‌ای مناسب، نوع هر یک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و آنها را رسم کنید.

الف) $x^2-4xy+y^2-12=0 \;,$

ب) $x^2+xy+y^2-6=0 \;,$

ج) $8x^2-4xy+5y^2-36=0 \;,$

د) $5x^2-4xy+8y^2-36=0 \;,$

هـ) $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2-16\sqrt{3}x-16y=0$,

و) $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+8\sqrt{3}x-8y=0$.

۳. فرض کنید معادلهٔ $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ داده شده است. محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه‌ای دلخواه دوران می‌دهیم. اگر معادلهٔ بالا نسبت به دستگاهِ جدیدِ دوران یافته به‌صورت $Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0$ بازنویسی شود، ثابت کنید $B^2-4AC=b^2-4ac$.

از این‌جا نتیجه‌گیری کنید مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ

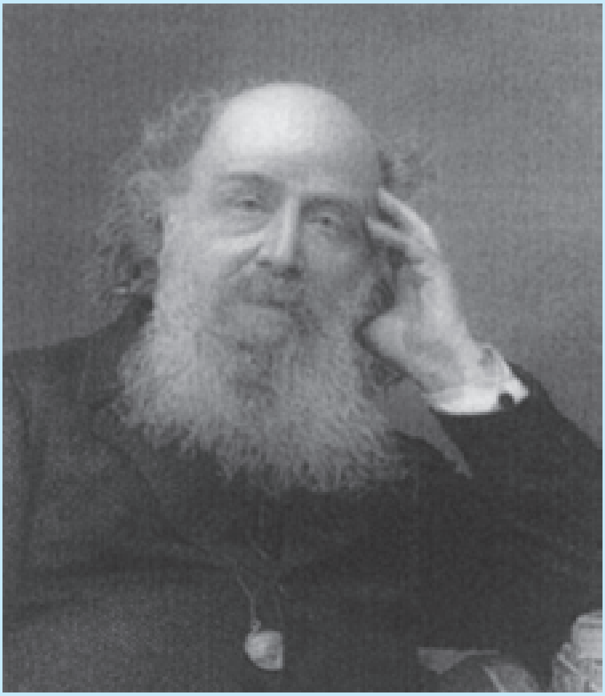
$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

صدق می‌کنند به‌صورت زیر رده‌بندی می‌شوند :

نوع مکان هندسی	b^2-4ac
تهی، نقطه، دایره، بیضی	منفی
تهی، یک خط، دو خط موازی، کل صفحه، سهمی	صفر
دو خط متقاطع، هذلولی	مثبت

داستان ماتریس

می‌گویند مفهوم **ماتریس** قبل از این‌که ابداع شود تعمیق و گسترش یافته بود، چه مقدم بر آن مفهوم **دترمینان** در مطالعهٔ دستگاه‌های معادلات خطی در اوایل قرن هیجدهم میلادی مطرح شده بود. ولی واژهٔ ماتریس اوّلین بار در سال ۱۸۵۰ میلادی به‌وسیلهٔ **جیمز جوزف سیلوستر**، ریاضیدان انگلیسی، در واقع برای تمیزدادن ماتریس‌ها از دترمینان‌ها به‌کار گرفته شد.



سیلوستر

۴

ماتریس و دترمینان

۱.۴ ماتریس‌ها

ماتریس را به عنوان آرایه‌ای مستطیلی از اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

اعداد داخل آرایه را **درآیه‌های ماتریس** می‌نامیم. زیرنویس‌های i و j درآیهٔ a_{ij} ، برای مشخص‌کردن سطر و ستونی که a_{ij} در آنها قرار دارد، به‌کار می‌روند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۱۳ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس است. درآیهٔ $a_{۲۳}$ در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد و در این مثال، این درآیه **۲** می‌باشد. در این مثال درآیهٔ $a_{۳۳}$ برابر صفر است.

ماتریسی را که دارای m سطر و n ستون باشد، ماتریس $m \times n$ (بخوانید ماتریس m در n)[۱] می‌نامیم. وقتی که $m = n$ ، ماتریس را **ماتریس مربعی** از مرتبهٔ n می‌نامیم. برای مثال $\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$

۱ــ هر ماتریس ۱×۱ مانند $[a_{۱۱}]$ را با عدد حقیقی $a_{۱۱}$ یکی می‌گیریم.

یک ماتریس ۲×۳ است، حال آنکه $\begin{bmatrix} -۱ & ۷ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳×۲ می‌باشد و $\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲. در جدول‌بندی داده‌ها، وقتی که تعداد آنها زیاد است، موضوع استفاده از ماتریس‌ها به‌طور طبیعی پیش می‌آید. برای مثال فاصلهٔ بین شهرهای اصفهان، تهران و شیراز را می‌توان به‌صورت یک ماتریس جدول‌بندی کرد :

$$\begin{array}{c} \\ \text{اصفهان} \\ \text{تهران} \\ \text{شیراز} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{اصفهان} & \text{تهران} & \text{شیراز} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۴۱۴ & ۴۸۱ \\ ۴۱۴ & ۰ & ۸۹۵ \\ ۴۸۱ & ۸۹۵ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}.$$

اغلب نماد

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

را به‌صورت $[a_{ij}]_{m\times n}$ خلاصه می‌کنیم. زیرنویس $m\times n$ اندازهٔ ماتریس را نشان می‌دهد و کل نماد به‌معنی یک ماتریس $m\times n$ است که درآیهٔ سطر iام و ستون jام آن a_{ij} است. برای مثال، با این نماد، $[ij]_{۲\times۳}$ یعنی ماتریس ۲×۳ ای که درآیهٔ سطر iام و ستون jام آن برابر ij می‌باشد :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}.$$

همچنین $[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} j-i & \text{اگر } i<j: \\ j+i & \text{اگر } i\geq j: \end{cases}$ یعنی ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۳ که به‌صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}.$$

تذکر. از این پس، وقتی در این کتاب می‌نویسیم A یک ماتریس $m\times n$ است (یا ماتریس

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$)، m و n را حداکثر ۳ فرض می‌کنیم.

فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد. درآیه‌های a_{11}، a_{22}، ...، a_{nn} را درآیه‌های **قطر اصلی** ماتریس A می‌نامیم. اگر درآیه‌های خارج از قطر اصلی ماتریس A برابر صفر باشند، A را **ماتریس قطری** از مرتبهٔ n می‌نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری مرتبهٔ ۳ است. اگر درآیه‌های بالای قطر اصلی ماتریس A برابر صفر باشند، A را **ماتریس پایین مثلثی** از مرتبهٔ n می‌نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$ یک ماتریس پایین‌مثلثی از مرتبهٔ ۳ است. اگر درآیه‌های پایینی قطر اصلی ماتریس A برابر صفر باشند، A را **ماتریس بالامثلثی** از مرتبهٔ n می‌نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$ یک ماتریس بالامثلثی از مرتبهٔ ۳ است.

تعریف. دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ **مساوی**اند اگر دارای مرتبهٔ یکسان باشند، یعنی $m=p$ و $n=q$، و به‌ازای هر i و هر j، $a_{ij}=b_{ij}$. اگر A و B مساوی باشند، می‌نویسیم $A=B$.

جمع ماتریس‌ها و ضرب اعداد حقیقی در آنها

در بالا ماتریس‌ها را معرفی کردیم و این‌که چه موقع دو ماتریس مساوی‌اند را تعریف کردیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم جمع دو ماتریس چه مواقعی امکان دارد و در این صورت حاصلجمع دو ماتریس چه خواهد بود. همچنین ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس را تعریف خواهیم کرد.

تعریف. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس هم‌مرتبه باشند. در این صورت **مجموع** آنها، یعنی $A+B$، یک ماتریس $m\times n$ است: $A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$، و به‌صورت

زیر تعریف می‌شود

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

همچنین برای عدد حقیقی دادهٔ r، **حاصلضرب r در ماتریس A**، یعنی rA، نیز یک ماتریس $m \times n$ است : $rA = [d_{ij}]_{m\times n}$، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$d_{ij} = ra_{ij}.$$

برای مثال دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$ را نمی‌توانیم جمع کنیم، زیرا هم مرتبه نمی‌باشند ولیکن مجموع دو ماتریس $C = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۵ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس زیر است :

$$C + D = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۱۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

همچنین ضرب عدد حقیقی ۲ در ماتریس A نیز ماتریس زیر است :

$$۲A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۲ \end{bmatrix}.$$

این اعمال را با یک مثال ساده تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. دو دبیرستان a و b را در نظر می‌گیریم. تعداد دانش‌آموزانی که در دبیرستان a مجاز به گرفتن درس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» و «ریاضیات گسسته» می‌باشند ۱۰۰ نفر و در دبیرستان b برابر ۵۰ نفر می‌باشند. تعداد دانش‌آموزان این دو دبیرستان که در دروس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» و «ریاضیات گسسته» قبول یا مردود شده‌اند در ماتریس‌های زیر جدول‌بندی شده‌اند (ماتریس A مربوط به دبیرستان a و ماتریس B مربوط به دبیرستان b است) :

$$A = \begin{array}{r c} & \text{قبول} \quad \text{مردود} \\ \text{هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی} & \begin{bmatrix} ۹۰ & ۱۰ \\ ۸۹ & ۱۱ \end{bmatrix} \\ \text{ریاضیات گسسته} & \end{array} \qquad B = \begin{array}{r c} & \text{قبول} \quad \text{مردود} \\ \text{هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی} & \begin{bmatrix} ۴۲ & ۸ \\ ۴۰ & ۱۰ \end{bmatrix}. \\ \text{ریاضیات گسسته} & \end{array}$$

لذا برای مثال، ۹۰ دانش‌آموز از دبیرستان a در درس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» قبول شده‌اند، حال آنکه در دبیرستان b فقط ۴۲ نفر در این درس قبول شده‌اند.

مجموع دو ماتریس A و B، یعنی $A+B=\begin{bmatrix}۱۸ & ۱۳۲\\ ۲۱ & ۱۲۹\end{bmatrix}$ ، تعداد کل دانش‌آموزان این دو دبیرستان را که در این دو درس قبول یا مردود شده‌اند نشان می‌دهد. بنابراین ۱۳۲ دانش‌آموز از این دو دبیرستان در درس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» قبول و ۱۸ نفر در این درس مردود شده‌اند. همچنین ۱۲۹ دانش‌آموز از این دو دبیرستان در درس «ریاضیات گسسته» قبول و ۲۱ نفر آنها در این درس مردود شده‌اند. ماتریس $\begin{bmatrix}۱۲ & ۸۸\\ ۱۴ & ۸۶\end{bmatrix}=\frac{۲}{۳}(A+B)=\frac{۱۰۰}{۱۵۰}(A+B)$ نیز درصد قبولی یا مردودی در این دو دبیرستان را نشان می‌دهد. مثلاً ۸۸٪ دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» قبول شده‌اند (و ۱۲٪ مردود) و ۸۶٪ دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس «ریاضیات گسسته» قبول شده‌اند (و ۱۴٪ مردود).

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس $m\times n$ باشد. **قرینهٔ** A را ماتریسی $m\times n$ تعریف می‌کنیم که از حاصلضرب عدد ۱− در ماتریس A به وجود می‌آید. این ماتریس را با $-A$ نمایش می‌دهیم، یعنی $-A=(-۱)A$.

توجه می‌کنیم که درآیه‌های قرینهٔ ماتریس A، قرینهٔ درآیه‌های ماتریس A هستند و لذا بنابر تعریف جمع دو ماتریس، مجموع A و $-A$ ماتریس $m\times n$ است که تمام درآیه‌هایش برابر صفر است. چنین ماتریسی را **ماتریس صفر** می‌نامیم و آن را با O (اگر لازم به تأکید باشد با $O_{m\times n}$) نمایش می‌دهیم.

تعریف. اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، **تفاضل** B از A را با $A-B$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A-B=A+(-B).$$

جمع ماتریس‌ها و ضرب آنها در اعداد حقیقی از همان قوانین معمولی حساب تبعیت می‌کنند. در قضیهٔ صفحهٔ بعد این ویژگی‌های ابتدایی را به‌طور رسمی بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ و $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ سه ماتریس هم‌مرتبه باشند و r و s دو عدد حقیقی. در این صورت

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)،

۳) $A+O=O+A=A$ ،

۴) $A+(-A)=(-A)+A=O$ ،

۵) $r(A+B)=rA+rB$ ،

۶) $(r+s)A=rA+sA$ ،

۷) $(rs)A=r(sA)$ ،

۸) $۱A=A$.

اثبات. اثبات ویژگی‌های بالا همه سر راست است و به کمک تعریف به‌سادگی انجام می‌شود. آنها را به‌عنوان تمرین رها می‌کنیم. ■

ضرب ماتریس‌ها

نحوه ضرب‌کردن ماتریس‌ها، که اکنون شرح خواهیم داد، در نگاه اوّل چندان آشنا نیست و بررسی منشأ این تعریف از برنامهٔ درسی این کتاب خارج است.

