بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (نقشه‌برداری)

رشتهٔ نقشه‌برداری

زمینهٔ صنعت

شاخهٔ آموزش فنی و حرفه‌ای

شمارهٔ درس ۲۷۷۲

۵۲۶	یگانه‌عزیزی، رضا
۹ /	هندسه (نقشه‌برداری) / مؤلف : رضا یگانه‌عزیزی. ــ تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های
هـ ۶۸ ی /	درسی ایران، ۱۳۹۴.
۱۳۹۴	۱۴۹ ص. : مصور. ــ (آموزش فنی و حرفه‌ای؛ شمارهٔ درس ۲۷۷۲)
	متون درسی رشتهٔ نقشه‌برداری، زمینهٔ صنعت.
	برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا : دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش وزارت آموزش و پرورش.
	۱. نقشه‌برداری. ۲. هندسه. الف. ایران. وزارت آموزش و پرورش. دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش. ب. عنوان. ج. فروست.

۱۳۹۴

همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز :

پیشنهادات و نظرات خود را دربارهٔ محتوای این کتاب به نشانی تهران ـ صندوق پستی شمارهٔ ۴۸۷۴/۱۵ دفتر تألیف‌کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

پیام‌نگار (ایمیل) info@tvoccd.sch.ir

وب‌گاه (وب‌سایت) www.tvoccd.sch.ir

این کتاب در کمیسیون تخصصی رشتهٔ نقشه‌برداری سال تحصیلی ۸۷ ـ۸۶ مورد بررسی و تجدید نظر قرار گرفت.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی وحرفه‌ای و کاردانش**

نام کتاب : **هندسه (نقشه‌برداری) ـ ۳۵۹/۹۵**

مؤلف : **رضا یگانه عزیزی**

اعضای کمیسیون تخصصی : **مالک مختاری، محمد سعادت‌سرشت، سید محمد رضا رجایی الموسوی، محمد سلیم آبادی، مسلم لطفعلیان، ابوالقاسم رافع و امیرحسین متینی**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت : www.chap.sch.ir

رسام : **فاطمه رئیسیان فیروزآباد**

صفحه‌آرا : **صغریٰ عابدی**

طراح جلد : **مریم کیوان**

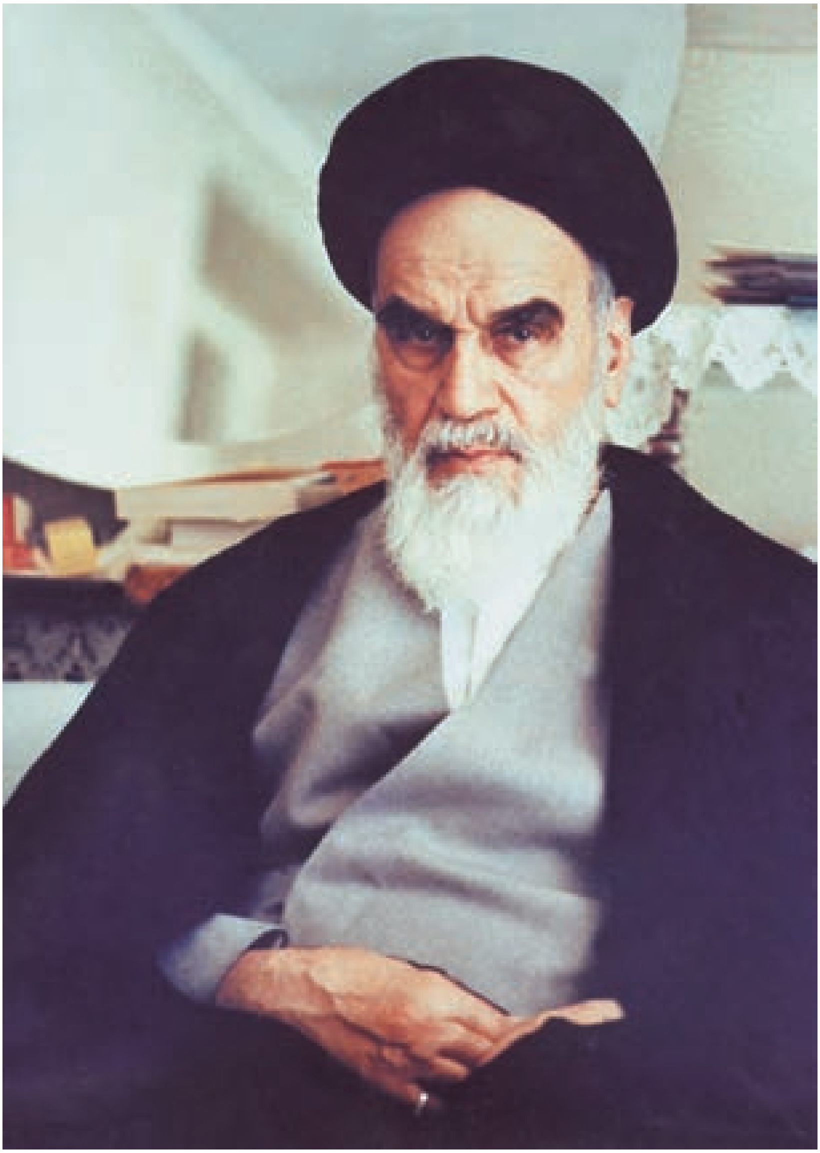
ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادّهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

تلفن : ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران « سهامی خاص »**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ پانزدهم ۱۳۹۴**

شابک ۶-۰۹۱۱-۰۵-۹۶۴ **ISBN 964-05-0911-6**



شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آیید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتّکای به اجانب بپرهیزید.

امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

تغییرات جزیی در سال تحصیلی ۸۸ــ ۱۳۸۷ : با توجه به رشد سریع دانش و فناوری به خصوص در زمینهٔ رشتهٔ نقشه‌برداری و علوم مرتبط با آن، تغییرات کلی در زمینهٔ کلیهٔ کتاب‌های رشتهٔ نقشه‌برداری فنی و حرفه‌ای در حال انجام است. لیکن با توجه به زمان‌بر بودن این تغییرات و به تصویب رساندن آن، کمیسیون تخصصی رشتهٔ نقشه‌برداری تصمیم گرفت تا کتاب هندسه (نقشه‌برداری) را با توجه به درخواست‌های مکرر هنرآموزان و هنرجویان در جهت فهم‌پذیری بیشتر و کاربردی نمودن آن با تغییراتی برای سال تحصیلی ۸۹ــ ۱۳۸۸ آماده کرده تا ان‌شاءا... تا زمان آماده‌شدن برنامهٔ نهایی رشته و تصویب آن، هنرجویان دوره‌های اخیر نیز از برخی برنامه‌های پیش‌رو استفاده نمایند.

در این تغییرات، چند نکته مورد توجه بوده است که اهم آن‌ها عبارتند از :

۱ــ اضافه کردن مطالبی در زمینهٔ نقش دانشمندان ایرانی ــ اسلامی در پیشبرد علوم هندسه و کاربردهای آن در نقشه‌برداری با عنوان «آیا می‌دانید» و مطالبی با عنوان مطالعهٔ آزاد با کادر رنگی جهت آزمون پایانی مطرح نمی‌باشند.

۲ــ توجه به اخلاق حرفه‌ای با ذکر مثال

۳ــ چیدمان فصول بر طبق سرفصل‌های درس مساحی (با در نظر گرفتن این موضوع که درس هندسه (نقشه‌برداری) بایستی مقدمات بحث‌های مساحی را بازگو نماید.)

۴ــ توجه به اصطلاحات رایج زبان انگلیسی و واژه‌های متداول و کاربردی در نقشه‌برداری در جهت ارتباط فراگیران رشتهٔ نقشه‌برداری با علم روز.

۵ــ توسعهٔ مسایل کاربردی و ذکر مثال‌های بیشتر.

۶ــ رشد خلاقیت، نوآوری و ارایهٔ ابتکار که با گروه‌بندی‌های کوچک، دانش‌آموزان در هر گروه، درس را برای یکدیگر بازگو کنند، سؤال آزمون طرح کنند و پیشرفت کار گروه را ارزیابی کنند.

۷ــ حل مثال‌های کاربردی با ارائه راهکار و روش حل قدم به قدم و هم‌چنین بحث و بررسی در مورد آن برای فهم بیش‌تر هنرجویان از رشتهٔ نقشه‌برداری.

نکتهٔ آخر این که پیشنهاد می‌گردد فصول ۱ تا ۵ این کتاب در نیم‌سال اول تدریس گردیده تا هم‌زمانی آن با کتاب مساحی حفظ شود.

مقدمه

علم هندسه علاوه بر تقویت ذهن و قوای استدلالی کاربرد فراوانی در علوم مهندسی، به‌خصوص نقشه‌برداری دارد. با این علم دربارهٔ اشکال مختلف هندسی، ابعاد و اندازه‌گیری آن‌ها بحث می‌شود. شما نیز در طبیعت، در عمران و صنایع اشکال هندسی بسیاری را مشاهده می‌کنید که در زندگی روزمره نقش به‌سزایی دارند.

هم‌چنین برای شناسایی موقعیت هر نقطه از کرهٔ زمین و اندازهٔ فاصلهٔ آن‌ها از یک‌دیگر و تهیهٔ نقشه، نیز مسیر و حرکت ستارگان، سیارات و ماهواره‌ها از علم هندسه استفاده می‌شود.

هندسه[1]، ترجمهٔ واژهٔ ژئومتری (Geometry) برگرفته از دو واژهٔ یونانی «ژئو» به معنی زمین و «متر» به معنی «اندازه‌گیری» آمده است، زیرا گفته می‌شود که هندسه در اصل علم اندازه‌گیری زمین بوده است. هرودوت (Herodotus) مورّخ یونانی سدهٔ پنجم قبل از میلاد پدیدآورندگان هندسه را مسّاحان مصری می‌داند که مجبور بوده‌اند هر سال پس از طغیان رودخانهٔ نیل محدودهٔ زمین‌ها را مجدداً مشخص سازند. امّا تمدن‌های کهن دیگر مانند بابلی، هندی، چینی و ایرانی هم اطلاعات هندسی بسیاری داشته‌اند.

در تاریخ علم، دربارهٔ زمان پیدایش هندسه سخن روشنی به میان نیامده است، اما به احتمال یقین پیدایش هندسه به دلیل نیاز بشر برای حل اختلافات قومی و تعیین حد و مرز زمین‌های حاصل‌خیز کشاورزی و تقسیم عادلانهٔ آن‌ها بوده است. به دیگر سخن، هندسه منشأ پیدایش علم مسّاحی و نقشه‌برداری و در حال حاضر منشأ ژئوماتیک و ژئودزی ماهواره‌ای با امکانات ماهواره‌ها و اَبَررایانه‌ها و نظایر آن است. بدین‌ترتیب، هندسه بخش اعظم علوم استراتژیک و حساس جهان امروز را دربر گرفته است.

بنابراین نیاز بشر امروز به علوم ریاضی و هندسه و کاربرد آن در رشته‌های مختلف مهندسی عمران و صنایع و علوم مختلف دیگر بسیار روشن و واضح است. خوشبختانه در کشور عزیزمان نیز این احساس پدیدار شده است که درس‌های ریاضی تنها به‌گونهٔ محض و غیرکاربردی در مقاطع مختلف تحصیلی بیان نشود، بلکه به‌صورت کاربردی، به‌ویژه در رشته‌های فنی و حرفه‌ای فراهم آید.

به دلیل آن‌که رشتهٔ مهندسی نقشه‌برداری نیز نوعی رشتهٔ ریاضی کاربردی است و هندسه نیز در آن کاربرد فراوانی دارد، گروه تخصصی نقشه‌برداری بر آن شد کتاب هندسهٔ نقشه‌برداری را برای این دوره فراهم آورد. برای این منظور، کتاب یاد شده با ویژگی‌های خاصی تدوین شده است که ممکن است با سایر کتاب‌های هندسه تفاوت‌های اندکی داشته باشد؛ از جمله :

۱ــ اثبات قضایا در همهٔ درس‌ها نیامده است.

۱ــ «هندسه» در زبان فارسی،صورت تغییریافتهٔ واژهٔ «اندازه» است.

۲ــ ترتیب تعاریف، اصول و قضایا، گاه به سبب کاربردی بودن آن درنظر گرفته نشده است.

۳ــ سعی شده از مسائلی که بیش‌تر در رشتهٔ نقشه‌برداری کاربرد دارد به‌گونهٔ مثال‌های حل شده یا تمرین استفاده شود.

۴ــ روش خاصی که در بیان درس هندسه آمده این است که دانش‌آموز رشتهٔ نقشه‌برداری بتواند با آشنایی از قسمت‌هایی از تعاریف و قضایای سادهٔ هندسه، با مسائل مربوط به این رشته آشنا شود و آن‌ها را به‌سادگی حل نموده در کارهای اجرایی استفاده نماید.

هدف کلی

آشنایی با هندسه و مثلثات کاربردی در نقشه‌برداری

فصل اوّل

یادآوری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ اصطلاحات، تعریف مفاهیم اولیه، گزاره، برهان، قضیه، اصل و مکان هندسی را توضیح دهد.

۲ــ زاویه را تعریف کند و انواع آن را توضیح دهد.

۳ــ حالات دو زاویه‌ی نسبت به‌هم را نام برده هریک را شرح دهد و خاصیت آن‌ها را بیان کند.

۴ــ واحدهای زاویه را نام برده، هر یک را تعریف کند ؛ هم‌چنین هر واحد را به واحدهای دیگر تبدیل نماید.

۵ــ فرجه و مسطحه‌ی فرجه را تعریف کند.

۶ــ شرط عمود بودن دو صفحه را توضیح دهد.

۷ــ عمود و مایل را در صفحه تعریف کند و قضایای مربوط به آن را بیان کرده فاصله‌ی نقطه تا خط را توضیح دهد.

۸ــ عمود و مایل در فضا را تعریف کرده شرط عمود بودن خط بر یک صفحه را توضیح دهد.

۹ــ مثلث را تعریف کند.

۱۰ــ انواع مثلث را توضیح دهد.

۱۱ــ مثال‌های حل شده در این فصل را فرابگیرد.

۱ــ۱ــکلیات

برای شناخت هندسه باید با این نکات آشنا شد :

تعریف: تعریف مفهوم هندسی یعنی شناساندن آن به دیگران ؛ به گونه‌ای که صفات و ویژگی آن مفهوم را بتوان به اندازه‌ی لازم و کافی بیان نمود. از خصوصیات مهم هر تعریف آن است که جامع و مانع باشد.

مفاهیم اولیه یا تعریف نشده: هرتعریف با استفاده از مفاهیم تعریف‌های قبلی بیان می‌شود. برای مثال، درتعریف دو زاویه‌ی مجاور لازم است از قبل تعریف زاویه‌ی ضلع، صفحه و نظایر آن را بدانیم. بدین ترتیب، هرتعریف به یک یا چند تعریف قبلی بستگی دارد. بعضی از تعریف‌ها تعریف قبلی ندارند و خود اولین تعریف هستند. این‌گونه موارد را «تعریف نشده» می‌نامیم و بدون تعریف آن‌ها را می‌پذیریم. هر مفهوم تعریف نشده را «مفهوم اولیه» یا «مفهوم نخستین» می‌گویند ؛ مانند : نقطه، خط، صفحه و فضا.

گزاره: هر جمله‌ی خبری را «گزاره» می‌گویند. گزاره ممکن است به‌صورت درست و نادرست یا شرطی بیان شود. برای نمونه : مجموع دو عدد ۵ و ۷ عدد «۱۲» است (گزاره‌ی درست). حاصل‌ضرب دو عدد ۴ و ۵ عدد «۲۵» است (گزاره‌ی نادرست). اگر درس بخوانیم در آینده فرد مفیدی خواهیم شد (گزاره‌ی شرطی).

برهان: «برهان» عبارت است از استدلال برای اثبات درستی گزاره از طریق گزاره‌هایی که قبلاً درستی آن‌ها پذیرفته شده است.

قضیه: در هر گزاره‌ای که برای اثبات درست بودنش از برهان استفاده شود «قضیه» نامیده می‌شود. هر قضیه شامل دو قسمت : «فرض» و «حکم» است. قسمت نخست فرض قضیه، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

قسمت دوّم حکم یا نتیجه‌ی قضیه، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آن‌ها را می‌خواهیم ثابت کنیم ؛ مانند : «هر نقطه‌ی واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است» که قسمت اوّل (هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط) «فرض قضیه» و قسمت دوّم (از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است) «حکم یا نتیجه‌ی قضیه» است.

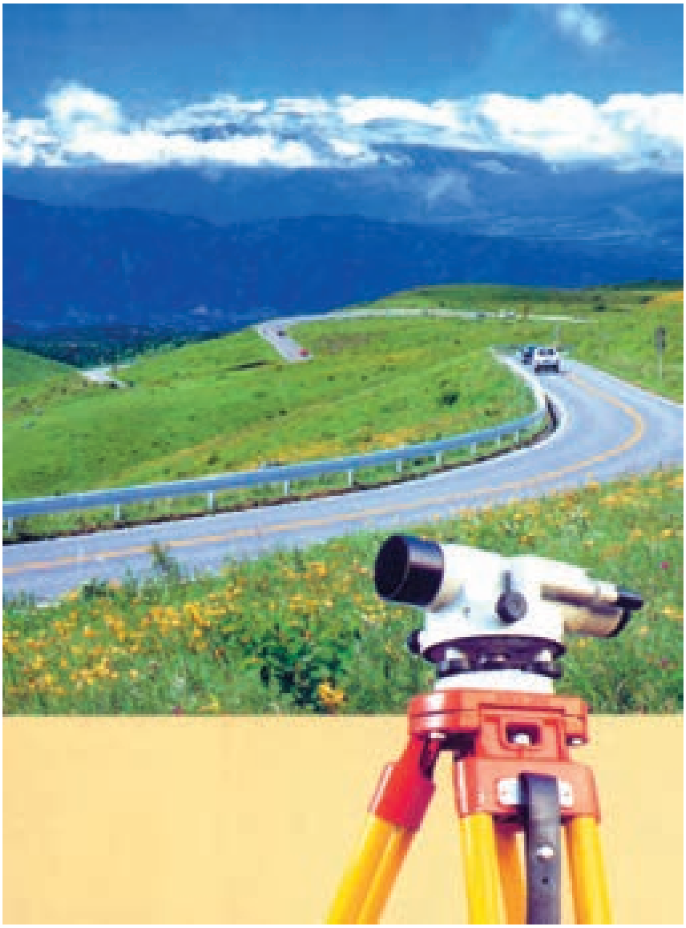
اصل: گزاره‌ای که درستی آن را بدون اثبات می‌پذیریم و برای اثبات قضیه‌ها به آن استناد می‌کنیم «اصل» نامیده می‌شود.

مثال: هر دو نقطه‌ی متمایز یک خط راست و تنها یک خط راست را مشخص می‌کنند یا از هر نقطه‌ی خارج یک خط فقط یک خط می‌توان موازی آن رسم کرد.

مکان هندسی: مکان مجموعه‌ی نقاطی است که همه‌ی آن نقاط دارای ویژگی هندسی مشترکی

باشند و هر نقطه که دارای چنین ویژگی باشد عضو آن مجموعه محسوب شود ؛ مانند تعریف دایره : دایره مکان هندسی نقاطی است از یک صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی ثابتی در آن صفحه مساوی باشند.

تذکر: در این کتاب که مطالب آن به‌صورت کاربردی است اثبات حکم هر قضیه مطرح نیست و هر قضیه بدون رعایت تقدم و تأخر به گونه‌ی کاربردی عنوان شده است.

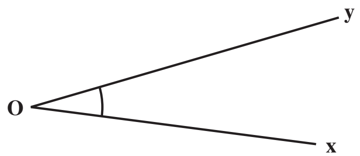


شکل ۱ــ۱

۱ــ۲ــ تعریف زاویه (Angle)

زاویه عبارت است از مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که به دو خط با مبدأ مشترک محدود باشند و آن دو نیم خط را شامل شوند.

مبدأ مشترک را «رأس زاویه» و هر یک از دو نیم‌خط را «یک ضلع زاویه» گویند ؛ مانند : زاویه‌ی xoy که آن‌را به‌صورت o # و یا xoy # نمایش می‌دهند (شکل ۱ــ۲).

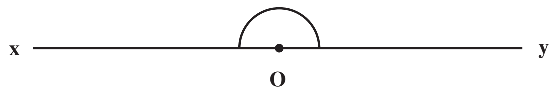


شکل ۱ــ۲

۱ــ۳ــ انواع زاویه

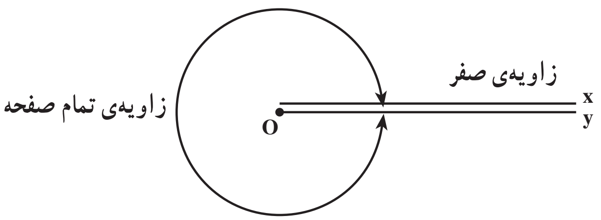
زاویه‌ی نیم‌صفحه، زاویه‌ی قائمه، زاویه‌ی حاده (تند)، زاویه‌ی منفرجه (باز)، زاویه‌ی صفر، زاویه‌ی کوژ (محدب) و زاویه‌ی کاو (مقعر).

زاویه‌ی نیم‌صفحه: زاویه‌ای است که دو ضلع آن در یک امتداد باشند ؛ مانند زاویه‌ی xoy # (شکل ۱ــ۳).



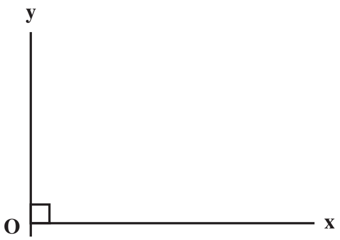
شکل ۱ــ۳

زاویه‌ی صفر: زاویه‌ای است که دو ضلع آن بر هم منطبق باشند و زاویه‌ی خارجی زاویه‌ی صفر را «زاویه‌ی تمام صفحه» گویند (شکل ۱ــ۴).



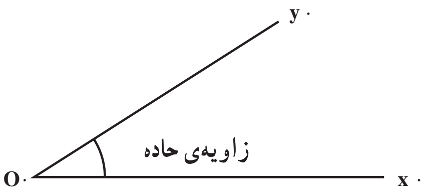
شکل ۱ــ۴

زاویه‌ی قائمه (Rectangle): نصف زاویه‌ی نیم‌صفحه را «زاویه‌ی قائمه» گویند (شکل ۱ــ۵).



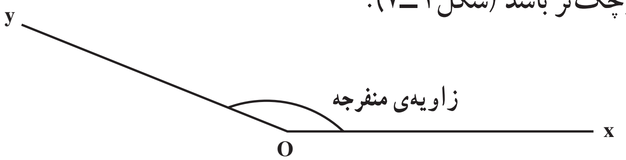
شکل ۱ــ۵

زاویه‌ی حاده یا زاویه‌ی تند: زاویه‌ای است که از زاویه‌ی قائمه کوچک‌تر است (شکل ۱ــ۶).



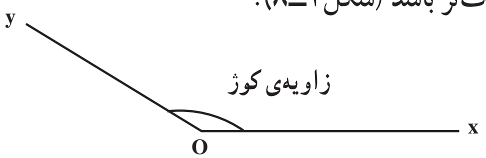
شکل ۱ــ۶

زاویه‌ی منفرجه یا زاویه‌ی باز: زاویه‌ای است که اندازه‌ی آن از زاویه‌ی قائمه بزرگ‌تر و از زاویه‌ی نیم‌صفحه کوچک‌تر باشد (شکل ۱ــ۷).



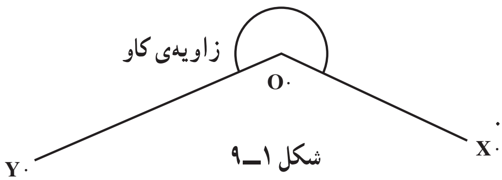
شکل ۱ــ۷

زاویه‌ی کوژ (محدب): زاویه‌ای است که از زاویه‌ی نیم‌صفحه کوچک‌تر باشد (شکل ۱ــ۸).



شکل ۱ــ۸

زاویه‌ی کاو (مقعر): زاویه‌ای است که از زاویه‌ی نیم‌صفحه بزرگ‌تر است (شکل ۱ــ۹).

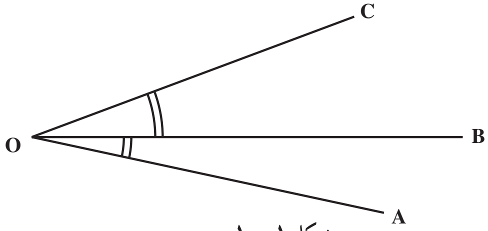


شکل ۱ــ۹

۱ــ۴ــ حالات دو زاویه نسبت به‌هم

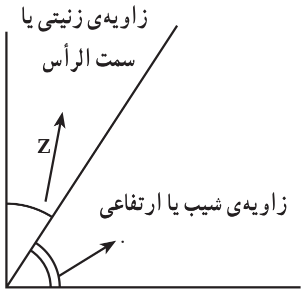
دو زاویه نسبت به‌هم ممکن است : مجاور، متمم، مکمل، مجانب و متقابل به رأس باشند.

دو زاویه‌ی مجاور : دو زاویه‌ای هستند که در رأس و یک ضلع مشترکند و دو ضلع غیرمشترک آن‌ها در دو طرف ضلع مشترکشان قرار دارد؛ مانند دو زاویه‌ی $\angle AOB$ و $\angle BOC$ (شکل ۱ــ۱۰).

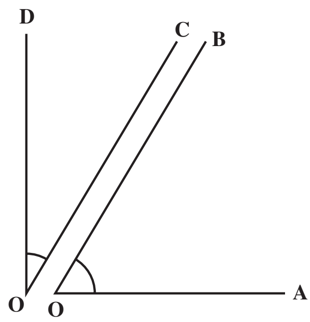


شکل ۱ــ۱۰

دو زاویه‌ی متمم : دو زاویه‌ای هستند که مجموع آن‌ها یک زاویه‌ی قائمه باشد؛ مانند دو زاویه‌ی متمم $\angle AOB$ و $\angle COD$ (شکل ۱ــ۱۱)، هم‌چنین دو زاویه‌ی $\angle Z$ و $\angle \alpha$، (شکل ۱ــ۱۲).



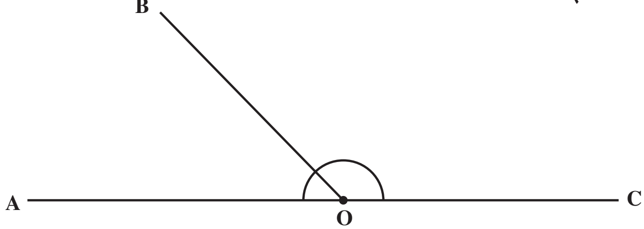
شکل ۱ــ۱۲



شکل ۱ــ۱۱

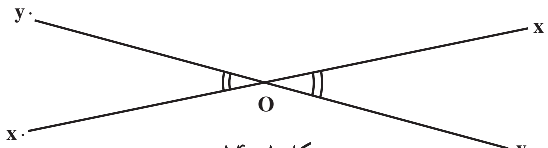
دو زاویه‌ی مکمل : دو زاویه‌ای هستند که مجموع آن‌ها ۱۸۰ درجه باشد.

دو زاویه‌ی مجانب : دو زاویه‌ی مجاوری است که مجموع آن‌ها ۱۸۰° باشد؛ مانند دو زاویه‌ی $\angle AOB$ و $\angle COB$ (شکل ۱ــ۱۳).



شکل ۱ــ۱۳

دو زاویه‌ی متقابل به رأس: دو زاویه‌ای است که در رأس، مشترک و هر ضلع یک زاویه در امتداد ضلع زاویه‌ی دیگر است و دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند ؛ مانند دو زاویه‌ی xoy # و x.oy. # (شکل ۱ــ۱۴).



شکل ۱ــ۱۴

۱ــ۵ــ واحدهای زاویه

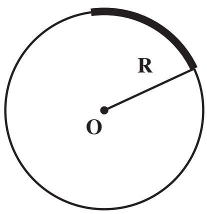
برای اندازه‌گیری زاویه واحدهایی را تعریف کرده‌اند که از آن‌جمله است : درجه، گراد، رادیان.

تعریف درجه (Degree): زاویه‌ی مقابل به $\frac{۱}{۳۶۰}$ پیرامون دایره را «درجه» گویند. اگر درجه را به ۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک دقیقه می‌گویند و هرگاه یک دقیقه را به ۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک ثانیه می‌نامند. برای مثال کمان سی‌وشش درجه و بیست و چهار دقیقه و پانزده ثانیه به‌صورت : ..۱۵ ,.۲۴, ۳۶ نمایش داده می‌شود.

(: درجه، . :دقیقه و .. : ثانیه)

گراد (Gon): زاویه‌ی مقابل به $\frac{۱}{۴۰۰}$ محیط دایره را «گراد» گویند و $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد را «دقیقه‌ی گرادی» و $\frac{۱}{۱۰۰}$ دقیقه‌ی گرادی را «ثانیه‌ی گرادی» گویند. عدد گراد به‌صورت اعشاری نوشته می‌شود. به‌طوری که ارقام صحیح نشان‌دهنده‌ی «گراد» و دو رقم اول اعشاری نشان دهنده‌ی «دقیقه‌ی گرادی» و ارقام سوم و چهارم اعشاری نشان‌دهنده‌ی «ثانیه‌ی گرادی» است ؛ مانند : ۸۵ درجه‌ی گرادی و ۴۳ دقیقه و ۷۵ ثانیه. عدد : ۸۵/۴۳۷۵ با حرف gr نمایش داده می‌شود.

رادیان(Radian): اندازه‌ی زاویه‌ی مقابل به قوسی از پیرامون یک دایره که برابر شعاع همان دایره باشد یک «رادیان» گویند.



شکل ۱ــ۱۵

تبدیل واحدهای زاویه به یک‌دیگر: برای تبدیل واحدهای زاویه به یک‌دیگر ــ با توجه به تعاریف آن‌ها ــ از این فرمول استفاده می‌شود :

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}$$

تذکر: هر نوع واحد زاویه با یک نماد مشخصی نمایش داده می‌شود ؛ مانند : درجه به حرف «D»، گراد به حرف «G» و رادیان به حرف «R».

مــثــال ۱ــ۱: زاویـــه‌ی α کـه تـوسـط زاویـه‌یـاب درجـه‌ای انـدازه‌گـیـری شـده برابر $\alpha = ۲۵°, ۴۲', ۳۰''$ می‌باشد می‌خواهیم بدانیم زاویه فوق برابر چند گراد و چند رادیان است؟

راهکار کلی: ما برای حل این گونه مسائل از فرمول کلی $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}$ که D نماد درجه و G گراد و R رادیان می‌باشد استفاده می‌کنیم و برای حل، هر پارامتر را که معلوم است به جای خود قرار داده و مجهولات دیگر را به‌دست می‌آوریم.

روش حل: معلومات طبق فرض مسئله $D = ۲۵°, ۴۲', ۳۰''$ و مجهولات R و G هستند حال ابتدا برای به‌دست آوردن گراد رابطه $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}$ را در نظر می‌گیریم و به جای D مقدار $۲۵°, ۴۲', ۳۰''$ را قرار داده و مجهول G را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۲۵°, ۴۲', ۳۰''}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰} \Rightarrow ۱۸۰ \times G = ۲۰۰ \times (۲۵°, ۴۲', ۳۰'')$$

$$G = \frac{۲۰۰ \times (۲۵°, ۴۲', ۳۰'')}{۱۸۰} = ۲۸/۵۶۴۸ \quad \text{گراد}$$

(**تذکر:** در محاسبه این فرمول از ماشین‌حساب استفاده کرده مُد درجه را به کار می‌بریم)

سپس برای محاسبه رادیان (R) در فرمول $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$ به جای D مقدار $۲۵°, ۴۲', ۳۰'$ را قرار داده و مقدار R (رادیان) را به‌دست می‌آوریم.

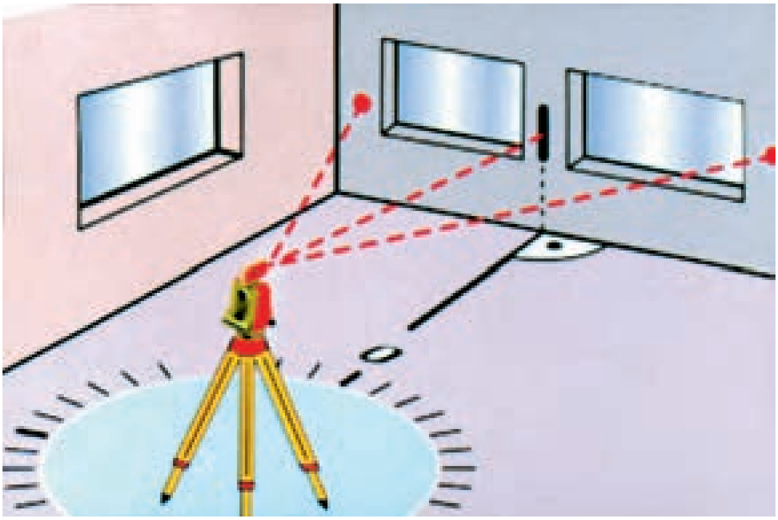
$$\frac{۲۵°, ۴۲', ۳۰''}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{(۲۵°, ۴۲', ۳۰'') \times \pi}{۱۸۰} = ۰/۴۴۰۶۹ \text{رادیان}$$

بحث و بررسی: از این مثال نتیجه‌گیری می‌کنیم که اگر ما با زاویه یا بهای درجه‌ای یا گرادی کار کنیم با این رابطه می‌توانیم معادل آن را با واحدهای دیگر به‌دست آوریم و در محاسبات و فرمول‌های نقشه‌برداری از آن استفاده کنیم.

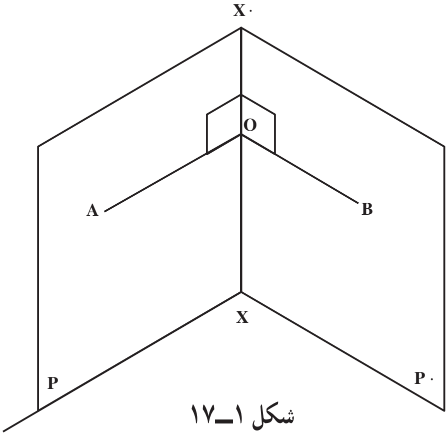
۱ـ۶ـ تعریف فرجه

مجموعه‌ای از نقاط فضا که بین دو نیم‌صفحه با مرز مشترک محدود باشد «فرجه» نام دارد. مرز مشترک دو صفحه را «یال فرجه» و هر نیم‌صفحه را «وجه فرجه» و زاویه‌ی بین دو نیم‌صفحه را «اندازه‌ی فرجه» می‌نامند.

مسطحه‌ی فرجه: زاویه‌ی فرجه یا زاویه‌ی بین دو صفحه را «مسطحه‌ی فرجه» گویند. اگر از نقطه‌ی O روی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و .P نیم‌خط OA داخل صفحه‌ی P و نیم‌خط OB داخل صفحه‌ی .P را عمود بر فصل مشترک .xx رسم کنیم زاویه‌ی $A\hat{O}B$ «مسطحه‌ی فرجه» نامیده می‌شود (شکل ۱ـ۱۷).

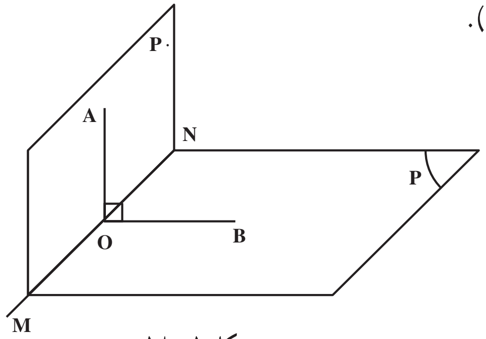


شکل ۱ـ۱۶ـ نمایش اندازه‌گیری زاویه‌ی افقی



شکل ۱ـ۱۷

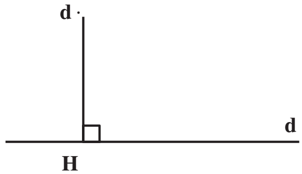
دو صفحه‌ی عمود برهم: دو صفحه را وقتی عمود برهم گویند که مسطحه‌ی فرجه‌ی آن قائمه باشد (شکل ۱ـ۱۸).



شکل ۱ـ۱۸

۱ـ۷ـ عمود و مایل

تعریف خط عمود بر یک خط: هرگاه زاویه‌ی بین دو خط d و d' قائم باشد آن‌ها نسبت به‌هم عمودند.

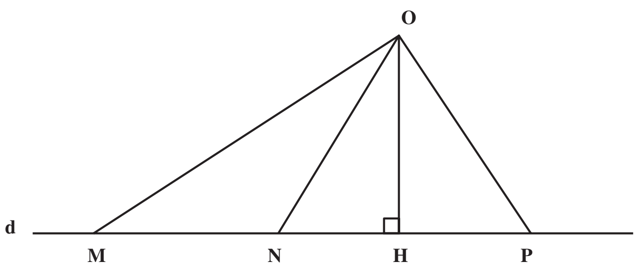


شکل ۱ـ۱۹

اصل: از یک نقطه‌ی خارج یک خط فقط یک خط می‌توان بر آن عمود رسم کرد و محل تلاقی خط عمود d' را بر d (نقطه‌ی H) «پای عمود» گویند.

۱ـ۸ـ عمود و مایل در صفحه

در یک صفحه از یک نقطه، مانند O، می‌توان بی‌نهایت خط رسم کرد که خط d را مطابق شکل ۱ـ۲۰ قطع کنند و از این بی‌نهایت خط فقط یک خط مانند OH عمود بر خط d هستند و بقیه‌ی خطوط نسبت به d مایل بوده نقاط M و N پای مایل‌های OM و ON هستند.



شکل ۱ـ۲۰

قضیه:

الف) طول عمود از طول هر مایلی کوچک‌تر است.

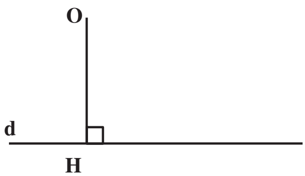
ب) اگر پای هر دو مایل از پای عمود به یک فاصله باشد طول آن دو مایل برابرند و به عکس.

ج)از هر دو مایل مایلی بزرگ‌تر است که پایش از پای عمود دورتر باشد.

شکل ۱ــ۲۱ــ یک نمونه از کاربرد خاصیت عمود و مایل در نقشه‌برداری

اندازه‌گیری طول افقی: اگر در مترکشی در حالتی که یک‌طرف متر در یک نقطه‌ی ثابت (روی بلندی) و طرف دیگر آن در امتداد ریسمان شاغولی بالا و پایین برده شود تا کم‌ترین اندازه را بخوانیم در این‌صورت امتداد متر افقی است زیرا طبق قضیه عمود کوتاه‌تر از مایل است بنابراین امتداد متر بر امتداد ریسمان شاغول عمود است و در نتیجه افقی می‌باشد.

فاصله‌ی نقطه تا خط: عبارت است از طول عمودی که از آن نقطه بر خط فرود آید (مطابق شکل ۱ــ۲۲ طول OH).

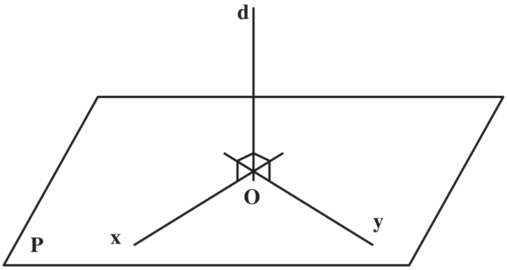


شکل ۱ــ۲۲

۱ــ۹ــعمود و مایل در فضا

تعریف خط عمود بر یک صفحه: قضیه: هرگاه خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشد بر آن صفحه عمود است.

قضیه: هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد بر تمام خطوط آن صفحه عمود است. «از یک نقطه فقط یک خط می‌توان بر صفحه عمود کرد.»

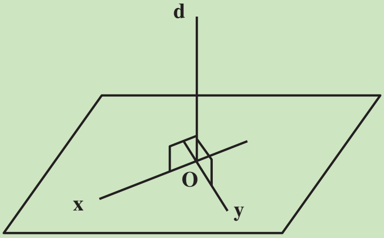


شکل ۱ــ۲۳

اثبات قضیه: می‌دانیم مطابق شکل ۳۹ــ۱ از هر نقطه مانند O خارج صفحه‌ی P بی‌نهایت خط می‌توان رسم کرد که تنها یک خط مانند OH عمود بر صفحه‌ی P است و بقیه‌ی خطوط نسبت به صفحه‌ی P مایل بوده، نقطه‌ی H پای عمود OH و نقاط M و N پای مایل‌های OM و ON هستند.

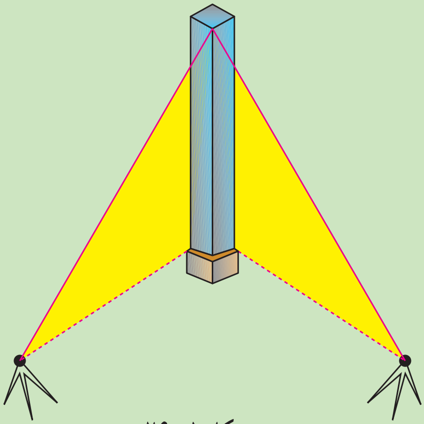
مثال ۱ــ۲: کاربرد خاصیت خط عمود بر یک صفحه در برپایی یک ستون قائم. می‌خواهیم یک ستون فلزی ساخته شده را روی صفحه ستون به‌صورت قائم نصب و جوشکاری نماییم.

راهکار کلی: می‌دانیم طبق قضیه وقتی یک خط بر یک صفحه عمود است که بر دو خط متقاطع از صفحه عمود باشد یعنی مطابق شکل زیر تنها عمود بودن ستون od بر خط oy کافی نیست بلکه باید بر خط ox نیز عمود باشد و در عمل با استفاده از دو دوربین زاویه‌یاب به‌صورت زیر اجرا می‌کنیم.

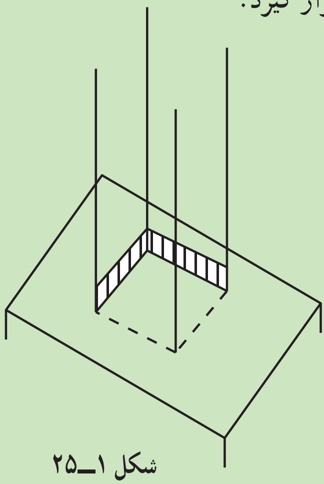


شکل ۱ــ۲۴

روش حل: ابتدا (به‌وسیله دو عدد نبشی به‌صورت شکل ۱ــ۲۵) محل ستون را در روی صفحه ستون مشخص می‌کنیم و سپس ستون را با جرثقیل در محل خود قرار داده و برای تثبیت آن به شکل قائم هم‌زمان از دو زاویه‌یاب طبق شکل مستقر می‌کنیم و هر دو دوربین را به یک لبه ستون نشانه‌روی کرده و امتداد قائم تار رتیکول آن‌ها را روی لبه ستون قرار می‌دهیم. وقتی ستون به طور صحیح و دقیق عمود بر صفحه ستون است که امتداد قائم تار رتیکول هر دو زاویه‌یاب درست بر یک لبه ستون قرار گیرد.



شکل ۱ــ۲۶

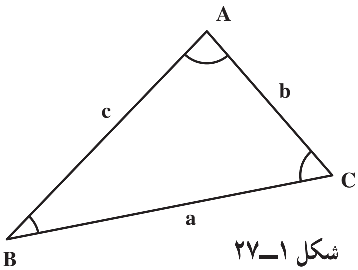


شکل ۱ــ۲۵

بحث و بررسی: نکته مهمی که برای نصب ستون عمود بر صفحه یا سطح تراز وجود دارد حداقل باید امتداد ستون از دو طرف کنترل شود یا به عبارت دیگر در یک زمان دو دوربین زاویه‌یاب باید مستقر و ستون را کنترل نمود.

۱ــ۱۰ــتعریف مثلث (Triangle)

اگر سه خط دو به دو یک‌دیگر را قطع کنند ؛ شکل ایجاد شده را «مثلث» می‌نامند. به عبارت دیگر اگر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست را دو به دو به یک‌دیگر وصل کنیم ؛ شکل به‌دست آمده را مثلث گویند (شکل ۱ــ۲۷).



شکل ۱ــ۲۷

سه ضلع و سه زاویه‌ی هر مثلث را «اجزای اصلی مثلث» می‌نامند.

اندازه‌ی هر ضلع مثلث را با حرف کوچک رأس مقابل به آن نمایش می‌دهند.

در هر مثلث همواره اندازه‌ی یک ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است مثلاً $a . b . c$

در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر ۱۸۰ درجه (یا ۲۰۰ گراد) می‌باشد.