تعریف. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ دو ماتریس باشند (توجه می‌کنیم که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B است). در این صورت **حاصلضرب** A در B (با همین ترتیب)، یعنی AB، یک ماتریس $m\times p$ است : $AB=[c_{ij}]_{m\times p}$ ، و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\,.$$

توجه می‌کنیم که بنابر تعریف بالا برای این که درآیهٔ سطر iام و ستون jام ماتریس AB، یعنی c_{ij} ، را پیدا کنیم باید حاصلضرب داخلی سطر iام از ماتریس A را (به‌عنوان یک بردار) در ستون jام

از ماتریس B (به‌عنوان برداری دیگر) محاسبه کنیم. برای مثال حاصلضرب

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix},$$

بدون معنی است ولیکن

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ \\ ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵۸ & ۶۴ \\ ۱۳۹ & ۱۵۴ \end{bmatrix},$$

زیرا

$$(۱,۲,۳).(۷,۹,۱۱)=(۱\times ۷)+(۲\times ۹)+(۳\times ۱۱)=۵۸\,,$$

$$(۱,۲,۳).(۸,۱۰,۱۲)=(۱\times ۸)+(۲\times ۱۰)+(۳\times ۱۲)=۶۴\,,$$

$$(۴,۵,۶).(۷,۹,۱۱)=(۴\times ۷)+(۵\times ۹)+(۶\times ۱۱)=۱۳۹\,,$$

$$(۴,۵,۶).(۸,۱۰,۱۲)=(۴\times ۸)+(۵\times ۱۰)+(۶\times ۱۲)=۱۵۴\,.$$

تذکر. اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد، آنگاه منظور از $A^۲$ یعنی AA، $A^۳$ یعنی $A^۲A$ و الی آخر.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه ضرب ماتریس‌ها ممکن است در یک مبحث زیست‌شناسی پیش آید.

مثال ۲. در بخشی از یک جنگل، شیر و گرگ‌هایی زندگی می‌کنند که از خرگوش و آهوهای آن جنگل تغذیه می‌کنند. همچنین این خرگوش و آهوها از کلم، کاهو و علف موجود در آن جنگل تغذیه می‌کنند. ماتریس زیر مقدار کلم، کاهو و علفی را که هر یک از خرگوش و آهوها به‌طور متوسط در روز می‌خورند بر حسب گرم مشخص می‌کند

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{کلم} & \text{کاهو} & \text{علف} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{خرگوش} \\ \text{آهو} \end{array} & \begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۳۵۰ & ۱۵۰ \\ ۳۰۰ & ۱۵۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix} \end{array}.$$

پس یک آهو مقدار ۱۵۰ گرم کاهو را در یک روز مصرف می‌کند. ماتریس دیگری تعداد

خرگوش و آهوهایی را که شیر یا گرگ‌ها به‌طور متوسط در یک روز می‌خورند، مشخص می‌نماید

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{خرگوش} & \text{آهو} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{شیر} \\ \text{گرگ} \end{array} & \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \end{array}.$$

لذا یک گرگ به طور متوسط، چهار خرگوش و دو آهو را در یک روز می‌خورد. می‌خواهیم تعیین کنیم هر شیر و گرگ چند گرم کلم، کاهو و علف را به‌طور غیرمستقیم در یک روز مصرف می‌کند. برای مثال بررسی می‌کنیم که یک شیر، چند گرم کلم را به‌طور غیرمستقیم مصرف می‌کند. اولاً، یک شیر، سه خرگوش را می‌خورد و هر خرگوش، ۲۰۰ گرم کلم را می‌خورد. لذا، با خوردن خرگوش‌ها، یک شیر به‌طور غیرمستقیم ۲۰۰×۳ گرم کلم را مصرف می‌کند. همچنین یک شیر، یک آهو را می‌خورد و آهو ۳۰۰ گرم کلم را مصرف کرده است. در این صورت، یک شیر به‌طورغیرمستقیم ۳۰۰×۱ گرم کلم را مصرف می‌کند. پس روی هم رفته، یک شیر، ۳۰۰×۱+۲۰۰×۳ گرم کلم را به‌طورغیرمستقیم مصرف می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که این عدد همان درآیهٔ سطر اوّل و ستون اوّل از ماتریس BA است. همین‌طور، درآیه سطر اوّل و ستون دوم آن مقداری از کاهو برحسب گرم است که یک شیر به طور غیرمستقیم می‌خورد، و به همین ترتیب حاصلضرب BA را حساب می‌کنیم

$$BA = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۳۵۰ & ۱۵۰ \\ ۳۰۰ & ۱۵۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} ۹۰۰ & ۱۲۰۰ & ۶۵۰ \\ ۱۴۰۰ & ۱۷۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix}.$$

از اینجا اطلاعات مطلوب را می‌توانیم بخوانیم. برای مثال، هر گرگ به‌طور غیرمستقیم ۱۰۰۰ گرم از علف را مصرف می‌کند.

تذکر. فرض کنیم A و B دو ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ باشند که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

در این صورت

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

پس $AB \neq BA$ و این نشان می‌دهد که حاصلضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد (به این دلیل در تعریف حاصلضرب دو ماتریس A و B نوشتیم حاصلضرب A در B (با همین ترتیب) ولیکن برای مجموع A و B چنین چیزی ننوشتیم). حتی

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهد که حاصلضرب دو ماتریس غیرصفر، ممکن است صفر شود!

در زیر چند ویژگی ابتدایی مربوط به حاصلضرب ماتریس‌ها را بیان می‌کنیم. ویژگی اوّل برقراری خاصیت شرکت‌پذیری برای ضرب ماتریس‌ها است.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ، $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ و $C=\left[c_{ij}\right]_{p\times q}$ سه ماتریس باشند. در این صورت $A(BC)=(AB)C$.

اثبات. ماتریس BC یک ماتریس $n\times q$ است و لذا $A(BC)$ ماتریس $m\times q$ خواهد بود. از طرفی AB ماتریس $m\times p$ است و درنتیجه $(AB)C$ نیز یک ماتریس $m\times q$ خواهد بود. پس $A(BC)$ و $(AB)C$ هم‌مرتبه هستند. اکنون قرار می‌دهیم $BC=\left[d_{ij}\right]_{n\times q}$ ، $A(BC)=\left[e_{ij}\right]_{m\times q}$ ، $AB=\left[f_{ij}\right]_{m\times p}$ و $(AB)C=\left[g_{ij}\right]_{m\times q}$ و ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j، $e_{ij}=g_{ij}$:

$$\begin{aligned}
e_{ij} &= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}d_{kj} \\
&= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}\Big(\sum_{t=۱}^{p} b_{kt}c_{tj}\Big) \\
&= \sum_{k=۱}^{n}\sum_{t=۱}^{p} a_{ik}(b_{kt}c_{tj}) \\
&= \sum_{t=۱}^{p}\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}(b_{kt}c_{tj}) \\
&= \sum_{t=۱}^{p}\sum_{k=۱}^{n} (a_{ik}b_{kt})c_{tj} \\
&= \sum_{t=۱}^{p}\Big(\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kt}\Big)c_{tj}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{t=1}^{p} f_{it}c_{tj}$$

$$= g_{ij}\,.$$

درنتیجه $A(BC) = (AB)C$. ■

ویژگی دیگر حاکی از توزیع‌پذیری ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع آنها است.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ، $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ و $C = \left[c_{ij}\right]_{n\times p}$ سه ماتریس باشند. در این صورت $A(B+C) = AB + AC$.

اثبات. ماتریس $B+C$ یک ماتریس $n\times p$ است و لذا $A(B+C)$ ماتریس $m\times p$ خواهد بود. از طرفی AB و AC هر دو ماتریس‌های $m\times p$ هستند و لذا $AB+AC$ نیز یک ماتریس $m\times p$ خواهد بود. پس $A(B+C)$ و $AB+AC$ هر دو ماتریس‌های $m\times p$ هستند. اکنون قرار می‌دهیم $B+C = \left[d_{ij}\right]_{n\times p}$ ، $A(B+C) = \left[e_{ij}\right]_{m\times p}$ ، $AB = \left[f_{ij}\right]_{m\times p}$ و $AC = \left[g_{ij}\right]_{m\times p}$ و $AB+AC = \left[h_{ij}\right]_{m\times p}$ و ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j، $e_{ij} = h_{ij}$:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$

$$= f_{ij} + g_{ij}$$

$$= h_{ij}\,.$$

درنتیجه $A(B+C) = AB + AC$. ■

تذکر. برای ماتریس‌های A، B و C داریم $(A+B)C = AC + BC$ ، مشروط بر آنکه کلیّهٔ اعمال جمع و ضرب این دستورها امکان‌پذیر باشند. این مطلب را به‌صورت قضیه‌ای دقیق، مانند

قضیهٔ قبل، بیان کرده و آن‌را به‌عنوان تمرین ثابت کنید.

ویژگی (۳) از قضیهٔ ۱ حاکی از آن است که ماتریس صفر این خاصیت را دارد که با هر ماتریسی جمع شود، خود آن ماتریس را به ما می‌دهد، همانگونه که در میان اعداد وقتی عدد صفر با هر عددی جمع شود، حاصل همان عدد است. اکنون با توجه به این‌که عدد یک وقتی در عددی ضرب شود، خود آن عدد را به ما می‌دهد، سؤال طبیعی پیش می‌آید و آن این که «آیا در میان ماتریس‌ها، ماتریسی وجود دارد که در هر ماتریسی ضرب شود، خود آن ماتریس را بدهد یا خیر؟». جواب به این سؤال مثبت است. در زیر این ماتریس را تعریف می‌کنیم و سپس «خاصیت ویژهٔ» آن را ثابت می‌کنیم.

تعریف. **ماتریس همانی** از مرتبهٔ n که آن‌را با I (اگر لازم به تأکید باشد با I_n) نشان می‌دهیم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I=\left[\delta_{ij}\right]_{n\times n} \text{ که در آن } \delta_{ij}=\begin{cases}۱ & \text{اگر } i=j:\\ ۰ & \text{اگر } i\neq j:\end{cases}.$$

توجه می‌کنیم که در واقع ماتریس همانی مرتبهٔ n، یعنی I_n، ماتریسی قطری است که تمام درآیه‌های روی قطر اصلی آن برابر یک می‌باشد، مثلاً $I_۳=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشد. در این صورت $AI_n=I_nA=A$.

اثبات. واضح است که AI_n و A هر دو $n\times n$ و لذا هم‌مرتبه هستند. قرار می‌دهیم $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ و $AI_n=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ و ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j، $b_{ij}=a_{ij}$:

$$\begin{aligned}b_{ij}&=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}\delta_{kj}\\&=a_{ij}\delta_{jj}+\sum_{\substack{k=۱\\k\neq j}}^{n}a_{ik}\delta_{kj}\\&=a_{ij}(۱)+\sum_{\substack{k=۱\\k\neq j}}^{n}a_{ik}(۰)\\&=a_{ij}.\end{aligned}$$

درنتیجه $AI_n = A$. به همین شکل می‌توانیم ثابت کنیم $I_nA = A$. ■

تذکر. ویژگی (۴) از قضیهٔ ۱ حاکی از آن است که هر ماتریس $m\times n$ مانند A دارای قرینه است، یعنی ماتریسی $(-A)$ موجود است که مجموع آن با A برابر O می‌شود، همانند اعداد، که برای هر عدد a قرینه‌ای موجود است، یعنی عددی $(-a)$ که مجموع آن با a برابر صفر می‌گردد. اکنون با توجه به این که هر عدد مخالف صفر a دارای وارون است، یعنی این که عددی $(\frac{1}{a})$ موجود است که حاصلضرب آن در a برابر یک می‌شود، سؤالی طبیعی پیش می‌آید و آن این که «آیا برای هر ماتریس غیرصفر A، ماتریسی موجود است که وقتی در آن ضرب شود، حاصل برابر I شود؟». معادلاً «آیا هر ماتریس غیرصفر A، وارون دارد؟». جواب به این سؤال منفی است، زیرا مثلاً اگر برای $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریسی مانند B موجود باشد که $AB=I$ آنگاه $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}B\right)=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}I$. بنابر ویژگی‌های ذکرشده در بالا $\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right)B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یا $O=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ که تناقض است. در بخش ۱ از فصل ۵ در مورد این موضوع بیشتر بحث خواهیم کرد.

ترانهادهٔ یک ماتریس

تعریف. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یک ماتریس $m\times n$ باشد. در این صورت **ترانهادهٔ** A که آن را با A^t نمایش می‌دهیم یک ماتریس $n\times m$ است : $A^t=[b_{ij}]_{n\times m}$ ، و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$b_{ij}=a_{ji}\,.$$

توجه می‌کنیم که در واقع ترانهادهٔ یک ماتریس مانند A، ماتریسی است که از عوض کردن جای سطرها و ستون‌های ماتریس A به‌دست می‌آید. برای مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ آنگاه $A^t=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$. در زیر ویژگی‌های ابتدایی مربوط به ارتباط یک ماتریس و ترانهادهٔ آن را می‌آوریم.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ دو ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشند و r یک عدد حقیقی. در این صورت

۱) $(A+B)^t=A^t+B^t$،

۲) $(rA)^t=rA^t$،

۳) $(AB)^t=B^tA^t$،

۴) $(A^t)^t=A$.

اثبات. اثبات ویژگی‌های بالا همه سر راست است و به‌کمک تعریف به‌سادگی انجام می‌شود. فقط ویژگی (۳) را ثابت می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین رها می‌کنیم.

واضح است که $(AB)^t$ و B^tA^t هر دو ماتریس‌های $n\times n$ و لذا هم‌مرتبه هستند. اکنون قرار می‌دهیم $AB=[c_{ij}]_{n\times n}$، $(AB)^t=[d_{ij}]_{n\times n}$، $A^t=[e_{ij}]_{n\times n}$، $B^t=[f_{ij}]_{n\times n}$ و $B^tA^t=[g_{ij}]_{n\times n}$ و ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j، $d_{ij}=g_{ij}$:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= c_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{ik}e_{kj} \\ &= g_{ij}\,. \end{aligned}$$

درنتیجه $(AB)^t=B^tA^t$. ■

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد. A را **متقارن** می‌نامیم هرگاه $A^t=A$ و آن‌را **پاد متقارن** می‌نامیم هرگاه $A^t=-A$.

برای مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن است، زیرا $A^t=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}=A$، و $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ پاد متقارن زیرا $B^t=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-B$، حال آنکه $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ نه متقارن است

و نه پاد متقارن.

تذکر. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد. با توجه به ویژگی‌های ذکرشده در قضیهٔ بالا داریم

$$\left[\frac{1}{2}(A+A^t)\right]^t=\frac{1}{2}(A+A^t)^t=\frac{1}{2}(A^t+(A^t)^t)=\frac{1}{2}(A^t+A)=\frac{1}{2}(A+A^t),$$

$$\left[\frac{1}{2}(A-A^t)\right]^t=\frac{1}{2}(A-A^t)^t=\frac{1}{2}(A^t-(A^t)^t)=\frac{1}{2}(A^t-A)=-\frac{1}{2}(A-A^t).$$

درنتیجه $\frac{1}{2}(A+A^t)$ ماتریس متقارن و $\frac{1}{2}(A-A^t)$ ماتریس پاد متقارن است. اکنون باتوجه به

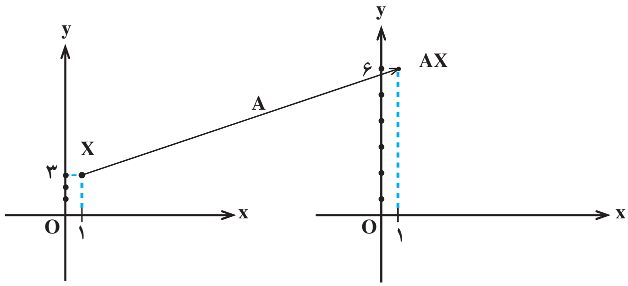
$$A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)$$

نتیجه می‌گیریم که هر ماتریس مربعی را می‌توان به‌صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

ماتریس‌ها و تبدیلات هندسی در صفحه

در اینجا نقاط $\mathbb{R}^2$ را به جای (x,y) با ماتریس $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ که یک ماتریس 2×1 است نمایش می‌دهیم. گیریم A یک ماتریس 2×2 باشد. برای هر نقطهٔ $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ از $\mathbb{R}^2$، $AX=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×1 است و لذا نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$ را نمایش می‌دهد. در واقع این نقطه از ضرب ماتریس A در X به‌وجود می‌آید. پس می‌توانیم بگوییم که یک ماتریس 2×2 با ضرب در نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$، آن را به نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$ می‌نگارد و لذا ماتریس‌های 2×2 را می‌توانیم به‌عنوان **تبدیلات هندسی** در صفحه در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳. ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. این ماتریس نقطهٔ $X=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ از $\mathbb{R}^2$ را به نقطهٔ $AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$ می‌نگارد (به شکل ۱ نگاه کنید).

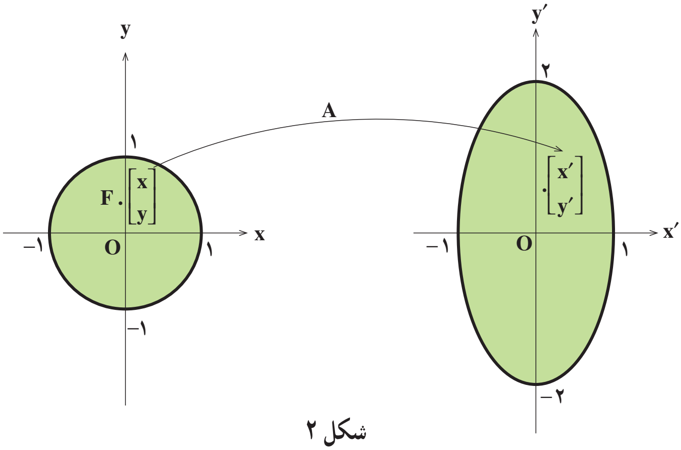


شکل ۱

اکنون فرض کنیم F یک شکل هندسی خاص در صفحه باشد. مثلاً می‌توانیم F را محیط و درون دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در نظر بگیریم : $F=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2\le 1\right\}$.

می‌خواهیم بررسی کنیم A شکل F را به چه شکلی تبدیل خواهد کرد. یعنی اگر A بر تک تک نقاط F اثر کند، نقاط حاصل چه شکلی پدید می‌آورند. گیریم $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in F$ ، لذا $x^2+y^2\le 1$. حال اگر A روی $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ اثر کند، نقطهٔ حاصل، یعنی $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ ، برابر است با $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\2y\end{bmatrix}$

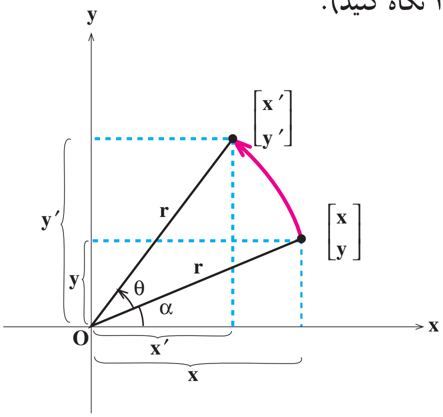
و لذا $x=x'$ و $y=\frac{1}{2}y'$. درنتیجه $x'^2+(\frac{1}{2}y')^2\le 1$ ، یا $x'^2+\frac{y'^2}{4}\le 1$. پس نقاط حاصل از اثر A روی نقاط F، یعنی $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ ها، در $x'^2+\frac{y'^2}{4}\le 1$ صدق می‌کنند و لذا شکل حاصل از اثر A روی F، محیط و درون یک بیضی است به مرکز مبدأ مختصات، قطر بزرگ ۴ و قطر کوچک ۲ (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

در سال دوم دیده‌ایم که ماتریس‌های $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ در اثر روی نقاط صفحه به‌ترتیب آنها را نسبت به محور xها، محور yها، خط y=x، خط $y=-x$ و مبدأ مختصات قرینه می‌کنند. در مثال زیر ماتریسی را پیدا می‌کنیم که در اثر روی نقاط صفحه آنها را به اندازهٔ زاویهٔ ثابت θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران می‌دهند.

مثال ۴. فرض کنیم نقطهٔ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به اندازهٔ زاویهٔ ثابت θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم. می‌خواهیم مختصات نقطهٔ حاصل از این دوران را پیدا کنیم. گیریم $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ نقطهٔ حاصل از دوران باشد. واضح است که فاصلهٔ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ از مبدأ مختصات برابر می‌باشد که آن را r فرض می‌کنیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

چون $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$ و $\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$، لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta)x + (-\sin\theta)y \\ y' = (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{cases}$$

لذا $\begin{bmatrix}(\cos\theta)x+(-\sin\theta)y\\(\sin\theta)x+(\cos\theta)y\end{bmatrix}$ دوران یافتهٔ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به‌اندازهٔ θ می‌باشد. حال توجه می‌کنیم که

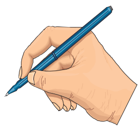
$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\cos\theta)x+(-\sin\theta)y\\(\sin\theta)x+(\cos\theta)y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

درنتیجه ماتریس

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

که آن را با R_θ نمایش می‌دهیم، در اثر روی نقاط $\mathbb{R}^۲$ ، آنها را به اندازهٔ θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دوران می‌دهد.



تمرین

۱. ماتریس‌های زیر را به‌صورت آرایهٔ مستطیلی بنویسید.

الف) $[i+j]_{۲\times۲}$ ، ب) $[i]_{۳\times۳}$ ،

ج) $[i^۲+j^۲]_{۲\times۳}$ ، د) $[۲i+۳]_{۳\times۳}$.

۲. عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱ & ۴ & ۸\\ ۵ & -۳ & ۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۶\\ ۵ & ۶ & ۷\end{bmatrix}$ ،

ب) $\begin{bmatrix}۳ & ۹\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۶ & ۰\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix}۲ & -۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ ،

ج) $\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶\\ ۴ & ۲ & ۷\\ ۰ & ۳ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۹ & ۰ & ۳\\ ۰ & -۱ & ۳\\ ۴ & ۹ & ۰\end{bmatrix}$.

۳. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\\ ۵ & ۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۳ & -۲\\ ۱ & -۵\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$. یک ماتریس ۲×۳ مانند C را طوری

پیدا کنید که $A + B - C = O_{۳\times۲}$.

۴. قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۵. حاصلضربهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۲ \\ ۶ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ،

ب) $\begin{bmatrix} -۴ & ۳ \\ ۵ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$.

۶. اگر $A = \begin{bmatrix} -۵ & -۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ & -۱ \\ -۴ & -۳ & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ & -۱ \\ -۵ & -۳ & ۱ \\ ۵ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -۴ & -۲ & ۲ \\ ۴ & ۳ & -۱ \\ -۳ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

نشان دهید $AB = BA = O$ ، $AC = A$ و $CA = C$.

۷. فرض کنید a، b، c و d چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix} \end{array}.$$

بنابراین، یک واحد از a، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. آیا می‌توانید بدون محاسبهٔ مستقیم $A^۲$ را پیدا کنید؟

۸. کارخانه‌ای سه محصول a، b و c را به دو بازار m و n می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} ۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

داده شده است. ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}۲\\۴\\۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۱/۸\\۳/۵\\۲/۵\end{bmatrix}$ به‌ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام‌شده هر واحد از a، b و c را نشان می‌دهند. درآیه‌های هر یک از ماتریس‌های AB، AC و $AB-AC$ را تعبیر کنید.

۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}$ ، نشان دهید $A^{۲}-۴A-۵I_{۳}=O$.

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ ، مطلوب است محاسبهٔ $A^{۱۰}$.

۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $A^{n}=\begin{bmatrix}n+۱&-n\\n&-n+۱\end{bmatrix}$.

۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۳&۱&۰\\۴&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$ ، به کمک محاسبهٔ توان‌های مختلف A، نشان دهید عدد طبیعی n موجود است که $A^{n}=O$.

۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱\\۲&۱\end{bmatrix}$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $A^{n}=(۲^{n}-۱)A-۲(۲^{n-۱}-۱)I_{۲}$.

۱۴. ویژگی‌های ۱، ۲ و ۴ از قضیهٔ ۵ را ثابت کنید.

۱۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ یا ۳ هستند و هر دو متقارن یا هر دو پاد متقارن، ثابت کنید AB متقارن است که $AB=BA$.

۱۶. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۳&۱&۲\\۲&۱&۴\end{bmatrix}$ را به‌صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید.

۱۷. فرض کنید F محیط و درون دایرهٔ $(x-۱)^{۲}+y^{۲}=۴$ باشد:

$$F=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{۲}\middle|(x-۱)^{۲}+y^{۲}\le ۴\right\}.$$

ماتریس $A=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۲\end{bmatrix}$ در اثر روی F، F را به چه شکل هندسی تبدیل می‌کند؟

۱۸. برای زاویهٔ ثابت داده شدهٔ θ و عدد طبیعی n، ثابت کنید $R_{\theta}^{n}=R_{n\theta}$ ، یعنی

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}.$$

۱۹. به‌کمک تمرین قبل $\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ ۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}^{۶۰۰}$ را محاسبه کنید.

۲.۴ دترمینان‌ها

در سال دوم دیده‌ایم که می‌توانیم به یک ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک عدد وابسته کنیم که به آن دترمینان ماتریس A می‌گفتند و با $|A|$ یا $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نمایش می‌دادند و به‌صورت

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\,,$$

تعریف می‌شد. اکنون در این بخش می‌خواهیم مفهوم دترمینان را برای ماتریس ۳×۳ تعریف کنیم. در زیر تعاریفی می‌آوریم و به کمک آنها این مفهوم را شرح می‌دهیم.