$\dot{A}. \dot{B}. \dot{C}$. ۱۸۰

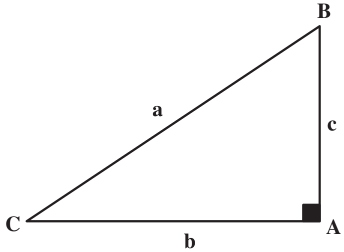
انواع مثلث

مثلث قائم‌الزاویه: اگر دو ضلع مثلث بر هم عمود باشند؛ مثلث را «قائم‌الزاویه» می‌نامند؛ بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا قائمه است (شکل ۱ــ۲۸).

$\dot{A}$. ۹۰

$\dot{B}. \dot{C}$. ۹۰

$a . b$ و $a . c$



شکل ۱ــ۲۸

یک مثلث قائم‌الزاویه در سه حالت زیر معلوم و قابل ترسیم است:

الف ــ وتر و یک ضلع معلوم

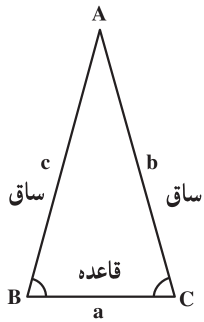
ب ــ وتر و یک زاویه

ج ــ دو ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه

مثلث متساوی‌الساقین: اگر دو ضلع مثلثی با هم برابر باشند؛ مثلث را «متساوی‌الساقین» گویند (شکل ۱ــ۲۹).

$b . c$

$\dot{B} . \dot{C}$



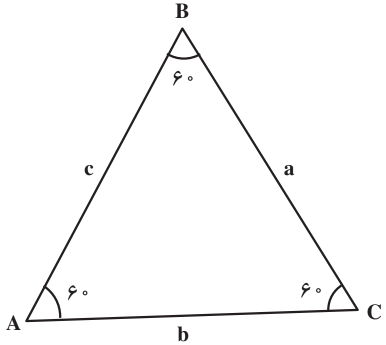
شکل ۱ــ۲۹

مثلث متساوی‌الاضلاع: اگر سه ضلع مثلث با هم برابر باشند ؛ مثلث را «متساوی‌الاضلاع» می‌نامند.

تذکر: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه زاویه با هم برابرند و هر یک مساوی ۶۰ درجه است (شکل ۱ـ ۳۰).

$\hat{A} . \hat{B} . \hat{C} .$ ۶۰

a . b . c



شکل ۱ـ ۳۰

خودآزمایی

۱ـ برای شناساندن مفهوم هندسی به دیگران چه باید کرد و چه شرایطی را باید درنظر گرفت؟

۲ـ هریک از این عبارات را چنان کامل کنید که یک گزاره‌ی درست یا یک حکم درست حاصل شود :

الف) بعضی از تعریف‌ها تعریف قبلی ندارند و خود ..... هستند. این‌گونه موارد را ..... می‌نامیم و بدون تعریف آن‌ها را می‌پذیریم.

ب) نقطه، خط، صفحه و فضا از مفاهیم ..... هستند.

ج) یک جمله‌ی ..... را گزاره می‌گویند.

د) مجموع دو عدد ۶ و ۴ عدد ۱۵ می‌شود، یک گزاره‌ی ..... است.

هـ) استدلال برای اثبات درستی یک ..... به کمک گزاره‌هایی که قبلاً درستی آن‌ها پذیرفته شده ..... گویند.

و) هر گزاره‌ای که برای اثبات درست بودنش از ..... استفاده شود ..... نامیده می‌شود.

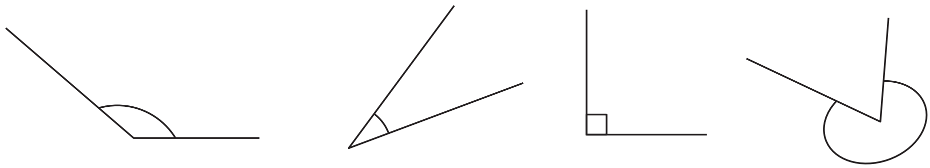
۳ـ در تمرین‌های زیر گزاره‌های درست را با حرف «د» و گزاره‌های نادرست را با حرف «ن» مشخص کنید.

الف) اصل گزاره‌ای است که درستی آن را با اثبات می‌پذیریم. ☐

ب) از هر نقطه خارج یک خط می‌توان بیش از یک خط موازی آن رسم کرد. ☐

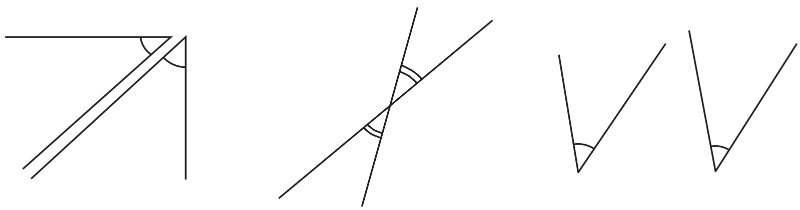
ج) مکان هندسی، مجموعه نقاطی است که همه‌ی آن نقاط دارای ویژگی هندسی مشترکی باشند. ☐

۴ــ در شکل ۱ــ۳۱ زاویه‌های کوژ و کاو را معین کنید.



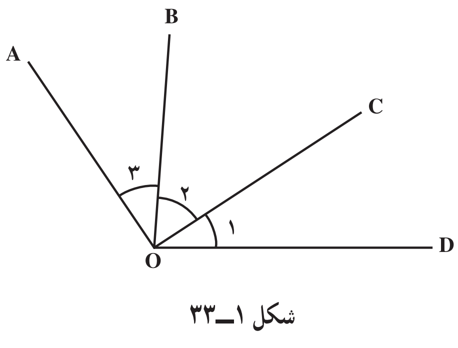
شکل ۱ــ۳۱

۵ــ در شکل‌های زیر کدام‌یک از دو زاویه نسبت به هم مجاور، متقابل یا مجانب هستند؟



شکل ۱ــ۳۲

۶ــ با استفاده از خاصیت دو زاویه‌ی متمم اگر ضلع AO عمود بر OC و BO عمود بر OD باشد ثابت کنید: $\angle AOB = \angle COD$ یعنی $\hat{۳} = \hat{۱}$



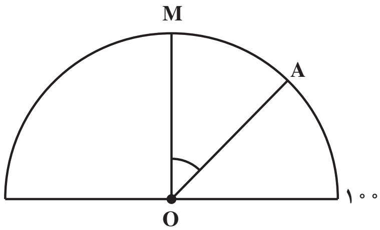
شکل ۱ــ۳۳

۷ــ دو زاویه‌ی شیب و زنیتی در دوربین‌های زاویه‌یاب نسبت به‌هم چگونه‌اند؟ اگر با یک دوربین زاویه‌یاب زاویه زنیتی آن .۲۳, ۸۵ باشد، زاویه‌ی شیب آن چند درجه است؟

۸ــ زاویه‌ی فراز و نشیب را تعریف کنید و کاربرد آن‌ها را در عمران بنویسید.

۹ــ .۲۷, ۳۵ چند گراد و چند رادیان است؟

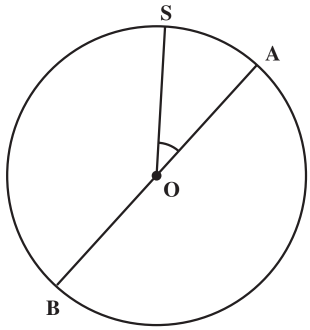
۱۰ــ مطابق شکل ۱ــ۳۴ که لمب قائمی را نمایش می‌دهد اگر زاویه‌ی گراد ۴۶ / ۵۸ . MOA # باشد زاویه‌ی شیب چند درجه است؟



شکل ۱ــ۳۴

۱۱ــ آیا دو زاویه‌ی ۱۷۶ گراد و .۳۶, ۲۱ مکمل یک‌دیگر هستند؟

۱۲ــ مطابق شکل ۱ــ۳۵ زاویه‌ی SOA # .۴۵, ۲۳ است. زاویه‌ی مقابل به کمان SAB # چند گراد و چند رادیان است؟

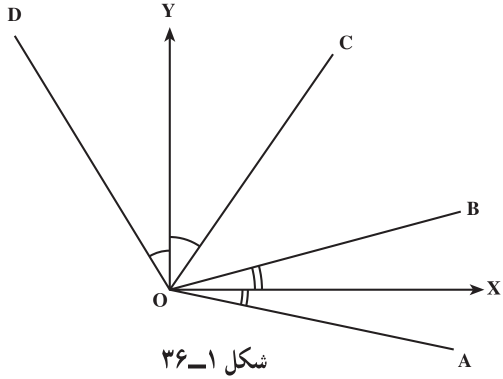


شکل ۱ــ۳۵

۱۳ــ ضلع‌های غیرمشترک دو زاویه‌ی مجاور بر هم عمودند اگر یکی از آن دو زاویه برابر ۳۰ گراد باشد، زاویه‌ی دیگر چند درجه است؟

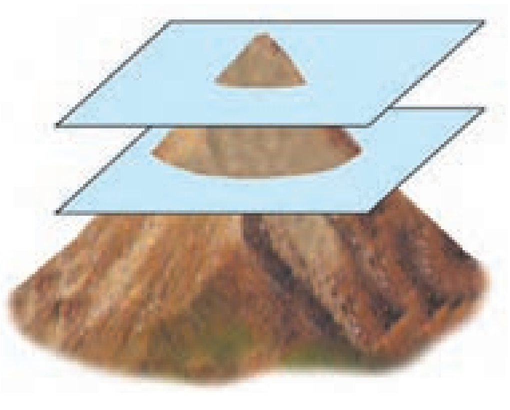
۱۴ــ از چهار زاویه‌ی مجاور . ،% ،& و . که حول نقطه‌ی M تشکیل شده‌اند زاویه‌های ۵۸ . . گراد ،.۳۰, ۸۷ %. و $\frac{۲}{۳}$ & رادیان هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی . چند درجه است؟

۱۵ــ زاویه‌ی قائمه‌ی xoy # داده شده است اگر ox نیم‌ساز زاویه‌ی AOB # و oy نیز نیم‌ساز زاویه‌ی COD # باشد، ثابت کنید که زاویه‌های AOC # و BOD # مکمل هستند (شکل ۱ــ۳۶).



شکل ۱ــ۳۶

۱۶ــ در شکل ۱ــ۳۷، قله‌ی کوه با صفحات موازی برش خورده است. چرا مقاطع و محیط‌های آن‌ها با یک‌دیگر موازی‌اند؟ اگر صفحات، متساوی‌الفاصله باشند فصل مشترک صفحات موازی با سطح کوه منحنی‌هایی را تشکیل می‌دهند. این منحنی‌ها در نقشه‌برداری چه نامیده می‌شود و چه کاربردی دارد؟



شکل ۱ــ۳۷

۱۷ــ آیا می‌توان مسطحه‌ی هر فرجه را با دوربین زاویه‌یاب اندازه‌گیری کرد؟ اصولاً چه نوع زاویه‌هایی را می‌توان به وسیله‌ی زاویه‌یاب اندازه‌گیری کرد؟

۱۸ــ برای برپا نمودن یک ستون به‌صورت عمود بر صفحه‌ی افق چه شرایطی باید برقرار

باشد؟ چگونه و با چه وسایلی باید این کار را انجام داد؟

۱۹ــ قضیه‌ی طول عمود کوتاه‌تر از طول مایل است. چه خاصیتی در مترکشی سطح شیب‌دار دارد که می‌توان از آن استفاده نمود؟

کارگروهی

دانش‌آموزان کلاس را به گروه‌های کوچک تقسیم کنید. برای هر گروه به صورت چرخشی در هر هفته سرگروه تعیین کنید. در هرگروه دانش‌آموزان به زبان خودشان درس را بازگو کنند و برای ارزیابی میزان یادگیری برای یکدیگر سؤال طرح کنند و پاسخ‌های دریافتی را ارزیابی کنند.

سه مسأله مهم دیگری که به نظر شما لازم بود در این بخش آورده می‌شد ولی جای آن خالی است.

فصل دوم

تصویر (Projection)

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ تصویر قائم یک نقطه بر یک خط راست را توضیح دهد.

۲ــ تصویر یک پاره‌خط بر یک خط راست را توضیح دهد.

۳ــ اندازه‌ی طول تصویر یک پاره‌خط را محاسبه کند.

۴ــ تصویر یک نقطه را بر یک صفحه تعریف کرده، فاصله‌ی یک نقطه از صفحه‌ی تصویر را توضیح دهد.

۵ــ تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه را تعریف کرده، روش اندازه‌گیری طول این تصویر را توضیح دهد.

۶ــ فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی را تعریف کرده، کاربرد آن را در نقشه‌برداری شرح دهد.

۷ــ زاویه‌ی شیب یا زاویه‌ی ارتفاعی را تعریف نموده، کاربردهای آن‌ها را در نقشه‌برداری بیان کند.

۸ــ تصویر یک زاویه بر یک صفحه را تعریف کند.

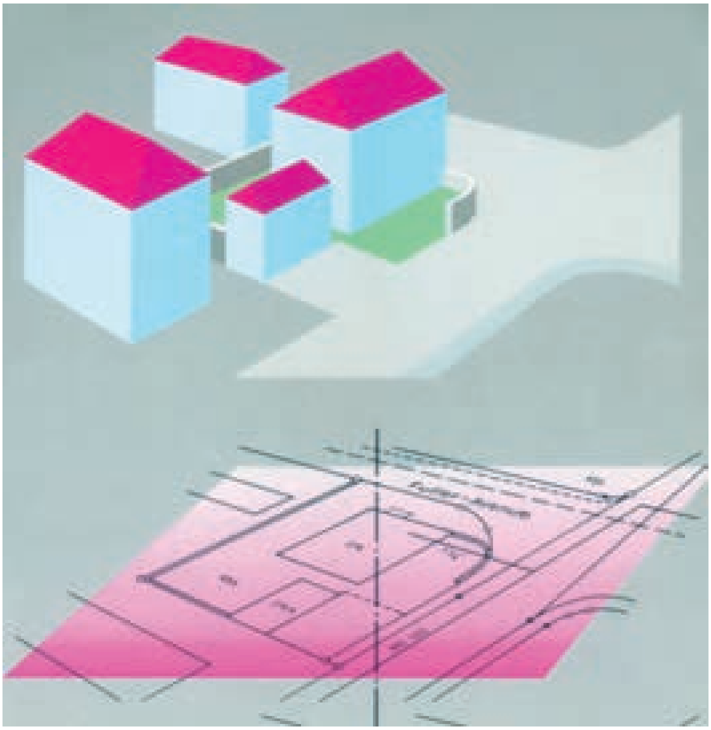
۹ــ زاویه‌ی افقی را تعریف کرده، کاربرد آن را در نقشه‌برداری توضیح دهد.

۱۰ــ زاویه‌ی زنیتی و زاویه‌ی سمت الرأسی را تعریف کرده، رابطه‌ی بین آن دو را بیان کند.

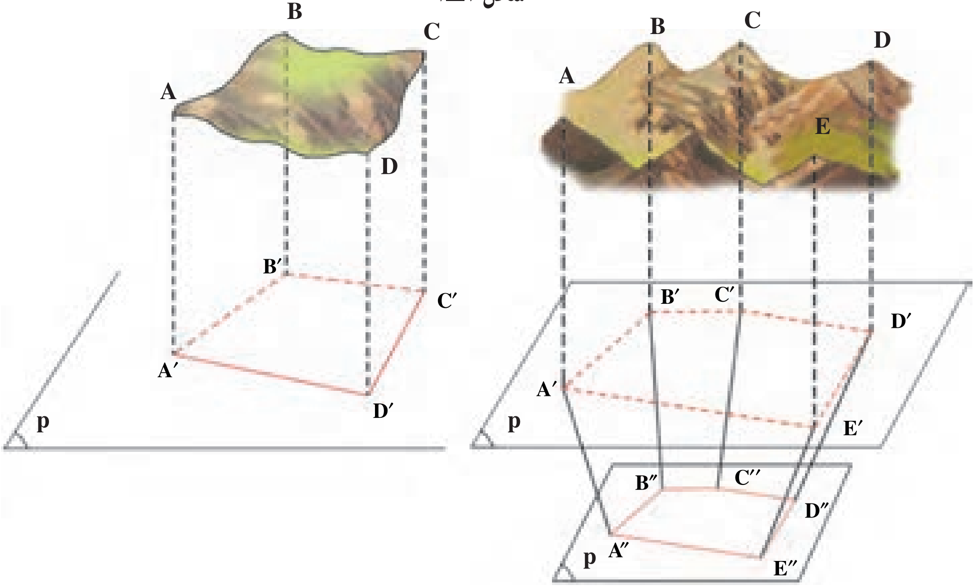
۱۱ــ با دانستن زاویه‌ی شیب یک امتداد بتواند زاویه‌ی زنیتی همان امتداد را محاسبه کند.

۱۲ــ با دانستن زاویه‌ی زنیتی یک امتداد بتواند زاویه‌ی شیب همان امتداد را محاسبه کند.

۱۳ــ مثال‌های حل شده‌ی فصل را فرا بگیرد.



شکل ۲ــ۱



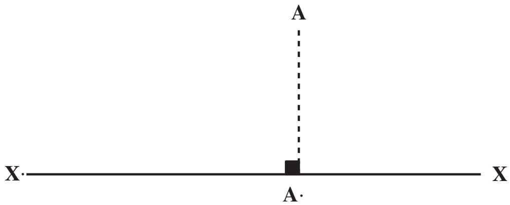
شکل ۲ــ۲ــ نقشه‌ی یک منطقه، تصویر افقی و کوچک شده‌ی سطح منطقه و عوارض آن بر روی یک صفحه‌ی افقی است.

۲ــ۱ــ تصویر قائم یک نقطه بر خط راست (Orthogonal Projection)

از نقطه‌ی A خطی بر x.x عمود می‌کنیم نقطه‌ی .A پای عمود را «تصویر قائم» و نقطه‌ی A بر خط x.x و عمود .AA را «مصوّر نقطه‌ی A» می‌نامند.

چون در این کتاب تنها تصویر قائم مورد نظر است از این پس هرجا سخن از تصویر قائم به‌میان آید برای اختصار کلمه‌ی «تصویر» را به‌کار می‌بریم و منظور از تصویر یک شکل، تصویر قائم آن شکل خواهد بود.

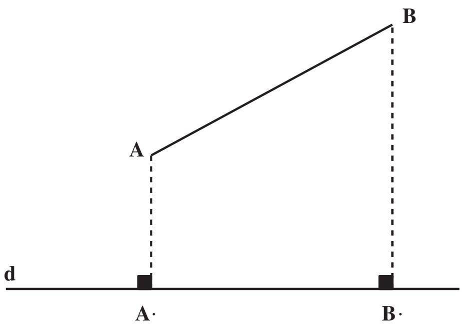
تذکر: تصویر هر نقطه روی خط x.x بر خود منطبق است.



شکل ۲ــ۳

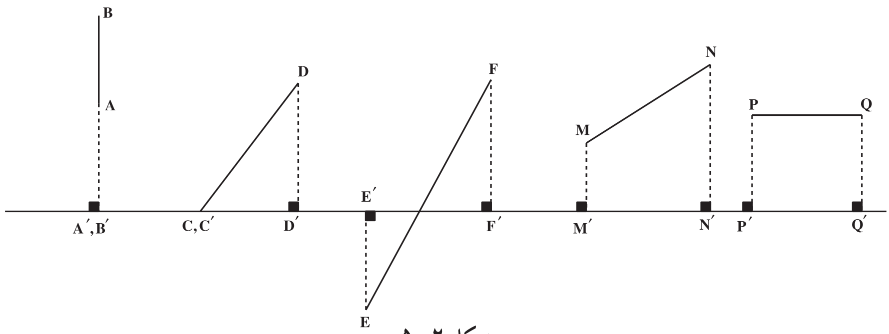
۲ــ۲ــتصویر پاره‌خط بر خط راست

اگر تصویر پاره‌خط AB بر خط d عمود نباشد تصویر آن پاره‌خط بر خط d پاره‌خطی است که دو سر آن تصاویر دو سر پاره‌خط مفروض باشند (شکل ۲ــ۴). در شکل ۲ــ۵ پاره‌خط .A.B تصویر پاره‌خط AB بر خط d است.



شکل ۲ــ۴

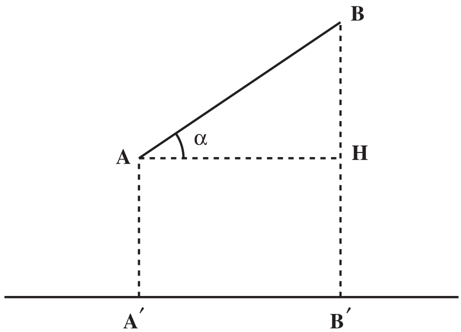
اگر پاره‌خط AB بر d عمود باشد، تصویر همه‌ی نقطه‌های AB یکی خواهد بود؛ درنتیجه تصویر پاره‌خط AB یک نقطه می‌شود.



شکل ۲ــ۵

۲ــ۳ــ اندازه‌ی تصویر (مقدار جبری تصویر یک پاره‌خط بر یک خط)

می‌خواهیم اندازه‌ی $A'B'$ را مطابق شکل زیر به‌دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه $B\overset{\Delta}{A}H$ داریم :



$$\cos\alpha = \frac{AH}{AB} \qquad «۱»$$

شکل ۲ــ۶

درنتیجه: $AH = AB\cos\alpha$ ؛ چون $A'B' = AH$ است.

بنابراین با جای‌گزینی در رابطه‌ی۱ : $A'B' = AB\cos\alpha$ است. از این‌رو، مقدار جبری تصویر یک پاره‌خط بر یک خط برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌ی پاره‌خط در کسینوس زاویه‌ی بین پاره‌خط و تصویر آن.

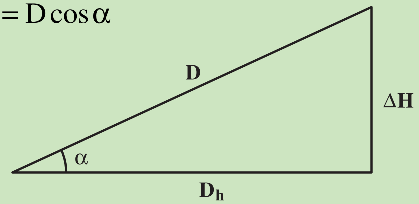
مثال ۲ــ۱: محاسبه طول افقی (تصویر افقی روی صفحه تراز) در صورتی‌که طول مایل و زاویه شیب آن معلوم باشند.

اندازه طول زمینی در سطح شیب‌دار که با افق زاویه $\alpha = ۴۶^\circ, ۲۵', ۳۶''$ می‌سازد ۲۴۹/۳۲ متر است مقدار آن در روی سطح افق چه‌قدر است؟

راهکار کلی: برای به‌دست آوردن طول افقی از روی زاویه شیب و طول مایل طبق فرمول و

شکل زیر به‌دست می‌آید مطابق شکل D طول مایل و D_h طول افقی و α زاویه شیب می‌باشد طبق تعریف کسینوس زاویه حاده در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با ضلع مجاور بر وتر بنابراین :

$$\cos\alpha = \frac{D_h}{D} \Rightarrow D_h = D\cos\alpha$$



شکل ۲ــ۷

در این فرمول مقدار D و α معلومند و D_h طول افقی از فرمول فوق محاسبه می‌شود.

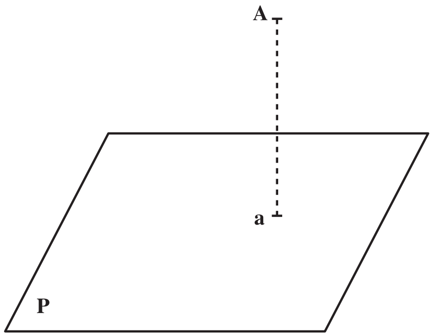
روش حل: از فرمول $D_h = D\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم مقدار D طول مایل معلوم و برابر است با ۲۴۹/۳۲ متر و مقدار زاویه شیب ″۳۶,′۲۵,°۴۶ می‌باشد پس از قراردادن در رابطه فوق و با استفاده از ماشین حساب مقدار طول افقی برابر می شود با

$$D_h = ۲۴۹/۳۲\cos(۴۶°,۲۵',۳۶'') = ۱۷۱/۸۵ \text{ متر}$$

بحث و بررسی: در نقشه‌برداری برای محاسبه مساحت یا برداشت و پیاده کردن نقاط طول افقی مورد نیاز می‌باشد بنابراین لازم است یا به صورت مستقیم یا مسئله فوق (غیرمستقیم) طول افق را به‌دست آوریم.

۲ــ۴ــ تصویر یک نقطه بر یک صفحه

اگر از نقطه‌ی A واقع در خارج صفحه خطی بر صفحه (تصویر) عمود کنیم و پای عمود را a بنامیم، نقطه‌ی a را «تصویر قائم نقطه‌ی A» می‌نامند (شکل ۲ــ۸).

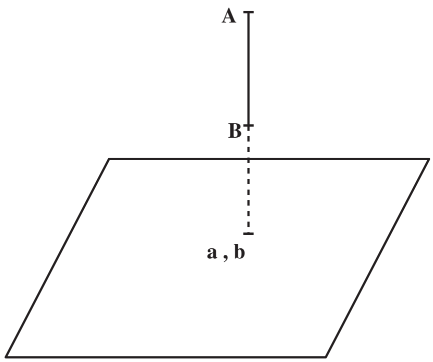


شکل ۲ــ۸

قضیه: هر نقطه فقط یک تصویر بر روی یک صفحه‌ی تصویر دارد.

۲ــ۵ــ فاصله‌ی یک نقطه تا صفحه‌ی تصویر

فاصله‌ی هر نقطه تا صفحه‌ی تصویر برابر است با طول عمودی که از آن نقطه بر آن صفحه رسم شود. در شکل ۲ــ۹ فاصله Aa است.

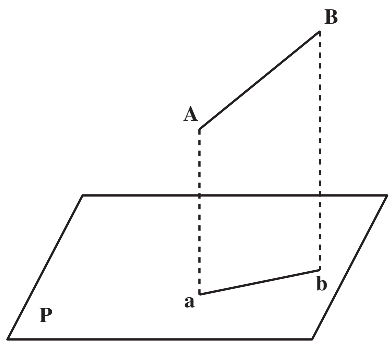


شکل ۲ــ۹

تذکر: اگر خط AB عمود بر صفحه‌ی تصویر باشد تصویر خط AB یک نقطه است.

۲ــ۶ــ تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه

تصویر پاره‌خط AB بر صفحه‌ی P عبارت است از پاره‌خط ab بر روی صفحه‌ی تصویر که از تصویر انتهای دو سر پاره‌خط AB به‌دست آمده باشد (شکل ۲ــ۱۰).



شکل ۲ــ۱۰

۲ــ۷ــ اندازه‌ی تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه

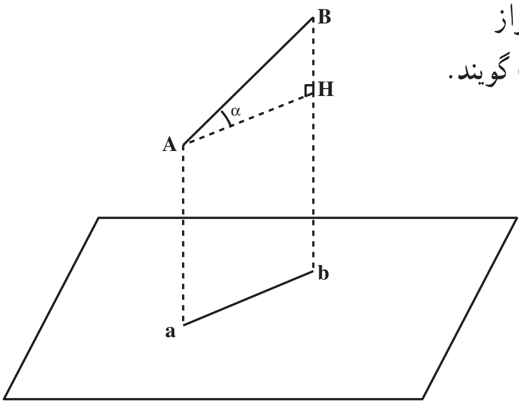
مطابق شکل ۲ــ۱۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $B\dot{A}H$ داریم : $\cos\alpha \,.\, \frac{AH}{AB}$

درنتیجه : $AH \,.\, AB\cos\alpha$

چون چهارضلعی AHab یک مستطیل است، بنابراین : $AH = ab$ است.

درنتیجه : $ab \,.\, AB\cos\alpha$

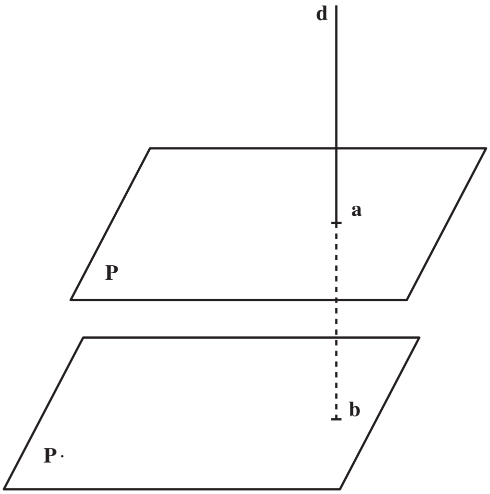
تذکر: اگر صفحه‌ی P موازی سطح تراز باشد زاویه‌ی α را «زاویه‌ی شیب خط AB» گویند.



شکل ۲ــ۱۱

۲ــ۸ــ فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی

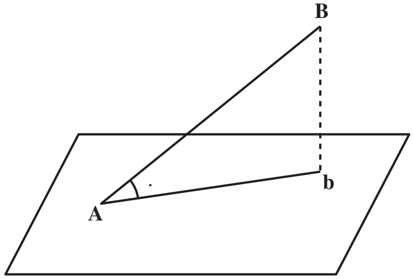
خط d را عمود بر دو صفحه‌ی موازی P و .P رسم می‌کنیم ؛ خط d صفحه‌ی P را در نقطه‌ی a و صفحه‌ی .P را در نقطه‌ی b قطع می‌کند. طول ab را «فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی» گویند (شکل ۲ــ۱۲).



شکل ۲ــ۱۲

۲ــ۹ــتعریف زاویه‌ی شیب و یا زاویه‌ی ارتفاعی (Slope Angle)

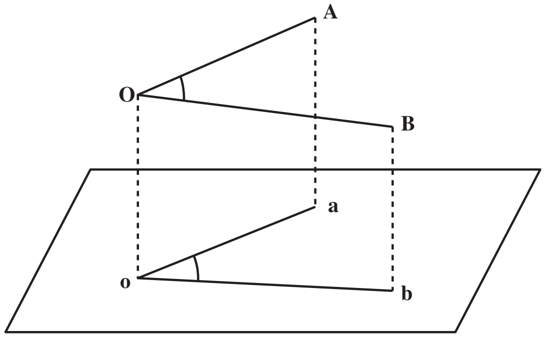
زاویه‌ای که هر پاره‌خط یا هر امتداد با تصویر خود روی صفحه‌ی افق می‌سازد را «زاویه‌ی شیب یا زاویه‌ی ارتفاعی آن پاره خط» گویند.



شکل ۲ــ۱۳

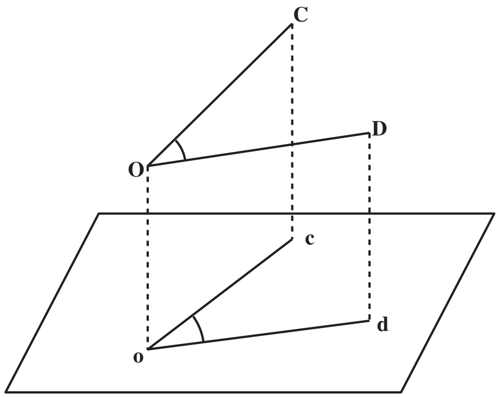
۲ــ۱۰ــتصویر یک زاویه بر یک صفحه

تصویر هر زاویه بر صفحه‌ی تصویر به وضعیت صفحه‌ی زاویه نسبت به صفحه‌ی تصویر بستگی دارد. اگر صفحه‌ی زاویه با صفحه‌ی تصویر موازی باشد؛ تصویر زاویه با خود زاویه مساوی می‌شود (شکل ۲ــ۱۴).



شکل ۲ــ۱۴

اگر صفحه‌ی زاویه نسبت به صفحه‌ی تصویر مایل باشد، مانند زاویه‌ی COD # برای به‌دست آوردن تصویر زاویه، تصاویر نقاط D،O و C را بر روی صفحه‌ی تصویر به‌دست می‌آوریم. نقاط d،o و c زاویه‌ی cod # بوده تصویر زاویه نیز COD # است (شکل ۲ــ۱۵).

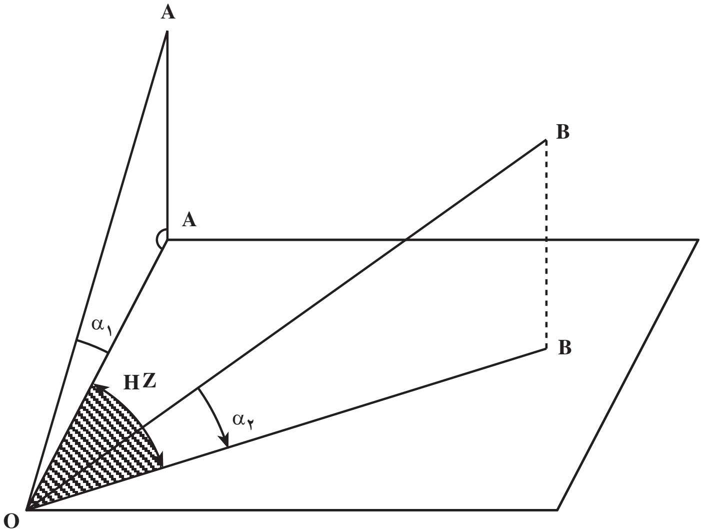


شکل ۲ــ۱۵

تذکر مهم: اگر صفحه‌ی P یک صفحه‌ی افقی باشد، تصویر زاویه‌ی COD # را «زاویه‌ی افقی» گویند. (صفحه‌ی افقی صفحه‌ای است که عمود بر امتداد شاغولی باشد.)

۲ــ۱۱ــ نمایش زاویه‌ی افقی (Horizontal Angle) و شیب (Slope Angle)

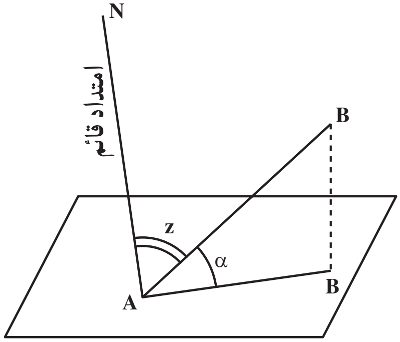
زاویه‌ی HZ (شکل ۲ــ۱۶) «زاویه‌ی افقی» و زوایای۱ . و ۲ . را «زوایای شیب» گویند.



شکل ۲ــ۱۶

۲ــ۱۲ــ تعریف زاویه‌ی زنیتی یا سمت‌الرأسی (Zenith Angle)

زاویه‌ای که امتداد AB با امتداد قائم بر صفحه‌ی افق گذرنده از A پدیدار می‌سازد «زاویه‌ی زنیتی یا سمت‌الرأسی» گویند. می‌دانیم که مجموع زوایای شیب و زنیتی ۹۰ درجه است :درجه ۹۰ . z . . (شکل ۲ــ۱۷).



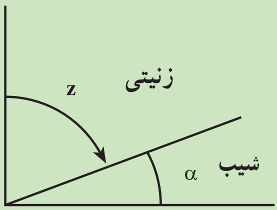
شکل ۲ــ۱۷

مثال ۲ــ۲: تبدیل زوایای زنیتی به زاویه‌ی شیب یا ارتفاعی

با دوربین تئودولیت (زاویه‌یاب زنیتی) پس از نشانه روی مقدار لمب قائم آن ″۲۴,′۳۷,°۸۴ قرائت شده است مقدار زاویه ارتفاعی آن را به‌دست آورید و یا به عبارت دیگر در فرمول‌های تاکئومتری به جای α چه مقدار را قرار دهیم.

راهکار کلی: می‌دانیم لمب قائم دوربین‌های تئودولیت به‌دوگونه ساخته می‌شود : ۱ــ صفر لمب قائم در امتداد افق است که در این حالت زاویه ارتفاعی یا شیب اندازه‌گیری می‌شود. ۲ــ صفر لمب قائم در امتداد قائم است که در این صورت زاویه‌ی زنیتی به‌دست می‌آید و این دو مقدار با هم برابر نیستند و در ربع اول دو زاویه زنیتی و ارتفاعی متمم یکدیگرند.

$$\alpha + z = ۹۰ \Rightarrow \alpha = ۹۰ - z$$

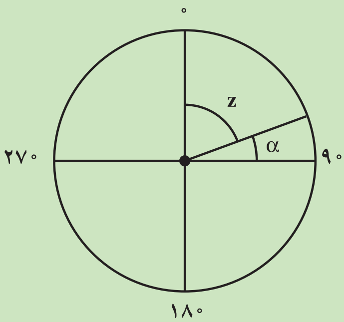


شکل ۲ــ۱۸

روش حل: در این مسئله طبق شکل زاویه قرائت شده زنیتی می‌باشد. بنابراین برای به‌دست آوردن زاویه ارتفاعی از رابطه $\alpha = ۹۰ - z$ استفاده می‌کنیم به‌طوری که مقدار $z = ۸۴^\circ, ۳۷', ۲۴''$ و مقدار α مجهول است در نتیجه :

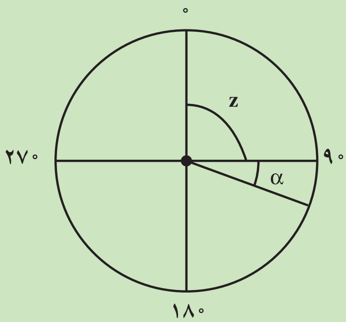
$$\alpha = ۹۰ - ۸۴^\circ, ۳۷', ۲۴'' = ۵^\circ, ۲۲', ۳۶''$$

بحث و بررسی: نتیجه می‌گیریم برای به‌دست آوردن مقدار زاویه شیب α از روی زاویه‌ی زنیتی z با توجه به شکل‌ها و حالات مختلف زیر آن‌را به‌دست آورد.



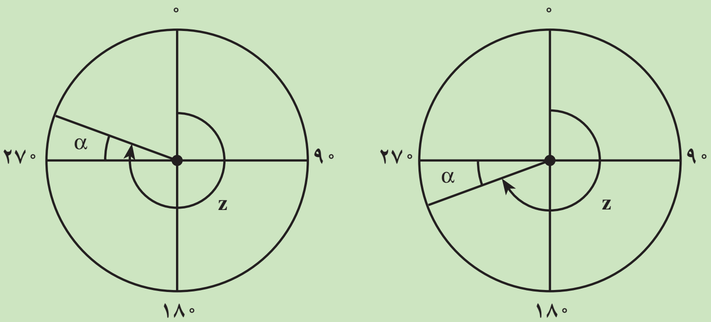
$\alpha = ۹۰ - z$

α بالای افق مثبت



$\alpha = ۹۰ - z$

α زیر افق منفی



α . z. ۲۷۰

α زیر افق منفی

α . z. ۲۷۰

زاویه‌ی α بالای افق مثبت

شکل ۲ــ۱۹

خودآزمایی

۱ــ در چه صورت تصویر شکل F بر یک محور یا بر یک صفحه، منحصر به یک نقطه است؟

۲ــ در چه صورت تصویر شکل F بر صفحه، یک خط راست است؟

۳ــ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) تصویرهای دو خط متوازی بر هر صفحه دو خط متوازی‌اند. □

ب) اگر تصویرهای دو خط بر یک صفحه موازی باشند آن دو خط متوازی‌اند. □

ج) تصویرهای دو پاره‌خط متساوی بر هر صفحه دو پاره‌خط متساوی‌اند. □

د) اگر تصویرهای دو پاره‌خط بر یک صفحه متساوی باشند آن دو پاره‌خط متساوی‌اند. □

هـ) اگر صفحه‌ی شکل مسطح بر صفحه‌ی تصویر عمود باشد تصویر قائم آن شکل منحصر به‌یک خط راست است. □

۴ــ ثابت کنید اندازه‌ی تصویر هر پاره‌خط بر یک خط برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌ی پاره‌خط در کسینوس زاویه‌ی بین پاره‌خط و تصویر آن.

۵ــ آیا به‌وسیله‌ی شاغول و ریسمان می‌توان یک نقطه را بر صفحه‌ی افق یا صفحه‌ی تراز، تصویر نمود؟ چرا؟

۶ــ تصویر هر زاویه روی صفحه‌ی افقی را زاویه‌ی...... گویند. این زاویه را به‌وسیله‌ی چه دوربینی اندازه‌گیری می‌کنند؟

۷ــ اندازه‌ی طول زمینی در سطح شیب‌دار که با افق زاویه‌ی ۳۰° ,۲۸. می‌سازد ۱۲۸/۲۵ متر است. مقدار آن در روی سطح افق چه‌قدر است؟

کارگروهی دانش‌آموزان

۱ــ برای این فصل هم مانند صفحه ۱۹ دانش آموزان درس را به زبان خود برای اعضای گروه با نظارت سرگروه خود بازگو کنند و با طرح سؤالات مربوط به درس میزان یادگیری گروه را ارزیابی کنند.

۲ــ پنج پرسش که قالب آن با متن پرسش‌های ۱ تا ۷ متفاوت باشد طرح کنید.

فصل سوم

کاربرد تشابه در نقشه‌برداری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

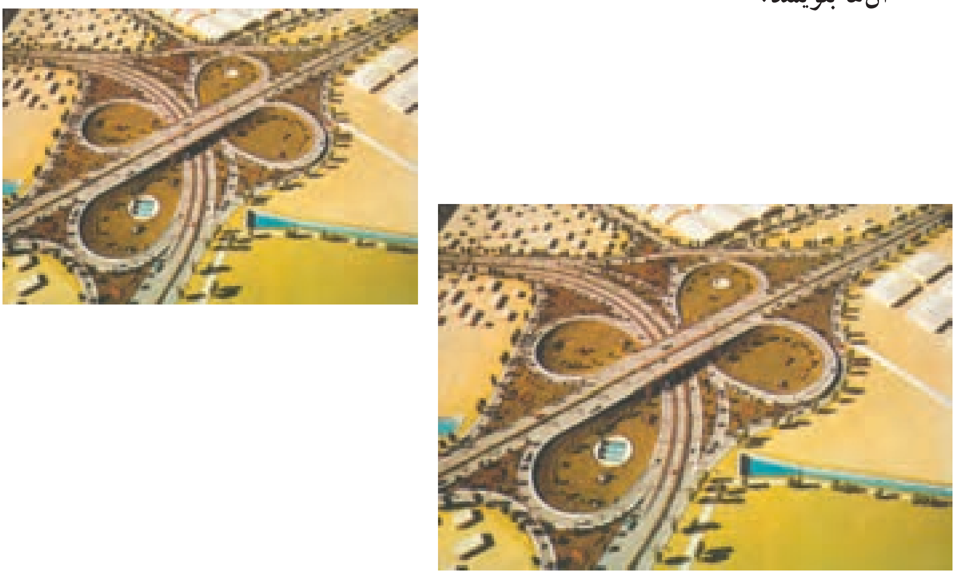
۱ــ اصطلاحات : پاره‌خط‌های متناسب، نسبت دو پاره‌خط، تناسب را شرح دهد و برای هر یک، مثالی بنویسد.

۲ــ قضیه‌ی تالس را بیان کند و درستی رابطه‌ی تالس را با یک مثال با رسم شکل شرح دهد.

۳ــ دو شکل متشابه را با رسم شکل توضیح دهد.

۴ــ حالت‌های مختلف دو مثلث متشابه را با رسم شکل شرح دهد و برای هر حالت یک مثال بیان کند.

۵ــ برای کاربرد تشابه حداقل ۷ مورد مختلف مثال عملیاتی را همراه راه حل آن‌ها بنویسد.



شکل ۳ــ۱ــ نمایش موضوع تشابه

۳ـ۱ـ پاره‌خط‌های متناسب

نسبت: نسبت دو مقدار از یک چیز عبارت است از خارج‌قسمت تقسیم اندازه‌های آن دو مقدار بر حسب یک واحد. نسبت دو مقدار عدد مطلق است ؛ بنابراین، برحسب واحد معین بیان نمی‌شود. نسبت دو مقدار را به‌صورت عدد کسری یا یک جفت مرتب اعداد نمایش می‌دهیم ؛ مانند :

$\frac{a}{b}$ و فرض (b ۰) است.(و یا نسبت a به b با فرض (b ۰))

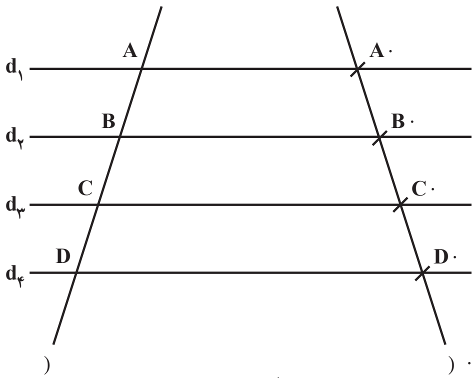
نسبت دو پاره‌خط: نسبت دو پاره‌خط، نسبت اندازه‌های آن‌ها بر حسب یک واحد طول است. نسبت دو پاره‌خط AB و CD را به‌صورت $\frac{AB}{CD}$ می‌نویسیم. اگر اندازه‌ی پاره‌خط AB مساوی ۳ سانتی‌متر و اندازه‌ی پاره‌خط CD مساوی ۶ سانتی‌متر باشد، نسبت : $\frac{۱}{۲}$. $\frac{۳}{۶}$. $\frac{AB}{CD}$ ، خواهد بود.

تناسب: تناسب رابطه‌ای است که تساوی دو نسبت را بیان می‌کند ؛ مانند رابطه‌ی : $\frac{c}{d}$. $\frac{a}{b}$.

۳ـ۲ـ قضایای تالس

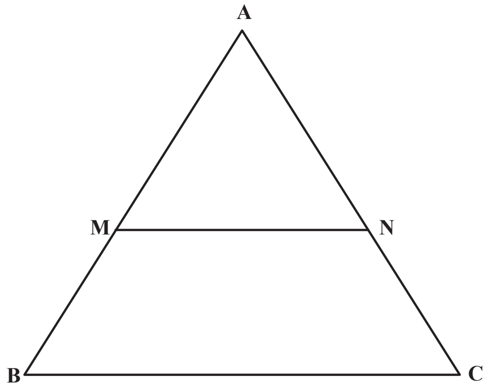
قضیه: اگر چند خط متوازی از یک صفحه یک ضلع را قطع کنند و بر آن پاره‌خط‌های متساوی پدید آورند بر هر خط دیگر که آن‌ها را قطع کند نیز پاره‌خط‌های متساوی پدید می‌آورند.

یعنی اگر در شکل ۳ـ۲ خط‌های متوازی d_1 و d_2 ... از صفحه‌ی P خط (را در نقاط A ، B و C و خط دیگر . (را در نقاط .A ، .B ، .C و ... قطع کرده باشند و AB . BC . CD . باشند، ثابت می‌شود : A.B. . B.C. . C.D. .



شکل ۳ـ۲

قضیه‌ی تالس: خطی که موازی یک ضلع مثلثی رسم شود بر دو ضلع دیگر یا بر امتداد آن‌ها پاره‌خط‌های متناظری پدید می‌آورد که با اضلاع متناظر از آن مثلث متناسبند. در شکل ۳ـ۳ ؛ برای نمونه در مثلث : $\overset{\triangle}{ABC}$ ، $MN \| BC$ فرض و حکم مثلث : $\frac{BM}{CN}$. $\frac{AM}{AN}$ می‌باشد.



شکل ۳ـ۳

قضیه: خطی که موازی یک ضلع مثلثی رسم شود با دو ضلع دیگر یا با امتدادهای آن‌ها مثلثی پدید می‌آورد که ضلع‌های آن نظیر به نظیر با اضلاع همان مثلث، متناسب می‌شود. برای نمونه در مثلث : $\overset{\triangle}{ABC}$ ، $MN \| BC$ فرض و $\frac{MN}{BC}$. $\frac{AN}{AC}$. $\frac{AM}{AB}$ حکم می‌باشد.

۳ـ۳ـ تشابه دو شکل

به دو شکل ۳ـ۱ نگاه کنید. چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی بین آن‌ها وجود دارد؟

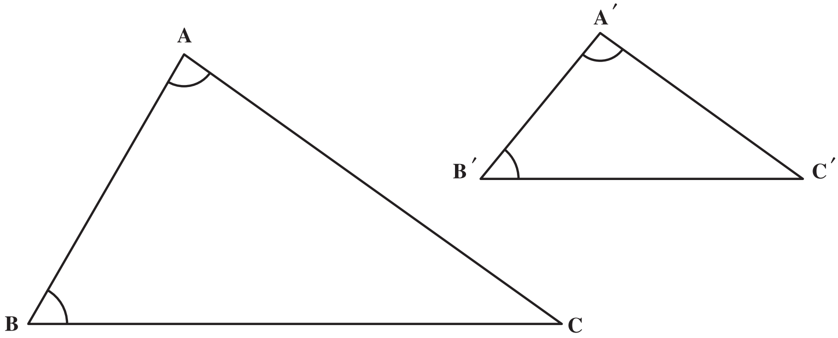
هر دو در واقع یک تصویر، اما با اندازه‌های مختلف هستند. این شکل‌های شبیه به‌هم را «متشابه» گویند. می‌بینید که تناسب بین بزرگی و کوچکی و فاصله‌های قسمت‌های مختلف در هر دو صورت یکی است و تفاوت فقط در اندازه‌های آن‌هاست. شکل‌های متشابه کاربردهای بسیاری در زندگی معمولی ما دارند.

برای مثال، یکی از بهترین راه‌های دادن نشانی (آدرس) به افراد، استفاده از نقشه است. نقشه، تصویری از دنیای واقعی در ابعاد کوچک‌تر و تشابه با آن است ؛ هم‌چنین برای ساختن یک ساختمان یا یک وسیله، طراحی ماکت آن که مشابه با ساختمان یا وسیله‌ی اصلی است، کمک مهمی به‌حساب می‌آید.

تشابه دو شکل هندسی: دو شکل هندسی را وقتی با هم «متشابه» گویند که اضلاع متناظر، متناسب باشند و زوایای نظیر به نظیر، مساوی یک‌دیگر باشند.

تشابه دو مثلث:

قضیه: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر مساوی باشند آن دو مثلث متشابه‌اند (شکل ۳ــ۴).

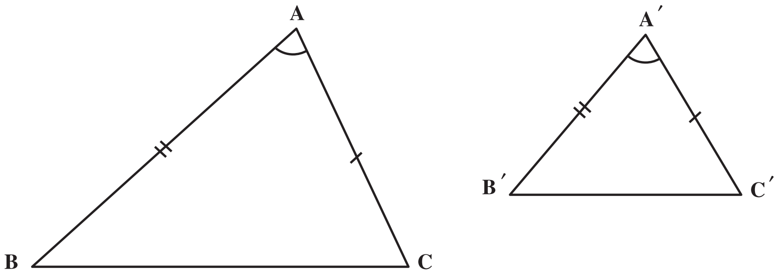


شکل ۳ــ۴

فرض: $\angle A=\angle A'$ و $\angle B=\angle B'$

حکم: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

قضیه: هرگاه یک زاویه از مثلثی با یک زاویه از مثلث دیگر متساوی و اضلاع این زاویه‌ها متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند (شکل ۳ ــ۵).

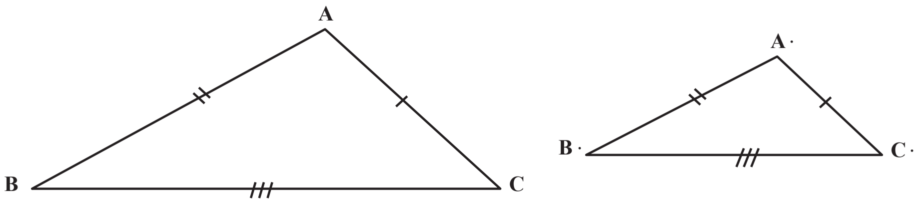


شکل ۳ــ۵

فرض: $\angle A=\angle A'$ و $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}$

حکم: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

قضیه : هرگاه سه ضلع مثلثی با سه ضلع مثلث دیگر نظیر به نظیر متناسب باشند ؛ دو مثلث متشابه‌اند (شکل ۳ــ۶).



شکل ۳ــ۶

فرض : $\frac{B.C.}{BC} \cdot \frac{A.C.}{AC} \cdot \frac{A.B.}{AB}$

حکم : $A.B.C. \sim ABC$.

۳ــ۴ــ کاربرد تشابه

کاربرد در سینما (شکل ۳ــ۷)

شکل ۳ــ۷

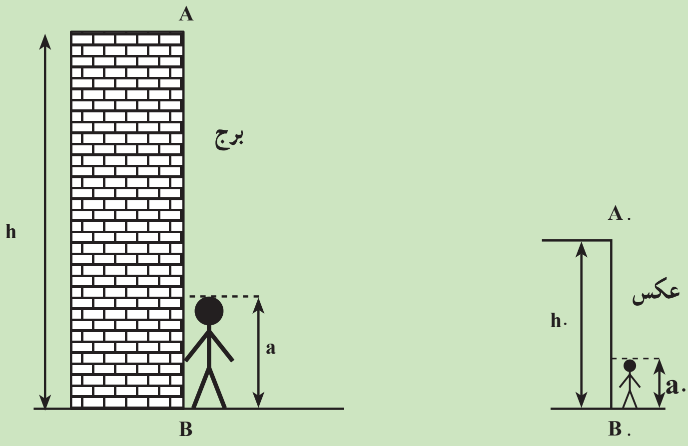
مثال ۳ــ۱ــ ارتفاع برج AB را با روش عکسبرداری (تشابه) به‌دست آورید.

راهکار کلی: اگر بخواهیم ارتفاع برج AB را به‌وسیله فن عکاسی تعیین کنیم برای این‌منظور شخصی در کنار برج می‌ایستد و سپس از برج و آن شخص عکس می‌گیریم اندازه‌ی ارتفاع برج و قد شخص را مطابق شکل به ترتیب h و a می‌نامیم و در عکس اندازه‌ی ارتفاع برج و قد شخص را (از روی عکس با خط‌کش) اندازه‌گیری می‌کنیم و آن‌ها را به ترتیب .h و .a می‌نامیم و هم‌چنین طول قد

شخص را که همان پارامتر a می‌باشد اندازه می‌گیریم با توجه به این که عکس با شکل اصلی متشابه است رابطه تشابه (که اضلاع متناظر متناسبند) را می‌نویسیم.

$$\frac{h}{a} . \frac{h.}{a.} . \quad a.h . \ ah. . \quad \boxed{h . \frac{ah.}{a.}}$$

با معلوم بودن مقادیر a و .h و .a مقدار h از فرمول فوق به‌دست می‌آید.

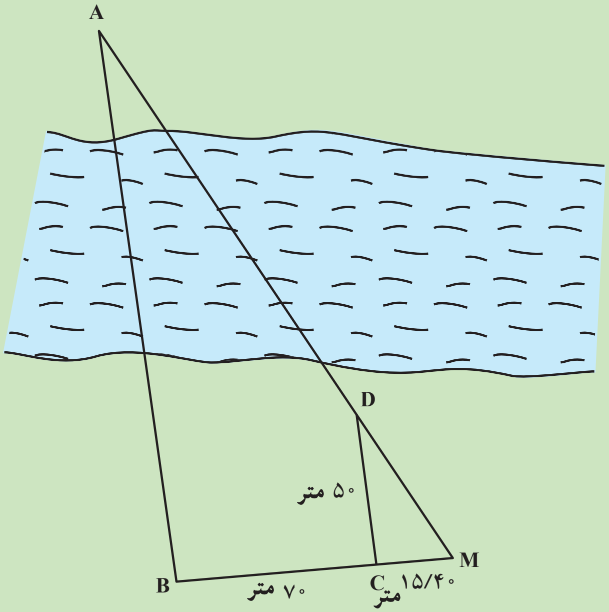


شکل ۳ــ۸

روش حل: با داشتن مقادیر a ارتفاع شخص و .a ارتفاع شخص روی عکس و .h ارتفاع برج روی عکس ارتفاع برج یعنی h به‌دست می‌آید.

بحث و بررسی: تشابه در حل مسائل نقشه‌برداری و فتوگرامتری کاربرد فراوان دارد.

مثال ۳ــ۲ــ برای اندازه‌گیری فاصله دو نقطه A و B که در دوطرف رودخانه قرار دارند و مترکشی به صورت مستقیم امکان‌پذیر نیست به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم (شکل۳ــ۹) از نقطه B عمودی به‌طول ۷۰ متر بر امتداد AB توسط گونیای مساحی روی زمین مشخص می‌کنیم و آن را C می‌نامیم و سپس از نقطه C عمود CD را به‌طول ۵۰ متر از نقطه C بر امتداد CB رسم می‌کنیم از تقاطع دو امتداد AD و BC نقطه M به‌دست می‌آید و طول MC را اندازه‌گیری کرده ۱۵/۴۰ متر می‌شود مطلوب است محاسبه طول AB.



شکل ۳ــ۹

راهکار کلی: برای حل این مسائل از خاصیت دو مثلث متشابه استفاده می‌کنیم در این شکل دو مثلث $M\hat{C}D$ و $M\hat{B}A$ باهم متشابه‌اند زیرا زاویه $\hat{M}$ در هر دو مشترک و زاویه ۹۰ . $\hat{B}$. $\hat{C}$ و طبق قضیه هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابهند بنابراین رابطه تشابه را می‌نویسیم

$$\frac{MC}{MB} . \frac{CD}{AB} \qquad ۱$$

با توجه به شکل ۲ $MB . MC . CB$

مقدار AB را می‌توان با قراردادن پارامترهای معلوم به‌دست آورد.

روش حل: در رابطه ۱ و ۲ به جای MC و CB و CD به‌ترتیب مقادیر ۱۵/۴۰ متر و ۷۰ متر و ۵۰ متر را قرار می‌دهیم

MB . ۱۵/۴۰ . ۷۰ . ۸۵/۴۰ متر

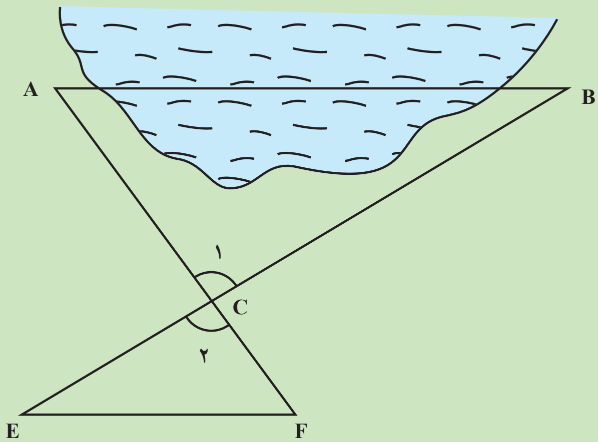
$$\frac{۱۵/۴۰}{۸۵/۴۰} . \frac{۵۰}{AB} . \quad ۱۵/۴۰ \times AB . ۵۰ \times ۸۵/۴۰$$

$$AB . \frac{۵۰ \times ۸۵/۴۰}{۱۵/۴۰} . ۲۷۷/۲۷ \text{ متر}$$

طول AB به‌دست می‌آید.

بحث و بررسی: با استفاده از خاصیت تشابه می‌توان مقادیر مجهول دیگر را نیز به‌دست آورد، مثلاً MA را (چگونه)؟

مثال ۳ــ۳ــ مطابق شکل زیر برای اندازه‌گیری طول AB به روش مستقیم به علت وجود مانع امکان‌پذیر نیست لذا نقطه دلخواه C را طوری انتخاب می‌کنیم که طول‌های AC و BC روی خشکی قابل اندازه‌گیری باشند و مقدار آن‌ها به‌ترتیب برابر است با متر ۱۵۷/۴۶ . BC و متر ۱۱۲/۲۴ . AC و سپس از نقطه C طول CE را مساوی نصف BC در امتداد آن می‌کشیم و هم‌چنین طول CF را نصف AC در امتداد AC ترسیم می‌کنیم و فاصله EF را اندازه‌گیری کرده مقدار آن ۹۵/۲۵ . EF متر شده است مطلوب است محاسبه طول AB.



شکل ۳ــ۱۰

راهکار کلی: برای حل مسئله فوق از خاصیت تشابه استفاده می‌کنیم.

دو مثلث $C\dot{A}B$ و $C\dot{E}F$ متشابهند زیرا $\dot{C}_۱ . \dot{C}_۲$ دو زاویه متقابل به رأس باهم برابرند و $\frac{۱}{۲} . \frac{EC}{CB} . \frac{FC}{CA}$ و اضلاع متناظر مجاور به زاویه C متناسبند. با استفاده از قضیه (هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه بین آن‌ها مساوی باشند دو مثلث متشابهند)

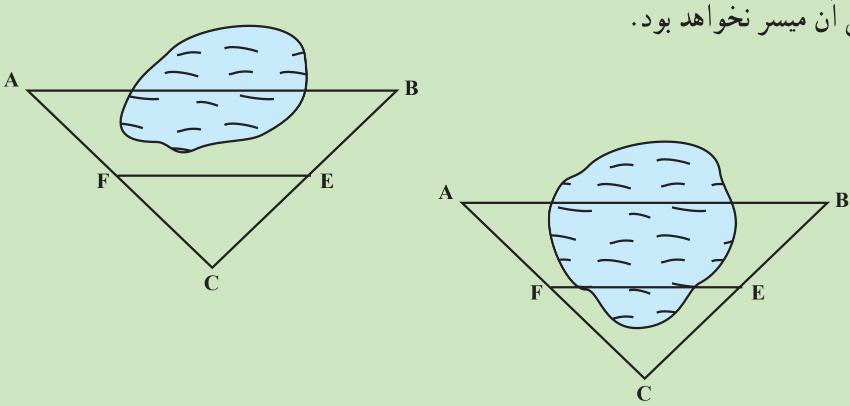
رابطه تشابه را می‌نویسیم $\frac{FC}{CA} . \frac{EC}{CB} . \frac{EF}{AB} . \frac{۱}{۲}$

با داشتن طول EF طول AB از رابطه فوق به‌دست می‌آید.

روش حل: در رابطه $\frac{۱}{۲} . \frac{EF}{AB}$ به‌جای EF مقدار اندازه‌گیری آن یعنی **۹۵/۲۵** متر را قرار می‌دهیم

$$\frac{۹۵/۲۵}{AB} . \frac{۱}{۲} . \quad AB . ۲×۹۵/۲۵ . ۱۹۰/۵ \qquad \text{متر}$$

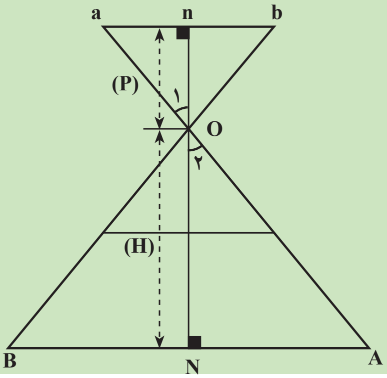
بحث و بررسی: می‌توان امتداد CE و CF را به جای آن که به امتداد دو ضلع اضافه کنیم، برروی دو ضلع CA و CB پیاده نماییم. لازم به ذکر است که طول EF نباید داخل مانع قرار بگیرد زیرا مترکشی آن میسر نخواهد بود.



شکل ۳ــ۱۱

مثال ۳ــ۴ــ با یک هواپیما با ارتفاع پرواز ۲۵۰۰ متر (نسبت به سطح متوسط زمین) از منطقه‌ای عکس گرفته شده است. اگر فاصله کانونی دوربین عکس‌برداری ۱۰۰ میلی‌متر و ابعاد قاب دوربین ۶۰×۶۰ میلی‌متر باشد ابعاد سطح مشاهده شده روی زمین چه‌قدر است؟

راهکار کلی: در شکل مقابل طول تصویر ab از روی عکس اندازه‌گیری می‌شود و طول ON ارتفاع پرواز و طول on فاصله کانونی می‌باشد می‌خواهیم طول زمین یعنی AB را به‌دست آوریم.



شکل ۳ــ۱۲

دو مثلث $\overset{\Delta}{oan}$ و $\overset{\Delta}{OAN}$ به علت دو زاویه برابر متشابه می‌شوند زیرا دو زاویه $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ متقابل به رأس هستند (باهم برابرند) و زوایای درجه $\angle n = \angle N = ۹۰^\circ$ به فرض (امتداد نادیر noN عمود بر سطح متوسط زمین است) و بنابراین اضلاع متناظر متشابهند می‌توان نوشت :

$$\frac{ab}{AB} = \frac{on}{ON} = \frac{f}{H} = \text{مقیاس عکس}$$

نتیجه می‌شود

$$AB \times f = ab \times H$$

که f فاصله کانونی دوربین و H ارتفاع پرواز می‌باشد. در نتیجه $AB = \frac{ab \times H}{f}$

روش حل: در فرمول بالا به جای f فاصله کانونی یعنی ۱۰۰ میلی‌متر را قرار می‌دهیم و به‌جای ab ابعاد قاب دوربین یعنی ۶۰ میلی‌متر را قرار می‌دهیم، طول AB به دست می‌آید.

$$AB = \frac{۶۰mm \times ۲۵۰۰m}{۱۰۰mm} = ۱۵۰۰ \text{ متر}$$

بحث و بررسی: تشابه در فتوگرامتری کاربرد فراوان دارند. در این مثال وسعت منطقه پوشش یک عکس با مقیاس $\frac{۱}{۲۵۰۰۰}$ برابر ۱۵۰۰×۱۵۰۰ متر یا ۲۲۵ هکتار به‌دست می‌آید. به‌طور کلی این روش برای محاسبه مقدار زمینی D یک طول اندازه‌گیری شده در روی عکس d کاربرد دارد.

$$\frac{d}{D} = \frac{f}{H} \Rightarrow D = \frac{dH}{f} = d \times \frac{H}{f}$$

$\frac{H}{f}$ همان عدد مقیاس عکس است که در این مثال برابر ۲۵۰۰۰ می‌باشد بنابراین برای طول ۶۰ میلی‌متر

$$D = ۶۰mm \times ۲۵۰۰۰ = ۱۵۰۰۰۰۰mm = ۱۵۰۰m$$

مطالعه‌ی آزاد

مثال ۳ــ۵ــ اگر طول تصویر یک تیربرق در روی عکس هوایی ۱/۵ میلی‌متر و فاصله تصویر نوک تیر تا مرکز عکس قائم ۱۰۰ میلی‌متر و ارتفاع پرواز تا سطح زمین ۲۴۰۰ متر باشد ارتفاع تیر برق را به‌دست آورید.

راهکار کلی: ابتدا مفروضات و مجهولات مسأله را طبق شکل زیر می‌نویسیم.

op = f = فاصله کانونی

ab = Δr = طول تصویر تیر برق

bp = r = فاصله نوک تیر تا مرکز عکس

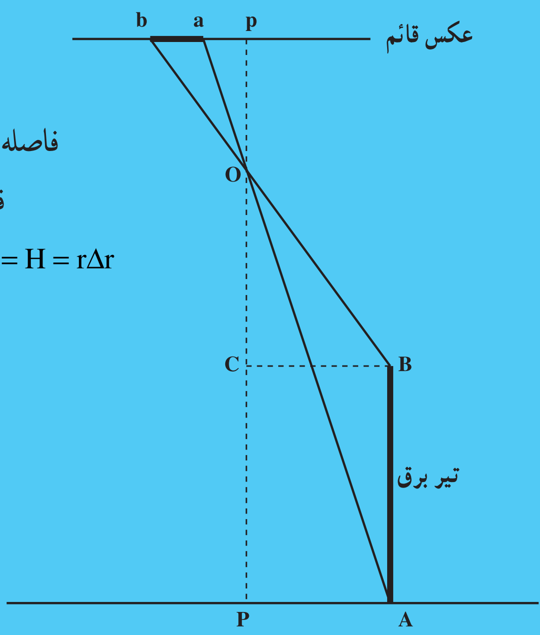
ap = فاصله پای تیر تا مرکز عکس

op = ارتفاع پرواز تا سطح زمین = H = rΔr

AB = ارتفاع تیر برق = h = ?

$OC = OP - PC = H - h$

$BC = AP = D$



شکل ۳ــ۱۳

مطابق شکل دو مثلث obp و OBC باهم متشابه‌هستند زیرا زاویه $\hat{O}$ در هر دو مشترک و زاویه $\hat{p}$ و $\hat{C}$ برابر °۹۰ است لذا دو مثلث به حالت دو زاویه برابر باهم متشابه هستند.

$$\frac{bp}{op} = \frac{BC}{OC} \Rightarrow \frac{r}{f} = \frac{D}{H-h} \Rightarrow fD = rH - rh \qquad ۱$$

هم‌چنین مطابق شکل دو مثلث oap و OAP باهم متشابه هستند زیرا زاویه $\hat{O}$ در هر دو مشترک و زاویه $\hat{p}$ و $\hat{P}$ برابر °۹۰ است لذا دو مثلث به حالت دو زاویه برابر باهم متشابه هستند.

$$\frac{ap}{op} = \frac{AP}{OP} \Rightarrow \frac{r - \Delta r}{f} = \frac{D}{H} \Rightarrow fD = rH - \Delta r H \qquad ۲$$

با تساوی روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌شود :

$$fD = rH - rh = rH - \Delta rH \Rightarrow rh = \Delta rH \Rightarrow h = \frac{\Delta r}{r}H$$

روش حل: در رابطه بالا داریم :

$\Delta r =$ طول تصویر تیر برق $= ۱/۵ mm$

$r =$ فاصله نوک تیر تا مرکز عکس $= ۱۰۰ mm$

$H =$ ارتفاع پرواز تا سطح زمین $= ۲۴۰۰ m$

$$h = \text{ارتفاع تیر} = \frac{\Delta r}{r} H = \frac{۱/۵ mm}{۱۰۰ mm} \times ۲۴۰۰ m = ۳۶ m$$

بحث و بررسی: به روش فتوگرامتری حتی با یک عکس می‌توان ارتفاع اجسام را از روی اندازه گیری طول کشیدگی تصویرآن‌ها در روی عکس به دست آورد. در مثال فوق فاصله‌ی پای تیر تا تصویر مرکز عکس روی زمین نیز قابل محاسبه است :

$$D = \frac{r(H-h)}{f} = \frac{H(r-\Delta r)}{f}$$

برای این منظور نیاز به دانستن فاصله کانونی f می‌باشد. اگر فاصله کانونی برابر ۱۰۰ میلی‌متر باشد آن‌گاه فاصله تیر تا تصویر مرکز عکس در روی زمین برابر خواهد بود با :

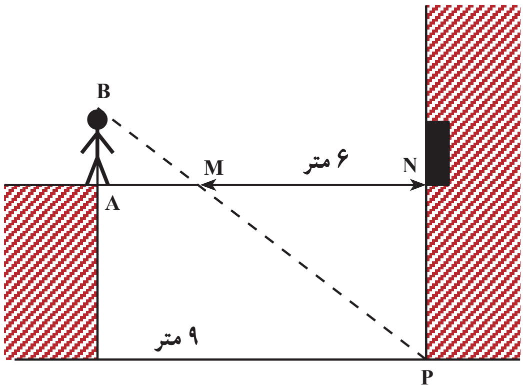
$$D = \frac{۱۰۰ mm \times (۲۴۰۰ m - ۳۶ m)}{۱۰۰ mm} = \frac{۱۰۰ mm \times ۲۳۶۴ m}{۱۰۰ mm} = ۲۳۶۴ m$$

خودآزمایی

۱ــ دو قسمت مختلف یک کارخانه به‌وسیله‌ی یک پل هوایی به هم مرتبط شده‌اند، پرویز برای پیدا کردن ارتفاع این پل مانند شکل ۳ــ۱۴ انتهای آن ایستاد و شعاع دید خود را بر رأس زاویه‌ی بین سطح زمین و ساختمان یعنی نقطه‌ی P قرار داد.

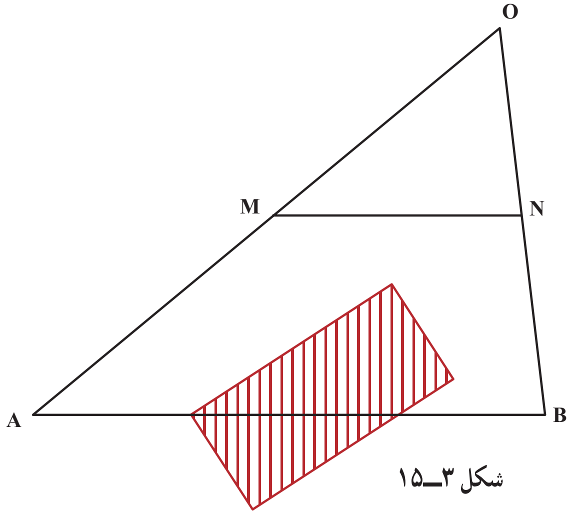
الف) چرا دو مثلث $A\hat{B}M$ و $M\hat{N}P$ با هم متشابه‌اند؟

ب) با توجه به اندازه‌های مشخص شده در شکل و طول قد پرویز که ۱۸۰ سانتی‌متر است ارتفاع پل یعنی NP را به‌دست آورید.



شکل ۳ــ۱۴

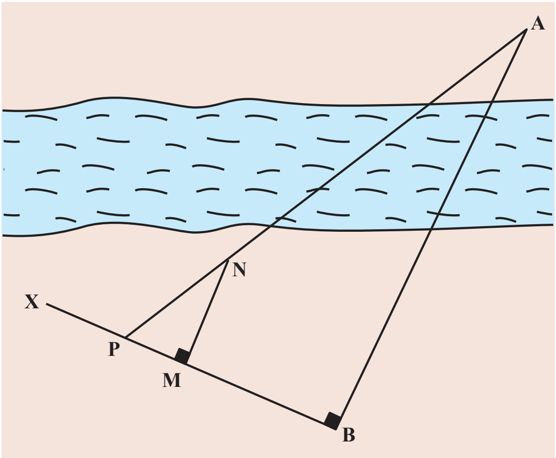
۲ــ برای اندازه‌گیری فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B مطابق شکل ۳ــ۱۵ با مانع دید یک ساختمان مواجه شده‌ایم ؛ بنابراین ؛ نقطه‌ی O را خارج ساختمان ــ به‌گونه‌ای که نقاط A و B از آن دیده شوند ــ



شکل ۳ــ۱۵

درنظر می‌گیریم و نقاط M و N را به ترتیب وسط اضلاع OA و OB درنظر گرفته اندازه‌ی طول MN را مترکشی کرده‌ایم که مقدار آن برابر است با : متر۳۰/۸۰ . MN . با استفاده از خاصیت تشابه طول AB را به‌دست آورید.

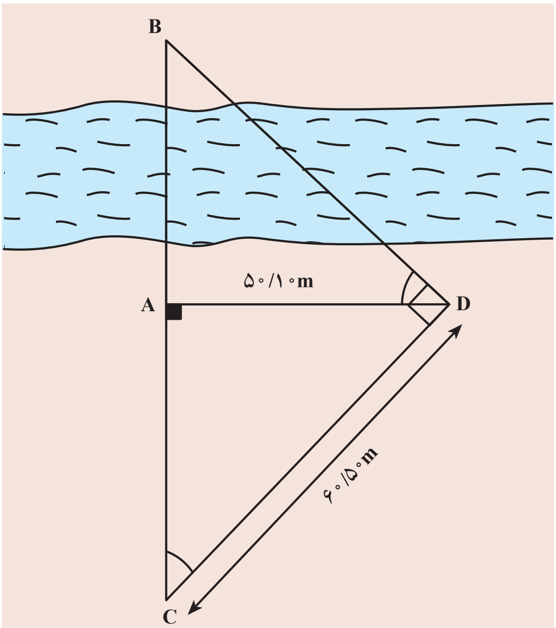
۳ــ برای اندازه‌گیری فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B که در دو طرف رودخانه‌ای قرار دارند، به‌طور مستقیم، با متر امکان‌پذیر نیست ؛ بنابراین در شکل ۳ــ۱۶ از نقطه‌ی B عمود Bx را توسط گونیای مساحی کشیده از نقطه‌ی دل‌خواه M روی Bx عمودی بر Bx رسم کرده سپس نقطه‌ی N را به‌دل‌خواه روی آن انتخاب می‌کنیم که از تقاطع دو امتداد AN و BM نقطه‌ی P حاصل می‌شود.



شکل ۳ــ۱۶

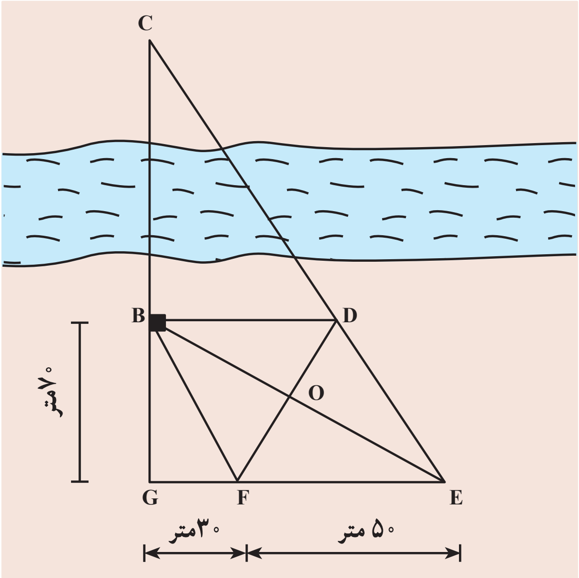
با اندازه‌گیری طول‌های متر۱۸/۱۰ . PM ، متر۵۶/۲۰ . MB و متر۳۴/۱۵ . MN ، طول AB را محاسبه کنید.

۴ــ در شکل ۳ــ۱۷ امتداد CD عمود بر ضلع BD و امتداد AD عمود بر AB است. اگر طول متر۵۰/۱۰ . AD و طول متر۶۰/۵۰ . CD باشد مطلوب است محاسبه‌ی طول BC.



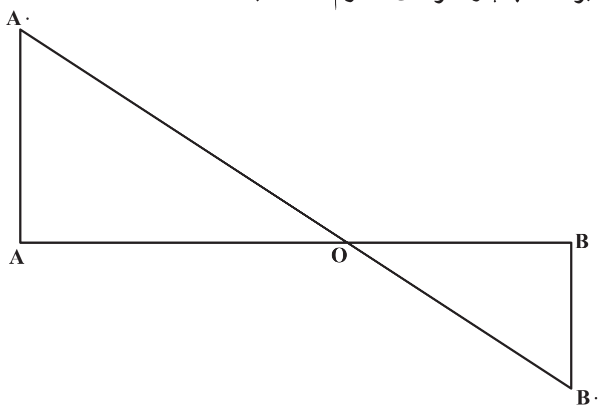
شکل ۳ــ۱۷

۵ ــ در شکل ۳ــ۱۸ چهارضلعی BDEF یک متوازی‌الاضلاع است (قطرها، یک‌دیگر را نصف کرده‌اند). اگر طول BG . ۷۰متر ، GF . ۳۰متر و FE . ۵۰متر باشد طول BC را محاسبه کنید.



شکل ۳ــ۱۸

۶ــ برای تعیین حجم عملیات خاکی باید محل تقاطع خط زمین و خط پروژه در پروفیل طولی که آن‌را نقطه‌ی صفر می‌گویند، پیدا نمود. مطابق شکل ۳ــ۱۹ ، .AA و .BB که تقاطع عرضی هستند مقدار آن‌ها برابر است با S_1 . . AA و S_2 . . BB و فاصله‌ی d . AB است. فاصله‌های OA و OB را بر حسب پارامترهای معلوم، محاسبه کنید.

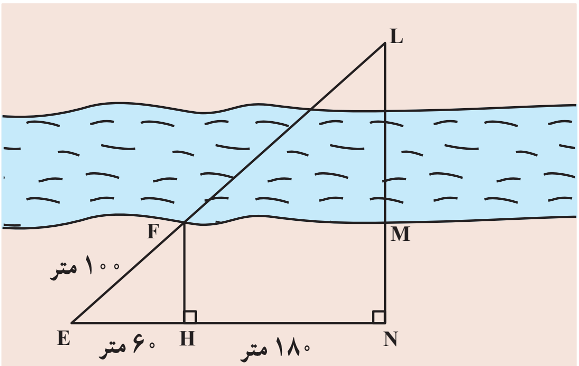


شکل ۳ــ۱۹

اگر فاصله‌ی AB . ۳۱ متر و مساحت، S_2 . ۳۰ مترمربع و S_1 . ۵۰ مترمربع باشد فواصل OA و OB چه‌قدر است؟

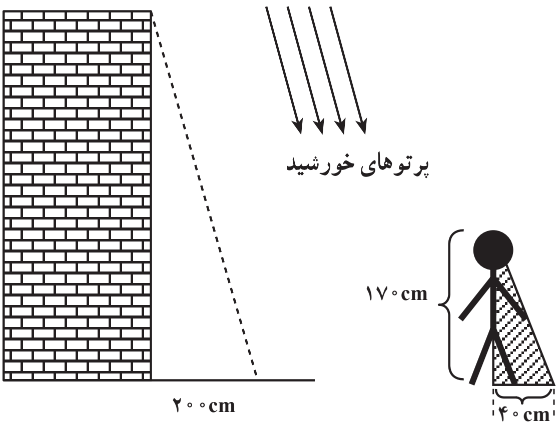
مسائل

مسأله‌ی ۱: دهکده‌ای در یک سوی رودخانه و دکل‌های سراسری انتقال نیرو در سوی دیگر رودخانه واقع است ؛ با توجه به فاصله‌های داده شده در شکل ۳ــ۲۰ طول سیم لازم برای برق‌رسانی به دهکده یعنی EL را محاسبه کنید.



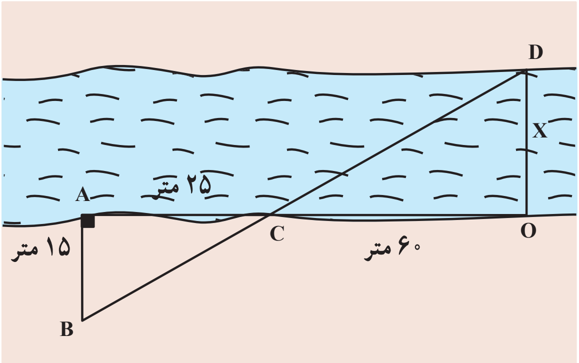
شکل ۳ــ۲۰

مسأله‌ی ۲: ارتفاع یک ساختمان را مطابق شکل ۳ــ۲۱ با توجه به امتداد و سایه‌ی آن و امتداد سایه‌ی یک شخص به قد معلوم و سایه‌ی شخص در یک زمان از تابش پرتوهای خورشید، اندازه‌گیری کنید.



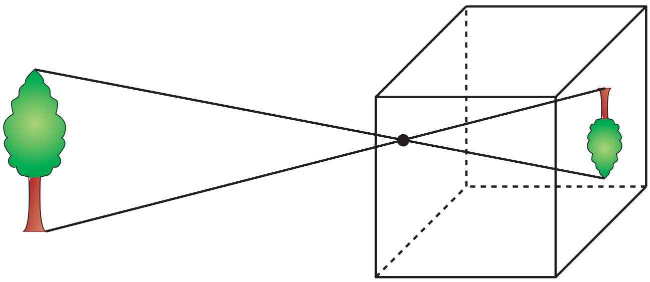
شکل ۳ــ۲۱

مسأله‌ی ۳: شکل زیر را یک نقشه‌بردار برای محاسبه‌ی عرض رودخانه رسم نموده است. به کمک اندازه‌های مشخص شده در شکل، عرض رودخانه را حساب کنید.



شکل ۳ــ۲۲

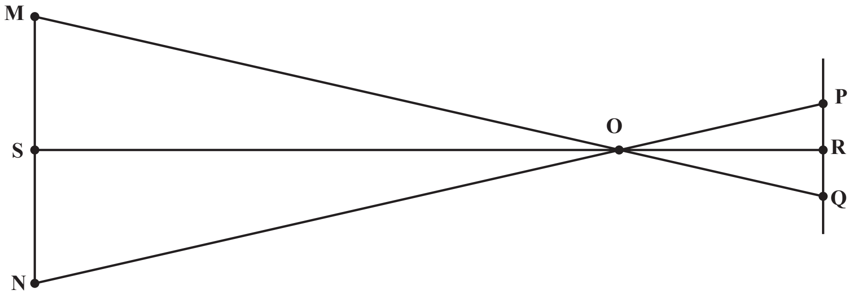
مسأله‌ی ۴: (مربوط به پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه) : مطابق شکل ۳ــ۲۳ با ایجاد سوراخی در مرکز دیواره‌ی یک جعبه‌ی مکعب شکل و قراردادن یک کاغذ مات در درون جعبه ــ درست رو به روی سوراخ ــ می‌توان آن را به یک دوربین عکاسی ساده به نام جعبه‌ی تاریک تبدیل نمود.



شکل ۳ــ۲۳

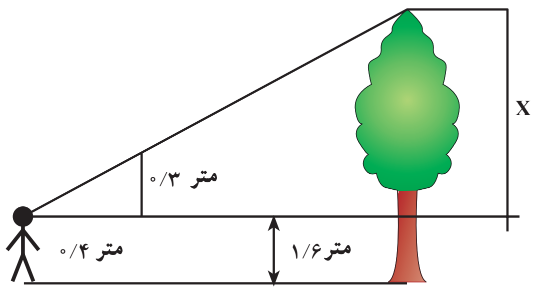
همان‌گونه که در شکل ۳ــ۲۳ می‌بینید تصویری که از یک شئ در جعبه‌ی تاریک بر روی صفحه‌ی مات ایجاد می‌شود وارونه است. پرتوهای نور که از شئ می‌تابند و از سوراخ جعبه عبور می‌نمایند دو مثلث ایجاد می‌کنند که در شکل ۳ــ۲۴ نشان داده شده است. طول تصویری که در جعبه‌ی تاریک ایجاد می‌گردد با فاصله‌ی شئ از سوراخ متناسب است. این فاصله، ارتفاع OS از

مثلث OMN است. فاصله‌ی سوراخ با صفحه‌ی مات نیز ارتفاع OR از مثلث OPQ است. اگر دو ارتفاع OS و OR، نیز طول تصویر را بدانیم آیا می‌توان طول شئ را به‌دست آورد؟



شکل ۳ــ۲۴

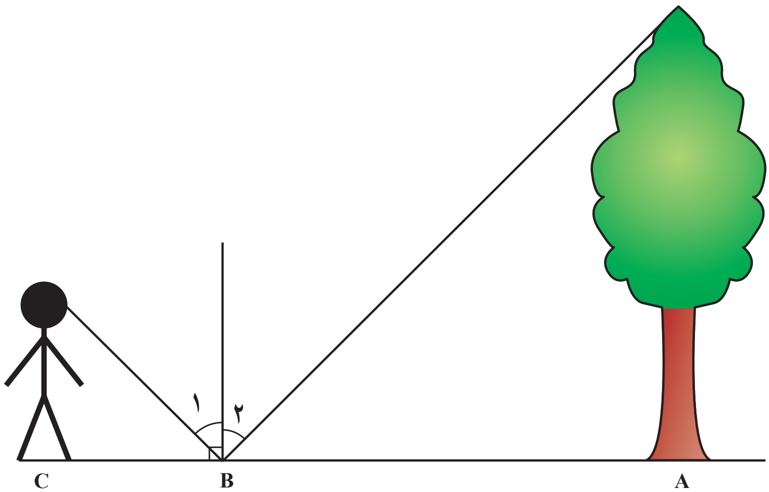
مسأله‌ی ۵: رضا برای پیدا کردن ارتفاع درخت مقابل خانه‌ی خود یک تکه مقوا به شکل مثلث قائم‌الزاویه با اندازه‌ی اضلاع زاویه‌ی قائمه مطابق شکل ۳ــ۲۵، ۰/۳ متر و ۰/۴ متر ساخت ؛ اگر او در فاصله‌ی ۸/۸ متر از درخت بایستد، می‌تواند با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث نوک درخت را ببیند. فاصله‌ی چشم او از زمین ۱/۶ متر است. ارتفاع درخت چه‌قدر است؟



شکل ۳ــ۲۵

مسأله‌ی ۶: محاسبه‌ی ارتفاع درخت به‌وسیله‌ی سایه، یک متر فلزی که قائم بر زمین قرار گرفته است سایه‌ای به طول ۲m دارد درحالی که طول سایه‌ی یک برج رادیویی ۸m است ؛ ارتفاع برج رادیویی چه‌قدر است؟

مسأله‌ی ۷: شخص باهوشی که چشمانش ۲m بالاتر از زمین قرار دارند می‌خواهد ارتفاع درختی را بیابد او آیینه‌ای را به فاصله‌ی ۲۰m از این درخت و به‌طور افقی روی زمین می‌گذارد و ملاحظه می‌کند که اگر از نقطه‌ی C که ۲m از آیینه‌ی B فاصله دارد بایستد می‌تواند بازتاب نوک درخت را ببیند ارتفاع درخت چه‌قدر است؟ (شکل ۳ــ۲۶).



شکل ۳ــ۲۶

کارگروهی دانش‌آموزان

مانند فصول قبل اعضای گروه با زبان خود درس را برای یکدیگر بازگو کنند و برای سنجش میزان یادگیری اعضاء سؤالاتی طرح کنند، اعضاء به سؤالات پاسخ دهند و با تصحیح سؤالات از یادگیری همه اعضا مطمئن شوید.

فصل چهارم

کاربرد مثلث در نقشه‌برداری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ رابطه‌ی فیثاغورث را در هر مثلث قائم‌الزاویه بنویسد.

۲ــ روابط مهم در هر مثلث قائم‌الزاویه مانند ارتباط مربع ارتفاع و مربع هر یک از اضلاع را با تصاویر اضلاع مثلث بنویسد.

۳ ــ ارتفاع تنه‌ی درختی که از نقطه‌ی معلوم شکسته است را به کمک رابطه‌ی فیثاغورث محاسبه کند.

۴ــ نسبت‌های مثلثاتی : سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت هر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم‌الزاویه را بنویسد.