تعریف. فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ ماتریسی دلخواه باشد. در این‌صورت ij ــ امین **کهاد** ماتریس A را که با M_{ij} نمایش می‌دهیم ماتریسی ۲×۲ تعریف می‌کنیم که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A به‌دست می‌آید.

مثال ۱. برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۶ & ۳ & -۴ \end{bmatrix}$، داریم $M_{۱۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$ و $M_{۳۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$.

تعریف. فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت ij ــ امین **همسازهٔ** ماتریس A را که با A_{ij} نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_{ij}=(-۱)^{i+j}\left|M_{ij}\right|,$$

که در آن $|M_{ij}|$ دترمینان ماتریس ۲×۲ ی M_{ij} است.

مثال ۲. برای ماتریس مثال قبل، داریم :

$$A_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}|M_{۱۳}|=(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۶ & ۳ \end{vmatrix}=-۶,$$

$$A_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}|M_{۳۲}|=(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & ۵ \end{vmatrix}=-۱۰.$$

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت اعداد

۱) $a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۱۲}A_{۱۲}+a_{۱۳}A_{۱۳}$ ،

۲) $a_{۲۱}A_{۲۱}+a_{۲۲}A_{۲۲}+a_{۲۳}A_{۲۳}$ ،

۳) $a_{۳۱}A_{۳۱}+a_{۳۲}A_{۳۲}+a_{۳۳}A_{۳۳}$ ،

۴) $a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۲۱}A_{۲۱}+a_{۳۱}A_{۳۱}$ ،

۵) $a_{۱۲}A_{۱۲}+a_{۲۲}A_{۲۲}+a_{۳۲}A_{۳۲}$ ،

۶) $a_{۱۳}A_{۱۳}+a_{۲۳}A_{۲۳}+a_{۳۳}A_{۳۳}$ ،

همگی با هم مساوی هستند.

اثبات. برابری دو عدد ظاهرشده در ۱ و ۲ را برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$

بررسی می‌کنیم.

$$\text{عدد ظاهر شده در ۱}=a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۱۲}A_{۱۲}+a_{۱۳}A_{۱۳}$$

$$=a_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۲}(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+$$

$$a_{۱۳}(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

$$=a_{۱۱}(a_{۲۲}a_{۳۳}-a_{۲۳}a_{۳۲})-a_{۱۲}(a_{۲۱}a_{۳۳}-a_{۲۳}a_{۳۱})+$$

$$a_{۱۳}(a_{۲۱}a_{۳۲}-a_{۲۲}a_{۳۱})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\
&\quad a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{21}\left[-(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})\right] + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + \\
&\quad a_{23}\left[-(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\right] \\
&= a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\
&\quad a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}
\end{aligned}
$$

$=$ عدد ظاهر شده در ۲.

درستی این که تمامی اعداد ظاهر شده در قضیه با هم برابرند، محاسباتی مشابه محاسبات بالا دارد. ■

تعریف. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ماتریسی دلخواه باشد. **دترمینان** A را که با $|A|$ یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ نمایش می‌دهیم، یکی از ۶ عدد مساویِ معرفی‌شده در قضیهٔ ۱ تعریف می‌کنیم.

تذکر. اگر $|A|$ را از عدد معرفی شده در ۱ محاسبه کنیم، می‌گوییم $|A|$ را با بسط‌دادن نسبت به سطر اوّل حساب کرده‌ایم. اگر مثلاً از عدد معرفی شده در ۶ محاسبه کنیم می‌گوییم $|A|$ را با بسط‌دادن نسبت به ستون سوم حساب کرده‌ایم و الی آخر.

مثال ۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ را درنظر می‌گیریم. $|A|$ را با بسط‌دادن نسبت به‌سطر

دوم پیدا می‌کنیم :

$$|A| = ۴A_{۲۱} + ۲A_{۲۲} + ۳A_{۲۳}$$

$$= ۴(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} + ۳(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$= -۴(۱۶) + ۲(۱۴) - ۳(۱۱) = -۶۹ .$$

اگر $|A|$ را با بسط‌دادن نسبت به ستون سوم محاسبه می‌کردیم نیز، نتیجهٔ بالا به‌دست می‌آمد :

$$|A| = ۲A_{۱۳} + ۳A_{۲۳} + ۴A_{۳۳}$$

$$= ۲(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۳(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۴(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۴ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۲(۱۰) - ۳(۱۱) + ۴(-۱۴) = -۶۹ .$$

مثال ۴. می‌خواهیم $\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۶ & -۲ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$ را محاسبه کنیم. در اینجا به‌خاطر وجود دو صفر در سطر اوّل، به‌صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به سطر اوّل محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۶ & -۲ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰\begin{vmatrix} -۲ & ۶ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} - ۰\begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۱\begin{vmatrix} ۵ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۷ .$$

مثال ۵. می‌خواهیم $\begin{vmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{vmatrix}$ را محاسبه کنیم. در اینجا نیز به‌خاطر وجود دو صفر در ستون اوّل، به‌صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به ستون اوّل محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} d & e \\ ۰ & f \end{vmatrix} - ۰\begin{vmatrix} b & c \\ ۰ & f \end{vmatrix} + ۰\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} = adf .$$

تذکر. از مثال قبل درمی‌یابیم که برای ماتریس‌های ۳×۳ که بالا مثلثی هستند، دترمینان برابر

است با حاصلضرب درآیه‌های روی قطر اصلی آن ماتریس. دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ که پایین مثلثی و یا قطری هستند نیز چنین می‌باشد.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۳}$ دو ماتریس دلخواه باشند. در این‌صورت $|AB|=|A||B|$.

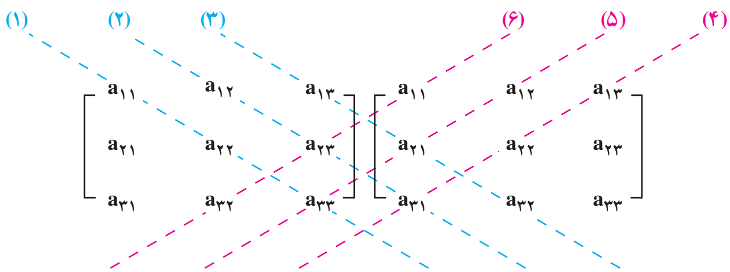
اثبات. بررسی درستی این قضیه به کمک محاسبه، سر راست ولی طاقت‌فرسا می‌باشد که آن‌را به‌صورت یک تمرین رها می‌کنیم. ■

نتیجه. فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ ماتریسی دلخواه باشد و n یک عدد طبیعی. در این‌صورت $\left|A^{n}\right|=|A|^{n}$.

اثبات. بنابر قضیهٔ ۲، $\left|A^{۲}\right|=|AA|=|A||A|=|A|^{۲}$، $\left|A^{۳}\right|=\left|A^{۲}A\right|=\left|A^{۲}\right|\left|A\right|=|A|^{۲}|A|=|A|^{۳}$ و لذا به کمک استقرا به سادگی به‌دست می‌آید $\left|A^{n}\right|=|A|^{n}$. ■

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در زیر روشی را جهت محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ که منسوب به ساروس است ارائه می‌کنیم. ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ را درنظر می‌گیریم. این ماتریس را ۲ بار کنار هم می‌نویسیم:



به خطوط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ و درآیه‌های روی آنها توجه کنید. درآیه‌های روی خط ۱ را درهم ضرب می‌کنیم. این کار را برای درآیه‌های روی خط ۲ و خط ۳ نیز انجام می‌دهیم و سپس سه عدد به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. گیریم حاصلجمع این سه عدد p باشد. اکنون همین عمل را برای خطوط ۴، ۵ و ۶ تکرار می‌کنیم. اگر q عددی باشد که در این مرحله به‌وجود می‌آید، آنگاه به راحتی دیده می‌شود که $p-q$ با ۶ عدد مساویِ معرفی شده در قضیهٔ ۱ برابر است و لذا $|A|=p-q$.
این روش محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ به روش ساروس معروف است. آنچه در بالا گفتیم را در فرمول زیر خلاصه می‌کنیم:

$$|A|=\Big(\overbrace{\underbrace{a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳}}_{\substack{\text{حاصلضرب}\\ \text{درآیه‌های روی}\\ \text{خط ۱}}}+\underbrace{a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱}}_{\substack{\text{حاصلضرب}\\ \text{درآیه‌های روی}\\ \text{خط ۲}}}+\underbrace{a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲}}_{\substack{\text{حاصلضرب}\\ \text{درآیه‌های روی}\\ \text{خط ۳}}}}^{p}\Big)-\Big(\overbrace{\underbrace{a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱}}_{\substack{\text{حاصلضرب}\\ \text{درآیه‌های روی}\\ \text{خط ۴}}}+\underbrace{a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳}}_{\substack{\text{حاصلضرب}\\ \text{درآیه‌های روی}\\ \text{خط ۵}}}+\underbrace{a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲}}_{\substack{\text{حاصلضرب}\\ \text{درآیه‌های روی}\\ \text{خط ۶}}}}^{q}\Big).$$

مثال ۶. ماتریس معرفی شده در مثال ۳ را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم به روش ساروس مقدار دترمینان آن را محاسبه کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$|A|=(۲۴-۱۵+۱۶)-(-۴+۸۰+۱۸)=۲۵-۹۴=-۶۹.$$

ویژگی‌های دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ را بیان خواهیم کرد. کلّیهٔ این ویژگی‌ها را در مورد سطرها مطرح و سپس ثابت می‌کنیم. این ویژگی‌ها در مورد ستون‌ها نیز برقرار است و اثبات در حالت ستونی مشابه اثبات در حالت سطری است.

ویژگی ۱ دترمینان. اگر کلّیهٔ درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی ۳×۳ مانند

$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ را در عدد حقیقی λ ضرب کنیم و یک ماتریس جدید به‌دست آوریم،

آنگاه دترمینان ماتریس جدید، λ برابر دترمینان ماتریس A است.

برای بررسی درستی ویژگی ۱، گیریم B ماتریس ۳×۳ جدید به‌دست آمده از ضرب یک سطر ماتریس A (مثلاً سطر iام آن) در عدد ثابت λ باشد. با بسط دترمینان B نسبت به سطر iام به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}|B| &= \lambda a_{i۱}B_{i۱} + \lambda a_{i۲}B_{i۲} + \lambda a_{i۳}B_{i۳}\\ &= \lambda(a_{i۱}B_{i۱} + a_{i۲}B_{i۲} + a_{i۳}B_{i۳}).\end{aligned}$$

امّا چون سطرهای A و B، بجز احتمالاً سطر iام، یکسان هستند، لذا به‌وضوح $A_{i۱} = B_{i۱}$، $A_{i۲} = B_{i۲}$ و $A_{i۳} = B_{i۳}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}|B| &= \lambda(a_{i۱}A_{i۱} + a_{i۲}A_{i۲} + a_{i۳}A_{i۳})\\ &= \lambda|A|,\end{aligned}$$

که درستی این ویژگی را نتیجه می‌دهد.

مثال ۷. بنابر ویژگی ۱ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۳\\ ۴ & ۸ & ۱۰\\ ۶ & ۱ & ۷\end{vmatrix} = ۲\begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۳\\ ۲ & ۴ & ۵\\ ۶ & ۱ & ۷\end{vmatrix} = ۴\begin{vmatrix} ۱ & ۵ & ۳\\ ۱ & ۴ & ۵\\ ۳ & ۱ & ۷\end{vmatrix}.$$

نتیجه. برای ماتریس ۳×۳ مانند $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}$ و عدد ثابت λ، $|\lambda A| = \lambda^۳|A|$.

اثبات. کافی است سه بار از ویژگی ۱ استفاده کنیم:

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{۱۱} & \lambda a_{۱۲} & \lambda a_{۱۳}\\ \lambda a_{۲۱} & \lambda a_{۲۲} & \lambda a_{۲۳}\\ \lambda a_{۳۱} & \lambda a_{۳۲} & \lambda a_{۳۳}\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ \lambda a_{۲۱} & \lambda a_{۲۲} & \lambda a_{۲۳}\\ \lambda a_{۳۱} & \lambda a_{۳۲} & \lambda a_{۳۳}\end{vmatrix} = \lambda^۲\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ \lambda a_{۳۱} & \lambda a_{۳۲} & \lambda a_{۳۳}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\lambda^{3}|A|. \quad \blacksquare$$

ویژگی ۲ دترمینان. اگر کلّیهٔ درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی ۳×۳ مانند $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ برابر صفر باشند، آنگاه $|A|=0$.