۵ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه‌ی مجهول را با مشخص بودن اندازه‌ی دو ضلع در هر مثلث قائم‌الزاویه محاسبه کند.

۶ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه به کمک یک ضلع و زاویه‌ی معلوم، اندازه‌ی ضلع مجهول را محاسبه کند.

۷ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه با استفاده از اندازه‌ی دو ضلع معلوم، اندازه‌ی ضلع دیگر را محاسبه کند.

۸ــ اصطلاحات :اختلاف ارتفاع، طول مایل، زاویه‌ی شیب و طول افقی را روی یک مثلث قائم‌الزاویه مشخص کند و روابط بین آن‌ها را بنویسد و شرح دهد.

۹ــ ارتفاع ساختمان، ستون، درخت، ارتفاع ساختمان از روی ارتفاع پنجره را به کمک روابط مثلثاتی محاسبه کند.

۱۰ــ ارتفاع دکل غیرقابل دسترس را با استفاده از روابط مثلثاتی محاسبه کند.

۱۱ــ مساحت زمین‌های شکل‌های مثلث، با ذوزنقه، مربع و ... را به کمک

اندازه‌های داده شده محاسبه کند.

۱۲ــ با مشخص بودن اندازه‌ی اضلاع در هر مثلث دلخواه به کمک روابط مثلثاتی زوایای مثلث را محاسبه کند.

۱۳ــ اختلاف ارتفاع دو ساختمان روبروی هم را محاسبه کند.

۱۴ــ با مشخص بودن زاویه‌ی فراز بلندترین نقطه برج با حرکت به طرف برج و پیمودن مسافت، ارتفاع برج را محاسبه کند.

۱۵ــ رابطه‌های کسینوس‌ها و سینوس‌ها را در هر مثلث غیرمشخص بنویسد و اندازه‌ی اضلاع را روی یک مثلث دلخواه تشخیص دهد.

۱۶ــ با رسم یک مثلث و با معلوم بودن دو زاویه و یک ضلع از یک مثلث، اندازه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۱۷ــ با رسم یک مثلث و با معلوم بودن دو ضلع و زاویه‌ی مقابل به یکی از این دو ضلع معلوم، اندازه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۱۸ــ با رسم یک مثلث و با معلوم بودن دو ضلع و زاویه‌ی بین در یک مثلث، اندازه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۱۹ــ با رسم یک مثلث و با معلوم بودن سه ضلع آن، زاویه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۲۰ــ اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{A}C$ که نقاط B، C آن به علت وجود مانع دید به طور مستقیم امکان ندارد را محاسبه کند.

۲۱ــ مثال‌های حل شده در این فصل را فرابگیرد.

آیا می‌دانید

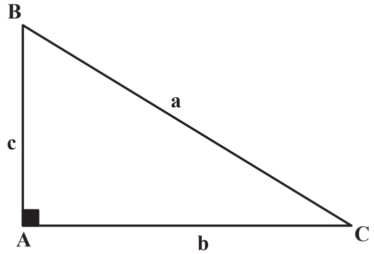
در فرانسه هنوز یک قضیه کسینوس‌ها را به یاد بود غیاث‌الدین جمشید کاشانی «تئورم کاشی» می‌خوانند.

۴ــ۱ــ رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه

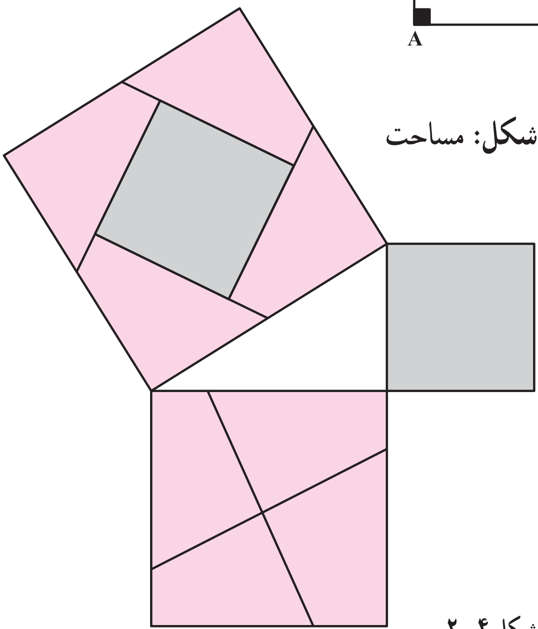
در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر :

$\overline{BC}^{۲} . \overline{AC}^{۲} . \overline{AB}^{۲}$

$a^{۲} . b^{۲} . c^{۲}$



شکل ۴ــ۱



اثبات رابطه فیثاغورث از طریق شکل: مساحت مربعی که روی وتر ساخته شده، مساوی است با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی دو ضلع دیگر ساخته شده است (شکل ۴ــ۲).

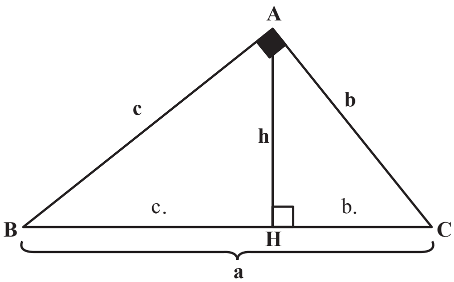
شکل ۴ــ۲

در هر مثلث قائم‌الزاویه (مانند شکل ۴ــ۳) همواره روابط زیر برقرار است :

$\cdot\ h^{۲} . b.c.$

$\vdots\ b^{۲} . ab.$

$\cdot\ c^{۲} . ac.$

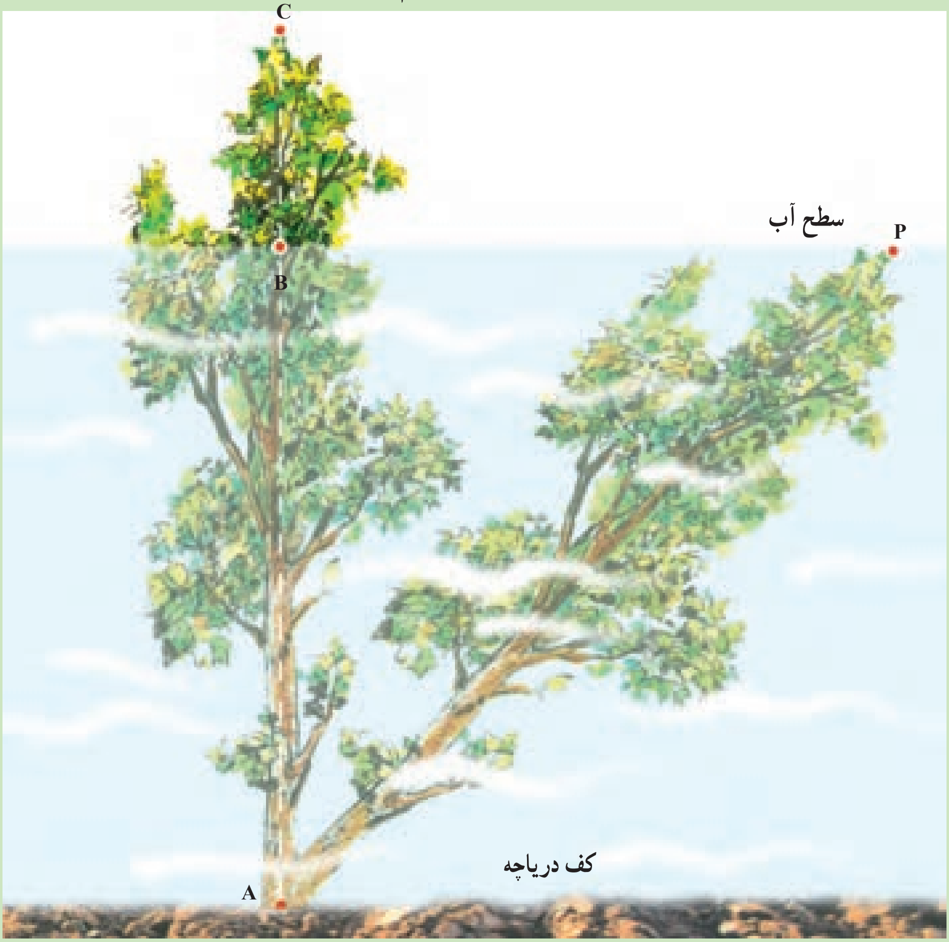


شکل ۴ــ۳

۴ــ۲ــ مثال‌هایی با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث

مثال ۴ــ۱ــ درختی $\frac{۱}{۲}$ متر از آب بیرون است اگر آن را (مطابق شکل ۴ــ۴کتاب) خم کنیم تا به نقطه‌ی P در فاصله‌ی ۲ متری جای نخست برسد در زیر آب قرار می‌گیرد. عمق دریاچه، یعنی طول پاره‌خط AB را پیدا کنید؟

راهکار کلی: در این مسئله ابتدا مطابق شکل و فرض مسئله معلومات و مجهولات را مشخص می‌کنیم اگر فرض کنیم طول AB = x باشد طبق فرض طول متر $\frac{۱}{۲}$. BC و مقدار طول AP برابر است با : $AP . \ AC . \ AB . \ BC . \ x . \ \frac{۱}{۲}$



شکل ۴ــ۴

و همچنین طول متر ۲ . BP می‌باشد و مثلث $A\dot{B}P$ یک مثلث قائم‌الزاویه است یعنی BP4 AB زیرا سطح آب یک سطح تراز افقی است و امتداد درخت به‌صورت قائم است.

رابطه فیثاغورث را در این مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

(مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر) $AP^۲ \;.\; AB^۲ \;.\; BP^۲$

اگر به‌جای اضلاع مثلث مقادیر آن را برحسب x قرار دهیم خواهیم داشت :

$$(x \;.\; \frac{۱}{۲})^۲ \;.\; x^۲ \;.\; ۲^۲$$

روش حل: رابطه‌ی $(x \;.\; \frac{۱}{۲})^۲ \;.\; x^۲ \;.\; ۲^۲$ را ساده می‌کنیم

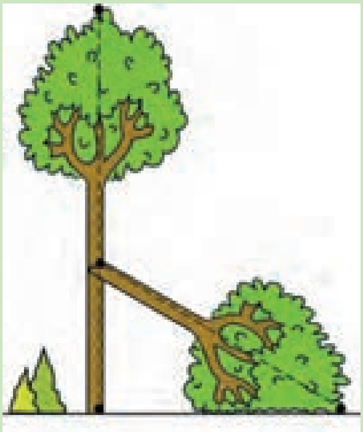
$$x^۲ \;.\; \frac{۱}{۴} \;.\; x \;.\; x^۲ \;.\; ۴$$

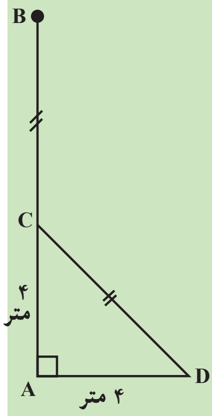
$$\frac{۱}{۴} \;.\; x \;.\; ۴. \quad x \;.\; ۴. \;\frac{۱}{۴} \;.\; \frac{۳}{۴}. \quad x \;.\; ۰/۷۵$$ متر   عمق دریاچه

بحث و بررسی: با توجه به حل مسئله فوق که به شکلی از مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شده است با استفاده از رابطه فیثاغورث بسیاری از مجهولات را می‌توان محاسبه کرد.

مثال ۴ــ۲ــ تنه‌ی درخت AB از نقطه‌ی C که از زمین ۴متر ارتفاع دارد شکسته شده و رأس آن در نقطه‌ی D در فاصله‌ی ۴ متری نقطه‌ی A به زمین افتاده است. ارتفاع تنه‌ی درخت (AB) را پیدا کنید (شکل ۴ــ۵).

راهکار کلی: با توجه به شکل مسئله ارتفاع تنه‌ی درخت برابر است با AB . AC . BC و طبق فرض مسئله طول متر ۴ . AC و طول متر ۴ . AD و BC = CD می‌باشد برای به‌دست آوردن ارتفاع AB کافی است که طول مجهول BC را محاسبه کنیم از طرف دیگر طول BC که با طول CD برابر است از مثلث قائم‌الزاویه $A\dot{C}D$ رابطه فیثاغورث به‌دست می‌آید.





شکل ۴ــ۵

روش حل: رابطه فیثاغورث را در مثلث $A\hat{C}D$ می‌نویسیم

$$CD^{۲} . AC^{۲} . AD^{۲}$$

مقادیر AD و AC را که هرکدام ۴ متر است دررابطه فوق قرار می‌دهیم.

$CD^{۲} . ۴^{۲} . ۴^{۲} . ۳۲ . \quad CD . \sqrt{۳۲} . ۵/۶۵$ متر

از طرف دیگر متر $BC . CD . ۵/۶۵$ می‌شود

بنابراین AB برابر است با

$AB . AC . BC . ۴ . ۵/۶۵ . ۹/۶۵$ متر

بحث و بررسی: با توجه به این نوع مسائل که شکلی از مثلث قائم‌الزاویه هستند و با استفاده از رابطه فیثاغورث پارامترهای مجهول به‌دست می‌آید.

۴ــ۳ــ حل مثلث قائم‌الزاویه

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه: در مثلث قائم‌الزاویه (شکل ۴ــ۶) سینوس هر زاویه‌ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مقابل آن زاویه بر وتر :

$$\sin B . \frac{b}{a}$$

کسینوس هر زاویه‌ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مجاور آن زاویه بر وتر :

$$\cos B . \frac{c}{a}$$

تانژانت هر زاویه‌ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مقابل آن زاویه بر ضلع مجاور :

$$tgB . \frac{b}{c}$$

کتانژانت هر زاویه‌ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مجاور آن زاویه بر ضلع مقابل :

$$cotgB . \frac{c}{b}$$

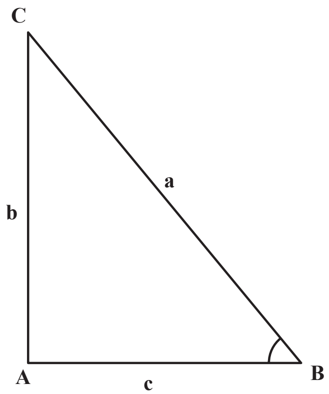
همچنین برای زاویه‌ی $\hat{C}$ نیز می‌توان نوشت :

$\sin\dot{C} . \frac{c}{a}$

$\cos\dot{C} . \frac{b}{a}$

$tg\dot{C} . \frac{c}{b}$

$cotg\dot{C} . \frac{b}{c}$



شکل ۴ــ۶

محاسبه‌ی یک زاویه‌ی مجهول از روی دو ضلع معلوم: با در نظر گرفتن این نکته که دو ضلع معلوم نسبت به زاویه‌ی مجهول چه وضعیتی داشته باشد از یکی از روابط زیر استفاده می‌شود :

$$\sin\dot{B} . \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} . \frac{b}{a} . \quad \dot{B} . \sin^{.۱}(\frac{b}{a})$$

$$\cos\dot{B} . \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} . \frac{c}{a} . \quad \dot{B} . \cos^{.۱}(\frac{c}{a})$$

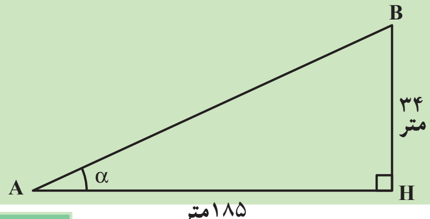
$$tg\dot{B} . \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} . \frac{b}{c} . \quad \dot{B} . tg^{.۱}(\frac{b}{c})$$

مثال ۴ــ۳ــ اختلاف ارتفاع دو نقطه A و B ۳۴ متر است و طول افقی امتداد آن را از طریق مترکشی ۱۸۵ متر به‌دست آورده‌ایم شیب و زاویه شیب را محاسبه کنید.

راهکار کلی: شکل زیر را با توجه به صورت مسئله و معلومات داده شده ترسیم می‌کنیم.

چون مثلث ABH یک مثلث قائم‌الزاویه است از فرمول $tg\alpha . \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$ استفاده می‌کنیم.

AH و BH دو ضلع معلومند $tg\alpha . \frac{BH}{AH}$



شکل ۴ــ۷

که α از رابطه فوق به‌دست می‌آید که به آن شیب امتداد AB نیز می‌گویند.

روش حل: در رابطه $tg\alpha = \frac{BH}{AH}$ به‌جای BH و AH مقدارشان قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$tg\alpha = \frac{۳۴}{۱۸۵} = ۰/۱۸۳ \text{ (با تقریب)}$$

$$\alpha = \text{Arc tg}(\frac{۳۴}{۱۸۵}) = \text{Arc tg}(۰/۱۸۳) = ۱۰°,۲۲',۱۳''$$

بحث و بررسی: با حل این مسئله می‌توانیم علاوه بر شیب ($tg\alpha$)، زاویه شیب (α) را که در نقشه‌برداری مورد نیاز است را به‌دست آوریم.

محاسبه‌ی یک ضلع مجهول از روی یک ضلع معلوم و زاویه‌ی معلوم: با در نظر گرفتن این نکته که ضلع و زاویه‌ی معلوم نسبت به ضلع مجهول چه وضعیتی داشته باشد از یکی از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$b = \text{وتر} \times \sin(\text{زاویه‌ی مقابل}) = a \sin \hat{B}$$

$$b = \text{ضلع مجاور} \times tg(\text{زاویه‌ی مقابل}) = \cot g \hat{B}$$

$$\text{وتر } a = \frac{\text{ضلع}}{\sin(\text{زاویه‌ی مقابل به ضلع})} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{c}}$$

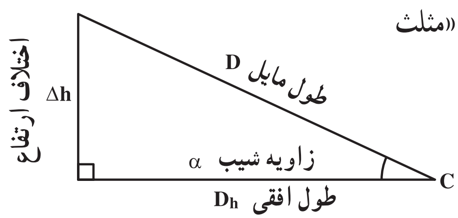
توضیح این که $\hat{B} + \hat{C} = ۹۰°$ لذا با معلوم بودن یکی، دیگری قابل محاسبه خواهد بود.

محاسبه‌ی یک ضلع مجهول از روی دو ضلع معلوم دیگر: در این حالت می‌توان مستقیماً از رابطه‌ی فیثاغورث استفاده نمود:

$$\text{وتر } a^۲ = b^۲ + c^۲$$

$$\text{ضلع } b^۲ = a^۲ - c^۲$$

نکته: در مساحی مثلث قائم‌الزاویه با عنوان «مثلث شیب» کاربرد فراوانی دارد.



شکل ۴ــ۸

با توجه به شکل ۴ــ ۸ و روابط قبل می‌توان دید :

طول افقی = طول مایل × cos (زاویه‌ی شیب)

$$D_h = D \times \cos(\alpha)$$

اختلاف ارتفاع = طول مایل × sin (زاویه‌ی شیب)

$$\Delta h = D \times \sin(\alpha)$$

اختلاف ارتفاع = طول افقی × tg (زاویه‌ی شیب)

$$\Delta h = D_h \times tg(\alpha)$$

۲(طول مایل) = ۲(طول افقی) × ۲(اختلاف ارتفاع)

$$D^۲ = D_h^۲ \times \Delta h^۲$$

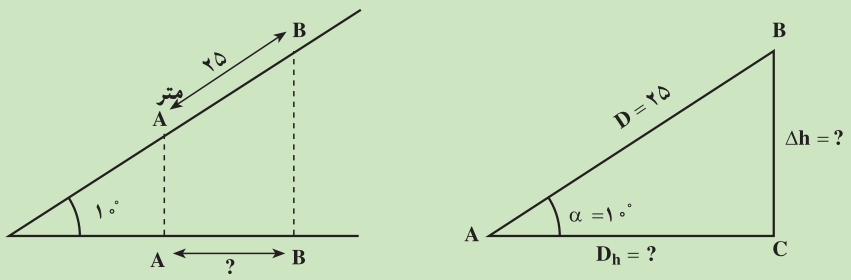
مثال ۴ــ۴ــ فاصله‌ی مایل بین دو نقطه در روی خیابانی با شیب طولی ثابت ۱۰ درجه برابر ۲۵ متر می‌باشد. اختلاف ارتفاع و فاصله‌ی افقی بین دو نقطه‌ی فوق چند متر است؟

$$D_h = D\cos\alpha = ۲۵\cos۱۰^\circ$$

$$= ۲۴/۶۲ \text{ متر}$$

$$\Delta h = D\sin\alpha = ۲۵\sin۱۰^\circ$$

$$= ۴/۳۴ \text{ متر}$$

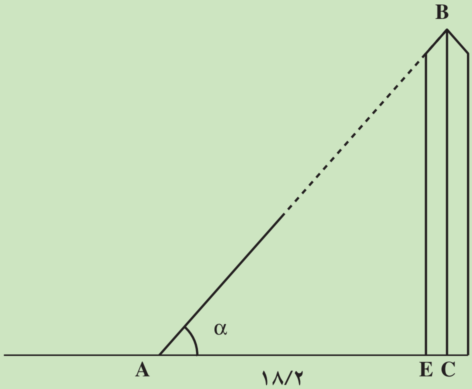


(الف) شکل ۴ــ۹ (ب)

۴ــ۴ــ کاربرد مثلث قائم‌الزاویه در مسائل نقشه‌برداری

روابط مثلثاتی در حل مسائل نقشه‌برداری کاربرد بسیاری دارد ؛ از این‌رو چند مثال به‌منظور آشنایی بیش‌تر آورده می‌شود.

مثال ۴ــ۵ــ مطلوبست محاسبه ارتفاع ستون سنگی مطابق شکل زیر به‌طوری که طول سایه آن ۱۸/۲ متر و زاویه $\alpha = ۶۲^\circ, ۷'$ اندازه‌گیری شده است (تذکر قطر پایه ستون سنگی ۲ متر است).



شکل ۴ــ۱۰

راهکار کلی: با استفاده از رابطه تانژانت‌ها در مثلث قائم‌الزاویه $A\overset{\Delta}{B}C$ می‌توان نوشت :

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = ACtg\alpha$$

می‌دانیم طول AC برابر مجموع طول سایه ستون سنگی به‌اضافه نصف قطر پایه ستون می‌باشد.
با داشتن α و AC طول BC محاسبه می‌شود.

روش حل: در فرمول $BC = AC\ tg\alpha$ ابتدا مقدار AC را به‌دست می‌آوریم

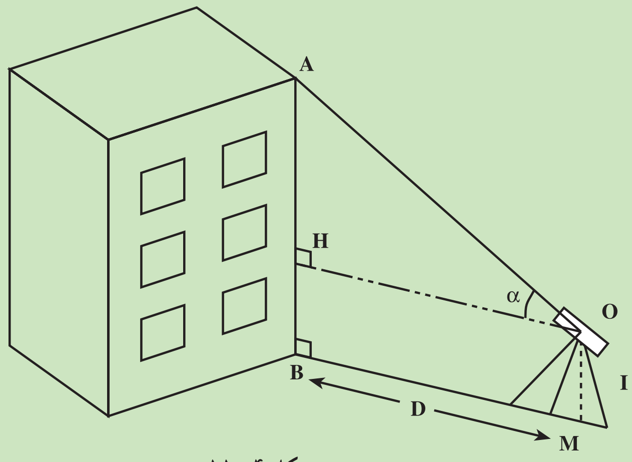
درنتیجه $AC = AE + EC = ۱۸/۲ + ۱ = ۱۹/۲$ متر

$BC = ۱۹/۲ tg(۶۲^\circ, ۷') = ۳۶/۲۸$ متر (با استفاده از ماشین‌حساب)

بحث و بررسی: فرمول‌های خطوط مثلثاتی از قبیل تانژانت ــ کتانژانت ــ سینوس ــ کسینوس در نقشه‌برداری کاربرد زیادی دارد که در مساحی فراخواهید گرفت.

مثال ۴ــ۶ــ برای محاسبه ارتفاع ساختمان دوربین زاویه‌یاب را مطابق شکل در نقطه M به فاصله ۱۵متری تا پای ساختمان مستقر کرده و به نقطه بالای ساختمان نشانه‌روی می‌کنیم زاویه ارتفاعی α برابر $۳۸^\circ, ۳۹', ۳۵''$ شده است. اگر ارتفاع زاویه‌یاب یک متر و پنجاه‌و چهار سانتی‌متر

باشد ارتفاع ساختمان (طول AB) را به‌دست آورید (سطح زمین افقی می‌باشد).



شکل ۴ـ۱۱

راهکار کلی: می‌دانیم طبق فرض مسئله طول $BH = OM = I$ ارتفاع دستگاه معلوم است همچنین طول افقی $OH = BM = D$ اندازه‌گیری شده است چون طول $BM = D$ در سطح افق می‌باشد مثلث $\overset{\Delta}{AOH}$ قائم‌الزاویه است یعنی امتداد OH موازی BM عمود بر AB ارتفاع ساختمان است از رابطه مثلثاتی (تانژانت) برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم.

$$tg\alpha = \frac{AH}{HO} \Rightarrow AH = HOtg\alpha \Rightarrow \boxed{AH = Dtg\alpha}$$

(مقادیر معلوم AH و BH را در رابطه فوق قرار می‌دهیم) $AB = AH + BH = Dtg\alpha + I$

$\boxed{AB = Dtg\alpha + I}$ نتیجه می‌شود

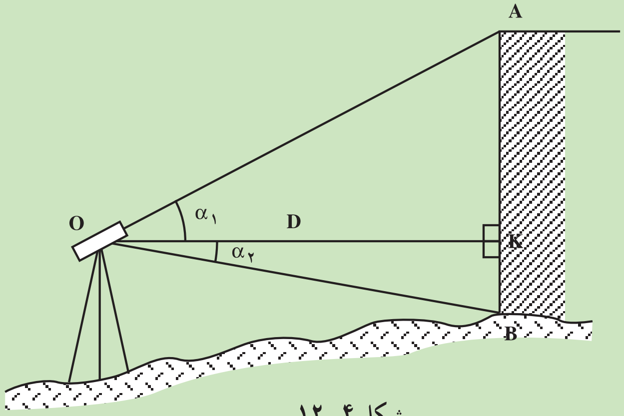
روش حل: در فرمول $AB = Dtg\alpha + I$ طبق فرض متر $D = ۱۵$ و $\alpha = ۳۸^\circ, ۳۹', ۳۵'$ و متر $I = ۱/۵۴$

مقادیر معلوم را جاگذاری می‌کنیم

$AB = ۱۵tg(۳۸^\circ, ۳۹', ۳۵'') + ۱/۵۴ = ۱۱/۹۹۹ \simeq ۱۲$ متر

بحث و بررسی: این روش تعیین ارتفاع را که با اندازه‌گیری زاویه قائم و طول افقی به‌دست می‌آید و از روابط مثلثاتی در حل آن استفاده می‌شود ترازیابی مثلثاتی نیز می‌گویند و در مواردی که ترازیابی هندسی (مستقیم با نیوو و شاخص) امکان‌پذیر نباشد به‌کار می‌رود.

مثال ۴ــ۷ــ برای اندازه‌گیری ارتفاع ساختمان دوربین تئودولیت را در فاصله ۲۰متری ساختمان در نقطه M مستقر می‌کنیم و به بالاترین و پایین‌ترین نقطه ساختمان نشانه‌روی کرده و طبق شکل زیر زاویه‌های α_1 و α_2 را اندازه‌گیری شده و به ترتیب برابرند با $\alpha_1 = ۴۷^\circ, ۴۳', ۳۵''$ و $\alpha_2 = ۲۱^\circ, ۴۸', ۵''$ مطلوبست محاسبه ارتفاع ساختمان (سطح زمین افقی نیست).



شکل ۴ــ۱۲

راهکار کلی: می‌دانیم طبق شکل مسئله ارتفاع ساختمان AB از دو قسمت AK و BK تشکیل شده (AB = AK +BK) که هرکدام از آن‌ها را می‌توان از مثلث‌های قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OAK}$ و $\overset{\Delta}{OBK}$ به‌دست آورد.

در مثلث $\overset{\Delta}{OAK}$ داریم رابطه ۱ $\quad tg\alpha_1 = \frac{AK}{OK} = \frac{AK}{D} \Rightarrow \boxed{AK = Dtg\alpha_1}$

و در مثلث $\overset{\Delta}{OBK}$ داریم رابطه ۲ $\quad tg\alpha_2 = \frac{BK}{OK} = \frac{BK}{D} \Rightarrow \boxed{BK = Dtg\alpha_2}$

دو طرف رابطه‌های ۱ و ۲ را با هم جمع می‌کنیم

$$AK + BK = Dtg\alpha_1 + Dtg\alpha_2$$

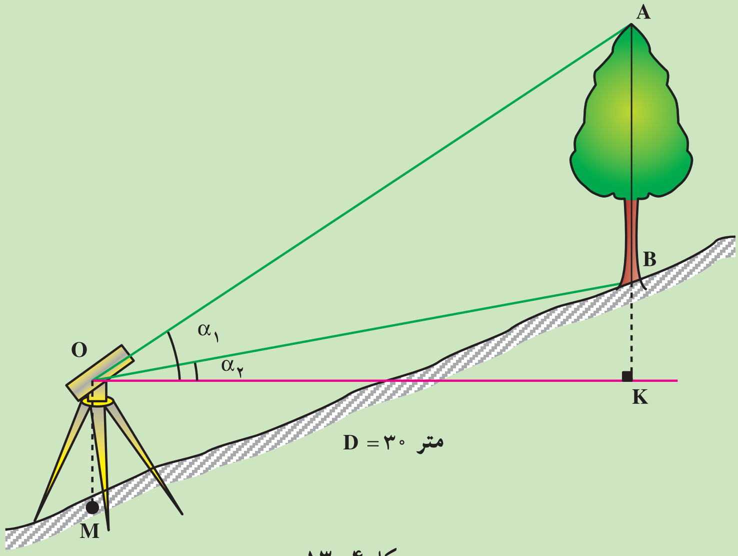
رابطه ۳ $\quad \boxed{AB = D(tg\alpha_1 + tg\alpha_2)}$

روش حل مسئله: طبق فرض مسئله مقدار فاصله افقی D برابر است با ۲۰ متر و زوایای $\alpha_1 = ۴۷^\circ, ۴۳', ۳۵''$ و $\alpha_2 = ۲۱^\circ, ۴۸', ۱۵''$ بنابراین برای به‌دست آوردن ارتفاع AB پارامترهای معلوم را در رابطه ۳ قرار می‌دهیم.

$$AB = D(tg\alpha_1 + tg\alpha_2) = ۲۰\left[tg(۴۷^\circ, ۴۳', ۳۵'') + tg(۲۱^\circ, ۴۸', ۵'')\right] = ۳۰ \text{ متر}$$

بحث و بررسی: این مسئله یک نوع ترازیابی مثلثاتی است که با اندازه‌گیری طول افقی و زاویه‌های شیب توسط زاویه‌یاب محاسبه می‌گردد.

مثال ۴ــ۸ــ برای اندازه‌گیری ارتفاع درخت زاویه‌یاب را درفاصله (افقی) ۳۰متری آن قرار می‌دهیم و طبق شکل زوایای $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ را اندازه‌گیری کرده و مقدار آن‌ها $\alpha_۱ = ۴۶^\circ,۵۰',۵۱''$ و $\alpha_۲ = ۱۳^\circ,۸',۳''$ شده است مطلوب است محاسبه ارتفاع درخت (AB) (سطح زمین افقی نیست).



شکل ۴ــ۱۳

راهکار کلی: با توجه به شکل مسئله مقدار ارتفاع AB برابر است با رابطه ۱ $AB = AK - BK$ مقادیر AK و BK را می‌توانیم از مثلث‌های قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OAK}$ و $\overset{\Delta}{OBK}$ به‌صورت زیر به دست آوریم

رابطه ۲ $\boxed{AK = D\,tg\alpha_۱} \Leftarrow \dfrac{AK}{D} = \dfrac{AK}{OK} = tg\alpha_۱$ در مثلث $\overset{\Delta}{OAK}$

رابطه ۳ $\boxed{BK = D\,tg\alpha_۲} \Leftarrow \dfrac{BK}{D} = \dfrac{BK}{OK} = tg\alpha_۲$ در مثلث $\overset{\Delta}{OBK}$

رابطه‌های ۲ و ۳ را در رابطه ۱ قرار می‌دهیم

$$AB = AK - BK = D\,tg\alpha_۱ - D\,tg\alpha_۲ = D(tg\alpha_۱ - tg\alpha_۲)$$

$$\boxed{AB = D(tg\alpha_۱ - tg\alpha_۲)}$$

روش حل: با توجه به فرض مسئله طول افقی متر $D = ۳۰$ و زاویه‌های $\alpha_۱ = ۴۶°,۵۰',۵۱''$ و $\alpha_۲ = ۱۳°,۸',۳''$ می‌باشد اگر مقادیر معلوم فوق را در فرمول قرار دهیم ارتفاع به‌دست می‌آید

$$AB = D(tg\alpha_۱ - tg\alpha_۲) = ۳۰\left[tg(۴۶°,۵۰',۵۱'') - tg(۱۳°,۸',۳'')\right] =$$

$$۲۴/۹۹۹ \cong ۲۵ \text{ متر} \Rightarrow \boxed{AB = ۲۵ \text{ متر}}$$

بحث و بررسی: مسئله فوق نیز یک نوع ترازیابی مثلثاتی است که دوربین در سطح افق قرار ندارد و با قرائت زاویه شیب و اندازه‌گیری طول افقی ارتفاع محاسبه می‌شود.

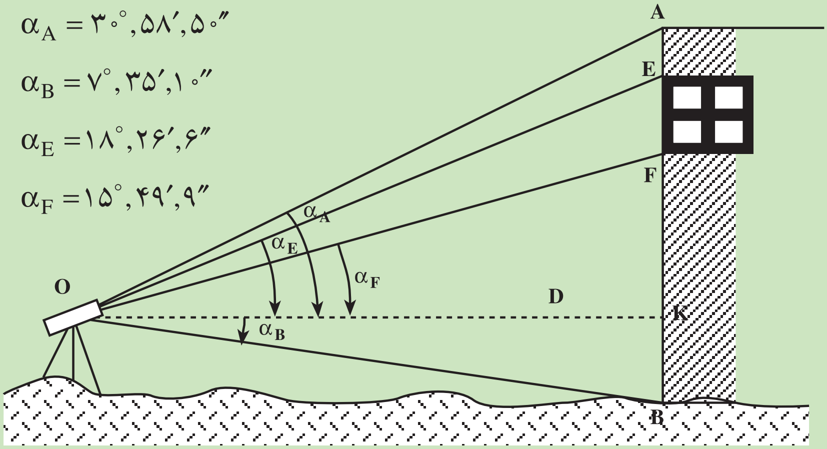
مثال ۴ـ۹ــ مطابق شکل زیر ارتفاع پنجره ۱/۵ متر می‌باشد تنها با استقرار دوربین در فاصله‌ای از ساختمان و قرائت زوایای ارتفاعی که به ترتیب برابر است با :

$\alpha_A = ۳۰°,۵۸',۵۰''$

$\alpha_B = ۷°,۳۵',۱۰''$

$\alpha_E = ۱۸°,۲۶',۶''$

$\alpha_F = ۱۵°,۴۹',۹''$



شکل ۴ـ۱۴

ارتفاع ساختمان را به‌دست آورید.

راهکار کلی: با توجه به شکل مسئله ارتفاع ساختمان AB برابر است با :

$AB = AK + KB$ (و فاصله افقی OK برابر مقدار معلوم D می‌باشد)

$EF = EK - FK$

مقادیر AK و BK از مثلث‌های قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AOK}$ و $\overset{\Delta}{BOK}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردند :

رابطه ۱ $\boxed{AK = Dtg\alpha_A} \Leftarrow tg\alpha_A = \frac{AK}{OK} = \frac{AK}{D}$ در مثلث $\overset{\Delta}{AOK}$

رابطه ۲ $\boxed{BK = D\,tg\alpha_B}$ $\Rightarrow \dfrac{BK}{D} = \dfrac{BK}{OK} = tg\alpha_B$ در مثلث $\overset{\Delta}{BOK}$

طرفین رابطه‌های ۱ و ۲ را باهم جمع می‌کنیم $AK + BK = D\,tg\alpha_A + D\,tg\alpha_B$

نتیجه می‌شود $\boxed{AB = D(tg\alpha_A + tg\alpha_B)}$ رابطه ۳

و هم‌چنین مقادیر EK و FK را از مثلث‌های قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{EOK}$ و $\overset{\Delta}{FOK}$ به‌دست می‌آوریم.

رابطه ۴ $\boxed{EK = D\,tg\alpha_E}$ $\Rightarrow \dfrac{EK}{D} = \dfrac{EK}{OK} = tg\alpha_E$ در مثلث $\overset{\Delta}{EOK}$

رابطه ۵ $\boxed{FK = D\,tg\alpha_F}$ $\Rightarrow \dfrac{FK}{D} = \dfrac{FK}{OK} = tg\alpha_F$ در مثلث $\overset{\Delta}{FOK}$

طرفین دو رابطه ۴ و ۵ را از هم کم می‌کنیم نتیجه می‌شود

$$EK - FK = D\,tg\alpha_E - D\,tg\alpha_F = D(tg\alpha_E - tg\alpha_F)$$

نتیجه می‌شود $EF = D(tg\alpha_E - tg\alpha_F)$ رابطه ۶

حال اگر دو رابطه ۳ و ۶ را برهم تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{AB}{EF} = \frac{D(tg\alpha_A + tg\alpha_B)}{D(tg\alpha_E - tg\alpha_F)} = \frac{tg\alpha_A + tg\alpha_B}{tg\alpha_E - tg\alpha_F}$$

بنابراین $$AB = EF\left(\frac{tg\alpha_A + tg\alpha_B}{tg\alpha_E - tg\alpha_F}\right)$$

با معلوم بودن زوایا و ارتفاع پنجره EF ارتفاع ساختمان (AB) به‌دست می‌آید.

روش حل: در فرمول $AB = EF\left(\dfrac{tg\alpha_A + tg\alpha_B}{tg\alpha_E - tg\alpha_F}\right)$ مقادیر معلوم طبق فرض مسئله را قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$AB = ۱/۵\left[\frac{tg(۳۰^\circ,۵۸',۵۰'') - tg(۷^\circ,۳۵',۱۰'')}{tg(۱۸^\circ,۲۶',۶'') - tg(۱۵^\circ,۴۹',۹'')}\right] = ۱۸/۰۱ \text{ متر}$$

$\boxed{AB = ۱۸/۰۱}$ متر

بحث و بررسی: با استفاده از روابط مثلثاتی و قرائت زاویه‌های ارتفاعی و داشتن طول یک پارامتر از ساختمان می‌توان ارتفاع آن را به‌دست آورد.

۴ـ۵ـ کاربرد مثلث‌قائم‌الزاویه (استفاده از مثلث متساوی‌الساقین)

می‌دانیم اگر ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین را رسم کنیم، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کرده‌ایم.

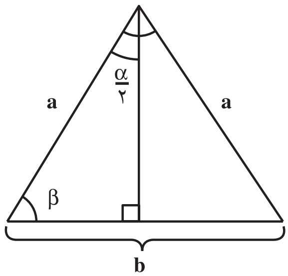
پس طبق شکل خواهیم داشت :

$$\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{\frac{b}{۲}}{a}=\frac{b}{۲a}$$

$$۱)\quad \alpha=۲\sin^{-۱}\left(\frac{b}{۲a}\right)$$

$$۲)\quad a=\frac{b}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

$$۳)\quad b=۲a\sin\frac{\alpha}{۲}$$



شکل ۴ـ۱۵

نکته: چون دو زاویه‌ی $\frac{\alpha}{۲}$ و β متمم یکدیگرند، بنابراین می‌توانیم بگوییم :

$$\sin\frac{\alpha}{۲}=\cos\beta$$

حال می‌توانیم فرمول‌های بالا را با زاویه‌ی β محاسبه نماییم. (به عهده‌ی هنرجو)

۴ـ۶ـ روابط کلی در هر مثلث

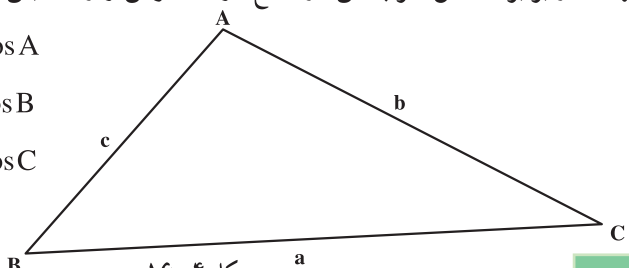
برای حل مثلث غیرمشخص دو فرمولِ مشهور موجود است : الف) رابطه‌ی کسینوس‌ها، ب) رابطه‌ی سینوس‌ها.

قضیه: مربع اندازه‌ی هر ضلع مثلث مساوی است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب این دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین همین دو ضلع :

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$

$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$$

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C$$



شکل ۴ـ۱۶

تذکر: برحسب این‌که C زاویه‌ی حاده یا منفرجه باشد علامت آن تغییر می‌کند.

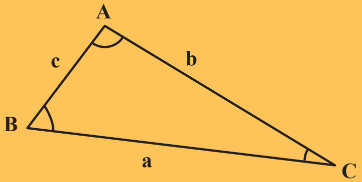
قضیه: در هر مثلث نسبت طول هر ضلع بر سینوس زاویه‌ی مقابل به همان ضلع مساوی دو برابر شعاع دایره‌ی محیطی است :

$$\frac{a}{\sin A} . \frac{b}{\sin B} . \frac{c}{\sin C}$$ (رابطه‌ی سینوس‌ها)

آیا می‌دانید

ابوریحان بیرونی کتاب مقالید علم الهیة که در حقیقت موضوع اصلی آن علم مثلثات کروی است و نخستین کتاب مستقل از علم نجوم درباره مثلثات است به تحریر در آورده به‌طوری که مثلثات کروی کلید علم هیأت است

رابطه سینوس‌ها $\frac{a}{\sin A} . \frac{b}{\sin B} . \frac{c}{\sin C}$ *یکی از فرمول‌های مهم حل مثلث می‌باشد که بیرونی آن را در فصل هشتم از مقاله‌ی سوّم کتاب قانون مسعودی اثبات کرده است.*



۴ــ۷ــ حالات کلاسیک حل مثلث

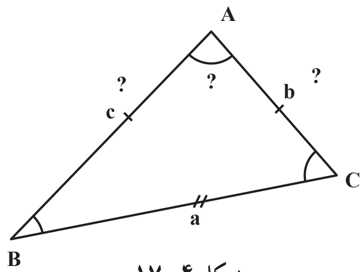
الف) از یک مثلث دو زاویه و یک ضلع معلوم است. برای به‌دست آوردن بقیه‌ی پارامترها از این روابط استفاده می‌کنیم :

$\dot{A} . ۱۸۰ . (\dot{B} . \dot{C})$

معلوم a, b, c

$b . \frac{a \sin B}{\sin A}$ $\quad$ $c . \frac{a \sin C}{\sin A}$

مجهول A, b, c



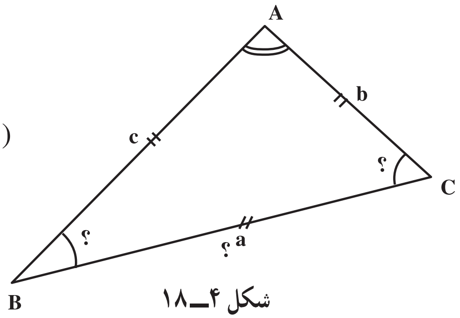
شکل ۴ــ۱۷

ب) دو ضلع و زاویه‌ی مقابل به یکی از دو ضلع معلوم است. برای به‌دست آوردن زوایا و ضلع دیگر مثلث از این روابط استفاده می‌کنیم :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$C = ۱۸۰ - (A + B)$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$



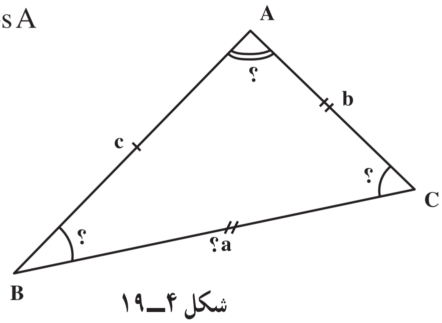
شکل ۴ــ۱۸

ج) دو ضلع و زاویه‌ی بین از مثلثی معلوم است. برای به‌دست آوردن زوایا و ضلع دیگر مثلث از رابطه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc \cos A$$

$$\cos B = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac}$$

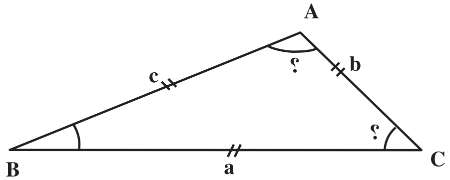
$$\hat{C} = ۱۸۰ - (\hat{A} + \hat{B})$$



شکل ۴ــ۱۹

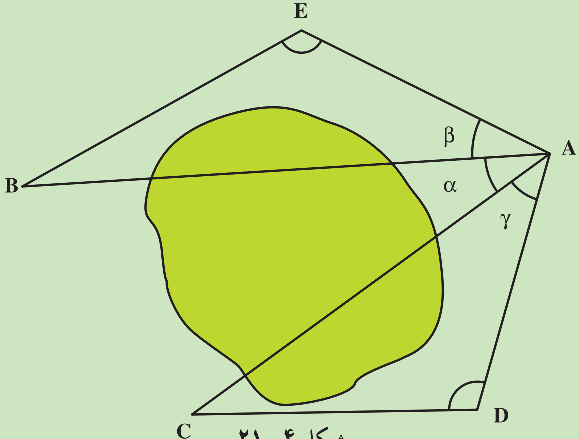
د) سه ضلع از مثلثی معلوم است. برای به‌دست آوردن زوایای مثلث از رابطه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم :

$$\cos B = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} \qquad \cos A = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} \qquad \hat{C} = ۱۸۰ - (\hat{A} + \hat{B})$$



شکل ۴ــ۲۰

مثال ۴ــ۱۰ــ اندازه‌گیری زاویه‌ی $B\hat{A}C = \alpha$ که نقاط B و C به علت وجود مانع دید (دهکده) به‌طور مستقیم امکان ندارد (شکل ۴ــ۲۱).