برای بررسی درستی ویژگی ۲، گیریم کلّیهٔ درآیه‌های یک سطر ماتریس A (مثلاً سطر iام آن) برابر صفر باشد. با بسط دترمینان A نسبت به سطر iام به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3} \\ &= 0A_{i1}+0A_{i2}+0A_{i3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

مثال ۸. بنابر ویژگی ۲ می‌توانیم بنویسیم $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 88 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

ویژگی ۳ دترمینان. اگر در ماتریسی ۳×۳ مانند $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ جای دو سطر (دو ستون) را عوض کنیم تا ماتریس جدیدی به‌دست آوریم، آنگاه دترمینان ماتریس جدید، قرینهٔ دترمینان ماتریس A است.

برای بررسی درستی ویژگی ۳، ابتدا فرض می‌کنیم جای دو سطر متوالی مثلاً سطر اوّل و دوم را عوض کرده‌ایم :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

حال دترمینان A را با بسط نسبت به سطر اوّل و دترمینان B را با بسط نسبت به سطر دوم پیدا می کنیم

$$|A| = a_{۱۱}A_{۱۱} + a_{۱۲}A_{۱۲} + a_{۱۳}A_{۱۳} ,$$
$$|B| = a_{۱۱}B_{۲۱} + a_{۱۲}B_{۲۲} + a_{۱۳}B_{۲۳} .$$

ولی برای $j = ۱,۲,۳$ داریم $A_{۱j} = (-۱)^{۱+j}|M_{۱j}|$ که در آن $M_{۱j}$ ماتریس حاصل از حذف سطر اوّل و ستون jام ماتریس A است و $B_{۲j} = (-۱)^{۲+j}|\overline{M_{۲j}}|$ که در آن $\overline{M_{۲j}}$ ماتریس حاصل از حذف سطر دوم و ستون jام ماتریس B است. امّا توجه می‌کنیم که $\overline{M_{۲j}} = M_{۱j}$ و لذا

$$B_{۲j} = (-۱)^{۲+j}|\overline{M_{۲j}}| = -(-۱)^{۱+j}|M_{۱j}| = -A_{۱j} .$$

پس

$$\begin{aligned} |B| &= a_{۱۱}(-A_{۱۱}) + a_{۱۲}(-A_{۱۲}) + a_{۱۳}(-A_{۱۳}) \\ &= -(a_{۱۱}A_{۱۱} + a_{۱۲}A_{۱۲} + a_{۱۳}A_{۱۳}) \\ &= -|A| . \end{aligned}$$

تعویض سطر دوم و سوم نیز وضعیتی مشابه دارد. ولی اگر بخواهیم سطر اوّل و سوم را جابه‌جا کنیم ابتدا سطر اوّل و دوم را جابه‌جا کرده، سپس سطر دوم و سوم و بالاخره سطر اوّل و دوم را جابه‌جا می کنیم که مجدداً مقدار دترمینان در $(-۱)(-۱)(-۱) = -۱$ ضرب می‌شود و لذا در هر حال دترمینان ماتریس جدید، قرینهٔ دترمینان ماتریس A است.

مثال ۹. بنابر ویژگی ۳ داریم $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۷ & ۶ & ۵ \\ ۳ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}$.

ویژگی ۴ دترمینان. اگر ماتریسی ۳×۳ مانند $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ دارای دو سطر (دو ستون) یکسان باشد، آنگاه $|A| = ۰$.

برای بررسی درستی ویژگی ۴، گیریم سطر $i_۱$ام و $i_۲$ام ماتریس A یکسان باشند. اگر جای سطر $i_۱$ام و سطر $i_۲$ام را با هم تعویض کنیم، آنگاه به خاطر یکسان بودن این دو سطر ماتریس حاصل همان A است. پس بنابر ویژگی ۳، $|A| = -|A|$، $۲|A| = ۰$، یا $|A| = ۰$.

مثال ۱۰. بنابر ویژگی ۴ داریم $\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۶ & ۷ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۷ & ۱ & ۷ \\ ۸ & ۳ & ۸ \\ ۹ & ۴ & ۹ \end{vmatrix} = ۰$.

ویژگی ۵ دترمینان. اگر در ماتریسی ۳×۳ مانند $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$، یک سطر (ستون) مضربی از یک سطر (ستون) دیگر باشد، آنگاه $|A|=۰$.

برای بررسی درستی ویژگی ۵، گیریم سطر $i_۱$ام ماتریس A، λ برابر سطر $i_۲$ام آن باشد. بنابر ویژگی ۱ می‌توانیم بنویسیم $|A|=\lambda|B|$ که در آن B ماتریسی است که سطر $i_۱$ام و سطر $i_۲$ام آن یکسان است. امّا ویژگی ۴ نتیجه می‌دهد که $|B|=۰$ و لذا $|A|=\lambda\times۰=۰$.

مثال ۱۱. بنابر ویژگی ۵ داریم $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۶ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۷ & ۱۴ & ۱ \\ ۷ & ۱۴ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$.

ویژگی ۶ دترمینان. فرض کنیم A یک ماتریس ۳×۳ بوده که سطر iام آن به‌صورت

$$b_{i۱}+c_{i۱} \qquad b_{i۲}+c_{i۲} \qquad b_{i۳}+c_{i۳}$$

باشد. اگر B و C را ماتریس‌های ۳×۳ بگیریم که سطرهای آن، بجز احتمالاً سطر iام، با سطرهای A یکی است و سطر iام B

$$b_{i۱} \qquad b_{i۲} \qquad b_{i۳}$$

و سطر iام C

$$c_{i۱} \qquad c_{i۲} \qquad c_{i۳}$$

است، آنگاه

$$|A|=|B|+|C|\,.$$

برای بررسی درستی ویژگی ۶، $|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر iام محاسبه می‌کنیم :

$$|A| = (b_{i۱} + c_{i۱})A_{i۱} + (b_{i۲} + c_{i۲})A_{i۲} + (b_{i۳} + c_{i۳})A_{i۳}$$
$$= (b_{i۱}A_{i۱} + b_{i۲}A_{i۲} + b_{i۳}A_{i۳}) + (c_{i۱}A_{i۱} + c_{i۲}A_{i۲} + c_{i۳}A_{i۳}).$$

امّا چون سطرهای A، B و C، بجز احتمالاً سطر iام، همگی یکسان هستند، لذا به‌وضوح $A_{i۱} = B_{i۱} = C_{i۱}$ ، $A_{i۲} = B_{i۲} = C_{i۲}$ و $A_{i۳} = B_{i۳} = C_{i۳}$ و در نتیجه

$$|A| = (b_{i۱}B_{i۱} + b_{i۲}B_{i۲} + b_{i۳}B_{i۳}) + (c_{i۱}C_{i۱} + c_{i۲}C_{i۲} + c_{i۳}C_{i۳})$$
$$= |B| + |C|.$$

تذکر. مشابه ویژگی ۶ برای ستون‌ها نیز بر قرار است.

مثال ۱۲. بنابر ویژگی ۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} ۸ & ۲ & ۶ \\ ۵ & ۳ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۶ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۸ & ۲ & ۶ \\ ۴+۱ & ۱+۲ & ۲+۱ \\ ۴ & ۲ & ۶ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۸ & ۲ & ۶ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۶ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۸ & ۲ & ۶ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۶ \end{vmatrix},$$

همچنین

$$\begin{vmatrix} ۸ & ۲ & ۶ \\ ۵ & ۳ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۶ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۸ & ۲ & ۵+۱ \\ ۵ & ۳ & ۱+۲ \\ ۴ & ۲ & ۴+۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۸ & ۲ & ۵ \\ ۵ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۴ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۸ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}.$$

ویژگی ۷ دترمینان. اگر در ماتریسی ۳×۳ مانند $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ حاصلضرب درآیه‌های یک سطر (ستون) در یک عدد ثابت را به سطر (ستون) دیگر بیافزاییم تا ماتریس جدید حاصل شود، آنگاه دترمینان ماتریس جدید برابر است با دترمینان ماتریس A.

برای بررسی درستی ویژگی ۷، گیریم سطر $i_۱$ام ماتریس A

$$a_{i_۱۱} \quad a_{i_۱۲} \quad a_{i_۱۳}$$

و سطر $i_۲$ ام آن

$$a_{i_۲۱} \qquad a_{i_۲۲} \qquad a_{i_۲۳}$$

باشد. ماتریس B یک ماتریس ۳×۳ است که تمام سطرهایش، بجز احتمالاً سطر $i_۲$ ام آن، با سطرهای A یکسان است و سطر $i_۲$ ام آن به‌صورت زیر است :

$$a_{i_۲۱}+\lambda a_{i_۱۱} \qquad a_{i_۲۲}+\lambda a_{i_۱۲} \qquad a_{i_۲۳}+\lambda a_{i_۱۳}$$

اگر ثابت کنیم $|B|=|A|$، درواقع ویژگی ۷ را ثابت کرده‌ایم.

اکنون C و D را ماتریس‌هایی ۳×۳ می‌گیریم که تمام سطرهایشان، بجز احتمالاً سطر $i_۲$ ام، با سطرهای B و در نتیجه با سطرهای A یکسان است. سطر $i_۲$ ام C را

$$a_{i_۲۱} \qquad a_{i_۲۲} \qquad a_{i_۲۳}$$

می‌گیریم و سطر $i_۲$ ام D را

$$\lambda a_{i_۱۱} \qquad \lambda a_{i_۱۲} \qquad \lambda a_{i_۱۳}$$

فرض می‌کنیم. بنابر ویژگی ۶ می‌توانیم بنویسیم $|B|=|C|+|D|$.

امّا دقت می‌کنیم که تمام سطرهای C با A یکی است، حتی سطر $i_۲$ ام آن. لذا C همان A است، پس $|C|=|A|$. ازطرفی سطر $i_۲$ ام D، λ برابر سطر $i_۱$ ام آن است. پس بنابر ویژگی ۵، $|D|=۰$ و لذا $|B|=|A|+۰=|A|$.

مثال ۱۳. بنابر ویژگی ۷ داریم

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱+۶ & ۲+۸ & ۵+۱۲ \\ ۳ & ۴ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & ۲+۲ & ۵ \\ ۳ & ۴+۶ & ۶ \\ ۱ & ۱+۲ & ۰ \end{vmatrix}.$$

مثال ۱۴. در مثال‌های ۳ و ۶ به دو روش دترمینان $\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{vmatrix}$ را محاسبه کردیم : روش بسط‌دادن و روش ساروس. اکنون می‌خواهیم به کمک ویژگی ۷ مقدار این دترمینان را محاسبه کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴-\frac{۴}{۳}(۳) & ۲-\frac{۴}{۳}(۵) & ۳-\frac{۴}{۳}(۲) \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۰ & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۰ & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ -۱+\frac{۱}{۳}(۳) & ۲+\frac{۱}{۳}(۵) & ۴+\frac{۱}{۳}(۲) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۰ & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۱۴}{۳} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & ۵-\frac{۱۱}{۱۴}(۲) & ۲ \\ ۰ & -\frac{۱۴}{۳}-\frac{۱۱}{۱۴}(\frac{۱}{۳}) & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳}-\frac{۱۱}{۱۴}(\frac{۱۴}{۳}) & \frac{۱۴}{۳} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & \frac{۴۸}{۱۴} & ۲ \\ ۰ & \frac{-۲۰۷}{۴۲} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۴}{۳} \end{vmatrix}$$

$$=۳(\frac{-۲۰۷}{۴۲})(\frac{۱۴}{۳})=-۶۹ .$$

ویژگی ۸ دترمینان. برای هر ماتریس ۳ × ۳ مانند $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ ، $|A|=|A^t|$.

برای بررسی درستی ویژگی ۸ توجه می‌کنیم که اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ ، آنگاه

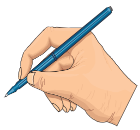
$A^t=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۲۱} & a_{۳۱} \\ a_{۱۲} & a_{۲۲} & a_{۳۲} \\ a_{۱۳} & a_{۲۳} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ و لذا از بسط دترمینان A^t نسبت به سطر اوّل به‌دست می‌آوریم

$$\left|A^t\right| = a_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۳۲} \\ a_{۲۳} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۲۱}(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۳۲} \\ a_{۱۳} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۳۱}(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۲۲} \\ a_{۱۳} & a_{۲۳} \end{vmatrix}$$

$$= a_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۲۱}(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۳۱}(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{vmatrix}$$

$$= |A| \,.$$

مثال ۱۵. بنابر ویژگی ۸ داریم $\begin{vmatrix} ۷ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۵ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۷ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۵ \end{vmatrix}$.



تمرین

۱. فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$. مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به هریک از سطرها و ستون‌ها پیدا کنید. همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

۲. به کمک بسط‌دادن یا روش ساروس مقدار دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۶ & ۵ & ۱ \end{vmatrix}$ ،

ب) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ ،

ج) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

۳. قضیهٔ ۲ را ثابت کنید.

۴. بدون بسط دادن و روش ساروس و تنها به کمک ویژگی‌های دترمینان، مقدار هریک از دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ ، ب) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ ،

ج) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ ، د) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ ،

هـ) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ ، و) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

۵. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها ثابت کنید

الف) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$ ،

ب) $\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$ ،

ج) $\begin{vmatrix} ۱ & ۲x & ۴x^۲ \\ ۱ & y & y^۲ \\ ۱ & z & z^۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲x & yz \\ ۱ & y & ۲xz \\ ۱ & z & ۲xy \end{vmatrix}$ ،

د) $\begin{vmatrix} ۱ & ۱+x & x^۲(y+z) \\ ۱ & ۱+y & y^۲(x+z) \\ ۱ & ۱+z & z^۲(x+y) \end{vmatrix} = ۰$ ،

هـ) $\begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & x^۲ & x^۲ \\ y^۲ & xz & y^۲ \\ z^۲ & z^۲ & xy \end{vmatrix}$ ،

و) $۲(x+y+z)^۳ = \begin{vmatrix} x+y+۲z & x & y \\ z & ۲x+y+z & y \\ z & x & x+۲y+z \end{vmatrix}$.

۶. با درنظر گرفتن $A = \begin{bmatrix} y & z & ۰ \\ x & ۰ & z \\ ۰ & x & y \end{bmatrix}$ و محاسبهٔ AA^t ، مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} y^۲+z^۲ & xy & xz \\ xy & x^۲+z^۲ & yz \\ xz & yz & x^۲+y^۲ \end{vmatrix}.$$

۷. فرض کنید بتوان یک ماتریس ۳×۳ مانند A را به‌صورت حاصلضرب یک ماتریس ۳×۲ در یک ماتریس ۲×۳ نوشت. ثابت کنید $|A| = ۰$.

۸. فرض کنید λ و μ دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها، مقدار دترمینان ماتریس $A = [\lambda i + \mu\ ]_{۳\times۳}$ را محاسبه کنید.

۹. فرض کنید $a = (a_۱, a_۲, a_۳)$ ، $b = (b_۱, b_۲, b_۳)$ و $c = (c_۱, c_۲, c_۳)$ بردارهایی از $\mathbb{R}^۳$

باشند. ثابت کنید $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a.(b\times c)$ و به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها نتیجه بگیرید که $a.(b\times c) = b.(c\times a) = c.(a\times b)$. با توجه به این تمرین چه ارتباطی بین هندسه، هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی در جلد کتاب مشاهده می‌کنید.

۱۰. اگر $A=(a_1,a_2)$ ، $B=(b_1,b_2)$ و $C=(c_1,c_2)$ رؤوس یک مثلث از صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدرمطلق مقدار زیر

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

۱۱. نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادلهٔ خطی است که از نقاط (a,b) و (c,d) در $\mathbb{R}^2$ می‌گذرد.

۱۲. فرض کنید A و B دو ماتریس 3×3 باشند که A متقارن است. ثابت کنید $|A+B| = |A+B^t|$.

۱۳. فرض کنید A یک ماتریس پاد متقارن 3×3 باشد. ثابت کنید $|A| = 0$.

۱۴. مربع واحد، مربعی است با رؤوس به مختصات $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. شکل هندسی F را مربع واحد در نظر می‌گیریم. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که دترمینانی مخالف صفر دارد، روی F اثر کند چه شکلی در صفحه پدید می‌آورد؟ مساحت شکل جدید را محاسبه کنید.

ابن‌سینا


ابن‌سینا

ابوعلی حسین‌بن عبدالله معروف به ابن‌سینا

در سال ۳۷۰ قمری/ ۳۵۹ شمسی/ ۹۸۰میلادی در بخارا متولد شد.

در سال ۴۲۸ قمری / ۴۱۶ شمسی / ۱۰۳۷ میلادی در همدان درگذشت.

فیلسوف، پزشک، منجم و ریاضیدان ایرانی

کارهای ریاضی او عبارتند از :

۱. پژوهش در هندسه و تلخیص هندسه اقلیدسی در کتاب شفا

۲. دستور کلی برای ساختن اعداد مثلثی، مربعی و مخمسی در نظریه‌ی اعداد

۳. تلاش برای ارتباط و تلفیق هندسه و حساب

۴. تعیین طول و عرض دائرةالبروج با استفاده از مثلثات کروی

منابع

۱. دانشنامه‌ی جهان اسلام صفحه‌ی ۲۹

۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۷۶

۳. دائرةالمعارف بزرگ اسلامی جلد ۴ صفحه‌ی ۱

۴. زندگینامه‌ی دانشوران جلد ۱ صفحه‌ی ۳۹

۵. نوابغ علماء العرب و المسلمین فی الریاضیات صفحه‌ی ۱۹۶

۵

دستگاه معادلات خطی

۵ . ۱ ماتریس‌های وارونپذیر

می‌دانیم که برای ماتریس غیرصفر A، ممکن است ماتریسی مانند B موجود نباشد که وقتی در آن ضرب شود برابر I گردد (به تذکر صفحهٔ ۱۰۵ نگاه کنید). به عبارت دیگر در ضرب ماتریس‌ها، چنین نیست که هر ماتریس غیرصفر «وارون» داشته باشد، برخلاف ضرب اعداد که هر عدد غیرصفر دارای وارون است. در این بخش می‌خواهیم مفهوم وارون یک ماتریس مربعی را تعریف کنیم، همچنین شرطی لازم و کافی برای وارونپذیری ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ ۲ و ۳ پیدا خواهیم کرد.

تعریف. گیریم A یک ماتریس مربعی باشد. اگر ماتریس مربعی B موجود باشد طوری که $AB = BA = I$ ، آنگاه می‌گوییم A **وارونپذیر** است و B را نیز **وارون** A می‌نامیم.

مثال ۱. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. اگر قرار دهیم $B = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$، آنگاه $AB = BA = I$ ، لذا A وارونپذیر است و وارون آن ماتریس B می‌باشد.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد که وارونپذیر است. در این صورت وارون A منحصر به فرد است.

اثبات. گیریم B و C هر دو ماتریس‌های مربعی باشند که وارون A هستند، یعنی $AB = BA = I$

و $AC=CA=I$. اکنون به کمک ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها می‌توانیم بنویسیم

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C,$$

و لذا وارون A منحصر به فرد است.■

تذکر. برای ماتریس وارونپذیر A، وارون منحصر به فرد A را با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهیم، لذا $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$.

مثال ۲. برای ماتریس مثال ۱، یعنی $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ، داریم $A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$ و این تنها وارون ماتریس A است.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد که وارونپذیر است. در این صورت $|A|\neq ۰$.

اثبات. چون A وارونپذیر است پس $A^{-۱}$ موجود است و $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$. در نتیجه $|A||A^{-۱}|=|AA^{-۱}|=|I|=۱$ و لذا $|A|\neq ۰$.■

قضیهٔ قبل یک شرط لازم برای وارونپذیری ماتریس‌های مربعی به دست می‌دهد. در مطالب آیندهٔ این بخش خواهیم دید که این شرط کافی نیز می‌باشد.

وارونپذیری ماتریس‌های ۲×۲

گیریم $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۲×۲ باشد. A وارونپذیر است اگر و فقط اگر ماتریس $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ موجود باشد طوری که $AB=BA=I$.

ابتدا بررسی می‌کنیم که تحت چه شرایطی ماتریس B موجود است که $AB=I$. برای این منظور توجه می‌کنیم که $AB=I$ معادل است با این که

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix},$$

یا

$$\begin{bmatrix} a_{11}x+a_{12}z & a_{11}y+a_{12}t \\ a_{21}x+a_{22}z & a_{21}y+a_{22}t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

پس وجود ماتریس $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ معادل است با این که دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}z=1 \\ a_{11}y+a_{12}t=0 \\ a_{21}x+a_{22}z=0 \\ a_{21}y+a_{22}t=1 \end{cases}$$

برحسب x، y، z و t دارای جواب باشد. امّا این دستگاه با دو دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}z=1 \\ a_{21}x+a_{22}z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{11}y+a_{12}t=0 \\ a_{21}y+a_{22}t=1 \end{cases}$$

معادل است. توجه می‌کنیم که این دو دستگاه تواماً فقط و فقط وقتی جواب دارند که $a_{11}a_{22}\neq a_{12}a_{21}$ (چرا؟)، $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ ، یا $|A|\neq 0$ و در این حالت نیز جواب برابر است با

$$\begin{cases} x=\dfrac{a_{22}}{|A|} \\ z=\dfrac{-a_{21}}{|A|} \end{cases}, \quad \begin{cases} y=\dfrac{-a_{12}}{|A|} \\ t=\dfrac{a_{11}}{|A|} \end{cases}$$

(چرا؟).

لذا ماتریس B با این خاصیت که $AB=I$ موجود است اگر و فقط اگر $|A|\neq 0$. در این حالت

$$B=\begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{|A|} & \dfrac{-a_{12}}{|A|} \\ \dfrac{-a_{21}}{|A|} & \dfrac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

بررسی مشابه نشان می‌دهد که وجود ماتریس B با این خاصیت که $BA=I$ نیز معادل است با $|A|\neq 0$ و در این حالت نیز B همان ماتریس معرفی شده در (۱) است. خلاصهٔ مطالب بالا را می‌توانیم در قضیهٔ صفحهٔ بعد خلاصه کنیم.

قضیهٔ ۳. ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix}$ وارونپذیر است اگر و فقط اگر $|A|\neq ۰$ و در این حالت داریم $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} a_{۲۲} & -a_{۱۲} \\ -a_{۲۱} & a_{۱۱}\end{bmatrix}$.

مثال ۳. برای ماتریس مثال ۱، یعنی $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$، داریم $|A|=۵-۶=-۱$ و لذا $A^{-۱}=-\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ -۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ ۱ & -۳\end{bmatrix}$.

وارونپذیری ماتریس‌های ۳×۳

در زیر قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۳ برای ماتریس‌های ۳×۳ بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۴. ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}$ وارونپذیر است اگر و فقط اگر $|A|\neq ۰$. در این حالت داریم $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}$ که در آن $A^{*}=\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳}\end{bmatrix}$ و A_{ij}، ij ــ امین همسازهٔ ماتریس A است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$AA^{*}=A^{*}A=|A|I\,. \qquad (۱)$$

گیریم $AA^{*}=[b_{ij}]$. با توجه به این که

$$a_{i۱} \quad a_{i۲} \quad a_{i۳}$$

سطر iام ماتریس A و

$$A_{j1}$$
$$A_{j2}$$
$$A_{j3}$$

ستون زام ماتریس A^* است، لذا

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3}\,. \qquad (2)$$

حالت اوّل: $i = j$. در این حالت (۲) به صورت $b_{ii} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$ در می‌آید. امّا طرف راست تساوی اخیر در واقع بسط دترمینان A نسبت به سطر iام است و لذا برابر $|A|$ است، یعنی $b_{ii} = |A|$.

حالت دوم: $i \neq j$. ماتریس $C = [c_{ij}]_{3\times3}$ را طوری در نظر می‌گیریم که تمام سطرهایش، بجز احتمالاً سطر زام آن، با سطرهای A یکی باشد و سطر زام آن را نیز برابر سطر iام A می‌گیریم. پس C ماتریسی است با لااقل دو سطر یکسان، سطر iام و سطر زام و در نتیجه $|C| = 0$. چون سطر زام C با سطر iام A یکسان است پس $c_{j1} = a_{i1}$ ، $c_{j2} = a_{i2}$ و $c_{j3} = a_{i3}$. از طرفی A و C در تمام سطرها یکسان هستند، بجز احتمالاً در سطر زام و لذا $C_{j1} = A_{j1}$ ، $C_{j2} = A_{j2}$ و $C_{j3} = A_{j3}$. در نتیجه بنابر (۲)، $b_{ij} = c_{j1}C_{j1} + c_{j2}C_{j2} + c_{j3}C_{j3}$. امّا طرف دوم تساوی اخیر بسط دترمینان C برحسب سطر زام است و لذا برابر $|C|$ است، یعنی $b_{ij} = |C|$. امّا $|C| = 0$ پس $b_{ij} = 0$.

از آنچه در حالت اوّل و دوم ذکر کردیم نتیجه می‌گیریم که

$$b_{ij} = \begin{cases} |A| & \text{اگر } i = j: \\ 0 & \text{اگر } i \neq j: \end{cases}$$

و لذا $AA^* = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|I$. با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد که $A^*A = |A|I$ ، پس (۱) ثابت شده است.

اگر A وارونپذیر باشد بنابر قضیهٔ ۲، $|A| \neq 0$. اگر $|A| \neq 0$ آنگاه رابطهٔ (۱) به صورت $A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I$ تبدیل می‌شود که نشان می‌دهد A وارونپذیر است و $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. ■

مثال ۴. برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ داریم

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-18\ ,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2\ ,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=4\,,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-11\ ,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=14\ ,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=5\,,$$

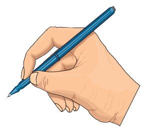
$$A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-10\ ,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-4\ ,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=-8\,.$$

پس

$$A^{*}=\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

امّا $|A|=-46$، لذا

$$A^{-1}=\frac{-1}{46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}.$$



تمرین

۱. وارون هر یک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$، ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$،

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$، د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۲. برای ماتریس مثال ۱، یعنی $A=\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ ، ابتدا اعداد m، n و r را طوری پیدا کنید که داشته باشیم $mA^۲+nA+rI=O$. سپس به کمک این رابطه $A^{-۱}$ را محاسبه کنید.