شکل ۴ــ۲۱

حل: نقاط D و E را خارج از محل تعیین می‌کنیم و زوایای $\hat{D}$ ، $\hat{E}$ و $\hat{A}$ را اندازه‌گیری کرده اضلاع AE ، EB ، AD و DC را نیز اندازه‌گیری می‌کنیم.

از حل مثلث معلوم ADC زاویه‌ی γ و از حل مثلث $\overset{\Delta}{BEA}$ زاویه‌ی β، سپس با داشتن زاویه‌ی A زاویه‌ی $\hat{\alpha}$ به‌دست می‌آید :

$$\hat{\alpha}=\hat{A}-\hat{\beta}-\hat{\gamma}$$

آیا می‌دانید

ابوعبداله محمدبن موسی خوارزمی *ریاضیدان و منجم و مورخ و جغرافیدان ایرانی نیمه‌ی دوّم سده‌ی دوّم و نیمه‌ی اول سده‌ی سوّم یکی از زبردست‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم عصر خود بود.*

وی در ریاضیات و مخصوصاً نجوم ایران پیش از اسلام و تعالیم مکتب جندی‌شاپور که در زمان وی هنوز از خاطره‌ها محو نشده بود دست داشت و آن‌ها را با ریاضیات هندی در آمیخت و نخستین کتاب‌های حساب و جبر و نجوم (زیج) را به زبان عربی نوشت و آثار او در بسط و پیشرفت ریاضیات چه در کشورهای اسلامی وچه بعداً در کشورهای اروپایی تأثیر فراوان داشت.

کتاب جبر و مقابله او قدیمی‌ترین کتابی است که در این‌باره نوشته شده است. این کتاب قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپائیان تا سده‌ی شانزدهم میلادی مبنای مطالعات

علمی آنان در این رشته بود.

کتاب حساب خوارزمی نخستین کتابی است که در دوره اسلامی راجع به فن حساب هندی تألیف گردیده است.

خوارزمی در حدود سال ۱۸۰ هـ ــ ق یا پیش از آن تاریخ در خوارزم متولد شده و در دهه‌ی آخر سده‌ی دوم هجری به حوزه‌ی علمی بغداد رفته و بعد از سال ۲۳۲ درگذشته است و در زمان خلافت مأمون یعنی در بین سال‌های ۱۹۸ تا ۲۱۸ هجری دانشمندی مورد توجه خلیفه وقت بوده.

ــ واژه‌ی «الگوریتم» که به معنای یافتن روش کلّی حل مسأله است از نام «الخوارزمی» گرفته شده است.

ــ واژه‌ی «جبر» که امروزه در تمامی جهان و به همین صورت به شاخه‌ای از ریاضیات اطلاق می‌شود از کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی برداشته شده است.

ــ عددنویسی اگر چه در هند کشف شد، اما به وسیله‌ی ایرانیان تکامل یافت و از طریق ترجمه‌ی کتاب‌های ریاضی دانان ایرانی به اروپا رفت.

ــ اصطلاحات مثلثات مثل «سینوس و کسینوس و تانژانت» دقیقاً ترجمه‌ی واژه‌هایی است که در نوشته‌های ریاضی‌دانان ایرانی و به خصوص کتاب «کشف القناع» خواجه‌نصیرالدین طوسی به کار رفته است. در واقع در هیچ زمینه‌ای از ریاضیاتِ محاسبه‌ای مثل حساب و جبر و مثلثات نمی‌توان قانون یا دستوری را یافت که به وسیله‌ی ریاضی‌دانان ایرانی کشف نشده باشد.

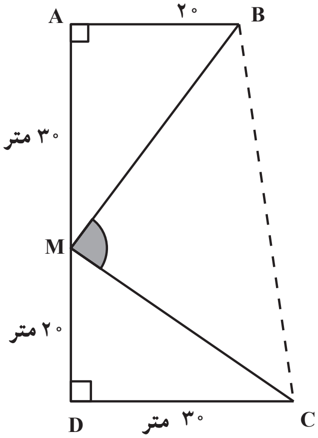
خودآزمایی

۱ــ زمینی است به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع که هر ضلع آن ۵۸ متر است. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث ابتدا اندازه‌ی ارتفاع مثلث، سپس مساحت آن را حساب کنید.

۲ــ در شکل روبه‌رو زمینی به شکل ذوزنقه که اندازه‌ی اضلاع MD ، MA ، AB و DC داده شده است و زوایای ۹۰ . $\dot{D}$. $\dot{A}$ است.

نخست، ثابت کنید زاویه‌ی # BMC برابر ۹۰ است.

سپس، اندازه‌ی طول BC را حساب کنید.

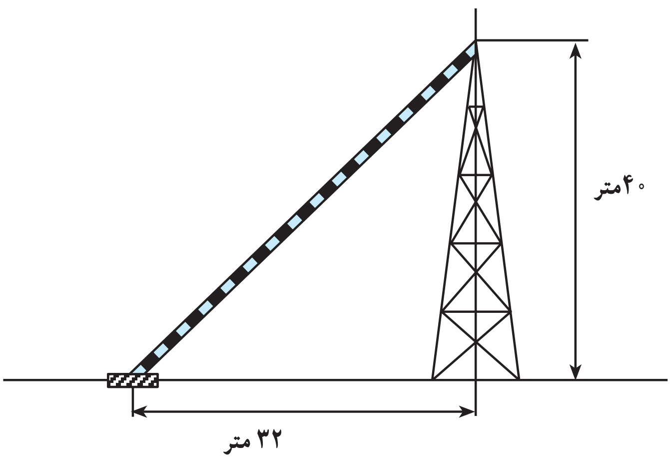


شکل ۴ــ۲۲

۳ــ مساحت باغچه‌ای مربع شکل ۱۴۴ مترمربع است. طول قطر باغچه چه‌قدر است؟

۴ــ با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث برای ترسیم پاره‌خطی به طول $\sqrt{۳}$ چگونه عمل می‌کنیم؟

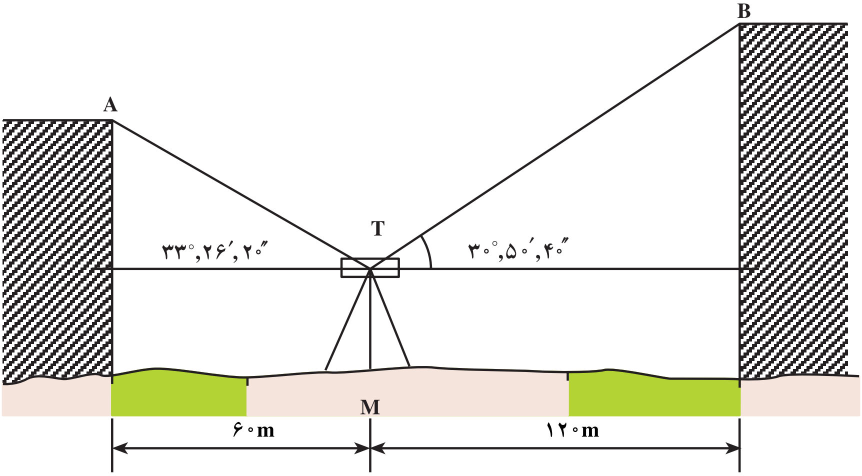
۵ــ یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع ۴۰ متری با یک سیم به شکل قائم نگه داشته شده است. این سیم به فاصله‌ی ۳۲ متر از پایه‌ی آنتن به زمین وصل شده است (شکل ۴ــ۲۳) طول این سیم چند متر است؟



شکل ۴ــ۲۳

۶ــ اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۸، ۱۰ و ۱۲ متر است. زوایای مثلث را حساب کنید.

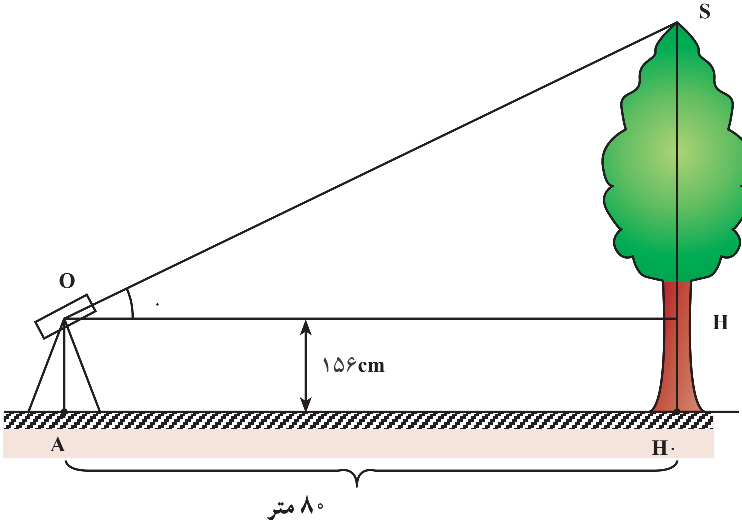
۷ــ دو ساختمان بلند روبه‌روی هم در کنار جاده‌ای مطابق شکل ۴ــ۲۴ قرار دارند. می‌خواهیم اختلاف ارتفاع آن‌ها را به‌دست آوریم. بدین‌منظور، یک دستگاه دوربین زاویه‌یاب را در نقطه‌ی M (مطابق شکل) مستقر می‌کنیم (به‌گونه‌ای که فاصله‌ی افقی دوربین از ساختمان A ۶۰ متر و از ساختمان B ۱۲۰متر باشد) و به لبه‌ی پشت‌بام ساختمان‌ها نشانه روی کرده زوایای شیب را اندازه‌گیری می‌کنیم زاویه‌ی شیب ساختمان A″۲۰,′۲۶,°۳۳ و ساختمان B″۴۰,′۵۰,°۳۰ است :



شکل ۴ــ۲۴

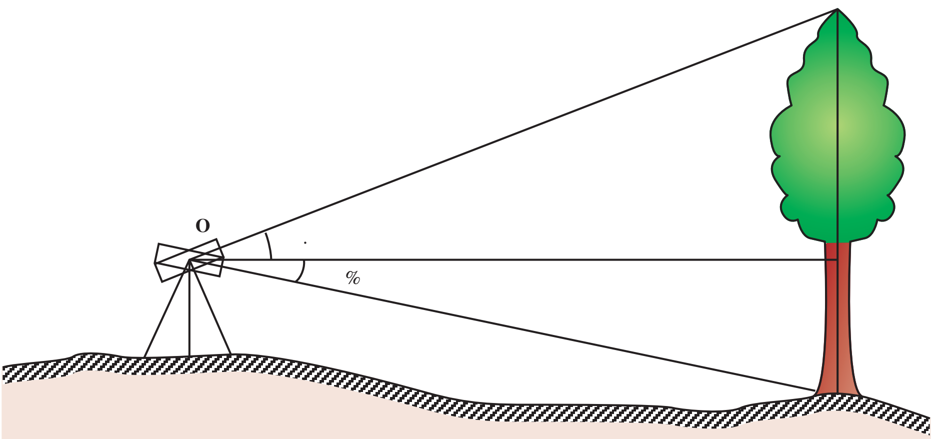
مسائل

مسأله‌ی ۱ــ برای به‌دست آوردن ارتفاع یک درخت دستگاه زاویه‌یابی را مطابق شکل ۴ــ۲۵ به فاصله‌ی ۸۰ متر از درخت مستقر کرده زاویه‌ی شیب آن یعنی زاویه‌ی α را اندازه‌گیری می‌کنیم که ′۲۴,°۳۶ می‌شود. اگر ارتفاع دستگاه زاویه‌یاب ۱۵۶ سانتی‌متر باشد ارتفاع درخت را محاسبه کنید (حالت خاص سطح زمین را افقی فرض می‌کنیم).



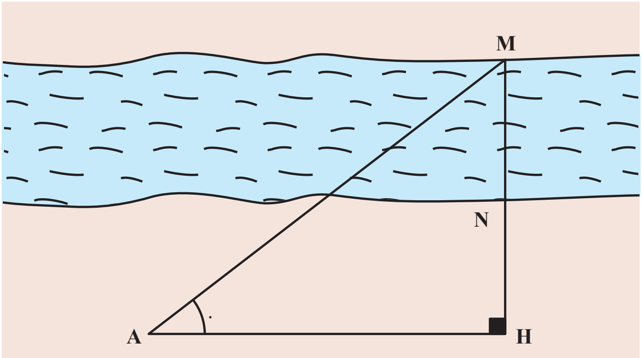
شکل ۴ــ۲۵

مسأله‌ی ۲ــ اگر براساس مسأله‌ی ۱، زمین افقی نباشد (مطابق شکل ۴ــ۲۶) می‌خواهیم با اطلاعات زیر ارتفاع درخت را محاسبه کنیم. زوایای شیب . و% هر یک به‌ترتیب ۲۳ ,.۱۵ و ۱۲ ,.۱۰ می‌باشد. اگر فاصله‌ی افقی دستگاه تا درخت ۱۸۳ متر باشد ارتفاع درخت را به‌دست آورید.



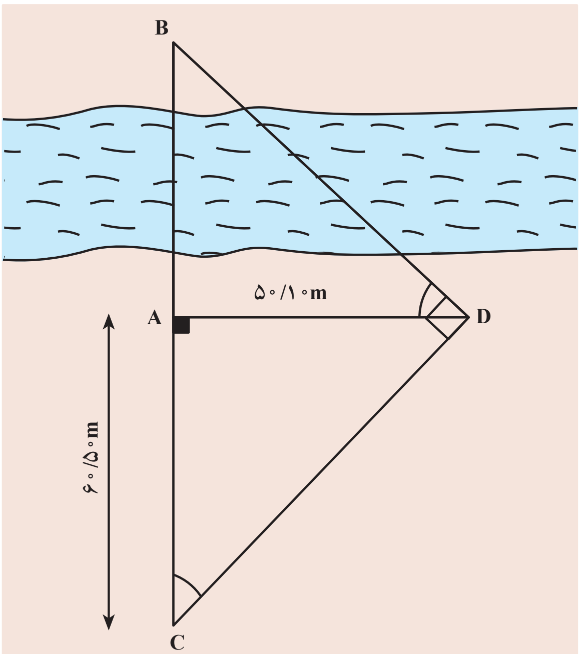
شکل ۴ــ۲۶

مسأله‌ی ۳ــ عرض یک رودخانه‌ی عبورناپذیر برای احداث پلی مورد نیاز است. برای این‌کار دستگاه زاویه‌یابی را در نقطه‌ی دل‌خواه A مستقر کرده مطابق شکل **۴ــ۲۷** زاویه‌ی افقی . را اندازه‌گیری می‌کنیم که نتیجه ‎.۲۵, ۴۳‎ شده است. اگر طول‌های AH و NH که بر هم عمود ند به‌ترتیب ۵۰ و ۲۰ متر باشد عرض رودخانه یعنی طول MN را به‌دست آورید.



شکل ۴ــ۲۷

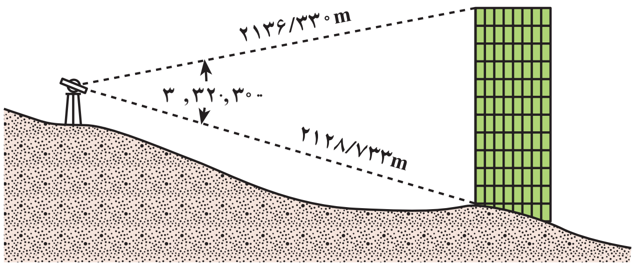
مسأله‌ی ۴ــ در شکل ۴ ــ ۲۸ امتداد CD عمود بر ضلع BD و امتداد AD عمود بر AB است. اگر طول ‎۵۰/۱۰m‎ . AD و طول ‎۶۰/۵۰m‎ . AC باشد مطلوب است محاسبه‌ی طول AB.



شکل ۴ــ۲۸

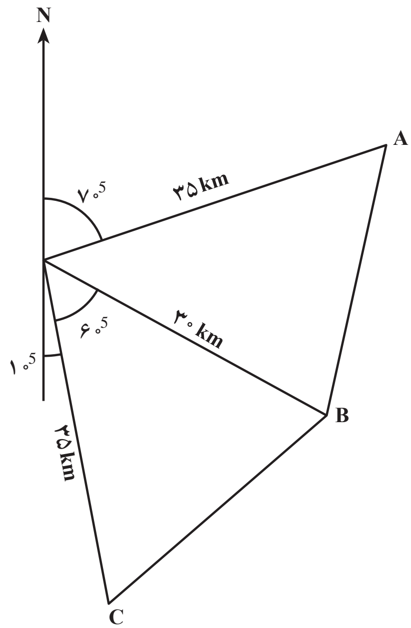
مسأله‌ی ۵ــ زمینی به شکل مثلث روی نقشه ترسیم شده است و اندازه‌های دو ضلع ۱۵ . a و ۲۰ . b سانتی‌متر و اندازه‌ی زاویه‌ی بین این دو ضلع ۱۲۰ درجه است. ضلع سوّم را به‌دست آورید.

مسأله‌ی ۶ــ مطلوب است محاسبه‌ی ارتفاع برج مطابق شکل ۴ــ۲۹.



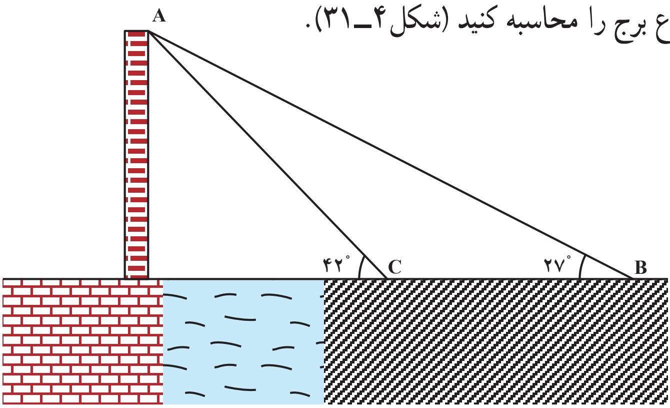
شکل ۴ــ۲۹

مسأله‌ی ۷ــ براساس اطلاعاتی که در شکل ۴ــ۳۰ داده شده مطلوب است محاسبه‌ی اضلاع AB و BC :



شکل ۴ــ۳۰

مسأله‌ی ۸ــ از نقطه‌ی B زاویه‌ی فراز سربرجی (زاویه‌ی فراز بلندترین نقطه‌ی برج) ۲۷ است. با حرکت کردن به طرف برج و پیمودن مسافت ۱۹/۶۳ متر زاویه‌ی فراز همان نقطه از برج ۴۲ است ارتفاع برج را محاسبه کنید (شکل ۴ــ۳۱).



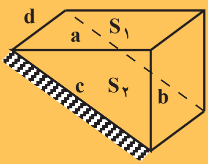
شکل ۴ــ۳۱

کار گروهی

مانند فصل اول و دوم، با نظارت سرگروه، کار آموزش با زبان خود را تکرار کنید و با طرح سؤال میزان یادگیری اعضای گروه را ارزیابی کنید.

نکته: خرید و فروش زمین در سطح شیبدار کوهستانی: از آن‌جایی که در اندازه‌گیری‌ها، فواصل افقی و سطوح مستوی مد نظر قرار می‌گیرد، لذا زمین‌هایی که در دامنه‌ی کوه‌ها و تپه‌ها برای ویلاسازی خرید و فروش می‌شود و چنانچه که به بحث ظریف نقشه‌برداری آن توجهی نشود، باعث خسارت‌های مالی فراوان برای خریدار می‌شود ؛ چرا که خریدار در واقع باید مساحت زمین مورد نظر در سطح شیبدار را به صفحه‌ی افقی تصویر کرده و مساحت سطح مستوی آن را پرداخت نماید. طبق شکل زیر b^2 . c^2 . a^2 می‌باشد در صورتی که توجه به امر فوق نشود باعث می‌شود که به جای پرداخت برای ad . S_1 مقدار بیشتری یعنی برای cd . S_2 پرداخت می‌شود.

به عنوان مثال اگر قسمت زمینی به مساحت یک هکتار که در یک منطقه شیبدار با شیب ۲۰٪ قرار گرفته باشد حدود ۵۰۰ میلیون به مبلغ ۴۹۰ میلیون تومان کاهش پیدا خواهد کرد.



فصل پنجم

دستگاه مختصات (Coordinate System)

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ محورهای مختصات را تعریف کند و دستگاه مختصات دوبعدی را شرح دهد.

۲ــ دستگاه مختصات قطبی دوبعدی را توضیح دهد.

۳ــ دستگاه مختصات سه‌بعدی را تعریف کرده، مختصات دکارتی در فضا را شرح دهد.

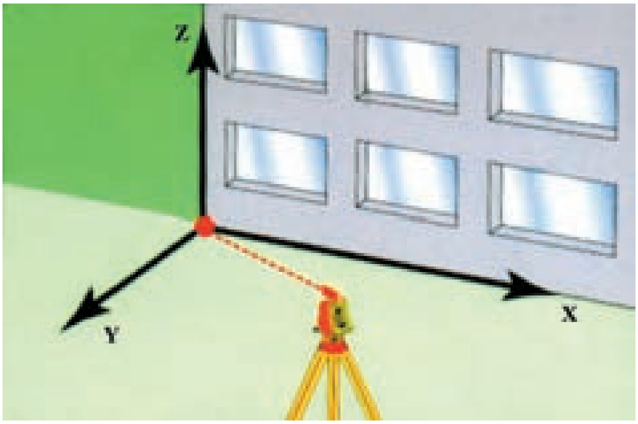
۴ــ دستگاه مختصات استوانه‌ای یا نیم‌قطبی را شرح دهد.

۵ ــ روابط تبدیل مختصات استوانه‌ای را به مختصات قائم‌الزاویه و به‌عکس، با ذکر مثال، شرح دهد.

۶ــ مختصات کروی را توضیح دهد.

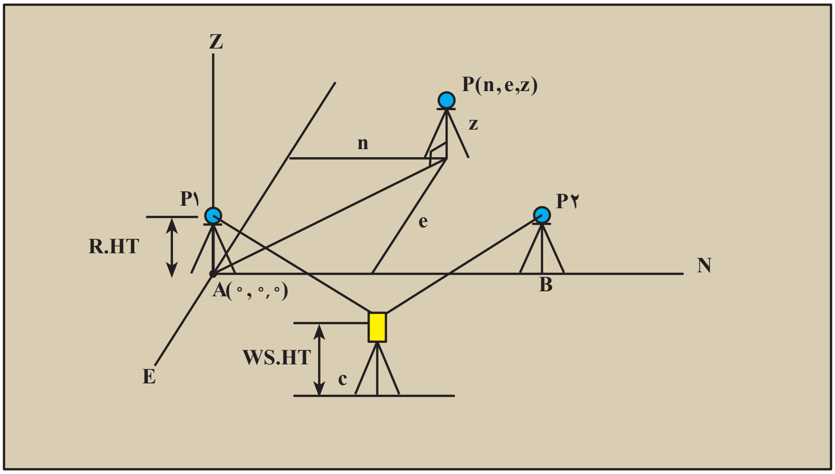
۷ــ روابط تبدیل مختصات کروی را به قائم‌الزاویه و به‌عکس، شرح دهد.

۸ــ مثال‌های ارائه شده در این فصل را فرابگیرد.



x ,y , z = o

شکل ۵ــ۱



شکل ۵ــ۲

۵ــ۱ــ تعریف محور (Axis)

یک خط جهت‌دار را که روی آن نقطه‌ای به نام مبدأ و طولی به نام واحد اندازه‌گیری تعیین شده باشد «محور» می‌نامند. جهت محور را از طرف چپ به راست «مثبت» و از طرف راست به چپ «منفی» درنظر می‌گیرند. معمولاً محور را با $x'ox$ یا $y'oy$ مطابق این شکل نشان می‌دهند.

شکل ۵ــ۳

هر عدد حقیقی را با یک نقطه از محور و هر نقطه از محور را با یک عدد حقیقی متناظر می‌کنیم. مبدأ O متناظر با عدد صفر و نقطه‌ی I متناظر با عدد یک است. در شکل ۵ــ۴ پاره‌خط OA را با درنظر گرفتن جهت مثبت محور «بردار» می‌نامیم و آن را با $\overrightarrow{OA}$ نشان می‌دهیم. O را مبدأ و A را انتهای این بردار می‌خوانیم. طول پاره‌خط OA را بدون درنظر گرفتن جهت آن طول آن بردار نامیده، با $|\overrightarrow{OA}|$ نشان می‌دهند.

اگر A نقطه‌ای دل‌خواه روی محور باشد بنا به تعریف طول (مختص) نقطه‌ی A که آن را با x_A نشان می‌دهیم و به آن «اندازه‌ی جبری $\overrightarrow{OA}$» نیز می‌گوییم:

$$\overline{OA} = x_A$$

شکل ۵ــ۴

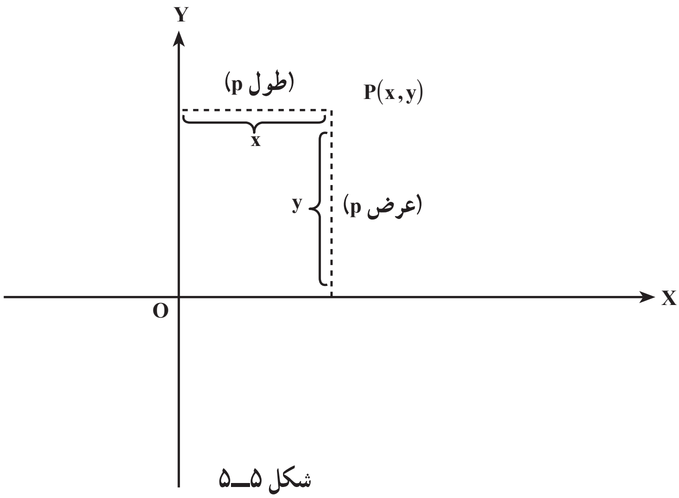
۵ـ۲ـ دستگاه مختصات دوبعدی

مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی را صفحه‌ی اعداد و هر زوج مرتب (x,y) را یک نقطه از این صفحه می‌نامیم. صفحه‌ی اعداد را با علامت R^2 نشان می‌دهند.

همان‌گونه که R^1 را با نقاط روی یک محور (فضای یک‌بعدی) مشخص می‌کنیم، می‌توانیم R^2 را با نقاط واقع در یک صفحه‌ی هندسی (فضای دوبعدی) مشخص کنیم. روشی که برای R^2 به‌کار می‌بریم منسوب به «رنه دکارت» ریاضی‌دان فرانسوی است که ابداع تحلیلی در سال ۱۶۲۷ نیز کار اوست.

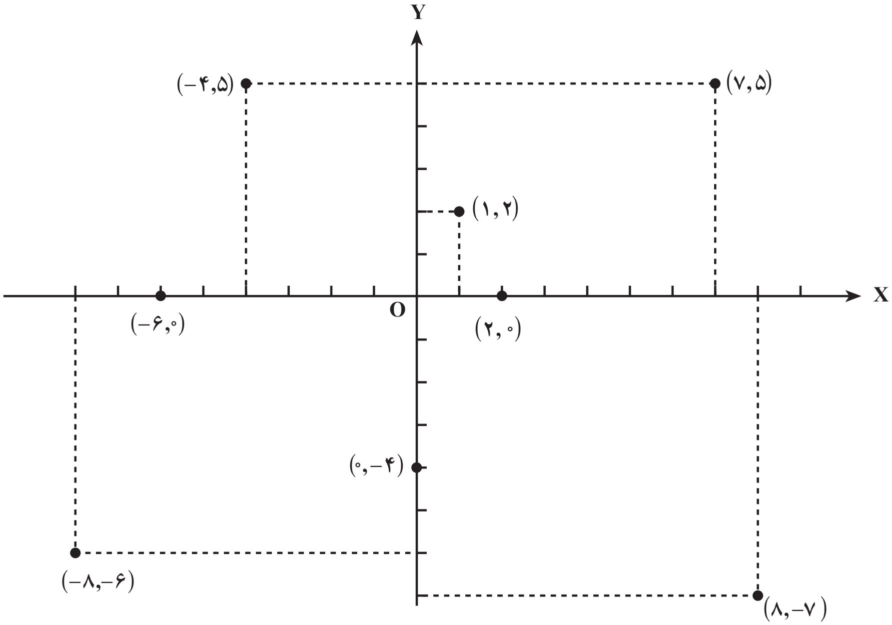
تعریف دستگاه دوبعدی دکارتی (قائم‌الزاویه) (Cartesian): یک خط افقی در صفحه‌ی هندسی انتخاب می‌کنیم. آن را محور xها می‌نامیم. خطی قائم نیز به‌نام محور yها انتخاب می‌کنیم که عمود بر محور xها باشد. نقطه‌ی برخورد محور xها و محور yها را مبدأ مختصات می‌نامیم و با حرف O نشان می‌دهیم. واحدی برای طول انتخاب می‌کنیم. (معمولاً واحد طول برای هر دو عدد یکسان انتخاب می‌شود.)

فرض می‌کنیم جهت مثبت روی محور xها در طرف راست مبدأ و جهت مثبت روی محور yها در طرف بالای مبدأ باشد (مطابق شکل ۵ـ۵). به زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی نقطه‌ای مانند P روی صفحه هندسی نسبت می‌دهیم که دارای این مشخصات است : فاصله‌ی P از محور yها برابر x است که اگر P در طرف راست محور yها واقع شده باشد x مثبت و اگر در طرف چپ باشد x منفی است. x را طول (مختص x) نقطه‌ی P می‌نامیم. فاصله‌ی P از محور xها برابر y است که اگر P بالای محور xها باشد y مثبت و اگر P پایین محور xها باشد y منفی خواهد بود. y را عرض



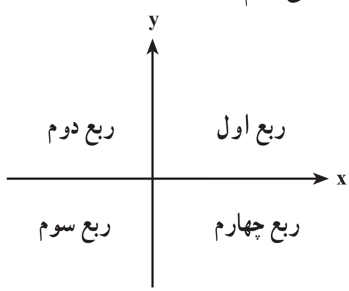
شکل ۵ـ۵

(مختص y) نقطه‌ی P می‌نامیم. بدین‌ترتیب، طول و عرض یک نقطه را «مختصات دکارتی قائم آن نقطه» می‌گویند. در شکل ۵ــ۶ یک دستگاه مختصات دکارتی قائم و چند نقطه را در آن می‌بینید.



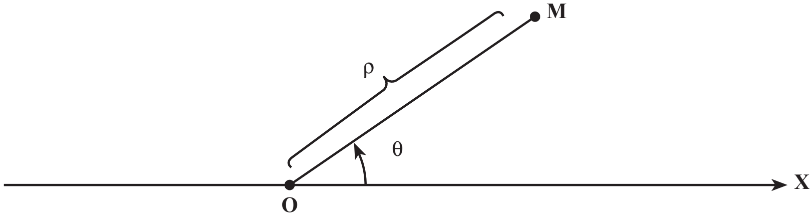
شکل ۵ــ۶

محور xها و محور yها صفحه‌ی اعداد را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که هر قسمت را یک «ربع» می‌خوانیم. ربع اول ربعی است که در آن طول و عرض نقاط هر دو مثبت هستند؛ یعنی، ربع بالای xها و سمت راست محور yها، به همین ترتیب ربع‌های دیگر را در جهت عکس گردش عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌کنیم:



تعریف دستگاه مختصات قطبی(Polar) دو بعدی: مختصات هر نقطه در این دستگاه به‌وسیله‌ی دو پارامتر یکی طول و دیگری زاویه مشخص می‌شود (شکل ۵ــ۷). محور ثابتی را مانند

$x'ox$ درنظر می‌گیریم ؛ برای تعیین مختصات قطبی نقطه‌ی M طول $OM = \rho$ را درنظر گرفته دیگر زاویه‌ی θ (زاویه‌ای که OM با محور Ox در جهت خلاف عقربه ساعت می‌سازد) منظور می‌کنیم ؛ بنابراین مختصات قطبی $M(\rho,\theta)$ نمایش داده می‌شود. (نقطه O مبدأ مختصات قطبی است).



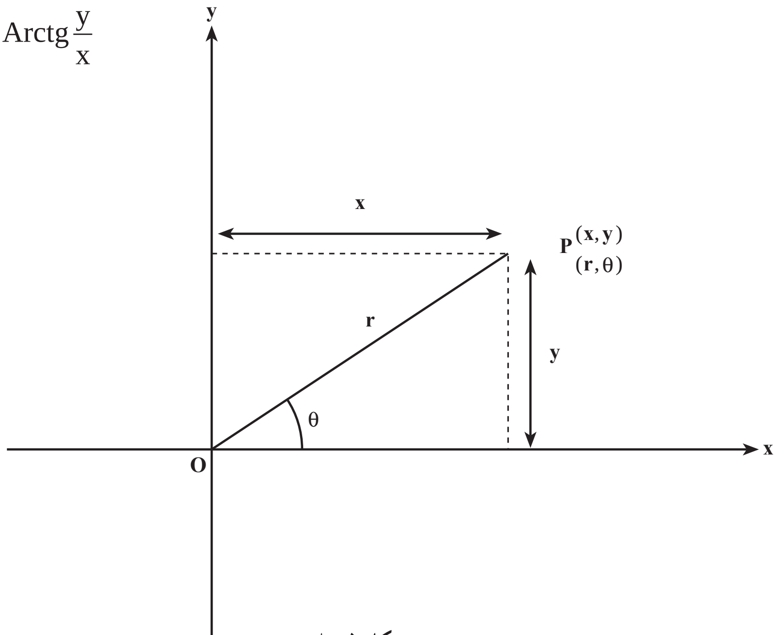
شکل ۵ــ۷

۵ــ۳ــ تبدیل مختصات قائم‌الزاویه به مختصات قطبی

اگر مختصات قائم‌الزاویه نقطه‌ی $p(x,y)$ معلوم باشد با توجه به تعریف مختصات کروی و ملاحظه‌ی شکل ۵ــ۸ از روابط زیر استفاده می‌کنیم :

$$r^۲ = x^۲ + y^۲$$

$$\theta = \text{Arctg}\frac{y}{x}$$



شکل ۵ــ۸

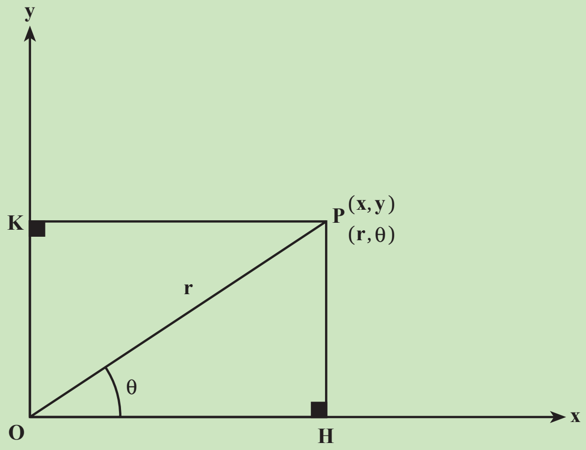
درصورتی که (r,θ) مختصات قطبی نقطه‌ی p معلوم باشد و بخواهیم مختصات قائم‌الزاویه‌ی آن را به‌دست آوریم مطابق شکل صفحه‌ی قبل (شکل ۵ــ۸) از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم :

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

مثال ۵ــ۱ : مختصات قائم‌الزاویه نقطه $A(1,\sqrt{3})$ معلوم است مطلوبست محاسبه‌ی مختصات قطبی نقطه A.

راهکار کلی: در شکل زیر با توجه به این‌که مختصات قائم‌الزاویه نقطه P یعنی (x,y) معلوم است می‌خواهیم مختصات قطبی آن (r,θ) را به‌دست آوریم.



شکل ۵ــ۹

رابطه تانژانت را در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OPH}$ می‌نویسیم

رابطه ۱ $\quad tg\theta = \dfrac{PH}{OH} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\theta = \text{Arc tg}\dfrac{y}{x}}$

و رابطه فیثاغورث را نیز در این مثلث می‌نویسیم $OP^2 = PH^2 + OH^2$ و مقادیر x و y و r را در آن قرار می‌دهیم به‌طوری که

$$OP = r \ , \ \ pH = y \ , \ \ OH = x$$

رابطه ۲ $\quad r^2 = x^2 + y^2$ نتیجه می‌شود

دو رابطه ۱ و ۲ تشکیل یک دستگاه دو معادله دو مجهول را می‌دهد که با حل آن می‌توانیم

مختصات را به هم تبدیل کنیم.

$$\begin{cases} r^۲ = x^۲ + y^۲ \\ \theta = \text{Arc tg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

روش حل: در مسئله فوق مختصات نقطه $A(۱,\sqrt{۳})$ یعنی $(y=\sqrt{۳}, x=۱)$ می‌باشد اگر پارامترهای r و θ را از دستگاه تبدیل مختصات به‌دست آوریم مسئله حل می‌شود.

$$\begin{cases} r^۲ = x^۲ + y^۲ \\ \theta = \text{Arc tg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

مختصات قطبی
$$\begin{cases} r^۲ = (۱)^۲ + (\sqrt{۳})^۲ \\ \theta = \text{Arc} \quad \text{tg}\dfrac{\sqrt{۳}}{۱} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^۲ = ۴ \Rightarrow r = ۲ \\ \theta = ۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = ۲ \\ \theta = ۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow P(۲,۶۰^\circ)$$

بحث و بررسی: به‌وسیله‌ی فرمول فوق و دستگاه تبدیل مختصات می‌توان مختصات دوبعدی قطبی و قائم‌الزاویه را به هم تبدیل کرد و در نقشه‌برداری برای پیاده‌کردن نقاط بیش‌تر از روش قطبی (طول و زاویه) استفاده می‌کنیم.

مطالعه‌ی آزاد

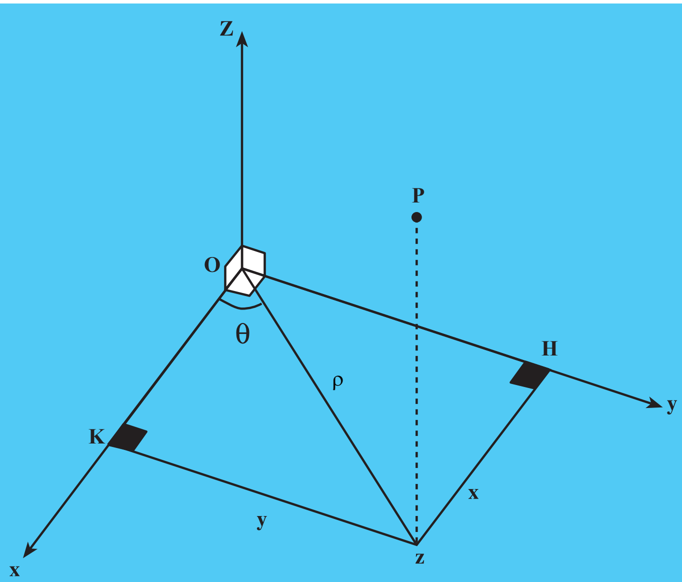
مثال ۵ــ۲: مختصات قائم‌الزاویه‌ی نقطه‌ی P عبارت است از $P(۱,\sqrt{۳},۵)$ مختصات استوانه‌ای نقطه‌ی P را حساب کنید.

راهکار کلی: طبق تعریف مختصات استوانه‌ای نقطه‌ی P در فضا را روی صفحه xoy تصویر می‌کنیم که تصویر آن نقطه z می‌شود حال از نقطه z دو عمود بر محورهای ox و oy رسم می‌کنیم پارامترهای زیر مشخص می‌شود.

$$Oz = \rho \;,\; zH = x \;,\; zK = y \;,\; x\hat{o}z = \hat{\theta}$$

در حقیقت اگر مختصات استوانه‌ای را در صفحه xoy تصویر کنیم تبدیل به مختصات قطبی در صفحه به‌اضافه ارتفاع Z یعنی طول $\overline{pz}$ می‌باشد و فرمول مختصات قطبی را در صفحه داریم اگر ارتفاع Z یعنی طول $\overline{pz}$ به آن اضافه کنیم مختصات استوانه‌ای به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta \\ y = \rho\cos\theta \end{cases}$$



شکل ۵ــ۱۰

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = \rho^۲ \\ \theta = \mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^۲ + y^۲ = \rho^۲ \\ \theta = \mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x} \\ Z = z \end{cases}$$

مختصات قطبی   مختصات استوانه‌ای

روش حل: مفروضات مسئله عبارت‌اند از $x = ۱$ و $y = \sqrt{۳}$ و $z = ۵$ که آن‌ها را در فرمول زیر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = \rho^۲ \\ \theta = \mathrm{Arc\,tg}\dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (۱)^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = \rho^۲ \\ \theta = \mathrm{Arc\,tg}\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^۲ = ۴ \\ \theta = ۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = ۲ \\ \theta = ۶۰ \end{cases} \xRightarrow[\text{ارتفاع}]{\text{به‌اضافه‌ی}} \begin{cases} \rho = ۲ \\ \theta = ۶۰ \\ z = ۵ \end{cases}$$

$\Rightarrow p(۲,۶۰^\circ,۵)$ مختصات استوانه‌ای

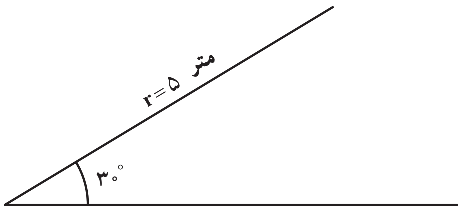
بحث و بررسی: با نوشتن فرمول‌های مربوط به مختصات استوانه‌ای (قطبی + ارتفاع) که به آن نیم‌قطبی نیز می‌گویند می‌توان مسائل مربوط به آن‌را حل کرد.

خودآزمایی

۱ــ ابتدا محورهای مختصات دوبعدی را رسم کنید، سپس نقطه‌ی A، مختصات $(۲,۳)$ و نقطه‌ی B با مختصات $(-۳,۴)$ و نقطه‌ی C، مختصات $(-۵,-۲)$ را در صفحه مشخص کنید.

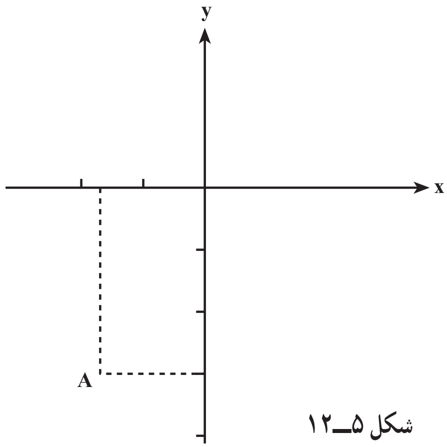
۲ــ مختصات قطبی نقطه‌ی $M(۵,۳۰^\circ)$ مطابق شکل ۵ــ۱۱ معلوم است. مختصات قائم‌الزاویه آن را به‌دست آورید :

$M(۵,۳۰^\circ)$



شکل ۵ــ۱۱

۳ــ مختصات قائم‌الزاویه‌ی نقطه‌ی $A(-\sqrt{۳},-۳)$ است. مختصات قطبی آن را به‌دست آورید (شکل ۵ــ۱۲).



شکل ۵ــ۱۲

۴ــ مختصات قطبی نقطه‌ی $M=(۸,۳۰^\circ)$ معلوم است. مختصات دکارتی (قائم‌الزاویه) آن را به‌دست آورید.

کار گروهی دانش‌آموزان

با نظارت و کمک معلمان عزیز مانند فصول قبل فعالیت آموزش و ارزیابی اعضاء توسط گروه انجام شود.

فصل ششم

محاسبه‌ی مساحت (Area)

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ روش‌های مختلف محاسبه‌ی مساحت مثلث را توضیح دهد.

۲ــ فرمول‌های محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی‌ها (مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، لوزی و ذوزنقه) را بیان کند.