۳. فرض کنید A و B ماتریس‌های مربعی وارونپذیر باشند و λ یک عدد حقیقی غیر صفر. ثابت کنید

الف) AB وارونپذیر است و $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$ ،

ب) A^t وارونپذیر است و $(A^t)^{-۱}=(A^{-۱})^t$ ،

ج) λA وارونپذیر است و $(\lambda A)^{-۱}=\frac{۱}{\lambda}A^{-۱}$.

۴. فرض کنید A یک ماتریس مربعی وارونپذیر باشد. ثابت کنید $\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{|A|}$.

۵. اگر برای ماتریس مربعی A، ماتریس مربعی B موجود باشد که $AB=I$ ، ثابت کنید A وارونپذیر است و $B=A^{-۱}$.

۶. الف) اگر A و P ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند و P وارونپذیر فرض شود، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $(P^{-۱}AP)^n=P^{-۱}A^nP$ ،

ب) ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ داده شده است. ابتدا ماتریس وارونپذیر P را طوری پیدا کنید که $P^{-۱}AP=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$. سپس برای عدد طبیعی n، A^n را محاسبه کنید.

۷. فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد با این خاصیت که $A^۲=A$. اگر $\lambda\neq ۱$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید $I-\lambda A$ وارونپذیر است و داریم $(I-\lambda A)^{-۱}=I+\frac{\lambda}{۱-\lambda}A$.

۸. فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد و عدد طبیعی n موجود باشد که $A^n=O$. ثابت کنید $I-A$ وارونپذیر است. وارون $I-A$ چیست؟

۹. در قضیهٔ ۴ ثابت کنید $\left|A^*\right|=|A|^۲$.

۱۰. اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند به قسمی که $A+B=AB$ ، ثابت کنید با فرض وارونپذیری A ، B نیز وارونپذیر است و داریم $A^{-۱}+B^{-۱}=I$.

۱۱. برای زاویهٔ ثابت داده شدهٔ θ ، ثابت کنید ماتریس دوران R_θ وارونپذیر است و $(R_\theta)^{-۱}=R_{-\theta}$.

۲.۵ دستگاه معادلات خطی

در این بخش نظر خود را به دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی معطوف می‌کنیم و روش‌های مختلف حل این نوع دستگاه‌ها را بررسی خواهیم کرد. یک دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

می‌باشد. a_{ij} ها را **ضرایب** و x_i ها را **مجهولات** دستگاه می‌نامیم. این دستگاه را می‌توانیم به صورت معادلهٔ ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (1')$$

نیز نمایش دهیم. اگر قرار دهیم $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (که **ماتریس ضرایب** نام دارد)، $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (که **ماتریس مجهولات** نام دارد) و $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$، آنگاه دستگاه $(1')$ به صورت

$$AX = B \quad (1')$$

تبدیل می‌شود و لذا می‌توانیم بگوییم که هر دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی مانند (۱) نظیر یک معادلهٔ ماتریسی به شکل $(1')$ است و برعکس.

از آنچه در بالا گفتیم می‌توانیم نتیجه بگیریم که بحث در مورد دستگاه (۱) با بحث روی معادلهٔ $(1')$ معادل است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $AX = B$ شکل ماتریسی دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی (۱) باشد. اگر $|A| \neq 0$، آنگاه این معادله و در نتیجه دستگاه (۱)، دارای جوابی منحصر به فرد است. این جواب منحصر به فردِ معادله و در نتیجه دستگاه (۱)، $X = A^{-1}B$ می‌باشد.

اثبات. اگر $|A| \neq 0$، آنگاه A وارونپذیر است و لذا A^{-1} موجود است. واضح است که $X = A^{-1}B$ جواب معادله است، زیرا $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$. اکنون اگر X_1 و X_2 دو جواب برای $AX = B$ باشند، آنگاه $AX_1 = B$ و $AX_2 = B$ و لذا $AX_1 = AX_2$. پس $A^{-1}(AX_1) = A^{-1}(AX_2)$، $(A^{-1}A)X_1 = (A^{-1}A)X_2$، $IX_1 = IX_2$، یا $X_1 = X_2$. لذا جواب منحصر به فرد است. ■

مثال ۱. دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ \quad -4x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$، $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. در نتیجه $AX = B$ شکل ماتریسی دستگاه داده شده است. چون، $|A| = -46 \neq 0$، بنابر قضیهٔ قبل این معادله جواب منحصر به فرد $X = A^{-1}B$ دارد. امّا $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{23} & \frac{11}{46} & \frac{9}{23} \\ \frac{2}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{-1}{23} \\ \frac{4}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{-2}{23} \end{bmatrix}$ (به مثال ۴ بخش قبل نگاه کنید) و لذا

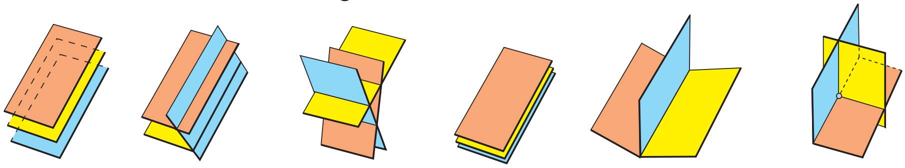
$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{5}{23} & \frac{11}{46} & \frac{9}{23} \\ \frac{2}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{-1}{23} \\ \frac{4}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{-2}{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

یعنی $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ جواب معادله و $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ جواب دستگاه مورد نظر است.

یک دید هندسی نیز در مورد جوابهای دستگاه (۱)، یعنی دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

می‌توان به‌کار گرفت. توجه می‌کنیم که هر یک از معادلات این دستگاه یک صفحه را نمایش می‌دهد. لذا وجود جواب برای این دستگاه معادل است با وجود نقطه‌ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود. ارتباط بین جوابها و نقاط تقاطع صفحه‌ها در شکل زیر نمایان شده است.



سه صفحهٔ متقاطع در یک نقطه، دستگاه جواب منحصر به‌فرد دارد. | سه صفحهٔ متقاطع در یک خط، دستگاه بیشمار جواب دارد. | سه صفحهٔ منطبق، دستگاه بیشمار جواب دارد. | دستگاه بدون جواب است. | دستگاه بدون جواب است. | سه صفحهٔ موازی، دستگاه بدون جواب است.

شکل ۱

مثال ۲. دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی مثال ۱، یعنی دستگاه

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ \quad\;\; - 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - \;\; x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم این بار به روش هندسی وجود جواب را بررسی کنیم. همان‌طور که در بالا اشاره کردیم هریک از معادلات این دستگاه یک صفحه را نمایش می‌دهد. لذا وجود جواب برای این دستگاه معادل است با وجود نقطه‌ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود. در دو معادلهٔ اوّل با قرار دادن $x_1 = 0$ به‌دست می‌آوریم $x_2 = \frac{3}{5}$ و $x_3 = \frac{1}{5}$.

لذا نقطهٔ $(0, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ روی هردو صفحه‌ای که توسط دو معادلهٔ اوّل مشخص می‌شود قرار دارد. پس این دو صفحهٔ مذکور به دلیل این که متمایزاند، یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند. صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ اوّل بر بردار $n_1 = (2, 3, -4)$ عمود است و صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ دوم

بر بردار $n_2=(0,-4,2)$. در نتیجه خطی که فصل مشترک دو صفحهٔ مشخص شده توسط دو معادلهٔ اوّل است با بردار $n_1\times n_2=(-10,-4,-8)$ موازی خواهد بود و لذا معادلات پارامتری آن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} x_1=-10t \\ x_2=\dfrac{3}{5}-4t \qquad , \qquad t\in\mathbb{R} \\ x_3=\dfrac{1}{5}-8t \end{cases}$$

حال اگر این خط بر صفحه‌ای که توسط معادلهٔ سوم مشخص می‌شود منطبق باشد، دستگاه بیشمار جواب دارد ؛ اگر آن را قطع نکند، دستگاه جواب ندارد و اگر آن را در یک نقطه قطع کند، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد. پس کافی است بررسی کنیم که به ازای چه tهایی نقاط خط مذکور روی صفحهٔ $x_1-x_2+5x_3=5$ قرار می‌گیرد. برای این منظور باید معادلهٔ $-10t-(\frac{3}{5}-4t)+5(\frac{1}{5}-8t)=5$ را حل کنیم. امّا این معادله به صورت $-46t=\frac{23}{5}$ ساده می‌شود که تنها جواب آن $t=\frac{-1}{10}$ است. پس فقط به ازای $t=\frac{-1}{10}$ ، نقطهٔ $(1,1,1)$ از خطی که فصل مشترک دو صفحهٔ مشخص شده توسط دو معادلهٔ اوّل دستگاه است روی صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ سوم دستگاه قرار می‌گیرد. لذا دستگاه جوابی منحصر به فرد دارد که عبارت است از

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=1. \end{cases}$$

اگر در دستگاه (۱)، $b_1=b_2=b_3=0$ ، آنگاه می‌گوییم یک دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی **همگن** داریم. واضح است که یک دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی همگن

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \qquad (2) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases}$$

نظیر معادلهٔ ماتریسی

$$AX=O \quad (2')$$

است.

مثال ۳. دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی همگن

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \\ -۴x_۱ - ۲x_۲ - ۲x_۳ = ۰ \\ ۳x_۱ - x_۲ + x_۳ = ۰ \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ -۴ & -۲ & -۲ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$. درنتیجه $AX=O$ شکل ماتریسی دستگاه داده شده است. چون $|A| = ۰$، لذا برای این معادله و درنتیجه دستگاه داده شده قضیهٔ ۱ کارساز نخواهد بود. البته واضح است که $x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۰$ یک جواب این دستگاه همگن می‌باشد (جواب صفر) و برای بررسی وجود یا عدم وجود جواب غیرصفر برای این دستگاه روش هندسی ممکن است کارساز باشد. معادلات اوّل و دوم دستگاه مذکور یکی هستند. درنتیجه این دستگاه با دستگاه

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \\ ۳x_۱ - x_۲ + x_۳ = ۰ \end{cases}$$

معادل است. امّا نقاط $(x_۱, x_۲, x_۳)$ که در معادلهٔ اوّل صدق می‌کنند نقاط یک صفحهٔ گذرا از مبدأ مختصات می‌باشند. نقاط $(x_۱, x_۲, x_۳)$ و صادق در معادلهٔ دوم نیز چنین است. امّا دو صفحهٔ متمایز و گذرا از مبدأ مختصات یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند. پس نقاط $(x_۱, x_۲, x_۳)$ که روی این خط قرار دارند هم در معادلهٔ اوّل صدق می‌کنند و هم در معادلهٔ دوم و لذا هر یک از نقاط روی این خط جوابی برای دستگاه مذکور به‌دست می‌دهد. پس این دستگاه جوابهای غیر صفر (درواقع بیشمار جواب) دارد.

این که در مثال قبل از صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی همگن نتیجه گرفتیم که دستگاه بیشمار جواب دارد تصادفی نمی‌باشد. قضیهٔ زیر این موضوع را روشن می‌کند.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $AX = O$ شکل ماتریسی دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی همگن (۲) باشد. در این صورت این معادله و در نتیجه دستگاه (۲) دارای بیشمار جواب است اگر و فقط اگر $|A| = ۰$.

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $|A| \neq ۰$. لذا بنابر قضیهٔ ۱، معادلهٔ $AX = O$ دارای جواب منحصر

به فرد $X = A^{-1}O = O$ است که تناقض می‌باشد. لذا لزوماً $|A| = 0$.

($\Rightarrow$) دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی همگن (۲) به‌صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

می‌باشد که ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

شکل ماتریسی آن، یعنی $AX = O$ را به‌دست می‌دهد. با فرض $|A| = 0$، ثابت می‌کنیم این دستگاه دارای بیشمار جواب است. برای این منظور روش هندسی[1] را به‌کار می‌گیریم. هریک از معادلات این دستگاه صفحه‌ای را مشخص می‌کند و وجود جواب برای این دستگاه معادل است با وجود نقطه‌ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود. توجه می‌کنیم که هرسه صفحه از مبدأ مختصات عبور می‌کند، زیرا $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ جوابی برای دستگاه همگن است.

حالت اوّل: سه صفحه برهم منطبق باشند.

در این حالت واضح است که بیشمار نقطهٔ مشترک روی صفحاتی که (در واقع یک صفحه هستند و) توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود وجود خواهد داشت و لذا دستگاه نیز بیشمار جواب خواهد داشت.

حالت دوم: دوتا از سه صفحه برهم منطبق باشند.

در این حالت واضح است که یکی از صفحات دو صفحه دیگر را (که در واقع یکی هستند) در یک خط قطع خواهد کرد و مجدداً نقاط این خط نقاط مشترکی است روی سه صفحهٔ تعیین شده توسط سه معادلهٔ دستگاه همگن و لذا دستگاه بیشمار جواب دارد.

حالت سوم: سه صفحه متمایز باشند.

در این حالت صفحات مشخص شده توسط معادلات دوم و سوم دستگاه به دلیل این که یک نقطهٔ مشترک دارند همدیگر را در یک خط مانند L قطع می‌کنند. L موازی بردار $n_2 \times n_3$ است که در آن $n_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ بردار عمود بر صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ دوم است و

۱ــ اثبات این قضیه «صرفاً با ابزارهای جبر خطی» از برنامهٔ درسی این کتاب خارج است.

$n_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$ بردار عمود بر صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ سوم. حال باید بررسی کنیم که وضعیت این خط نسبت به صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ اوّل چگونه است. صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ اوّل بر بردار $n_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$ عمود است و چون بنابر فرض و تمرین ۹ از صفحهٔ ۱۲۸

$$n_1.(n_2\times n_3)=|A|=0,$$

لذا خط L و صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ اوّل موازی خواهند بود که به دلیل وجود یک نقطهٔ مشترک روی آنها در واقع L براین صفحه منطبق است. پس تمام نقاط L نقاط مشترک روی صفحاتی هستند که توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود و لذا دستگاه در این حالت نیز بیشمار جواب دارد.■

دستور کرامر برای حل دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی

قضیهٔ زیر روشی را برای حل دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی به دست می‌دهد که منسوب به کرامر است.

قضیهٔ ۳ (دستور کرامر). گیریم دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی (۱) داده شده است. A را ماتریس ضرایب این دستگاه فرض می‌کنیم و برای $j=1,2,3$ ، A_j را ماتریسی 3×3 می‌گیریم که از تعویض ستون زام A با

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$$

به دست آمده است. اگر $|A|\neq 0$، در این صورت جواب منحصر به فرد دستگاه (۱) از فرمول‌های

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}\ ,\ \ x_2=\frac{|A_2|}{|A|}\ ,\ \ x_3=\frac{|A_3|}{|A|}$$

به دست می‌آید.

اثبات. اگر $|A|\neq 0$، قضیهٔ ۱ نشان می‌دهد که دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی (۱) دارای جواب منحصر به فرد (x_1,x_2,x_3) است. اکنون بنابر ویژگی‌های دترمینان‌ها می‌توانیم بنویسیم

$$x_1|A|=\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=|A_1|.$$

در نتیجه $x_1=\frac{|A_1|}{|A|}$. به طور مشابه می‌توان x_2 و x_3 را نیز محاسبه کرد و لذا حکم ثابت است.■

مثال ۴. دستگاه مثال ۱ را در نظر می‌گیریم. به کمک دستور کرامر، جواب این دستگاه برابر است با

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4\\ -2 & -4 & 2\\ 5 & -1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}}=\frac{-46}{-46}=1,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & 5 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}}=\frac{-46}{-46}=1,$$

$$x_{۳}=\frac{\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۴ & -۲ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & -۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{vmatrix}}=\frac{-۴۶}{-۴۶}=۱.$$

روش حذفی گاوس و روش گاوس ــ جردن برای حل دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی

همانطور که دیدیم اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه (۱) غیرصفر باشد، می‌توانیم ماتریس وارونِ ضرایب دستگاه را پیدا کنیم. با ضرب کردن طرفین (′۱) در این ماتریسِ وارون جواب دستگاه به‌دست می‌آید. پیدا کردن ماتریس وارون به روشی که ذکر شد نیاز به عملیات و محاسبات زیادی دارد. لذا روش‌های دیگری برای حل دستگاه‌ها که عملیات کمتری نیاز داشته باشد، از لحاظ کاربردهای عملی مورد توجه قرار دارد. در این قسمت روش‌های **حذفی گاوس** و **گاوس ــ جردن** را برای حل دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی ذکر می‌کنیم. در این روش‌ها از قاعده‌های زیر برای حل دستگاه استفاده می‌کنیم :

۱) اگر طرفین یکی از معادلات را در یک عدد غیرصفر ضرب کنیم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند،

۲) اگر طرفین یکی از معادلات را به معادلهٔ دیگری بیافزاییم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند،

۳) اگر جای دو معادله را عوض کنیم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند.

روش حذفی گاوس

روش حذفی گاوس را با ارائهٔ مثال زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} ۲x_{۱}+۴x_{۲}+۶x_{۳}=۱۸ \\ ۴x_{۱}+۵x_{۲}+۶x_{۳}=۲۴ \\ ۳x_{۱}+x_{۲}-۲x_{۳}=۴ \end{cases}$$

ماتریس ضرایب دستگاه را همراه با یک ستون اضافی که از مقادیر ثابت تشکیل شده است در نظر می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۱۸ \\ ۴ & ۵ & ۶ & ۲۴ \\ ۳ & ۱ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

نخست عنصری که در سطر اوّل و ستون اوّل قرار دارد را محور عملیات قرار داده و عناصر ستون اوّل در سطرهای دوم و سوم را با استفاده از قواعد ذکر شده صفر می‌کنیم. پس داریم

$$\text{(}R_i\text{ یعنی سطر }i\text{ام)}\quad \begin{array}{r} R_۱ \\ R_۲-۲R_۱ \\ R_۳-\frac{۳}{۲}R_۱ \end{array}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۱۸ \\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲ \\ ۰ & -۵ & -۱۱ & -۲۳ \end{bmatrix}.$$

در گام بعدی عنصر واقع در سطر دوم و ستون دوم را محور عملیات گرفته و عنصر واقع در ستون دوم و سطر سوم را صفر می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} R_۱ \\ R_۲ \\ R_۳-\frac{۵}{۳}R_۲ \end{array}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۱۸ \\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}.$$

حال که ماتریس ضرایب دستگاه به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل شده است می‌توانیم با استفاده از عملیات برگشتی از پایین به بالا جواب را پیدا کنیم. در واقع در آخرین مرحله دستگاه به صورت زیر درآمده است.

$$\begin{cases} ۲x_۱+۴x_۲+۶x_۳=۱۸ \\ \qquad -۳x_۲-۶x_۳=-۱۲ \\ \qquad\qquad -x_۳=-۳ \end{cases}$$

پس $x_۳=۳$ و با جایگذاری در معادلهٔ دوم داریم $x_۲=-۲$. اکنون این دو مقدار را در معادلهٔ اوّل جایگذاری می‌کنیم، پس $x_۱=۴$.

روش گاوس ــ جردن

روش گاوس ــ جردن نیز مشابه روش حذفی گاوس است ولی در اینجا در هر مرحله، عناصر غیر از قطر اصلی در هر ستون را با استفاده از قواعد ذکر شده به صفر تبدیل می‌کنیم. به مثال قبلی توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۹ \\ ۴ & ۵ & ۶ & ۲۴ \\ ۳ & ۱ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

مرحلهٔ اوّل مشابه مرحلهٔ اوّل روش حذفی گاوس است.

$$\begin{array}{r} R_۱ \\ R_۲ - ۴R_۱ \\ R_۳ - ۳R_۱ \end{array}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۹ \\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲ \\ ۰ & -۵ & -۱۱ & -۲۳ \end{bmatrix}.$$

در مرحلهٔ دوم عنصر سطر دوم و ستون دوم ماتریس ضرایب دستگاه را محور گرفته و عناصر ستون دوم در سطر اوّل و سوم را صفر می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} R_۱ + \frac{۲}{۳}R_۲ \\ R_۲ \\ R_۳ - \frac{۵}{۳}R_۲ \end{array}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}.$$

در گام بعد عنصر روی سطر سوم و ستون سوم محور عملیات است و کلّیهٔ عناصر ستون سوم در سطرهای اوّل و دوم را صفر می‌کنیم.

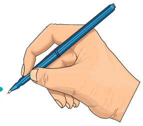
$$\begin{array}{r} R_۱ - R_۳ \\ R_۲ - ۶R_۳ \\ R_۳ \end{array}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & -۳ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}.$$

و نهایتاً، عناصر سطر اوّل، ستون اوّل ؛ سطر دوم، ستون دوم ؛ و سطر سوم، ستون سوم را به ۱ تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} R_۱ \\ -\frac{۱}{۳}R_۲ \\ -R_۳ \end{array}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}.$$

پس جواب عبارت است از $x_۱ = ۴$ ، $x_۲ = -۲$ و $x_۳ = ۳$.

تذکر. اگر در روش‌های حذفی گاوس و گاوس ــ جردن عنصری که روی قطر اصلی ماتریس ضرایب دستگاه قرار دارد و باید محور قرار گیرد، صفر باشد جای سطر شامل آن عنصر و یکی از سطرهای دیگر را عوض می‌کنیم. اگر چنین کاری امکان نداشته باشد، یعنی کلّیهٔ عناصر در ستون مربوطه برابر صفر باشد، آنگاه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است و دستگاه جواب ندارد.



تمرین

۱. دستگاه‌های زیر را با پیدا کردن وارون ماتریس ضرایب دستگاه (در صورت وجود) حل کنید.

الف) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$ ،
ب) $\begin{cases} 2x_3 + 3 = x_2 + 3x_1 \\ x_1 - 3x_3 = 2x_2 + 1 \\ 3x_2 + x_3 = 2 - 2x_1 \end{cases}$.

۲. دستگاه‌های زیر را به کمک دستور کرامر، روش حذفی گاوس و گاوس ـ جردن حل کنید.

الف) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{cases}$ ،
ب) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$ ،

ج) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 18 \\ 5x_1 + 8x_3 = -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -3 \end{cases}$.

۳. دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

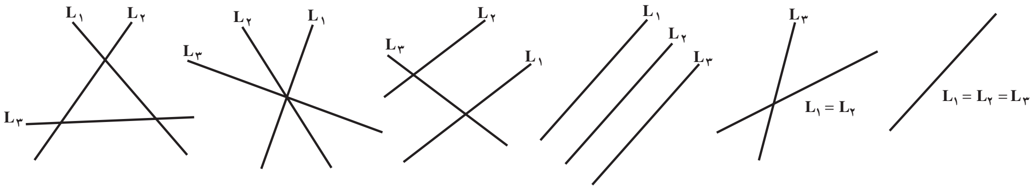
۴. به کمک قضیهٔ ۲، اثبات دیگری برای تمرین ۷ از بخش قبل ارائه کنید. یعنی ثابت کنید اگر A یک ماتریس مربعی باشد با این خاصیت که $A^2 = A$ و $\lambda \neq 1$ یک عدد حقیقی، آنگاه $I - \lambda A$ وارونپذیر است. $(I - \lambda A)^{-1}$ را نیز محاسبه کنید.

۵. فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی باشند، طوری که $I - AB$ وارونپذیر است. ثابت کنید $I - BA$ نیز وارونپذیر است (راهنمایی : از قضیهٔ ۲ استفاده کنید). $(I - BA)^{-1}$ را نیز محاسبه کنید.

۶. دستگاه سه معادلهٔ دو مجهولی زیر سه خط L_1 ، L_2 و L_3 را در صفحه مشخص می کند.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

شکل‌های زیر حالات مختلف این سه خط را نسبت به هم نشان می‌دهد.



شکل ۲

مجموعهٔ جواب دستگاه داده شده را در هر یک از این حالات توصیف کنید.

۷. به کمک روش هندسی بررسی کنید که تحت چه شرایطی روی a، b و c دستگاه

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = a \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = b \\ 7x_1 + 4x_2 + 9x_3 = c \end{cases}$$

الف) دارای جواب منحصر به فرد است،

ب) جواب ندارد،

ج) بیشمار جواب دارد.

۸. دستگاه زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

الف) توضیح دهید که چرا دستگاه بالا یا جواب ندارد، یا بیشمار جواب دارد.

ب) اگر $b_1 = b_2 = 0$ ، چرا دستگاه بالا باید بیشمار جواب داشته باشد؟

مراجع

[1] Barnett, P. A., Ziegler, M. R., *Pre-calculus*, Third edition, Mc Graw - Hill, New York, 1995.

[2] Lang, S, *Linear Algebra*, Third edition, Springer - Verlag, New York, 1987.

[3] O'Nan, Michael, *Linear Algebra*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.

[ترجمهٔ فارسی : اونان، مایکل. جبر خطی. ترجمهٔ علی‌اکبر محمّدی حسن‌آبادی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳.]

[4]Silverman, Richard A, *Modern Calculus and Analytic Geometry*, Macmillan, New York, 1969.

[ترجمهٔ فارسی : سیلورمن، ریچارد ۱. *حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی جدید*. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، تهران، ۱۳۶۷.]

[۵] تابش، یحیی ؛ نیوشا، جعفر. هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی. دورهٔ پیش‌دانشگاهی، رشتهٔ علوم ریاضی، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی وزارت آموزش و پرورش، تهران، ۱۳۷۷.