۳ــ روش‌های تعیین مساحت چهارضلعی‌های غیرمشخص را توضیح دهد.

۴ــ روش تعیین مساحت چندضلعی‌ها را به روش دستور «هرون» شرح دهد.

۵ــ فرمول‌های محاسبه‌ی مساحت دایره، قطاع و قطعه را با ذکر یک مثال در ۳ شکل بیان کند.

۶ــ فرمول محاسبه‌ی مساحت بیضی را با ذکر یک مثال و رسم شکل توضیح دهد.

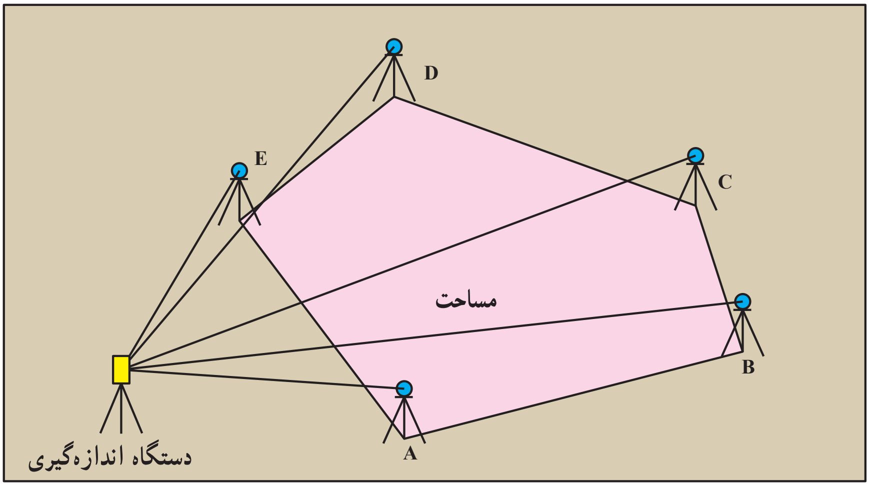
۷ــ روش محاسبه‌ی سطح محصور با استفاده از ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع را شرح دهد.

۸ــ محاسبه‌ی مساحت به روش «گوس» را شرح دهد.

۹ــ محاسبه‌ی مساحت به روش ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع را شرح دهد.

۱۰ــ محاسبه‌ی مساحت به‌روش سیمپسون را شرح دهد.

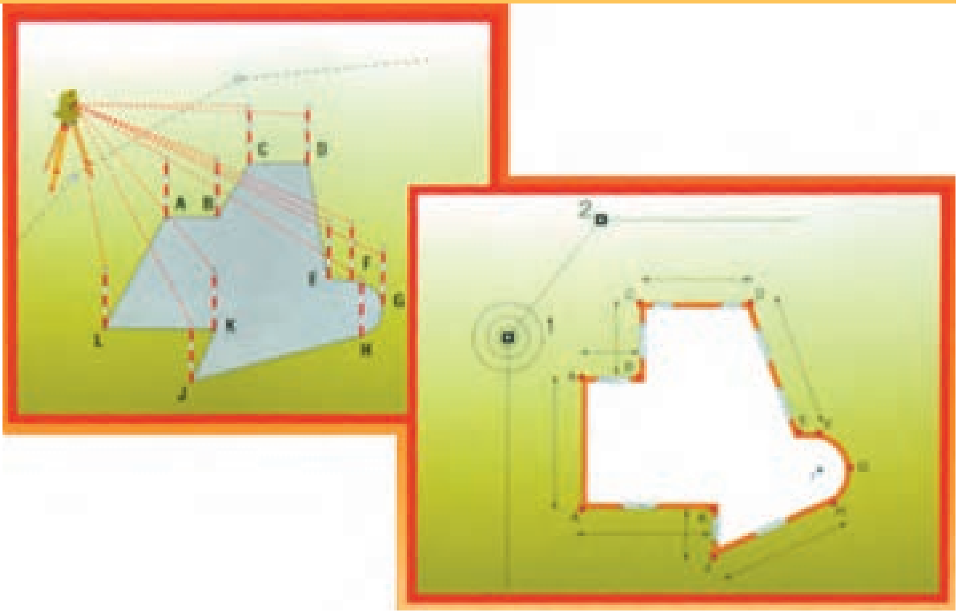
۱۱ــ مثال‌های حل‌شده در این فصل را فرا بگیرد.



شکل ۶ــ۱

آیا می‌دانید

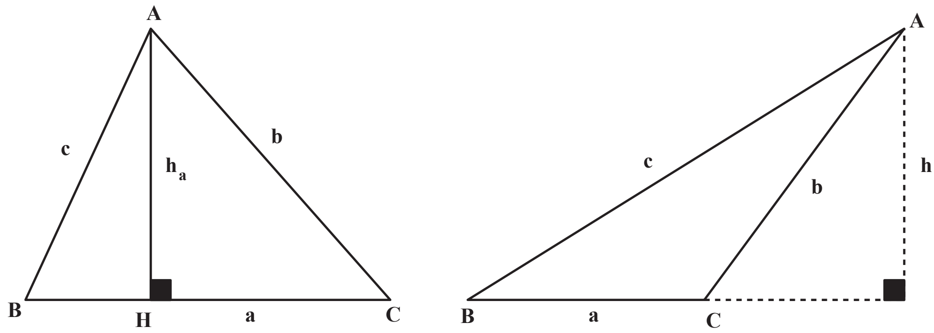
محاسبه‌ی مساحت مثلث: به دلیل نیاز بشر برای حل اختلاف مالکیت‌ها و تعیین حد و مرز زمین‌های حاصل‌خیز کشاورزی و آبرفتی مخصوصاً بعد از سیلاب‌ها و تقسیم عادلانه‌ی آن علم مساحی و اندازه‌گیری ابعاد و مساحت زمین بسیار مورد توجه دانشمندان بوده است.



شکل ۶ــ۲ــ اندازه‌گیری‌های لازم جهت محاسبه‌ی مساحت

۶ــ۱ــ محاسبه‌ی مساحت اشکال هندسی

محاسبه‌ی مساحت مثلث: در شکل ۶ــ۳ سه‌ضلعی ABC را در نظر گرفته اضلاع روبه‌روی هر زاویه با حروفی نظیر a، b، c و ارتفاع وارد بر هر ضلع را با h_a ، h_b و h_c نشان می‌دهیم :



شکل ۶ــ۳

الف) مساحت مثلث برابر است با حاصل‌ضرب قاعده در نصف ارتفاع وارد بر آن ضلع :

$$S = \frac{۱}{۲} a.h_a = \frac{۱}{۲} b.h_b = \frac{۱}{۲} c.h_c$$

ب) مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع :

$$S = \frac{۱}{۲} ab \sin C = \frac{۱}{۲} ac \sin B = \frac{۱}{۲} bc \sin A$$

ج) دستور Heron : محاسبه‌ی مساحت مثلث برحسب سه ضلع آن

اگر a ، b و c اندازه‌های سه ضلع مثلث باشند، محیط مثلث یعنی : $a+b+c$ را با ۲P نمایش می‌دهند و S مساحت مثلث را از دستور :

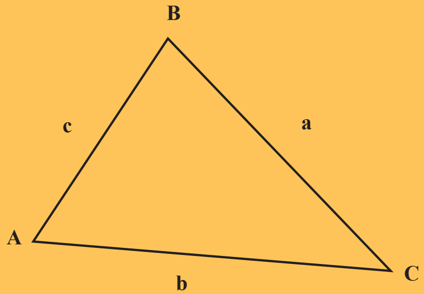
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

به‌دست می‌آورند. این رابطه به مشابه‌ی دستور Heron در تعیین مساحت اراضی کاربرد فراوان دارد.

آیا می‌دانید

برای محاسبه‌ی مساحت در حالتی که سه ضلع آن معلوم است ابوالوفابوزجانی دانشمند مسلمان ایرانی درقرن چهارم هــ‌ـ‌ق فرمول آن را به شکل زیر بیان کرده است.

$$S=\sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]\left[\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{c-b}{۲}\right)^{۲}\right]}$$



تذکر: این فرمول در حقیقت با تغییراتی که روی آن انجام می‌شود فرمول محاسبه مساحت به روش هرون (دانشمند یونانی) به‌دست می‌آید.

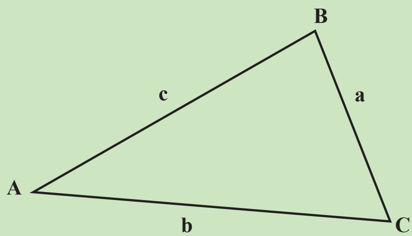
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مثال ۶ــ۱: زمینی است به شکل مثلث که اضلاع آن به‌ترتیب برابر ۷۰ ، ۵۰ و ۶۰ متر می‌باشد مساحت آن‌را به‌دست آورید.

راهکار کلی: برای حل این نوع مسائل که سه ضلع مثلث معلوم باشد بخواهیم مساحت آن‌را به‌دست آوریم بهترین راه استفاده از فرمول بوزجانی یا (هرون) می‌باشد.

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$ که P نصف محیط است

$$P=\frac{a+b+c}{۲}$$



شکل ۶ــ۴

روش حل: اضلاع مثلث را داریم به‌طوری‌که متر $a=۷۰$ و متر $b=۵۰$ و متر $c=۶۰$

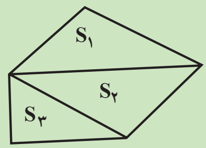
نصف محیط $P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۷۰+۵۰+۶۰}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۹۰(۹۰-۷۰)(۹۰-۵۰)(۹۰-۶۰)}=$$

$\sqrt{۹۰(۲۰)(۴۰)(۳۰)}=۱۴۶۹/۶۹$ مترمربع

بحث و بررسی: با توجه به محاسبه مساحت مثلث با دانستن اضلاع آن از فرمول فوق می‌توان آن‌را تعمیم داد برای تمام چندضلعی‌ها به این صورت که آن‌ها را به مثلث‌های مختلف تفکیک کنیم و مساحت هر مثلث را به همین روش به‌دست آورده سپس مساحت‌ها را با هم جمع کنیم تا مساحت کل به‌دست آید.

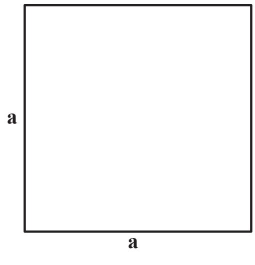
$$S=S_۱+S_۲+S_۳$$



شکل ۶ــ۵

مساحت مربع: برابر حاصل‌ضرب یک ضلع در خود است (شکل ۶ــ۶).

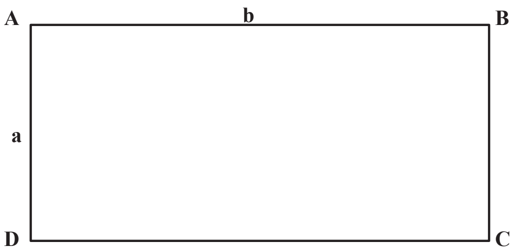
$$S=a^۲$$



شکل ۶ــ۶

مساحت مستطیل: برابر حاصل‌ضرب طول در عرض است (شکل ۶ ــ۷).

$$S=a.b$$

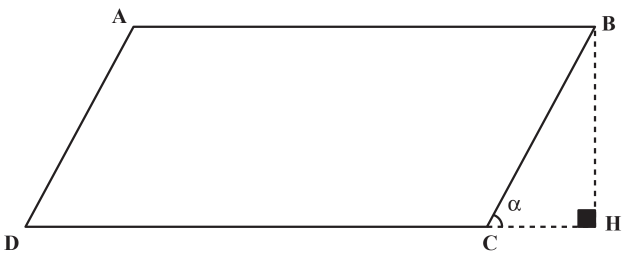


شکل ۶ــ۷

مساحت متوازی‌الاضلاع: برابر است با حاصل‌ضرب هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن (مطابق شکل ۶ــ۸). در متوازی‌الاضلاعِ ABCD که BH ارتفاع وارد بر ضلع CD است :

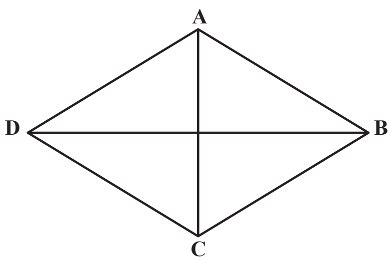
$$S = CD \times BH$$

$$S = CD \times BC \times \sin\alpha$$



شکل ۶ــ۸

مساحت لوزی: برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر : $S = \frac{AC \times BD}{۲}$ (شکل ۶ــ۹).

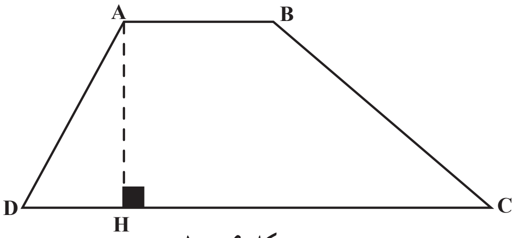


شکل ۶ــ۹

مساحت ذوزنقه: برابر است با حاصل‌ضرب مجموع دو قاعده در نصف ارتفاع. مطابق شکل ۶ــ۱۰ در ذوزنقه‌ی ABCD قاعده‌های AB و CD و ارتفاع AH مشخص است. مساحت ذوزنقه

برابر است با :

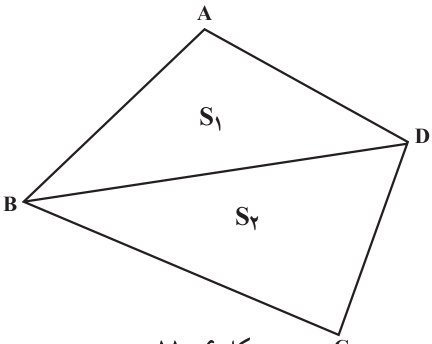
$$S=\frac{AB+CD}{۲}\times AH$$



شکل ۶ــ۱۰

محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی‌های غیرمشخص: برای محاسبه‌ی مساحت ابتدا آن‌را به دو مثلث تقسیم کرده، اضلاع آن دو مثلث را اندازه می‌گیریم. مساحت هر مثلث را براساس دستور «هرون» به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم (مطابق شکل ۶ــ۱۱) :

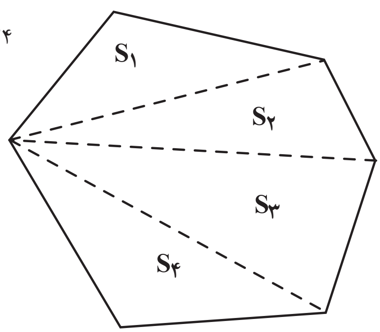
$$S=S_۱+S_۲$$



شکل ۶ــ۱۱

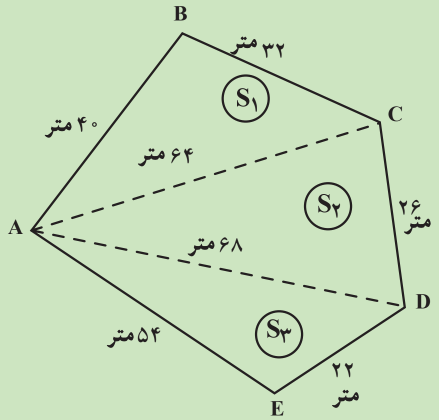
محاسبه‌ی چندضلعی‌های غیرمشخص: ابتدا مطابق شکل ۶ــ۱۲ آن‌را به چند مثلث تقسیم کرده، طول اضلاع هر مثلث را اندازه‌گیری می‌کنیم ؛ سپس مساحت هر مثلث را براساس دستور «هرون» به‌دست آورده با هم جمع می‌کنیم :

$$S=S_۱+S_۲+S_۳+S_۴$$



شکل ۶ــ۱۲

مثال ۶ــ۲: زمین به شکل چندضلعی مقابل که اندازه اضلاع و دو قطر آن داده شده است مطلوبست محاسبه مساحت چندضلعی.



شکل ۶ــ۱۳

راهکار کلی: برای محاسبه مساحت چندضلعی فوق آن‌را به‌صورت سه مثلث تفکیک‌شده به مساحت‌های $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ در نظر می‌گیریم و طبق فرمول بوزجانی ــ هرون $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ مساحت هرکدام را محاسبه و سپس مساحت کل را به‌دست می‌آوریم $S=S_۱+S_۲+S_۳$

روش حل: مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ را طبق فرمول به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$P_۱=\frac{a_۱+b_۱+c_۱}{۲}=\frac{۴۰+۳۲+۶۴}{۲}=۶۸$$

$a_۱=۴۰$ متر $\quad b_۱=۳۲$ متر $\quad c_۱=۶۴$ متر

$S_۱=\sqrt{۶۸(۶۸-۴۰)(۶۸-۳۲)(۶۸-۶۴)}=\sqrt{۶۸(۲۸)(۳۶)(۴)}=۵۲۳/۶۲$ متر مربع

$\boxed{S_۱=۵۲۳/۶۲}$ متر مربع

$$P_۲=\frac{a_۲+b_۲+c_۲}{۲}=\frac{۶۴+۲۶+۶۸}{۲}=۷۹$$

$a_۲=۶۴$ متر $\quad b_۲=۲۶$ متر $\quad c_۲=۶۸$ متر

$S_۲=\sqrt{۷۹(۷۹-۶۴)(۷۹-۲۶)(۷۹-۶۸)}=\sqrt{۷۹(۱۵)(۵۳)(۱۱)}=۸۳۱/۱۸$ متر مربع

$\boxed{S_۲=۸۳۱/۱۸}$ متر مربع

$$P_۳=\frac{a_۳+b_۳+c_۳}{۲}=\frac{۶۸+۲۲+۵۴}{۲}=۷۲ \quad a_۳=۶۸ \quad b_۳=۲۲ \quad c_۳=۵۴$$

$$S_۳=\sqrt{۷۲(۷۲-۶۸)(۷۲-۲۲)(۷۲-۵۴)}=\sqrt{۷۲\times۴\times۵۰\times۱۸}=۵۰۹/۱۲ \text{ متر مربع}$$

$$\boxed{S_۳=۵۰۹/۱۲ \text{ مترمربع}}$$

$$\text{کل } S=S_۱+S_۲+S_۳=۵۲۳/۶۲+۸۳۱/۱۸+۵۰۹/۱۲=۱۸۶۳/۹۲ \text{ مترمربع}$$

بحث و بررسی: با توجه به این‌که هر چند ضلعی را می‌توان به تعدادی مثلث تفکیک کرد و با اندازه‌گیری اضلاع و تعدادی از قطرهای آن با استفاده از فرمول فوق مساحت‌های مثلث‌ها و سپس مساحت کل چندضلعی را به‌دست آورد.

محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی غیرمشخص (روش دوم): درصورتی که از یک چهارضلعی اندازه‌ی دو قطر و زاویه‌ی بین آن‌ها معلوم باشد مساحت چهارضلعی را می‌توان از فرمول $S=\frac{AC\times BD}{۲}\sin\alpha$ به‌دست آورد.

اثبات رابطه‌ی فوق ارتفاع‌های AH و CH′ را مطابق با شکل ۶ـ۱۴ رسم می‌کنیم. بنابراین :

$$S=S_{ABD}+S_{BCD}$$

رابطه‌ی ۱
$$S=\frac{BD\times AH}{۲}+\frac{BD\times CH'}{۲}=\frac{BD}{۲}(AH+CH')$$

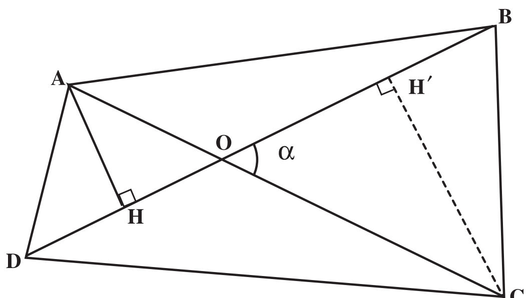
در مثلث $A\overset{\Delta}{O}H$: $AH=AO\sin\alpha$

در مثلث $C\overset{\Delta}{O}H'$: $CH'=CO\sin\alpha$

مقادیر فوق را در رابطه‌ی ۱ قرار می‌دهیم که درنتیجه

$$S=\frac{BD}{۲}(AO\sin\alpha+CO\sin\alpha)=\frac{BD}{۲}\times AC\sin\alpha$$

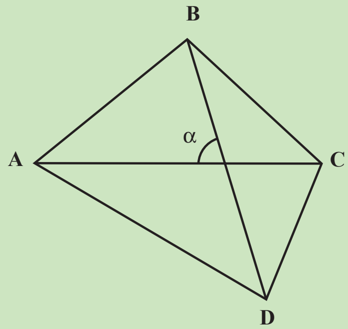
و حکم ثابت است.



شکل ۶ـ۱۴

مثال ۶ــ۳: زمینی است به شکل چهارضلعی غیرمشخص که اندازه دو قطر آن به‌ترتیب برابرند با ۱۵۴ متر و ۱۲۷ متر و زاویه بین دو قطر $۲۳^\circ, ۴۷'$ می‌باشد مساحت چهارضلعی را به‌دست آورید.

راهکار کلی: مساحت چهارضلعی با داشتن دو قطر و زاویه بین آن‌ها ثابت شده که برابر است با حاصل‌ضرب یک قطر در نصف قطر دیگر ضربدر سینوس زاویه بین آن‌ها $S = \frac{BD}{۲} \times AC \sin\alpha$ از این فرمول برای محاسبه مساحت استفاده می‌کنیم.



شکل ۶ــ۱۵

روش حل: طبق فرض مسئله متر $AC = ۱۲۷$ و متر $BD = ۱۵۴$ و $\alpha = ۲۳^\circ, ۴۷'$ می‌باشد مقادیر معلوم فوق را در فرمول قرار می‌دهیم

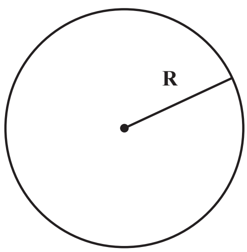
$$S = \frac{BD}{۲} \times AC \sin\alpha = \frac{۱۵۴}{۲} \times ۱۲۷ \sin(۲۳^\circ, ۴۷') = ۳۹۴۳/۶۶ \text{ مترمربع}$$

$$\boxed{S = ۳۹۴۳/۶۶ \text{ مترمربع}}$$

بحث و بررسی: در یک چهارضلعی درصورتی که اندازه‌گیری اضلاع امکان‌پذیر نباشد و فقط بتوانیم دو قطر و زاویه بین دو قطر را اندازه‌گیری کنیم مساحت از این فرمول محاسبه می‌شود.

مساحت دایره: برابر است با مجذور شعاع در عدد پی :

$$S = \pi R^۲$$



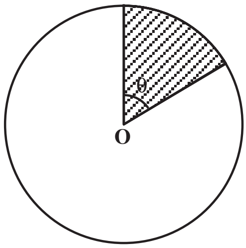
شکل ۶ــ۱۶

مساحت قطاع: می‌دانیم قطاع قسمتی از هر دایره است که محصور بین دو شعاع باشد. اگر R شعاع دایره و θ زاویه‌ی مرکزی قطاع مورد نظر برحسب درجه باشد (شکل ۶ــ۱۷).

مساحت قطاع برابر است با :

$$S = \pi R^{۲} \times \frac{\theta^\circ}{۳۶۰} \quad \text{برحسب درجه،}\ \theta$$

$$S = \frac{R^{۲}\theta}{۲} \quad \text{برحسب رادیان،}\ \theta$$

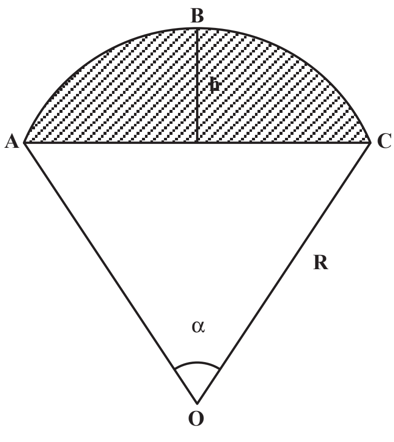


شکل ۶ــ۱۷

مساحت قطعه: قطعه، قسمتی از دایره‌ی محصور بین محیط و یک وتر دایره است (شکل ۶ــ۱۸) و مساحت آن از فرمول : $S = R^{۲}(\frac{\pi\alpha}{۳۶۰} - \frac{۱}{۲}\sin\alpha)$ به‌دست می‌آید.

اثبات: با توجه به شکل زیر

$$S_{ABC\ \text{قطعه}} = \underbrace{AOCB}_{\text{مساحت قطاع}} - \underbrace{AOC}_{\text{مساحت مثلث}} = \frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰} - \frac{۱}{۲}R^{۲}\sin\alpha = R^{۲}(\frac{\pi\alpha}{۳۶۰} - \frac{۱}{۲}\sin\alpha)$$

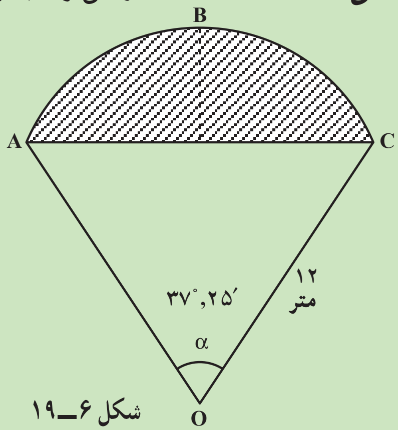


شکل ۶ــ۱۸

مثال ۶ــ۴: در دایره‌ای به شعاع ۱۲ متر قطعه مطابق شکل زیر زاویه مرکزی $\alpha = ۳۷^\circ,۲۵'$ قرار دارد مطلوب است محاسبه مساحت قطعه.

راهکار کلی: مساحت قطعه ABC را می‌توان با توجه به شکل به‌صورت زیر نوشت.

رابطه ۱ $$\underset{\text{مساحت قطعه}}{S_{ABC}} = \underset{\text{مساحت قطاع}}{S_{AOCB}} - \underset{\text{مساحت مثلث}}{S_{AOC}}$$



شکل ۶ــ۱۹

از طرفی می‌دانیم مساحت قطاع برابر است با

رابطه ۲ $$\underset{\text{مساحت قطاع}}{S_{AOCB}} = \frac{\pi R^۲ \alpha^\circ}{۳۶۰}$$

(مساحت یک مثلث برابر است با نصف
حاصل ضرب دو ضلع ضربدر سینوس زاویه بینشان)

رابطه ۳ $$\underset{\text{مساحت مثلث}}{S_{AOC}} = \frac{R \times R}{۲} \sin\alpha = \frac{R^۲}{۲} \sin\alpha$$

رابطه‌های ۲ و ۳ را در رابطه ۱ قرار می‌دهیم.

$$S_{ABC} = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰} - \frac{R^۲}{۲} \sin\alpha = \frac{R^۲}{۲}\left(\frac{\pi\alpha}{۱۸۰} - \sin\alpha\right)$$

$$\boxed{S_{ABC_{\text{قطعه}}} = \frac{R^۲}{۲}\left(\frac{\pi\alpha}{۱۸۰} - \sin\alpha\right)}$$ α برحسب درجه می‌باشد

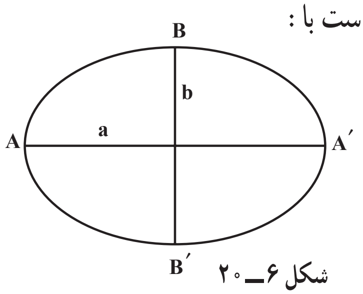
روش حل: مقادیر معلوم را در فرمول مساحت قطعه که در بالا به‌دست آمد قرار می‌دهیم.

$$S_{ABC} = \frac{(۱۲)^۲}{۲}\left[\frac{\pi(۳۷^\circ,۲۵')}{۱۸۰} - \sin(۳۷^\circ,۲۵')\right] = ۳/۲۷$$ مترمربع

بحث و بررسی: درصورتی که شکل زمین یا سازه به‌صورت قطعه باشد از فرمول بالا می‌توان مساحت آن را محاسبه کرد.

مساحت بیضی: اگر نصف قطر بزرگ‌تر بیضی را a و نصف قطر کوچک‌تر آن‌را b بنامیم (شکل ۶ــ۲۰)، مساحت بیضی برابر است با :

$$S = \pi ab$$



شکل ۶ــ۲۰

۶ــ۲ــ محاسبه‌ی مساحت با استفاده از مختصات رئوس (روش گوس)

اگر مختصات رئوس چندضلعی بسته‌ای که اضلاع آن‌را خطوط مستقیم تشکیل می‌دهد، در دست باشد، دقیق‌ترین راه محاسبه مساحت آن چندضلعی استفاده از «روش گوس» است.

برای محاسبه‌ی مساحت اشکال که به‌صورت منحنی‌های بسته‌ای هستند می‌توان از این روش استفاده کرد. مبنی بر آن‌که آن‌ها را به شکل n ضلعی درنظر بگیریم. هرچه فاصله‌ی نقاط اندازه‌گیری را کوچک‌تر کنیم دقت محاسبه‌ی مساحت بیش‌تر می‌شود.

محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی ABCD: اگر مختصات رئوس چهارضلعی را به‌ترتیب، $A\Big/\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}$ ، $B\Big/\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}$ ، $C\Big/\begin{matrix}x_C\\y_C\end{matrix}$ و $D\Big/\begin{matrix}x_D\\y_D\end{matrix}$ درنظر بگیریم مساحت را می‌توان از این فرمول به‌دست آورد :

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_D y_C + x_A y_D)\right]\right|$$

از رابطه‌ی زیر نیز می‌توان برای سهولت حفظ و نوشتن فرمول فوق استفاده نمود :

$$\frac{x_A}{y_A}\quad\frac{x_B}{y_B}\quad\frac{x_C}{y_C}\quad\frac{x_D}{y_D}\quad\frac{x_A}{y_A}$$

تبصره: وسطین طرفین

به این ترتیب، مجموع حاصل‌ضرب طرفین رابطه‌ی یاد شده منهای مجموع حاصل‌ضرب وسطین با دو برابر مساحت چهارضلعی ABCD برابر خواهد بود.

تبصره: این فرمول را می‌توان برای محاسبه‌ی مساحت یک n ضلعی تعمیم داد :

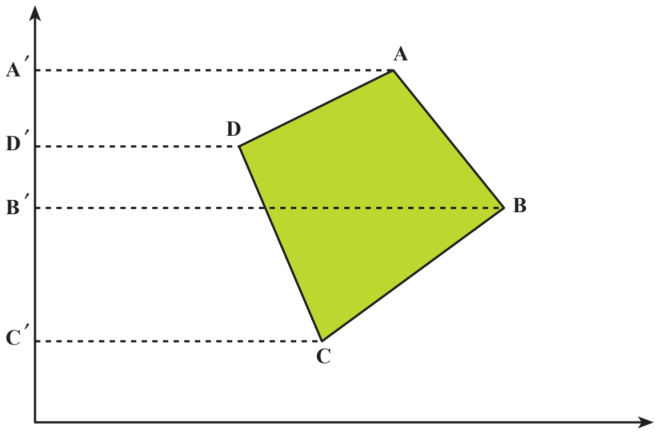
$$\frac{x_{A_1}}{y_{A_1}}\quad\frac{x_{A_2}}{y_{A_2}}\quad\frac{x_{A_3}}{y_{A_3}}\quad\text{---------}\quad\frac{x_{A_n}}{y_{A_n}}\quad\frac{x_{A_1}}{y_{A_1}}$$

$$S = \frac{1}{2}\left[(x_{A_1} y_{A_2} + x_{A_2} y_{A_3} + \ \dots) - (x_{A_2} y_{A_1} + x_{A_3} y_{A_2} + \ \dots)\right]$$

توجه: در رابطه‌ی فوق رعایت توالی رئوس الزامی است.

اثبات فرمول مختصات

مطابق شکل ۶ــ۲۱ می‌توان مساحت ABCD را به این صورت نوشت :



شکل ۶ــ۲۱

$$S_{ABCD} = S_{ABB'A'} + S_{B'BCC'} - S_{A'ADD'} - A_{D'DCC'}$$

با توجه به این‌که مساحت هر ذوزنقه برابر است با مجموع دو قاعده در نصف ارتفاع، بنابراین

$$S_{ABB'A'} = \frac{۱}{۲}(x_A + x_B)(y_A - y_B)$$

$$S_{B'BCC'} = \frac{۱}{۲}(x_B + x_C)(y_B - y_C)$$

$$S_{A'ADD'} = \frac{۱}{۲}(x_A + x_D)(y_A - y_D)$$

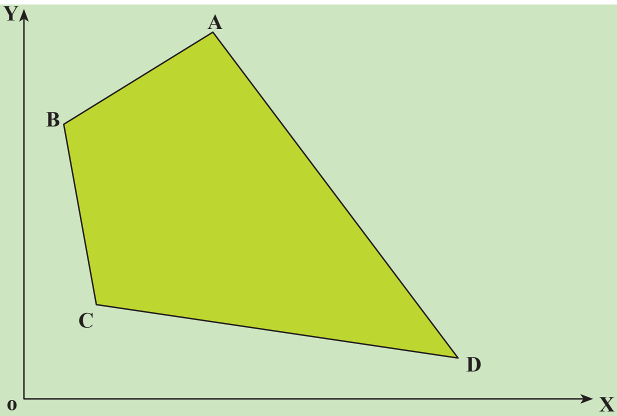
$$S_{D'DCC'} = \frac{۱}{۲}(x_D + x_C)(y_D - y_C)$$

پس از ضرب و ساده‌کردن، فرمول به این‌صورت درمی‌آید :

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}[(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_D y_C + x_A y_D)]$$

مثال ۶ــ۵: مطلوب‌است محاسبه مساحت چهارضلعی ABCD که مختصات رئوس آن معلوم و عبارت‌اند از :

A $\frac{۳۷۰/۳۵}{۷۶۰/۴۷}$ متر　B $\frac{۸۹/۱۸}{۵۷۰/۶۵}$ متر　C $\frac{۱۵۹/۴۲}{۱۹۰/۲۵}$ متر　D $\frac{۹۰۴/۴۱}{۹۰/۱۸}$ متر



شکل ۶ــ۲۲

راهکار کلی: فرمول مساحت چندضلعی با داشتن مختصات رئوس آن عبارت است از

$$S=\frac{۱}{۲}[(x_A y_B+x_B y_C+x_C y_D+x_D y_A)-(x_B y_A+x_C y_B+x_D y_C+x_A y_D)]$$

تذکر: برای نوشتن فرمول مساحت می‌توان مختصات رئوس چندضلعی را به‌صورت کسر زیر در کنار هم نوشت

تذکر: نقطه اول A در انتها تکرار شده

$$\frac{x_A}{y_A}\quad\frac{x_B}{y_B}\quad\frac{x_C}{y_C}\quad\frac{x_D}{y_D}\quad\frac{x_A}{y_A}$$

و ╲ علامت طرفین و ╱ علامت وسطین می‌باشد.

$$\text{مقدار مساحت}=\frac{۱}{۲}\left[\text{مجموع حاصل‌ضرب طرفین}-\text{مجموع حاصل‌ضرب وسطین}\right]$$

روش حل: مختصات رئوس چهارضلعی را در فرمول قرار می‌دهیم.

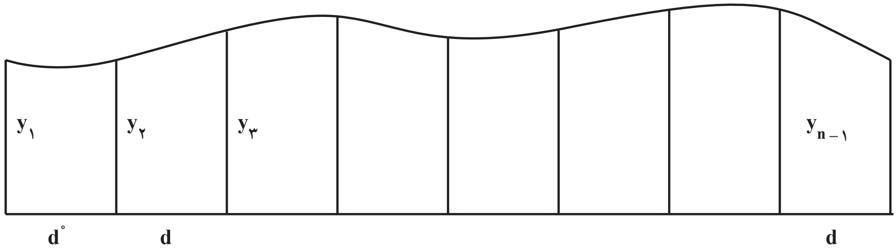
$$S=\frac{۱}{۲}\{[(۳۷۰/۳۵)(۵۷۰/۶۵)+(۸۹/۱۸)(۱۹۰/۲۵)+(۱۵۹/۴۲)(۹۰/۱۸)+(۹۰۴/۴۱)(۷۶۰/۴۷)]$$
$$-[(۸۹/۱۸)(۷۶۰/۴۷)+(۱۵۹/۴۲)(۵۷۰/۶۵)+(۹۰۴/۴۱)(۱۹۰/۲۵)+(۳۷۰/۳۵)(۹۰/۱۸)]\}$$

$S=۲۸۳۱۰۲/۹۹$ متر مربع

بحث و بررسی: در تمام برداشت‌ها که مختصات رئوس پلیگون معلوم باشد می‌توان از این فرمول برای محاسبه مساحت استفاده کرد. این فرمول در محاسبه مساحت در نرم‌افزارها و دستگاه‌های اندازه‌گیری نیز استفاده می‌شود.

۶ــ۳ــ فرمول سیمپسون (Simpson)

برای استفاده از این فرمول در موقع برداشت باید ابتدا بر روی خط مبنی یک عده تقسیمات مساوی زوج (مثلاً به اندازه d) جدا کرده (مطابق شکل) سپس طول‌های عمود $y_۱$ و $y_۲$ و $y_۳$ و y_n را اندازه‌گیری کرد (n فرد).



شکل ۶ــ۲۳

این فرمول به شکل کلی زیر است :

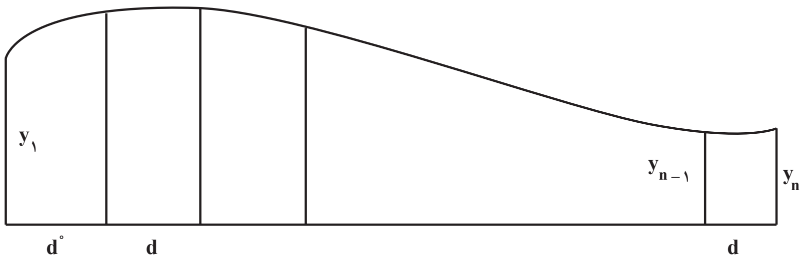
$$S=\frac{d}{۳}(y_۱+۲\sum y_i+۴\sum y_p+y_n)$$

که در آن $\sum y_i$ مجموع طول عمودهای فرد غیر از $y_۱$ و y_n و $\sum y_p$ مجموع طول عمودهای زوج و d فاصله عمودها می‌باشد.

۶ــ۴ــ فرمول ذوزنقه‌های هم ارتفاع

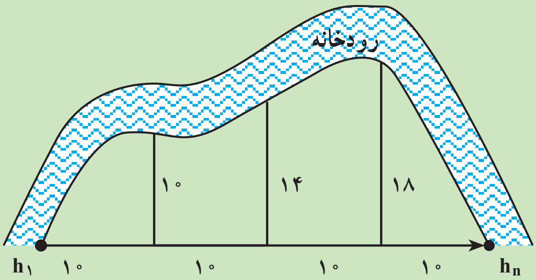
وقتی دقت زیادی مورد نظر نباشد چون با جدا کردن قسمت‌های مساوی روی خط مبنا شکل تبدیل به یک عده شکل‌های تقریباً ذوزنقه می‌شود که می‌توان مساحت هریک را از روی دستور مربوط به مساحت ذوزنقه حساب کرد. فرمول زیر نتیجه گرفته می‌شود.

$$S=d(\frac{y_۱+y_n}{۲}+y_۲+y_۳+\cdots+y_{n-۱})$$



شکل ۶ــ۲۴

مثال ۶ــ۶: به منظور تعیین مساحت قطعه زمینی در کنار رودخانه (مطابق شکل) اندازه‌های به‌دست‌آمده را می‌بینید این مساحت چند مترمربع است؟



شکل ۶ــ۲۵

راهکار کلی: این مسئله را ظاهراً می‌توان از دو روش ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع و سیمپسون حل کرد ولی چون تعداد تقسیمات مساوی فرد در نظر گرفته شده رابطه سیمپسون را نمی‌توان به‌کار برد و از رابطه ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع استفاده می‌کنیم.

روش حل

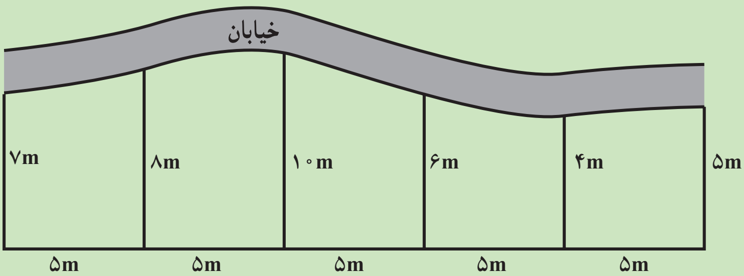
$$S = d\left(\frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + y_{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$S = 10\left(\frac{0+0}{2} + 10 + 14 + 18\right) \Rightarrow$$

$$S = 420 m^2$$

بحث و بررسی: همان‌طورکه در شکل بالا مشاهده می‌کنید ارتفاع h_1 و h_n در قطعه‌های اول و آخر زمین صفر است بنابراین در رابطه بالا به جای آن‌ها صفر قرار می‌گیرد.

مثال ۶ــ۷: مساحت قطعه زمین زیر چند مترمربع است؟



شکل ۶ــ۲۶

راهکار کلی: چون تعداد تقسیمات مساوی زوج می‌باشد می‌توان از رابطه سیمپسون برای محاسبه مساحت این قطعه زمین استفاده کرد. پس از سمت چپ عمودها را از شماره ۱ شماره‌گذاری می‌کنیم و رابطه سیمپسون را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{cases} S=\frac{d}{۳}(y_۱+۲\sum y_i+۴\sum y_p+y_n) \\ \sum y_i=۱۰+۴=۱۴ \\ \sum y_p=۸+۶=۱۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{۵}{۳}(۷+۲\times(۱۴)+۴(۱۴)+۵) \\ \quad =\frac{۵}{۳}(۷+۲۸+۵۶+۵) \\ \quad =۱۶۰\text{m}^۲ \end{cases}$$

روش حل

بحث و بررسی: این مسئله را می‌توان از رابطه ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع حل کرد. امّا روش سیمپسون دقت بیش‌تری دارد و برای محاسبه مساحت روش مناسب‌تری می‌باشد.

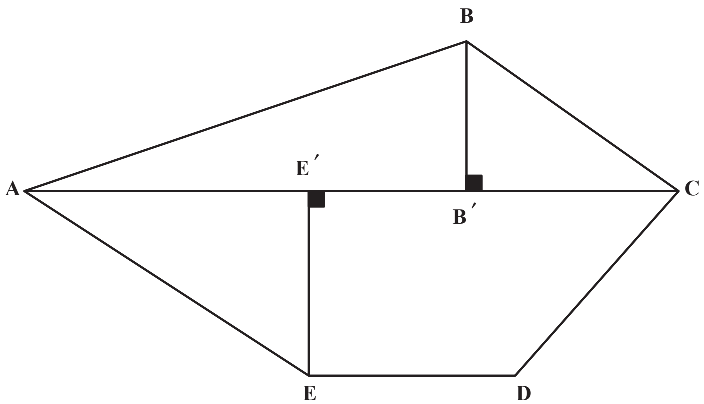
مسائل

مسأله‌ی ۱: برای اندازه‌گیری مساحت پنج‌ضلعی ABCDE آن‌را به‌صورت شکل ۶ــ۲۷ تقسیم کرده، طول‌های زیر را اندازه‌گیری کرده‌ایم. مطلوب است محاسبه‌ی مساحت زمین:

$AE'=۳۷/۴۰ \quad E'C=۴۸/۱۵$

$AB'=۵۶/۴۶,\ B'C=۲۸/۰۲,\ BB'=۲۱/۱۲,\ EE'=۲۹/۱۸$ و $ED=۲۷/۰۳$

(اندازه‌گیری‌ها برحسب متر است.)

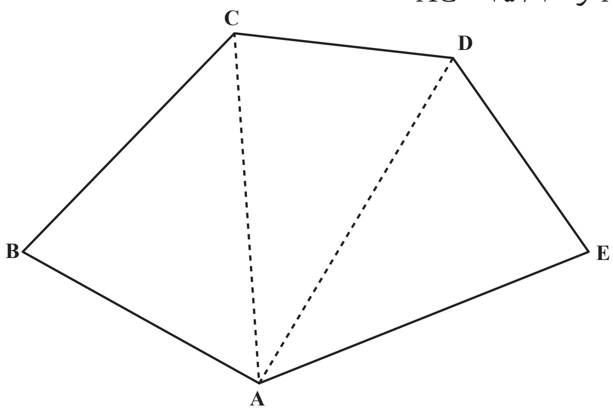


شکل ۶ــ۲۷

مسأله‌ی ۲ : برای محاسبه‌ی مساحت، قطعه زمینی (مطابق شکل ۶ــ۲۸) اضلاع و دو قطر آن اندازه‌گیری شده‌اند. مساحت زمین را به‌دست آورید :

$AE = ۴۶/۰۷$ ، $DE = ۳۳/۹۵$ ، $CD = ۳۱/۰۵$ ، $BC = ۳۹/۸۰$ ، $AB = ۳۵/۱۶$

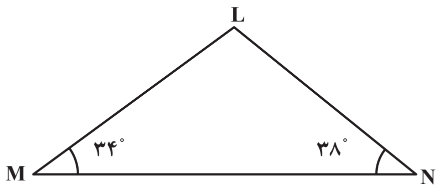
$AC = ۴۵/۲۰$ و $AD = ۴۸/۱۳$



شکل ۶ــ۲۸

مسأله‌ی ۳ : به‌منظور تعیین مساحت قطعه‌زمینی به شکل مثلث MNL (شکل۶ــ۲۹) زوایای M و N و طول MN اندازه‌گیری شده و مقادیر زیر به‌دست آمده است. مساحت قطعه‌زمین را به‌دست آورید :

$MN = ۵۲/۰۹$ متر و $\angle N = ۳۸^\circ$ و $\angle M = ۳۴^\circ$



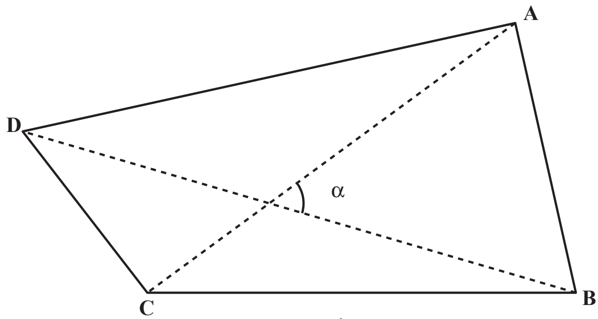
شکل ۶ــ۲۹

مسأله‌ی ۴ : زمینی است به شکل چهارضلعی ABCD (شکل ۶ــ۳۰) می‌خواهیم مساحت آن را تعیین کنیم، اما به سبب وجود موانع بین بعضی اضلاع نتوانستیم به‌طور مستقیم اضلاع چهارضلعی را اندازه‌گیری کنیم و به‌جای آن دو قطر AC و BD و زاویه‌ی بین دو قطر را اندازه‌گیری کرده‌ایم. با این ترتیب، مساحت زمین را به‌دست آورید :

$AC = ۶۲/۱۵$ متر

$BD = ۷۸/۰۶$ متر

$\hat{\alpha} = ۵۴^\circ$

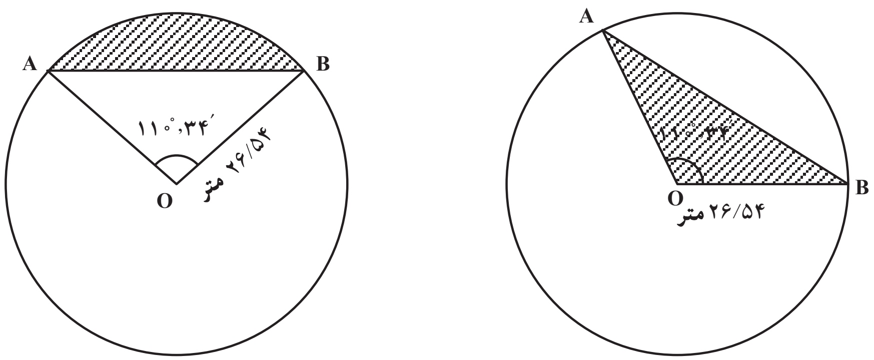


شکل ۶ــ۳۰

مسألهی ۵: مساحت قطعه زمین ABCDEF را که مختصات رئوس آن معلوم است به روش گوس محاسبه کنید.

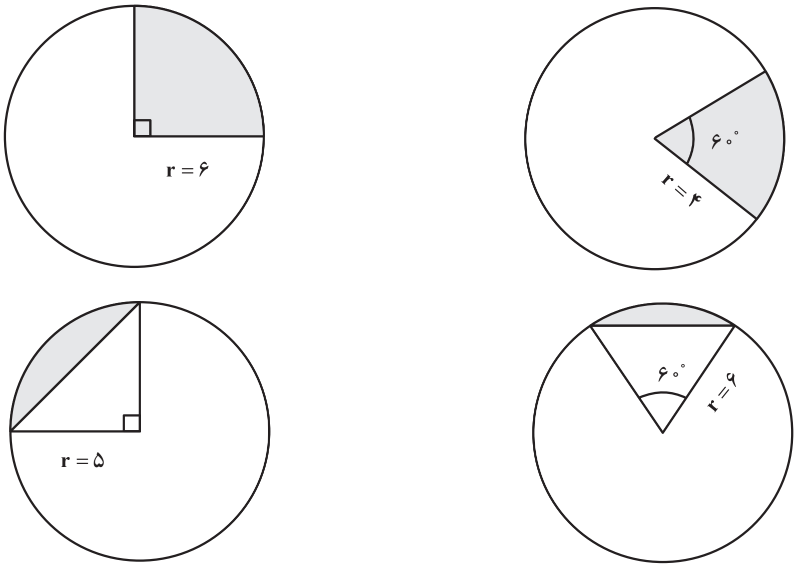
A ۱۰۰/۱۰۰ ، B ۹۸/۱۵۰ ، C ۱۲۵/۲۱۰ ، D ۲۸۷/۱۷۰ ، E ۳۰۱/۱۲۲ ، F ۱۵۳/۱۰۴

مسألهی ۶: دایرهای به شعاع **۲۶/۵۴**متر است (شکل ۶ــ۳۱). وتر AB مقابل زاویهی ′۳۴ ,°۱۱۰ است. سطح هاشور زده را محاسبه کنید.



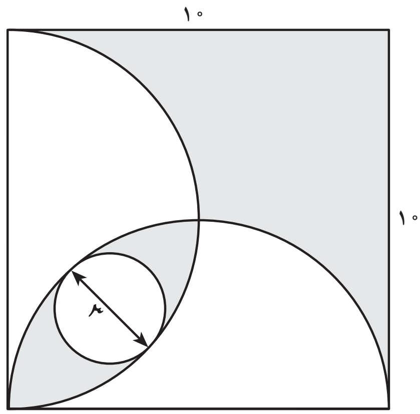
شکل ۶ــ۳۱

مسألهی ۷: مساحت ناحیههای سایهدار را در شکل ۶ــ۳۲ بیابید.



شکل ۶ــ۳۲

مسأله‌ی ۸: مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار را در شکل ۶ــ۳۳ بیابید.



شکل ۶ــ۳۳

مسأله‌ی ۹: مساحت یک باغچه به شکل بیضی که قطرهای آن به ترتیب ۱۲ و ۸ متر می‌باشد را به دست آورید.

آیا می‌دانید

زندگی‌نامه: ابوالوفامحمدبن یحیی‌بن اسماعیل بوزجانی از بزرگترین ریاضی‌دانان و منجّمان دوره‌ی اسلامی است که در سال ۳۲۸ هـ ــ ق در شهر بوزجان (نام قدیم تربت‌جام) تولد یافت و در سن بیست سالگی به عراق مهاجرت کرد و تا آخر عمر در بغداد می‌زیست و با بیرونی معاصر بود و کسوفی را با قرارداد قبلی با هم رصد کرده‌اند بوزجانی که یکی از مشاهیر علم هندسه می‌باشد دارای تألیفات بی‌شماری است از آن جمله کتاب اعمال هندسی و کتاب مجسطی بوزجانی (درباره‌ی علم مثلثات مسطحه و کروی و فرمول‌های مطرح شده) کتاب حساب بوزجانی و جواب ابوالوفا برای محاسبه مساحت مثلث به حبوبی و مسأله‌های متعدد دیگر.

منابع

۱ــ کتاب متفکران اسلام جلد دوّم ترجمه آرام فصل پنجم ص ۱۴۶

۲ــ تاریخ علوم عربی نوشته مصطفی موالدی جلد ۳ ص ۵۳ــ۵۰ عربی سال ۱۹۷۹محل انتشار دمشق

۳ــ کتاب بوزجانی‌نامه

فصل هفتم

محاسبه احجام (Volume)

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ احجامی که دارای دو قاعده مساوی و موازیند را نام ببرد و شکل آن‌ها را رسم کند و فرمول محاسبه‌ی حجم آن‌ها را بنویسد.

۲ــ احجامی که مانند چادر کمپ دارای یک قاعده می‌باشند را با رسم شکل نام ببرد و فرمول محاسبه‌ی حجم آن‌ها را بنویسد.

۳ــ احجامی که دارای یک قاعده‌اند و در طرف دیگر به‌صورت یک نقطه می‌باشند را با رسم شکل نام ببرد و فرمول محاسبه حجم آن‌ها را بنویسد.

۴ــ احجامی که دو قاعده موازی دارند ولی مساحت آن‌ها با هم مساوی نیست را با ذکر مثال و رسم شکل محاسبه کند.

۵ــ مثال‌های حل شده در این فصل را فرا بگیرد.

مطالعه‌ی آزاد

نکته:

عدم احساس مسئولیت در نقشه‌برداری تونل: اصولاً از آنجایی که تونل از دو طرف حفاری شده و در نقطه‌ای به هم می‌رسند، چنان‌چه اشتباه یا خطایی در رابطه با زاویه امتداد حفاری و پیاده‌کردن شیب طولی تونل، توسط نقشه بردار اتفاق بیافتد باعث می‌شود که تونل در نقطه‌ی مورد نظر به هم نرسد و یا این‌که به موازات قسمت دیگر ادامه مسیر داده و در حالت نادر محور مورد نظر از زیر یا روی محور مقابل عبور می کند.

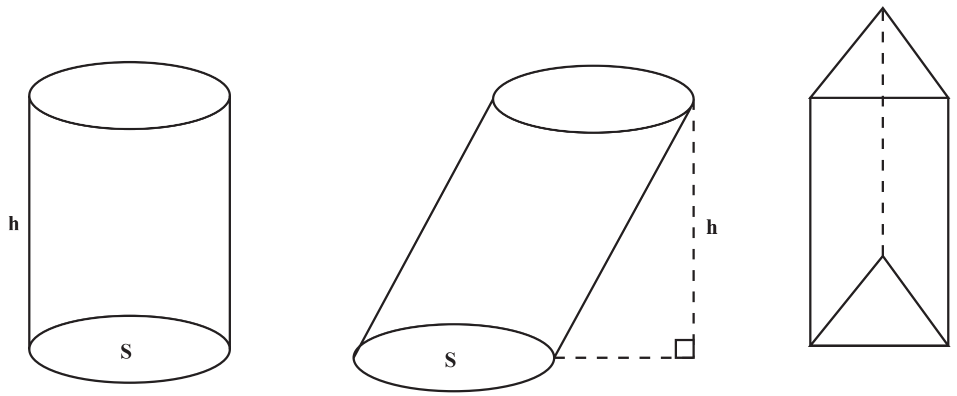
۷ــ۱ــ حجم

احجام را می‌توان به سه گروه تقسیم‌بندی نمود :

الف ــ احجامی که دارای دو قاعده مساوی و موازیند مانند استوانه ــ مکعب ــ مکعب‌مستطیل ــ منشور و هر شکلی که دارای ویژگی بالا باشد.

در این گروه حجم برابر است با حاصل‌ضرب مساحت قاعده و ارتفاع :

$$V = S.h$$

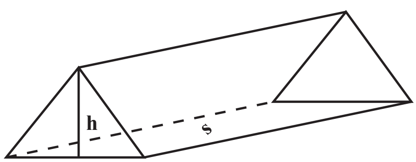


شکل ۷ــ۱

ب ــ احجامی مانند چادر کمپ که دارای یک قاعده می‌باشند و در طرف دیگر به‌صورت یک پاره خط موازی با قاعده است.

در این گروه حجم برابر است با حاصل ضرب نصف مساحت قاعده و ارتفاع :

$$V = \frac{۱}{۲} S.h$$

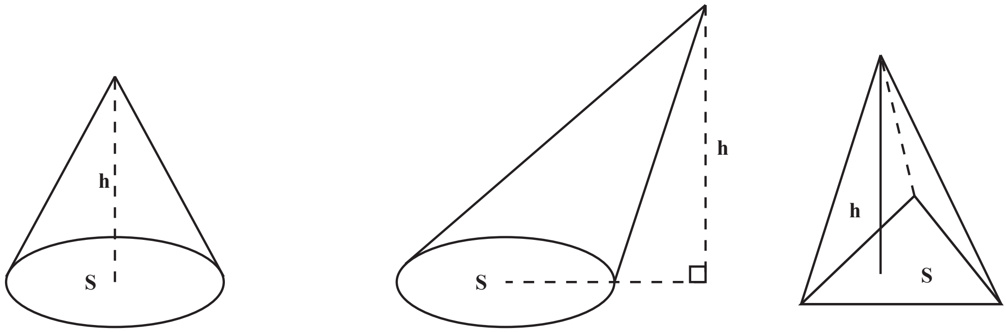


شکل ۷ــ۲

ج ــ احجامی که دارای یک قاعده‌اند و در طرف دیگر به‌صورت یک نقطه می‌باشند مانند هرم و مخروط.

حجم این گروه برابر است با حاصل ضرب ثلث مساحت دایره و ارتفاع :

$$V = \frac{۱}{۳} S.h$$

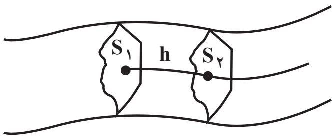


شکل ۷ــ۳

۷ــ۲ــ محاسبه احجام در نقشه‌برداری

در نقشه‌برداری مسیر معمولاً با احجامی سر و کار داریم که دارای دو قاعده موازی هستند ولی مساحت‌های آن‌ها با هم مساوی نیست. در این صورت اگر اختلاف مساحت قاعده‌ها کم باشد برای محاسبه‌ی حجم تقریبی، میانگین مساحت دو قاعده در ارتفاع ضرب می‌شود.

$$V = \frac{(S_۱ + S_۲)}{۲} \times h$$

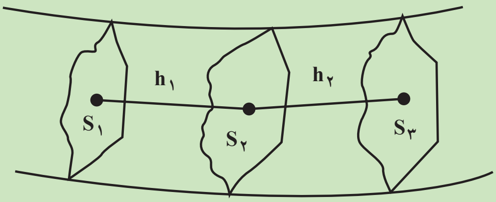


شکل ۷ــ۴

مثال ۷ــ۱: در نقشه‌برداری مسیر مساحت سه مقطع متوالی به فاصله‌ی ۱۵ متر از هم به ترتیب برابر ۳۲/۴۰ ، ۵۴/۲۸ و ۳۸/۴۰ مترمربع می‌باشد. مطلوبست محاسبه حجم بین مقطع اول و دوم و مقطع دوم و سوم و حجم کل آن.

راهکار کلی: شکل تقریبی را به صورت زیر با داشتن مفروضات مسئله ترسیم می‌کنیم.

در نقشه‌برداری مسیر مساحت‌های S_1 ، S_2 و S_3 در حقیقت سه نیمرخ طولی یا پروفیل طولی می‌باشند که چون عمود بر مسیرند با هم موازیند و برای محاسبه حجم تقریبی بین دو مقطع می‌توان میانگین مساحت‌های دو قاعده را در ارتفاع (فاصله دو سطح) ضرب کرد.



شکل ۷ــ۵

$$V = \frac{S_1 + S_2}{۲} \times h$$

بنابراین حجم در فاصله مقطع اول و دوم عبارت است از

$$V_1 = \frac{S_1 + S_2}{۲} \times h_1$$

و حجم در فاصله مقطع دوم و سوم برابر است با

$$V_2 = \frac{S_2 + S_3}{۲} \times h_2$$

حجم کل مجموع حجم‌های V_1 و V_2 هستند.

$$V_1 + V_2 = \frac{S_1 + S_2}{۲} \times h_1 + \frac{S_2 + S_3}{۲} \times h_2$$

$$V = \frac{۱}{۲}\left[(S_1 + S_2)h_1 + (S_2 + S_3)h_2\right]$$

روش حل : برای به‌دست آوردن حجم در مقطع اول و دوم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$V_1 = \frac{S_1 + S_2}{۲} \times h_1 = \frac{۳۲/۴۰ + ۵۴/۲۸}{۲} \times ۱۵ = ۶۵۰/۱ \quad \text{مترمکعب}$$

و برای به‌دست آوردن حجم در مقطع دوم و سوم از فرمول زیر استفاده کرده و مقادیر معلوم مسئله را در آن قرار می‌دهیم.

$$V_2 = \frac{S_2 + S_3}{۲} \times h_2 = \frac{۵۴/۲۸ + ۳۸/۴۰}{۲} \times ۱۵ = ۶۹۵/۱ \quad \text{مترمکعب}$$

$$\text{کل}\ V = V_1 + V_2 = ۶۵۰/۱ + ۶۹۵/۱ = ۱۳۴۵/۲ \quad \text{مترمکعب}$$

بحث و بررسی: برای محاسبه حجم عملیات خاکبرداری در مسیر این روش نیز کاربرد دارد.

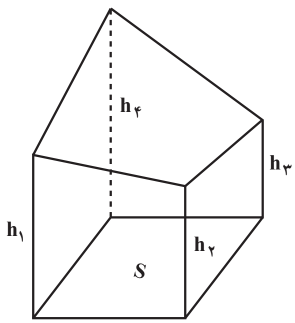
آیا می‌دانید

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، مردی بر مدار ماه

توسط ناسا یکی از مدارهای کره‌ی ماه به نام این دانشمند شهیر ثبت شده است.

در نقشه‌برداری توپوگرافی نیز با احجامی منشوری شکل سروکار داریم که ارتفاعات منشور در هر گوشه با یکدیگر برابر نیست (دو قاعده موازی نیستند). در این حالت برای محاسبه حجم تقریبی، میانگین ارتفاعات در مساحت قاعده ضرب می‌شود :

$$V = h_{Avg} \times S$$



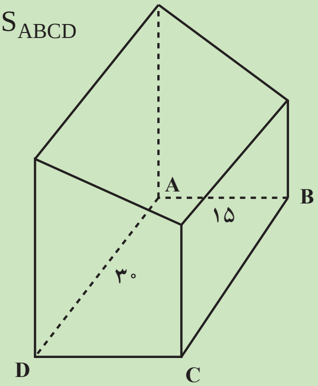
شکل ۷ــ۶

مثال ۷ــ۲: زمینی است به شکل مستطیل به‌ابعاد ۱۵ و ۳۰ متر در دامنه سطح شیب‌دار قرار دارد می‌خواهیم آن‌را برای بنای ساختمان گودبرداری کنیم به‌طوری‌که عمق گودبرداری در چهار نقطه رئوس آن مشخص و به‌ترتیب عبارت‌اند از :

$h_A = ۹$ متر ، $h_B = ۴$ متر ، $h_C = ۶$ متر و $h_D = ۷$ مطلوب است محاسبه حجم عملیات خاکبرداری.

راهکارکلی: شکل تقریبی مسئله را ابتدا به صورت شکل۷ــ۷ رسم می‌کنیم برای به‌دست آوردن حجم یک مکعب مستطیل می‌دانیم مقدار آن برابر است با مساحت قاعده ضربدر ارتفاع ولی در این مسئله ما چهار ارتفاع مختلف داریم بنابراین اگر شیب زمین را یکنواخت در نظر بگیریم می‌توانیم به‌جای چهار ارتفاع مختلف ارتفاع متوسط آن‌ها را در مساحت قاعده ضرب کنیم تا حجم خاکبرداری به‌دست آید.

$$V = \frac{h_A + h_B + h_C + h_D}{۴} \times S_{ABCD}$$ حجم خاکبرداری



شکل ۷ــ۷

روش حل: ابتدا مساحت مستطیل را حساب می‌کنیم

مساحت مستطیل (مترمربع) $S_{ABCD} = AB \times AD = ۱۵ \times ۳۰ = ۴۵۰$

با استفاده از فرمول بالا

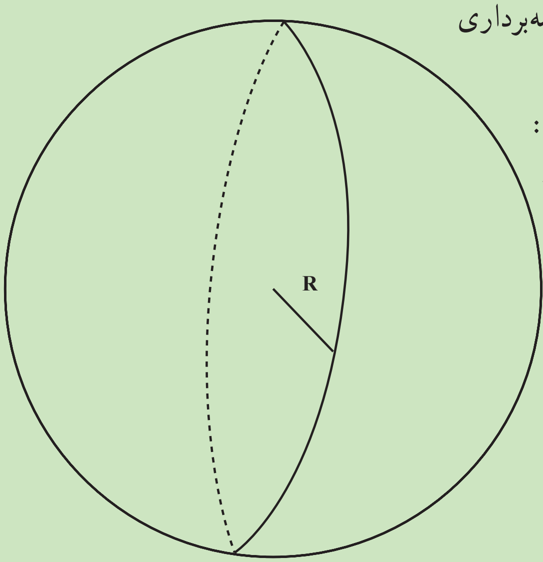
$$V = \frac{۹+۴+۶+۷}{۴} \times ۴۵۰ = ۶/۵ \times ۴۵۰ = ۲۹۲۵$$ مترمربع

بحث و بررسی: در نقشه‌برداری برای محاسبه حجم عملیات خاکبرداری در مواقعی‌که شیب زمین یکنواخت باشد ارتفاع متوسط را در نظر می‌گیریم.

یکی دیگر از شکل‌هایی که در نقشه‌برداری با آن سر و کار داریم، کره است.

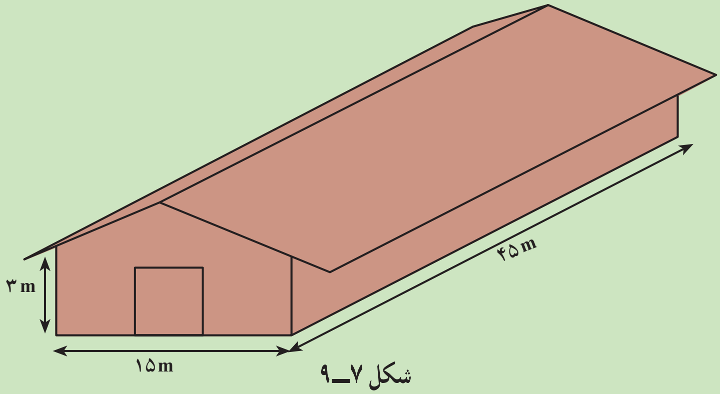
حجم کره با شعاع R برابر است با :

$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$



شکل ۷ــ۸

مثال ۷ــ۳: هزینه‌ی ایجاد گرما در یک ساختمان به حجم هوای موجود در آن بستگی دارد ساختمانی که در شکل می‌بینید ۴۵m طول و ۱۵m عرض دارد در هر دو طرف ارتفاع دیوارها ۳m است و بلندترین نقطه‌ی سقف ۵m از زمین فاصله دارد. حجم این ساختمان را محاسبه کنید.



شکل ۷ــ۹

راهکار کلی: همان‌طور که در شکل می‌بینید این ساختمان از دو حجم مکعب مستطیل و منشوری با دو قاعده مساوی تشکیل شده است با به‌دست آوردن مجموع حجم این دو شکل حجم کل ساختمان محاسبه می‌گردد.

ارتفاع × مساحت قاعده = V مکعب مستطیل

ارتفاع × مساحت قاعده = V منشور

روش حل

مکعب مستطیل $V_۱ = S \times h \rightarrow V_۱ = (۴۵ \times ۱۵) \times ۳$

$V_۱ = ۲۰۲۵m^۳$

منشور $V_۲ = S \times h \rightarrow V_۲ = [\frac{۱}{۲}(۱۵ \times ۲)] \times ۴۵$

$V_۲ = ۶۷۵m^۳$

کل $V = V_۱ + V_۲ \rightarrow$ کل $V = ۲۰۲۵ + ۶۷۵ = ۲۷۰۰m^۳$

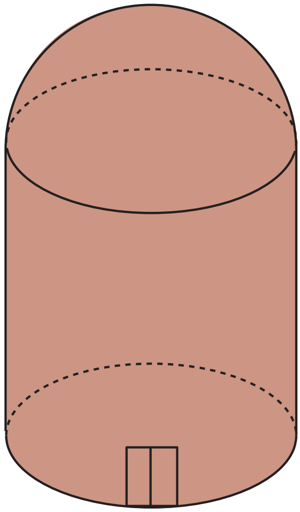
بحث و بررسی: احجامی که دارای دو قاعده مساوی و موازیند مانند استوانه، مکعب، مکعب‌مستطیل منشور و غیره، حجم آن‌ها برابر است با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع.

در این مسئله برای به‌دست آوردن ارتفاع مثلث کافی است ارتفاع بلندترین نقطه سقف (۵m) را از ارتفاع دیوارها (۳m) کم کنیم. $۵m - ۳m = ۲m$

مسائل

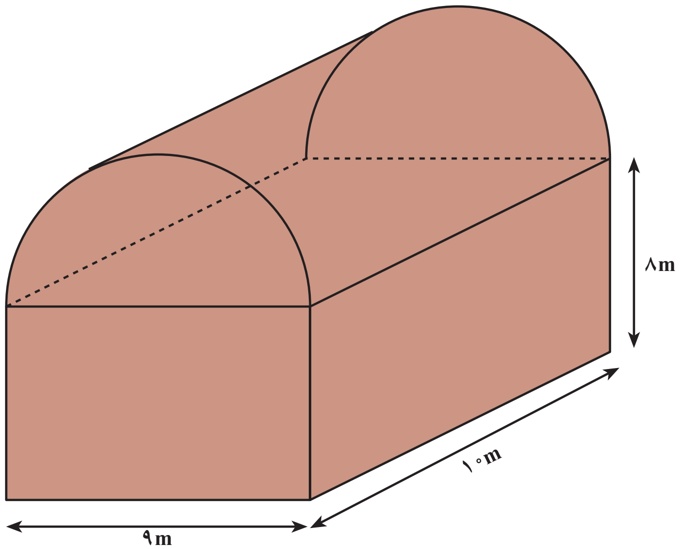
مسأله‌ی ۱: منبع آبی به شکل استوانه‌ی قائم است؛ به‌طوری که شعاع قاعده، ۴متر و ارتفاع ۶ متر است. سطح کل و حجم استوانه را برحسب مترمکعب به‌دست آورید.

مسأله‌ی ۲: برجی مانند شکل ۷ــ۱۰ از دو قسمت تشکیل شده که بدنه‌ی آن استوانه و سقف آن نیم‌کره است. (قطر کره ۷ متر و ارتفاع برج از بلندترین نقطه تا کف ۸/۵ متر است.) حجم برج را حساب کنید:



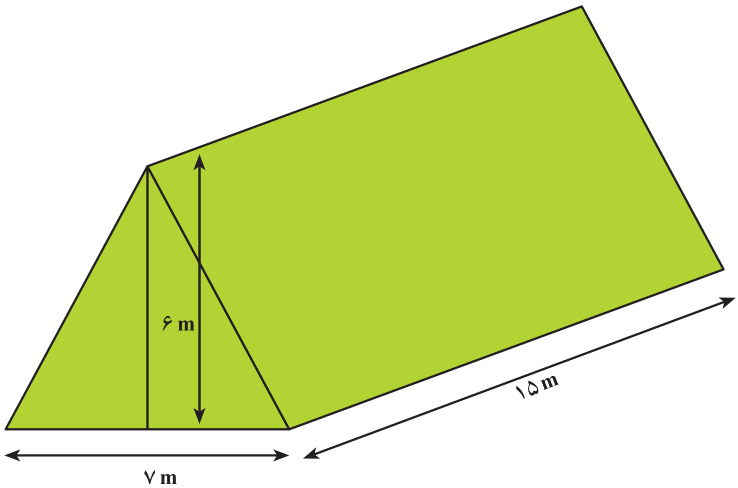
شکل ۷ــ۱۰

مسأله‌ی ۳: اتاقک یک کشتی مانند تصویر ۷ــ۱۱ به شکل یک نیم‌استوانه است. ابتدا، مساحت کل این اتاقک را حساب کنید؛ سپس حجم کل اتاقک را به‌دست آورید.



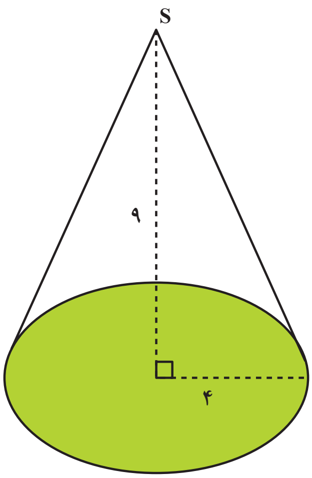
شکل ۷ــ۱۱

مسأله‌ی ۴: حجم چادر زیر را بیابید :



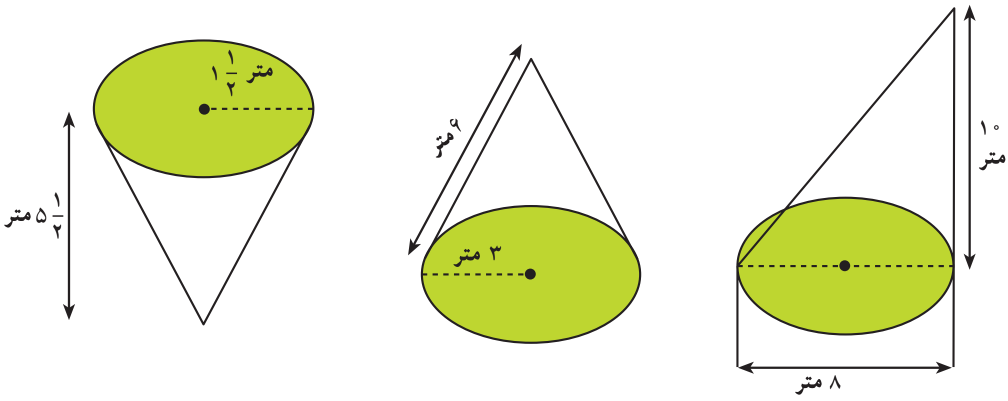
شکل ۷ــ۱۲

مسأله‌ی ۵: حجم مخروط قائمی را بیابید که شعاع قاعده‌ی آن ۴ و ارتفاع آن ۹ متر باشد ؛ سپس مساحت جانبی مخروط را حساب کنید (شکل ۷ــ۱۳).



شکل ۷ــ۱۳

مسأله‌ی ۶: حجم هریک از این مخروط‌ها را به‌دست آورید :



شکل ۷ــ۱۴

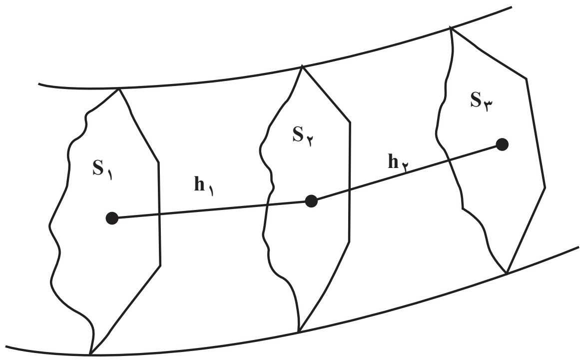
مسأله‌ی ۷: در نقشه‌برداری مسیر مساحت سه مقطع متوالی به فاصله‌ی ۱۰ متر از هم به ترتیب برابر ۲۵، ۳۰ و ۲۷ مترمربع می‌باشد. مطلوب است محاسبه‌ی حجم بین مقطع اول و سوم.

$h_۱ = h_۲ = ۱۰m$

$S_۱ = ۲۵m^۲$

$S_۲ = ۳۰m^۲$

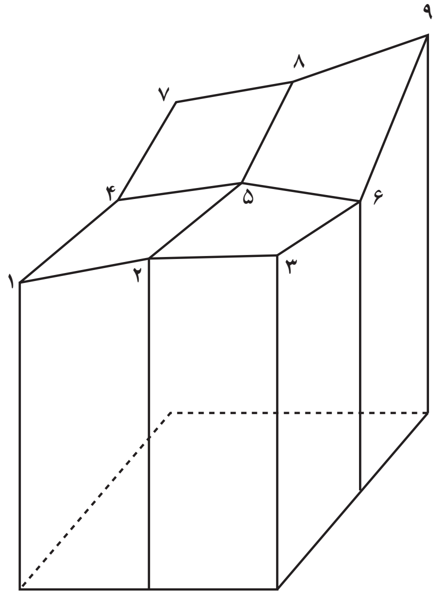
$S_۳ = ۲۷m^۲$



شکل ۷ــ۱۵

مسأله‌ی ۸: به‌منظور محاسبه‌ی حجم عملیات خاکی زمینی ناهموار، در روی شبکه‌ای منظم با ابعاد سلول ۱۰ متر در ۱۰ متر، ارتفاع خاکبرداری ۹ نقطه (مطابق شکل ۷ــ۱۶) مطابق جدول زیر به‌دست آمده است.

حجم عملیات خاکبرداری را محاسبه کنید.



شکل ۷ــ۱۶

شماره نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
ارتفاع نقطه به متر	۲/۰	۲/۵	۲/۱	۲/۲	۲/۳	۲/۲	۲/۴	۲/۵	۳/۰

کار گروهی دانش‌آموزان

اعضای گروه با نظارت سرگروه درس را برای یکدیگر تدریس کنند، با همکاری معلم به سؤالات یکدیگر پاسخ دهید، با طرح سؤالات از متن درس و پرسش‌هایی که هریک از اعضا طرح می‌کنند میزان یادگیری و پیشرفت اعضا را ارزیابی کنید، نواقص یادگیری درس یکدیگر را رفع کنید.

آیا می‌دانید

غیاث‌الدین ابوالفتح عمر ابن ابراهیم خیامی نیشابوری ریاضی‌دان ـــ منجم ـــ فیلسوف و شاعر معروف ایرانی از مفاخر و تمدن اسلامی است. تولدش در حدود ۴۳۹ هـ. ق در نیشابور می‌باشد و بیش از ۷۰ سال زندگی خویش تنها چند سفر کوتاه به حجاز، اصفهان، هرات و بلخ داشته است و در ۱۱ محرم ۵۲۶ هـ.ق وفات یافت. خیام به علت تسلطی که بر فلسفه و نجوم و ریاضیات داشت از حکمای معروف دوره‌ی اسلامی به‌شمار می‌رود و با رباعیات معروفش که هریک در قالب کلماتی چند یک دنیا معنی و مفهوم ارائه می‌کند.

پژوهش‌های عمر خیام در بخش‌های مختلف نجوم، جبر، مقابله و هندسه در خور توجه هستند و در هر زمینه رساله‌هایی از وی به یادگار مانده است.

خیام در حل معادلات جبری از هندسه استفاده کرده است و او خود را پیرو ابن‌سینا می‌دانسته و امیران سلجوقی و سلطان ملک‌شاه خیامی را محترم می‌داشته‌اند.

اخلاق

سخنانی از حکیم عمربن‌ابراهیم خیامی در رساله فی‌شرح ما اَشکل مِنْ مصادرات (کتاب هندسه عمر خیام)

ستایش خدای را که خداوند رحمت و نعمت است و درود بر بندگان برگزیده‌اش بخصوص سید پیامبران در علوم و تحصیل دانش‌ها با دلیل و برهان حقیقی بر کسانی که طالب نجات و جویای سعادت ابدی باشند. از جمله فرایض و واجبات است تحصیل آن علوم و درک این حقایق تا آن حد که در حوصله قدرت و طاقت بشری باشد لازم و حتمی است و این جزء از حکمت که آن‌را علوم ریاضی نامند آسان‌ترین اجزای حکمت است هم در ادراک تصوری و هم در تصدیق.

امّا آن رشته که مربوط به عدد و حساب باشد خود واضح و آشکار است.

امّا بخش هندسه نیز بر کسانی که دارای فطرت سلیم و رأی راست باشند پنهان نباشد و فایده علوم ریاضی این است که موجب ورزیدگی ذهن و تندکردن خاطر شود و نیز نفس را عادت دهد تا از قبول اموری که مقرون به دلیل و برهان نباشد اجتناب کند.

منابع ۱ ـــ دو رساله خیامی دکتر علیرضا امیر معز ص ۱۱۰

۲ ـــ کتاب هندسه عمر خیام تقی ارانی سال ۳۴.

فصل هشتم

کاربرد دایره و بیضی در نقشه‌برداری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ اصطلاحات : دایره، شعاع، وتر، قطر، زاویه در دایره، زاویه‌ی مرکزی، زاویه‌ی محاطی، زاویه‌ی ظلّی و کمان در خور یک زاویه را با رسم شکل تعریف کند.

۲ــ شعاع دایره را به وسیله‌ی زاویه‌ای که مماس بر کره‌ی زمین از یک نقطه با صفحه‌ی افق می‌سازد را با ذکر یک مثال محاسبه کند.

۳ــ عرض جغرافیایی یک محل را به وسیله‌ی دوربین زاویه‌یاب محاسبه کند.

با رسم شکل ثابت کند زاویه‌ی قائم ستاره‌ی قطبی به وسیله‌ی دوربین تئودولیت که در محل اندازه‌گیری می‌شود با عرض جغرافیایی محل برابر است.

۴ــ اصطلاحات ؛ مماس، خط مماس، رسم مماس از یک نقطه خارج دایره بر دایره، شعاع نقطه‌ی تماس، شعاع عمود بر وتر، را با رسم شکل تعریف کند.

۵ــ بیضی و پارامترهای بیضی، فشردگی بیضی را با رسم شکل تعریف کند.

۶ــ با ذکر یک مثال و رسم شکل اندازه‌ی فشردگی و خروج از مرکز بیضی را محاسبه کند.

۷ــ مثال‌های حل شده در این فصل را فرا بگیرد.

آیا می‌دانید

غیاث‌الدین جمشید کاشانی در جمله‌ی بسیار زیبایی با زبان ریاضی، «به نام خدا» را به این شکل بیان می‌کند :

«به نام او که از اندازه‌ی نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است» که در این جمله به نوعی اذعان می‌دارد که انسان از فهم و محاسبه‌ی دقیق عدد . ناتوان است.

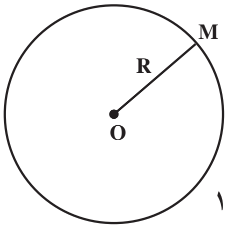
۸ــ۱ــ تعریف دایره (Circle)

آیا می‌دانید

غیاث‌الدین جمشید کاشانی که در حدود ۶۰۰ سال پیش می‌زیسته است(تاریخ وفات سال ۸۳۲ هجری قمری) اولین محاسب عدد . بوده است.

دایره مکان هندسی نقاطی است از یک صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز به یک فاصله باشند.

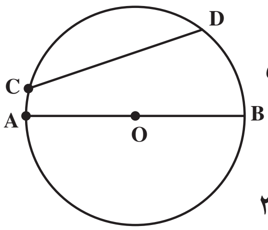
فاصله‌ی هر نقطه از دایره را تا مرکز دایره «شعاع دایره» گویند و آن را با حرف R نمایش می‌دهند.



شکل ۸ــ۱

تعریف وتر: پاره‌خطی که دو نقطه از پیرامون دایره را به هم وصل کند «وتر دایره» و بزرگ‌ترین وتر دایره را «قطر» گویند.

هر قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند ؛ مانند : وتر CD و قطر AB (شکل۸ــ۲).



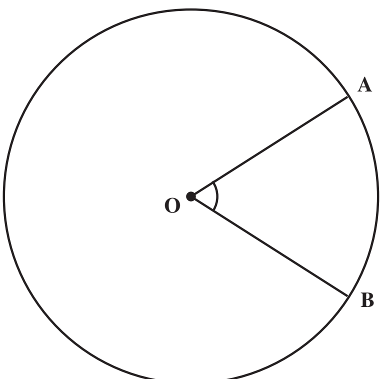
شکل ۸ــ۲

۸ــ۲ــ زاویه در دایره

زاویه در دایره به سه حالت است : زاویه‌ی مرکزی، زاویه‌ی محاطی و زاویه‌ی ظلّی.

تعریف زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ی مرکزی زاویه‌ای است که رأس آن در مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع‌های دایره باشند ؛ مانند زاویه‌ی AOB # (شکل ۸ــ۳).

قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی برابر است با اندازه‌ی کمان مقابل آن.



شکل ۸ــ۳

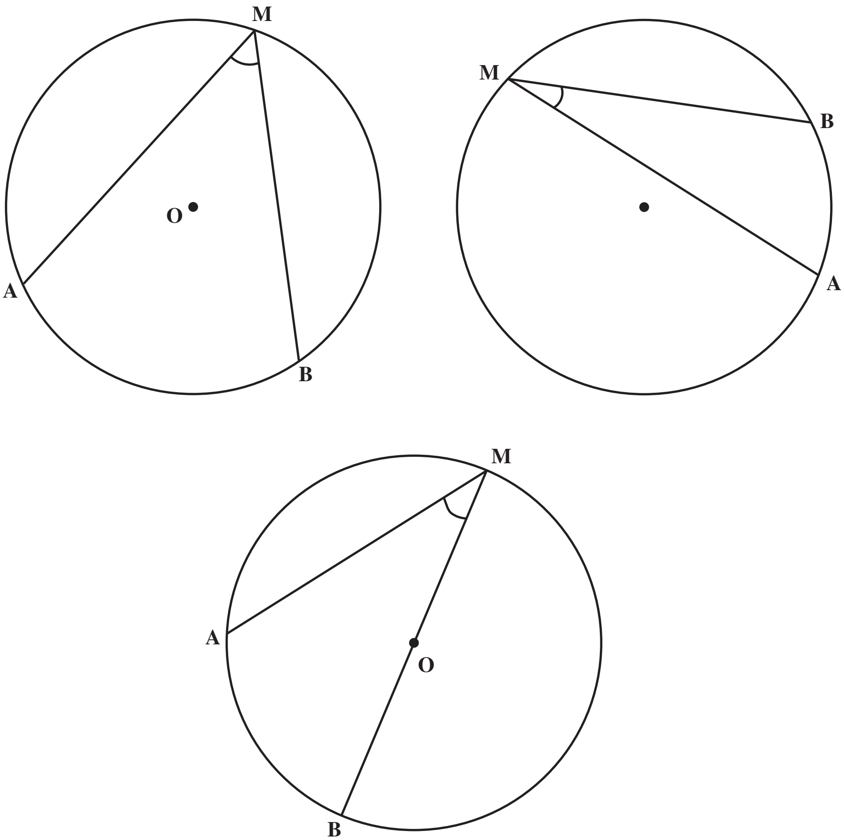
آیا می‌دانید

غیاث‌الدین جمشید کاشانی درسن ۴۳ سالگی از دنیا رفته است. بنابراین یافته‌های با ارزش او در دوران جوانی او صورت گرفته است.

تعریف زاویه‌ی محاطی: زاویه‌ی محاطی زاویه‌ای است که رأس آن روی پیرامون دایره و دو ضلع آن دو وتر دایره باشد (شکل ۸ــ۴).

قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی برابر است با نصف کمان مقابل آن (شکل۸ــ۴) :

$$\# AMB . \frac{\overset{\frown}{AB}}{\text{۲}}$$

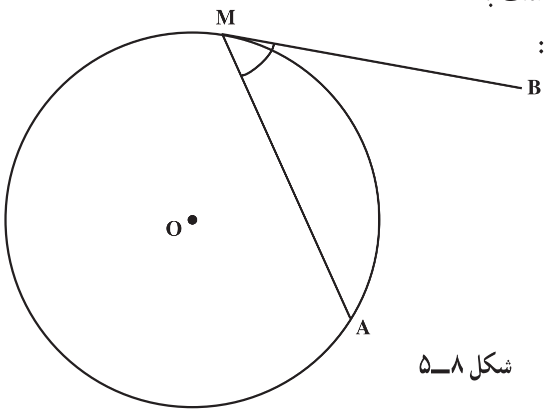


شکل ۸ــ۴

تعریف زاویه‌ی ظلّی: زاویه‌ی ظلّی زاویه‌ای است که رأس آن روی پیرامون دایره و یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره باشد.

قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ی ظلّی برابر است با نصف کمان مقابل آن (مطابق شکل ۸ــ۵) :

$$\angle AMB = \frac{\overset{\frown}{MA}}{۲}$$

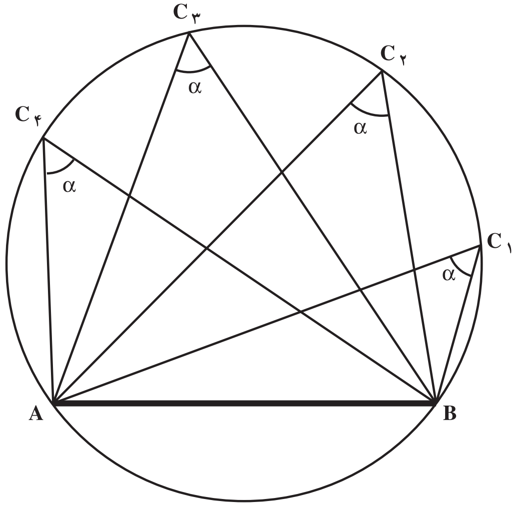


شکل ۸ــ۵

۸ــ۳ــ کمان درخور

تمام زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم مساویند (شکل ۸ــ۶)

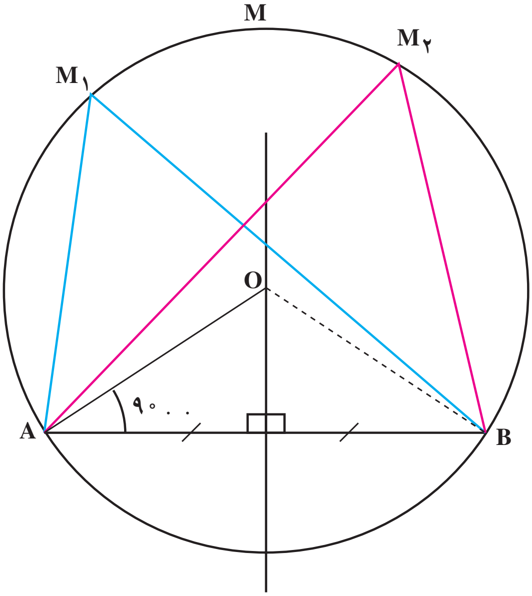
$$\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ = \hat{C}_۳ = \hat{C}_۴ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \alpha$$



شکل ۸ــ۶

تعریف کمان درخور: به مکان هندسی رئوسی زوایای محاطی که دو ضلع آن به طرف AB وصل می‌شوند، کمان درخور زاویه‌ی α گویند.

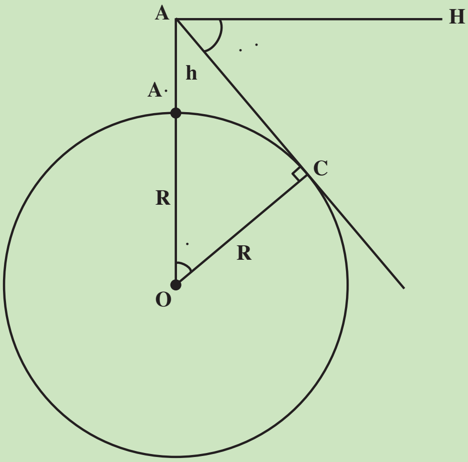
ترسیم کمان در خور: برای رسم کمان درخور زاویه‌ی . مطابق شکل ۸ــ۷ روی پاره‌خط AB، ابتدا عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم و سپس از نقطه‌ی A یا B خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ی(. . ۹۰) بسازد. تا عمودمنصف را در نقطه‌ی O قطع کند. نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی موردنظر است. به مرکز O و به شعاع OB دایره‌ای رسم می‌کنیم. در نتیجه کمان $\widehat{AMB}$ کمان درخور زاویه‌ی . خواهد بود. زیرا بر اساس رسم و خاصیت زاویه‌ی مرکزی کمان $\widehat{ANB}$ برابر ۲. می‌شود و ما هر نقطه مانند M_1 را روی کمان $\widehat{AMB}$ در نظر بگیریم و به نقاط A و B وصل کنیم یک زاویه‌ی محاطی پدیدار می‌شود و طبق قضیه مساوی نصف کمان مقابل آن، یعنی : . می‌شود.



شکل ۸ــ۷

۸ــ۴ــ مثال‌هایی از کاربرد زاویه در دایره

مثال ۸ــ۱ــ از نقطه A به ارتفاع ۱۵۰۰ متر که زاویه شیب . . را اندازه‌گیری کرده‌ایم و مقدار آن ۱°،۱۴۰، ۳۶۰۰ . . شده است مطلوبست محاسبه شعاع کره زمین.



شکل ۸ــ۸

راهکار کلی: مثلث $O\hat{A}C$ در شکل مقابل قائم الزاویه است (زیرا شعاع OC در نقطه تماس C بر مماسAC عمود است) و دو زاویه $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$ می‌باشد چون اضلاع دو زاویه $A\hat{O}C$ و $C\hat{A}H$ دو به دو بر هم عمودند طبق قضیه با هم مساویند.

در مثلث $A\hat{O}C$ رابطه کسینوس‌ها را می‌نویسیم

$$Cos\alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{R+h} \qquad (OA = OA' + A'A = R + h)$$

$(R+h)Cos\alpha = R$ ضرب می‌کنیم

$RCos\alpha + hCos\alpha = R$ ساده می‌کنیم

$$RCos\alpha - R = -hCos\alpha$$

$$R - RCos\alpha = hCos\alpha$$

$$R(1 - Cos\alpha) = hCos\alpha \Rightarrow R = \frac{hCos\alpha}{1 - Cos\alpha}$$

با داشتن زاویه α و ارتفاع h شعاع کره‌ی زمین به‌دست می‌آید.

روش حل: در فرمول $R = \frac{hCos\alpha}{1 - Cos\alpha}$ مقادیر معلوم را قرار می‌دهیم $\alpha = 1^\circ, 14', 36''$ و متر $h = 1500$ به‌دست می‌آید

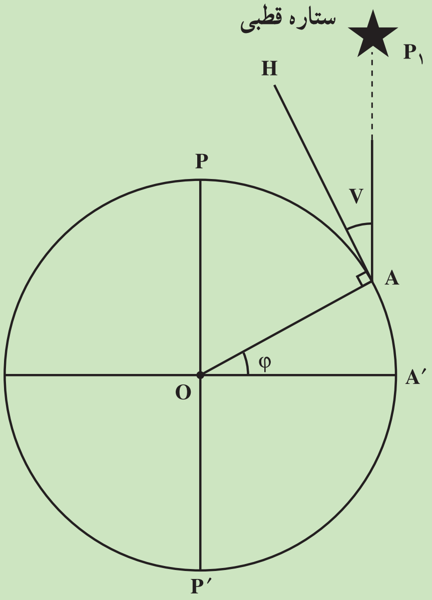
$$R = \frac{1500 \times Cos(1^\circ, 14', 36'')}{1 - Cos(1^\circ, 14', 36'')} = 6369511/78 \text{ متر}$$

بحث و بررسی: با اندازه‌گیری زاویه شیب و ارتفاع محل می‌توان شعاع کره زمین را محاسبه کرد.

مثال ۸ــ۲: برای اندازه‌گیری عرض جغرافیایی محل A دوربین زاویه‌یاب را در نقطه A مستقر کرده و به ستاره قطبی نشانه روی می‌کنیم. زاویه ارتفاعی ستاره قطبی را اندازه‌گیری کرده و برابر $V = 35^\circ, 41'$ شده است عرض جغرافیایی را به‌دست آورید.

راهکار کلی: می‌دانیم ستاره قطبی تقریباً در امتداد محور کره زمین قرار دارد (حدود ۱ درجه از امتداد محور دورانی زمین انحراف دارد) و طبق شکل دو امتداد AP_1 (امتداد نشانه روی) و OP (محور زمین) در فاصله بسیار دور را تقریباً با هم موازی در نظر می‌گیریم بنابراین دو زاویه $\hat{V}$ و $\hat{\varphi}$ با هم برابرند (زیرا اضلاع آن‌ها دو به‌دو بر هم عمودند $OA \perp HA$ شعاع در نقطه تماس با خط مماس

(AH) عمود است و امتداد AP_1 بر OA' عمود است زیرا $OP \perp OA'$ عمود است بنابراین موازی آن یعنی $AP_1 \perp OA'$ می‌باشد با اثبات $\hat{V} = \hat{\varphi}$ با اندازه‌گیری زاویه ارتفاعی ستاره قطبی عرض جغرافیایی محل (φ) به‌دست می‌آید.



شکل ۸ـــ۹

روش حل: چون ثابت شد دو زاویه $\hat{V} = \hat{\varphi}$ برابرند در نتیجه عرض جغرافیایی محل A برابر با $41'$ ، 35° می‌باشد.

بحث و بررسی: روش بسیار خوب و ساده با تقریب 1° برای به‌دست آوردن عرض جغرافیایی محل می‌باشد.

آیا می‌دانید

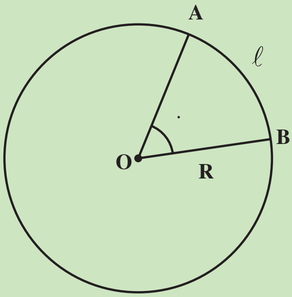
دانشمندان قدیم برای اندازه‌گیری محیط کره‌ی زمین و اندازه‌گیری قوس نصف‌النهار و هم‌چنین اندازه‌گیری طول و عرض جغرافیایی و برای ساختن اسطرلاب (ستاره‌یاب) و اندازه‌گیری ارتفاع خورشید و ستاره قطبی نیاز به دانستن نسبت محیط به قطر دایره را که همان عدد π می‌باشد داشتند.

۸ـ۵ـ محاسبه‌ی طول کمانی از دایره C(O,R) مقابل به زاویه‌ی مرکزی $^\circ$.

واضح است که طول کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی یک درجه برابر است با $\frac{۲.\ R}{۳۶۰}$ بنابراین،
طول کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $^\circ$. برابر است با $\frac{۲.\ R.}{۳۶۰}$ یا $\frac{.\ R.}{۱۸۰}$ در نتیجه طول کمان $1\ .\ \frac{.\ R.^\circ}{۱۸۰}$ که . برحسب درجه است. اگر . را در عدد $\frac{۱۸۰}{.}$ ضرب کنیم برحسب رادیان می‌شود و رابطه‌ی فوق به‌صورت : $\boxed{1\ .\ \ R.}$ می‌گردد.

مثال ۸ـ۳: طول قوسی از مسیر را که به شکل کمانی از دایره به شعاع ۲۵ متر مقابل به زاویه مرکزی ۴۰، ۲۳° قرار دارد به‌دست آورید.

راهکار کلی: مطابق شکل زیر شعاع دایره R . OB . OA معلوم و زاویه مرکزی مقابل به کمان $\widehat{AB}$ یعنی . نیز معلوم است می‌خواهیم طول قوس AB . 1 را به‌دست آوریم.



شکل ۸ـ۱۰

محیط دایره برابر است با R .۲ مقابل به زاویه ۳۶۰ درجه مرکزی می‌باشد بنابراین طول قوسی از دایره که مقابل به زاویه ۱° باشد برابر است با $\frac{۲.\ R}{۳۶۰}$ پس نتیجه می‌شود طول قوس مقابل به زاویه $^\circ$. برابر است با

$$\text{طول قوس دایره } 1\ .\ \frac{۲.\ R.^\circ}{۳۶۰}$$

(۰) در این فرمول برحسب درجه است $1\ .\ \frac{.\ R.^\circ}{۱۸۰}$ به عدد ۲ ساده می‌کنیم .

اگر $^\circ$. را در عدد $\frac{۱۸۰}{.}$ ضرب کنیم برحسب رادیان می‌شود یعنی

(α بر حسب رادیان)

$$l=(\frac{\pi R\alpha^{\circ}}{۱۸۰})\times\frac{۱۸۰}{\pi}=R\alpha \Rightarrow l=R\alpha$$

روش حل: زاویه $\alpha=۲۳^{\circ},۴۰'$ را ابتدا به رادیان تبدیل می‌کنیم

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\alpha}{\pi}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۱۸۰}\times D=\frac{\pi}{۱۸۰}\times(۲۳^{\circ},۴۰')=۰/۴۱۳ \text{ رادیان}$$

$$l=R\alpha=۲۵(۰/۴۱۳)=۱۰/۳۲۵ \text{ متر}$$

بحث و بررسی: در نقشه برداری فرمول $l=R\alpha$ که α بر حسب رادیان است کاربرد زیادی در ژئودزی و مسیر دارد.

مثال ۸ــ۴: تراز استوانه‌ای به شعاع ۱ متر در حد ۲ میلی‌متر مدرج شده است زاویه مرکزی روبرو به کمان ۲ میلی‌متر چند دقیقه است.

راهکار کلی: با استفاده از فرمول $l=R\alpha$ که در مسئله قبل ثابت شد مقدار $\alpha=\frac{l}{R}$ که l و R معلوم است و مقدار α بر حسب رادیان به‌دست می‌آید که آن‌را به‌وسیله رابطه $(\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\alpha}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۱۸۰\alpha}{\pi})$ بر حسب درجه محاسبه می‌کنیم.

روش حل: طبق فرض $R=۱ \text{ متر}=۱۰۰۰ \text{ میلی‌متر}$ و $l=۲ \text{ میلی‌متر}$ مقادیر معلوم فوق را در فرمول $\alpha=\frac{l}{R}$ قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$\alpha=\frac{۲}{۱۰۰۰}=\frac{۱}{۵۰۰} \text{ رادیان}$$

$$D=\frac{۱۸۰\alpha}{\pi}=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{۱}{۵۰۰}=۰/۱۱۴۵ \text{ درجه}=۰^{\circ},۶',۵۳''\simeq ۷'$$

بحث و بررسی : کاربرد فرمول $l=R\alpha$ علاوه بر ژئودزی و مسیر حتی در تعیین دقت تراز و وسائل نقشه‌برداری به‌کار می‌رود.

آیا می‌دانید

مقدار عدد . را به صورت شعر نیز سروده‌اند :

گر ز قدر پی کنند از تو سؤال   پاسخی ده که خردمند تو را آموزد

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان   ره سر منزل توفیق بما آموزد

تعداد حروف کلمه‌های بیت دوم شعر عدد پی را با ده رقم اعشار مشخص می‌کند.

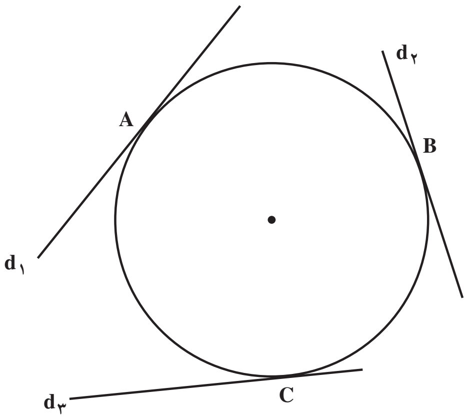
(خرد ≃ ۳، و ≃ ۱، بینش ≃ ۴، و ≃ ۱، آگاهی ≃ ۵، دانشمندان ≃ ۹، ره ≃ ۲، سر منزل ≃ ۶، توفیق ≃ ۵، بما ≃ ۳، آموزد ≃ ۵) و در مجموع داریم :

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵

۸ــ۶ ــ قضایای کاربردی در نقشه‌برداری

هر خط که دایره را در یک نقطه قطع کند در آن دایره مماس است (شکل۸ ــ۱۱).

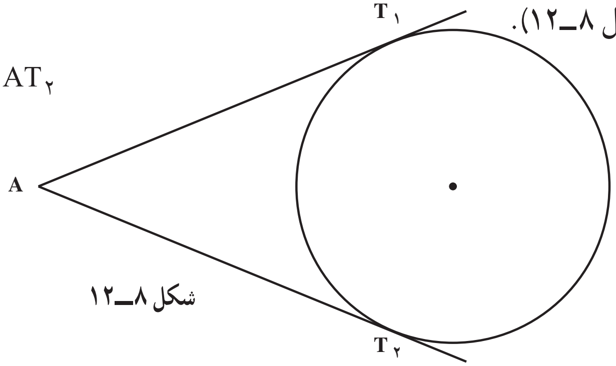
مانند خطوط : d_1، d_2 و d_3 که به ترتیب در نقـاط A، B و C بر دایره مماس می‌باشند.



شکل ۸ــ۱۱

از هر نقطه خارج از دایره فقط دو مماس می‌توان بر دایره رسم کرد (طول این دو مماس با هم برابرند.) (مانند شکل ۸ــ۱۲).

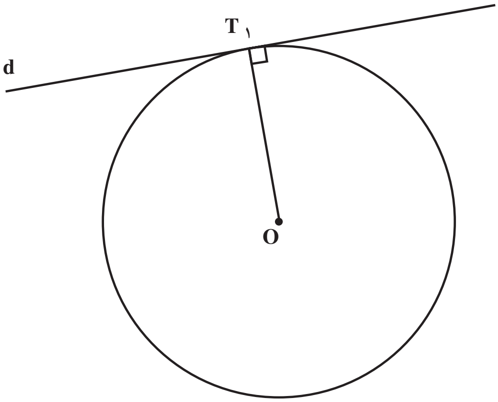
$AT_1 \;.\; AT_2$



شکل ۸ــ۱۲

شعاع نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است مانند شکل ۸ــ۱۳.

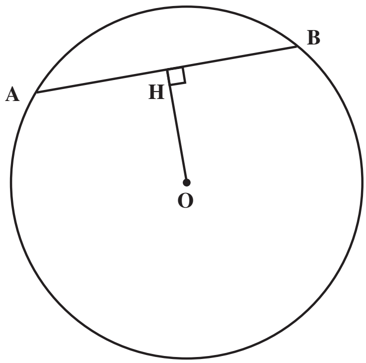
$OT_1 \perp d$



شکل ۸ــ۱۳

شعاع عمود بر وتر، وتر و کمان روبه‌رویش را نصف می‌کند مانند شکل ۸ــ۱۴.

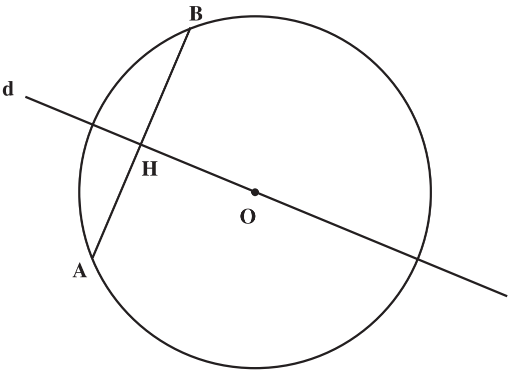
$OH \perp AB$ و $AH = HB$



شکل ۸ــ۱۴

عمود منصف هر وتر در دایره از مرکز دایره می‌گذرد مانند شکل ۸ــ۱۵.

O مرکز دایره است و $d \perp AB$ و $AH = HB$



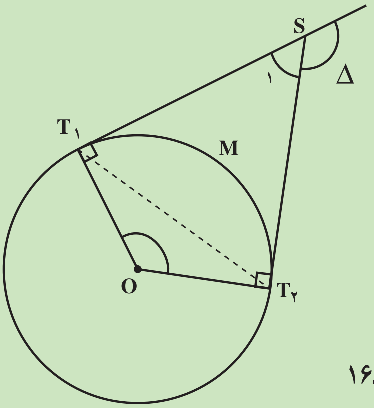
شکل ۸ــ۱۵

مثال ۸ــ۵: در شکل زیر زاویه انحراف $\Delta=124^\circ,30'$ و شعاع دایره $R=74$ متر است و مماس‌های ST_1 و ST_2 بر دایره رسم شده است

اولاً : زاویه مرکزی $\angle T_1OT_2$ چقدر است؟

ثانیاً : زاویه‌ی ظلّی $\angle ST_1T_2$ را به‌دست آورید.

ثالثاً : طول قوس $\overset{\frown}{T_1MT_2}$ را محاسبه کنید.



شکل ۸ــ۱۶

راهکار کلی: اولاً : چون شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است بنابراین زوایای

$\hat{T}_1=\hat{T}_2=90^\circ$

در چهارضلعی محاطی T_1ST_2O چون $\hat{T}_1=\hat{T}_2=90^\circ$ است نتیجه می‌شود $\boxed{\hat{O}+\hat{S}_1=180}$

رابطه ۱ و هم‌چنین رابطه ۲ $\hat{S}_1+\Delta=180^\circ$ (زیرا دو زاویه مجانب هستند)

از دو رابطه ۱ و ۲ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}\hat{O}+\hat{S}_۱=۱۸۰ \\ S_۱+\Delta=۱۸۰\end{cases} \Rightarrow \hat{O}+\hat{S}_۱=\hat{S}_۱+\hat{\Delta} \Rightarrow \boxed{\hat{O}=\hat{\Delta}}$$

ثانیاً : زاویه ظلّی $\angle S\hat{T}_۱T_۲$ طبق قضیه برابر است با نصف کمان مقابلش (زاویه مرکزی $\hat{O}$ برابر است با اندازه کمان مقابلش)

$$\angle ST_۱T_۲=\frac{\overset{\frown}{T_۱T_۲}}{۲}=\frac{\hat{O}}{۲}$$

ثالثاً : طبق فرمول $l=R\alpha$ با معلوم بودن شعاع و زاویه مرکزی طول قوس l محاسبه می‌شود.

روش حل: جواب اولاً : ثابت شد زاویه انحراف با زاویه مرکزی $\hat{O}$ برابر است

$$\angle T_۱OT_۲=\hat{O}=\hat{\Delta}=۱۲۴^\circ,۳۰'$$

جواب ثانیاً : چون زاویه ظلّی برابر با نصف کمان مقابلش می‌باشد

$$\angle ST_۱T_۲=\frac{\overset{\frown}{T_۱MT_۲}}{۲}=\frac{\hat{O}}{۲}=\frac{۱۲۴^\circ,۳۰'}{۲}=۶۲^\circ,۱۵'$$

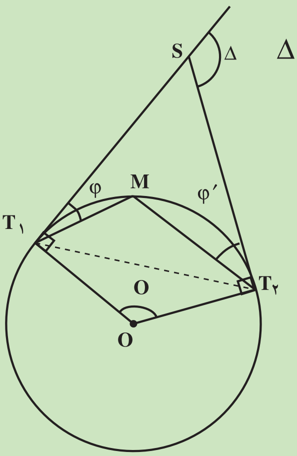
جواب ثالثاً : در فرمول $l=R\alpha$ متر $R=۷۴$ و $\hat{\alpha}=\hat{O}=۱۲۴^\circ,۳۰'$ زاویه α را برحسب رادیان به‌دست می‌آوریم

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\alpha}{\pi}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۱۸۰}\times D=\frac{\pi}{۱۸۰}\times(۱۲۴^\circ,۳۰')=۲/۱۷ \text{ رادیان}$$

طول قوس مسیر متر $l=R\alpha=۷۴\times۲/۱۷=۱۶۰/۵۸$

بحث و بررسی: از این روش می‌توان پارامترهای یک قوس مسیر را به‌دست آورد.

مثال ۸ــ۶: در شکل روبه‌رو زاویه انحراف $\Delta=۲۷^\circ,۳۲'$ و زاویه‌ی $\varphi=۱۰^\circ,۱۸'$ می‌باشد مطلوبست محاسبه زاویه $\varphi'=\angle MT_۲S$



شکل ۸ــ۱۷

راهکار کلی: زاویه مرکزی $\hat{O}$ را رسم می‌کنیم در مثال‌های قبل ثابت کردیم زاویه مرکزی $\hat{O}$ با زاویه انحراف $\hat{\Delta}$ برابر است و برابر نصف کمان مقابلش می‌باشد

$$\hat{O}=\hat{\Delta}=\frac{\overset{\frown}{T_۱MT_۲}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{T_۱M}+\overset{\frown}{MT_۲}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{T_۱M}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{MT_۲}}{۲}$$ رابطه ۱

از طرف دیگر زاویه ظلّی برابر نصف کمان مقابلش پس نتیجه می‌شود $\varphi'=\frac{MT_۲}{۲}$ در رابطه ۱ به‌جای $\frac{\overset{\frown}{MT_۲}}{۲}$ مساویش φ' را قرار می‌دهیم

$$\hat{\Delta}=\frac{\overset{\frown}{T_۱M}}{۲}+\varphi' \Rightarrow \boxed{\frac{\overset{\frown}{T_۱M}}{۲}=\Delta-\varphi' \text{ رابطه ۲}}$$

هم‌چنین زاویه φ زاویه ظلّی است برابر با نصف کمان روبه‌روی خود می‌باشد

$$\varphi=\frac{\overset{\frown}{T_۱M}}{۲}$$ رابطه ۳

رابطه ۳ را در رابطه ۲ قرار می‌دهیم

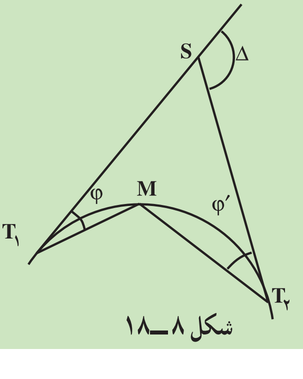
$$\varphi=\Delta-\varphi' \Rightarrow \hat{\varphi}'=\hat{\Delta}-\hat{\varphi}$$

با داشتن Δ و φ زاویه φ' به‌دست می‌آید.

روش حل: با داشتن مقادیر معلوم $\varphi=۱۰^\circ,۱۸'$ و زاویه انحراف $\Delta=۲۷^\circ,۳۲'$ از فرمول اثبات شده $\hat{\varphi}'=\hat{\Delta}-\hat{\varphi}$ مقدار φ' به‌طریق زیر به‌دست می‌آید

$$\varphi'=۲۷^\circ,۳۲'-۱۰^\circ,۱۸'=۱۷^\circ,۱۴'$$

بحث و بررسی: با این روش برای پیاده کردن نقاط قوس مسیر دایره شکل روش تقاطع دو دستگاه دوربین زاویه‌یاب که یکی در نقطه $T_۱$ و دیگری در نقطه $T_۲$ مستقر می‌کنیم و با داشتن زاویه‌های φ و φ' نقطه مجهول M از قوس پیاده می‌گردد.



شکل ۸ــ۱۸

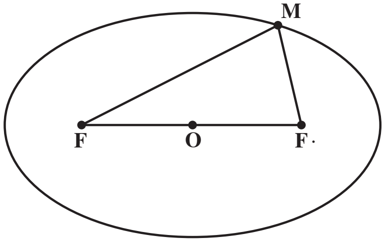
۸ــ۷ــ بیضی (Ellipse)

تعریف بیضی: بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که مجموع فاصله‌های هریک از آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت آن صفحه، مقدار ثابتی باشد.

در شکل ۸ــ۱۹ هر یک از دو نقطه‌ی ثابت را یک «کانون بیضی» و فاصله‌ی دو کانون را «فاصله‌ی کانونی بیضی» می‌نامیم. کانون‌های بیضی را معمولاً با دو حرف F و F' و فاصله‌ی کانونی را با ۲C نشان می‌دهیم: $FF' = 2C$

مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی بیضی را از دو کانون که مقدار ثابتی است با ۲a نمایش می‌دهیم. پس اگر نقطه‌ی M از صفحه به بیضی تعلق داشته باشد، داریم $MF + MF' = 2a$ ،دو خط MF و MF' را «شعاع‌های حامل نقطه‌ی M» یا «شعاع‌های کانونی نقطه‌ی M از بیضی» می‌نامیم.

از تعریف بیضی نتیجه می‌گیریم که: $a > c$ است.

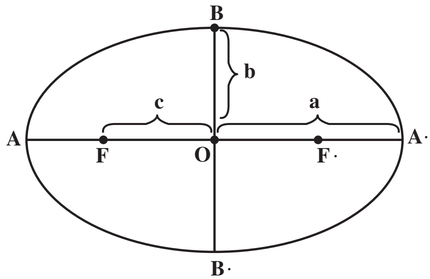


شکل ۸ــ۱۹

پارامترهای بیضی: در بیضی شکل ۸ــ۲۰ فاصله‌ی AA' را «قطر بزرگ» یا «اطول بیضی» گویند که مقدار آن برابر است با۲a، $AA' = 2a$ (قطر کانونی). فاصله‌ی BB' را «قطر کوچک» یا «قطر اقصر بیضی» می‌گویند. مقدار آن مساوی است با: ۲b، $BB' = 2b$ (قطر غیرکانونی).

فاصله‌ی FF' را «فاصله‌ی کانونی بیضی» گویند که مقدار آن برابر است با: ۲c، $FF' = 2c$

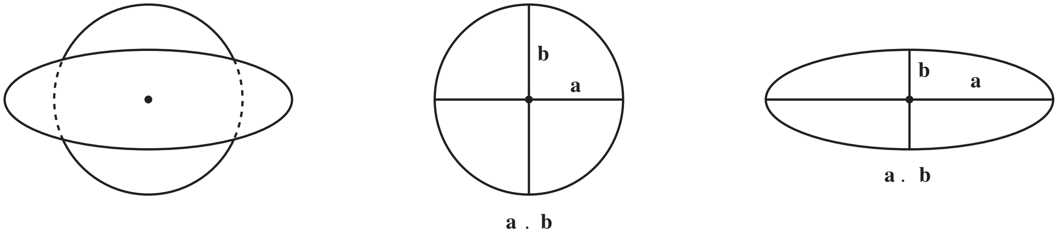
رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ همواره بین پارامترهای بیضی برقرار است.



شکل ۸ــ۲۰

فشردگی بیضی: اگر دایره‌ای را در راستای یک قطرش فشار دهیم (یا بکشیم) شکل دایره تبدیل به بیضی می‌شود.

میزان این فشردگی برابر است با اختلاف نسبی دو شعاع حداکثر (a) و حداقل (b) که مطابق شکل ۸ــ۲۱ برهم عمودند.



فشردگی $f . \frac{a . b}{a} . ۱ . \frac{b}{a}$

شکل ۸ــ۲۱

بنابراین فشردگی دایره برابر صفر است.

مثال: فشردگی زمین را برای بیضوی مبنای WGS84 در صورتی که شعاع زمین در استوا $a . ۶۳۷۸۱۳۷$ و در قطبین $b . ۶۳۵۶۷۵۲/۳۸۲$ باشد محاسبه کنید.

$$f . ۱ . \frac{b}{a} . ۱ . \frac{۶۳۵۶۷۵۲/۳۸۲}{۶۳۷۸۱۳۷} \simeq \frac{۱}{۳۰۰}$$

خروج از مرکز بیضی: معیار دیگری که برای فشردگی بیضی در محاسبات هندسی به کار می‌رود، خروج از مرکز می‌باشد که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

خروج از مرکز $e . \frac{c}{a}$

رابطه‌ی $e^۲ . \frac{a^۲ . b^۲}{a^۲}$

چون $e . \frac{c}{a} . \quad e^۲ . \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{a^۲ . b^۲}{a}$

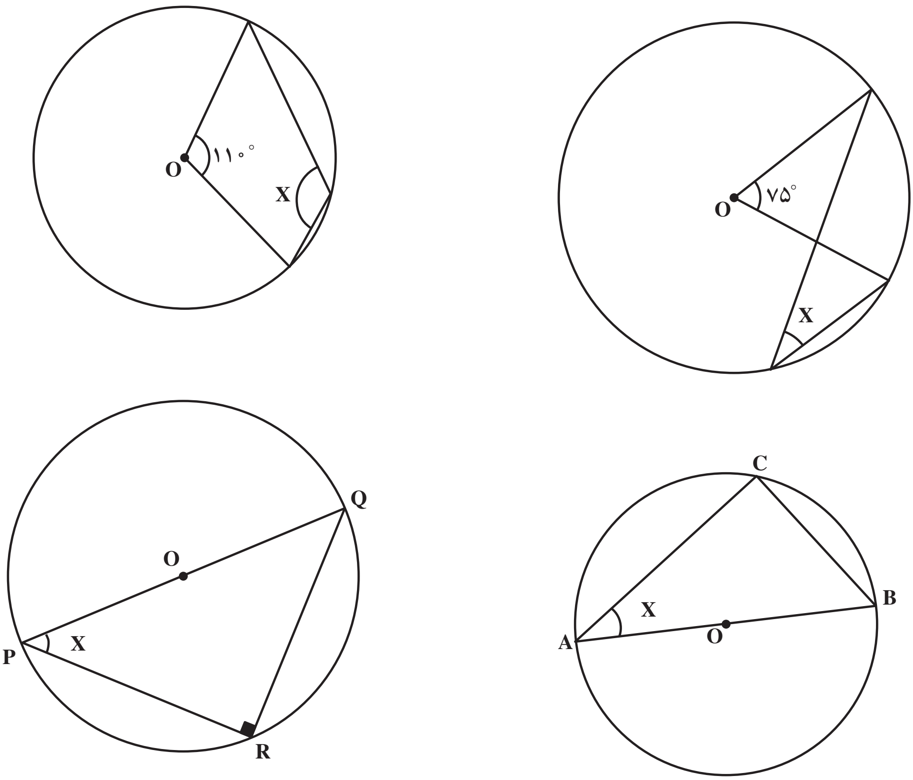
تذکر: $c^۲ . a^۲ . b^۲$ $\quad . \quad e . \sqrt{\frac{a^۲ . b^۲}{a^۲}} . \sqrt{۱ . \frac{b^۲}{a^۲}}$

تمرین: خروج از مرکز را برای مثال بالا محاسبه نمایید.

خودآزمایی

۱ــ دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر رسم و وتری به‌طول ۷ سانتی‌متر جدا کنید ؛ سپس قطر AB را به دل‌خواه رسم نموده از نقطه‌ی M روی دایره خارج از قطر به دو سر AB وصل کنید. زاویه‌ی AMB # چند درجه است؟ چرا؟

۲ــ در هریک از شکل‌های زیر مقدار زاویه‌ی x را بیابید :

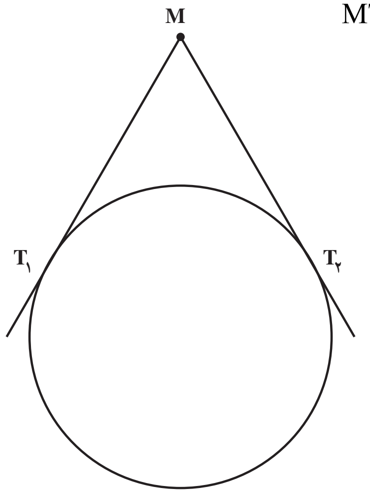


|BC| . |OB|

|PR| . |RQ|

شکل ۸ــ۲۲

۳ــ از نقطه‌ی M شکل ۸ــ۲۳ دو خط MT_1 و MT_2 را بر دایره‌ی O مماس کرده‌ایم. ثابت کنید MT_2 . MT_1

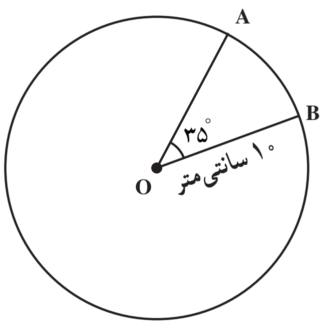


شکل ۸ــ۲۳

۴ــ طول پاره‌خط AB را به اندازه‌ی ۸ سانتی‌متر رسم کنید و کمان درخور زاویه‌ی ۳۰ درجه را روی آن ترسیم نمایید.

۵ــ مثلث ABC را طوری رسم نمایید که طول BC، ۵ سانتی‌متر و زاویه‌ی $\hat{A}$. $60°$ و ارتفاع وارد بر ضلع BC، ۳ سانتی‌متر باشد.

۶ــ در یک دایره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه‌ی °۳۵ (شکل ۸ــ۲۴) چند سانتی‌متر است؟



شکل ۸ــ۲۴

۷ــ در یک دایره به شعاع ۱۰۰ متر، زاویه‌ی روبه رو به کمانی از این دایره که طول آن ۵ متر است، چند رادیان و چند درجه است؟

۸ ــ در شکل ۸ ــ ۲۵ از نقطه‌ی S مماس‌های ST_1 و ST_2 بر دایره به مرکز O، به شعاع R

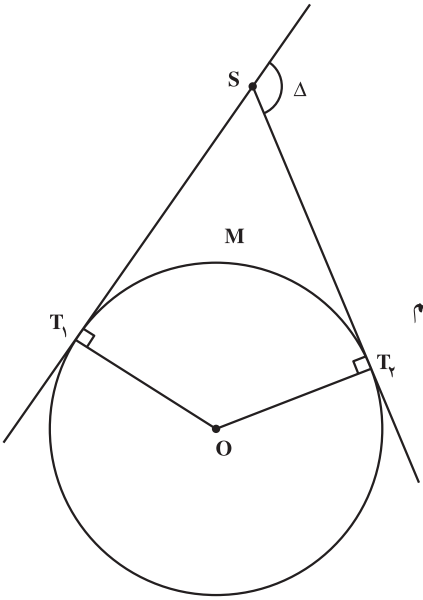
رسم شده است. اگر زاویه‌ی انحراف $\Delta = ۱۲۰^\circ$ باشد،

اولاً : زاویه‌ی $\angle T_۱OT_۲$ چه‌قدر است؟

ثانیاً : زاویه‌ی ظلّی $\angle ST_۱T_۲$ را به‌دست آورید.

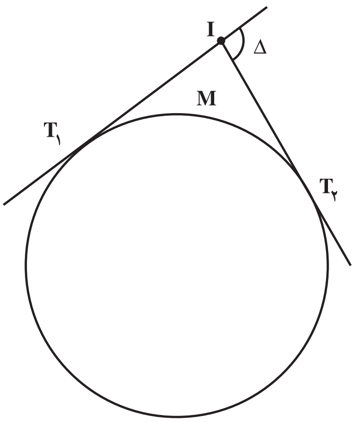
ثالثاً : اگر شعاع دایره، $R = ۱۵۰$ متر باشد طول قوس $\widehat{T_۱MT_۲}$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: هر دو زاویه که اضلاع آن دوبه‌دو برهم عمود باشند مساویند.



شکل ۸ـ۲۵

۹ـ از نقطه‌ی I شکل ۸ـ۲۶ مماس $IT_۱$ و $IT_۲$ را بر دایره‌ای به شعاع ۲۵۰ متر رسم کرده‌ایم. اگر زاویه‌ی انحراف $\Delta = ۱۱۰^\circ, ۳۰'$ باشد مطلوب است محاسبه‌ی طول مماس $IT_۱$ و اندازه‌ی کمان $\widehat{T_۱MT_۲}$.

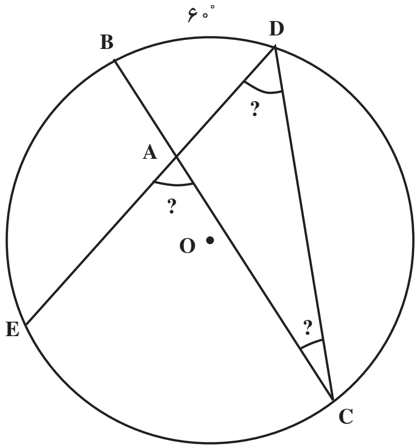


شکل ۸ـ۲۶

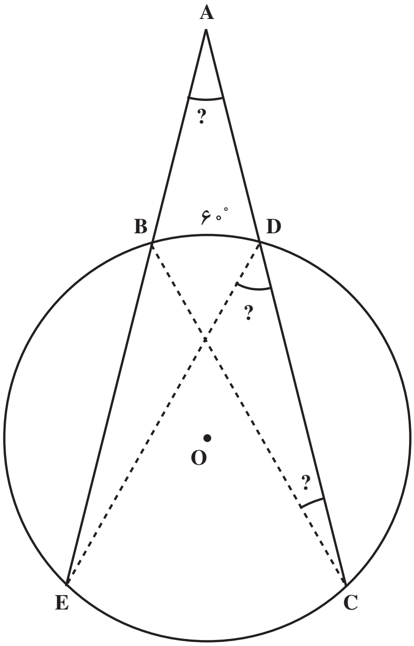
۱۰ـ در شکل‌های ۸ـ۲۷ و ۸ـ۲۸، دو وتر BC و DE یکدیگر را در نقطه‌ی A قطع کرده‌اند و $\widehat{BD} = ۶۰^\circ$ و $\widehat{CE} = ۱۰۰^\circ$.

اولاً هر یک از دو زاویه‌ی C و D چند درجه است؟

ثانیاً مقدار زاویه‌ی خارجی EAC از مثلث ADC چند درجه است؟



شکل ۸ــ۲۷

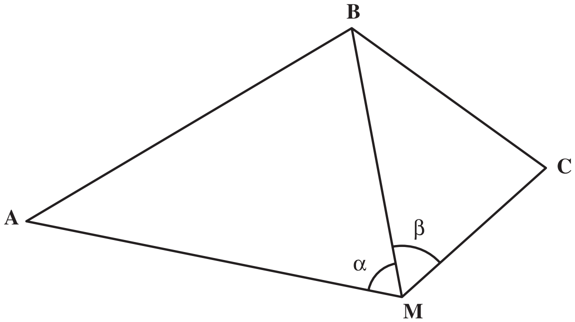


شکل ۸ــ۲۸

آیا می‌دانید

ابوریحان بیرونی در تعریف دایره از فصل نخست کتاب التفهیم آورده است: «دایره چیست؟ شکلی است بر سطحی که گرد بر گرد او خطی بود که نام او محیط است و به میان او نقطه‌ای است که او را مرکز گویند و همه‌ی خط‌های راست که از مرکز بیرون آیند و به محیط رسند، هم چند (مساوی) یکدیگر باشند.»

۱۱ــ مطابق شکل ۸ــ۲۹ سه نقطه‌ی A ، B و C روی نقشه مفروض‌اند. می‌خواهیم محل نقطه‌ی M را طوری تعیین کنیم که $\angle AMB = \alpha$ و زاویه‌ی $\angle BMC = \beta$ شود. روش ترسیمی را برای به‌دست آوردن نقطه‌ی M شرح دهید؛ سپس سه نقطه‌ی A ، B و C که در یک امتداد نباشند در روی کاغذ درنظر بگیرید. اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ و $\beta = ۲۲^\circ ، ۳۰'$ باشد محل نقطه‌ی M را به روش ترسیم به‌دست آورید.



شکل ۸ــ۲۹

۱۲ــ بیضی‌ای که اندازه‌ی قطرهای آن به‌ترتیب ۶ و ۴ سانتی‌متر باشد رسم کنید (درصورتی‌که مرکز بیضی بر مبدأ مختصات و محورهای بیضی بر محورهای مختصات منطبق باشند)؛ سپس فشردگی و خروج از مرکز بیضی را به‌دست آورید.

۱۳ــ در حوضی به شکل بیضی که نصف قطر بزرگ آن متر $a = ۵$ و فاصله‌ی دو کانون بیضی ۶ متر است،

اولاً : نصف قطر کوچک آن را حساب کنید.

ثانیاً : روش ترسیم و پیاده‌کردن آن را بیان نمایید.

ثالثاً : فشردگی و خروج از مرکز بیضی را حساب کنید.

۱۴ــ در یک باغچه به شکل بیضی که قطرهای آن به‌ترتیب ۲۰ و ۱۲ متر است،

اولاً : فاصله‌ی کانونی آن‌را به‌دست آورید.

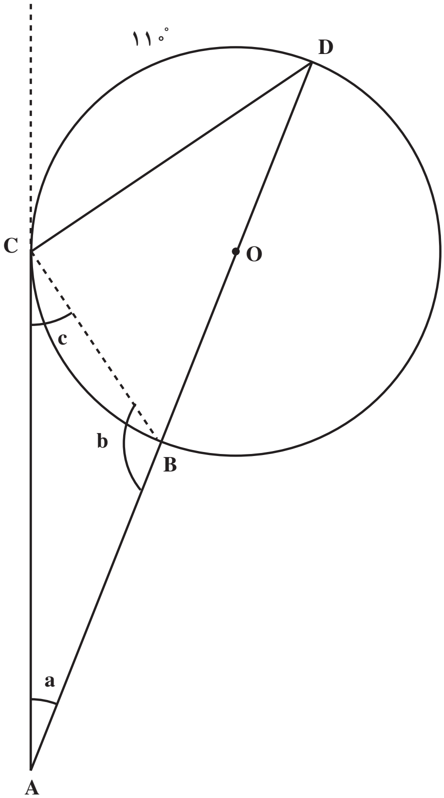
ثانیاً : خروج از مرکز آن را به‌دست آورید.

ثالثاً : مساحت بیضی را محاسبه نمایید.

۱۵ــ در یک بیضی هایفورد $a = ۶۳۷۸۲۴۹$ و متر $b = ۶۳۵۶۵۱۵$ است. فشردگی و خروج از مرکز آن را حساب کنید.

۱۶ــ اگر شعاع کره‌ی زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد، طول کمان یک درجه، یک دقیقه و یک ثانیه در روی زمین را به دست آورید.

۱۷ــ در شکل ۸ ــ ۳۰ مقدار زوایای a، b و c را به دست آورید. (خط AC بر دایره در نقطه‌ی C مماس است.)



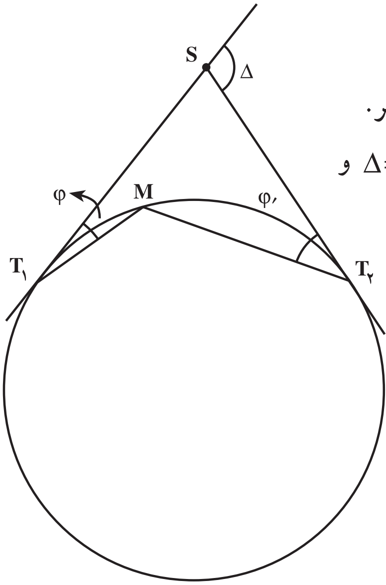
شکل ۸ ــ ۳۰

مسائل

مسأله‌ی ۱

موضوع: محاسبه‌ی یک زاویه از روی زوایای دیگر.

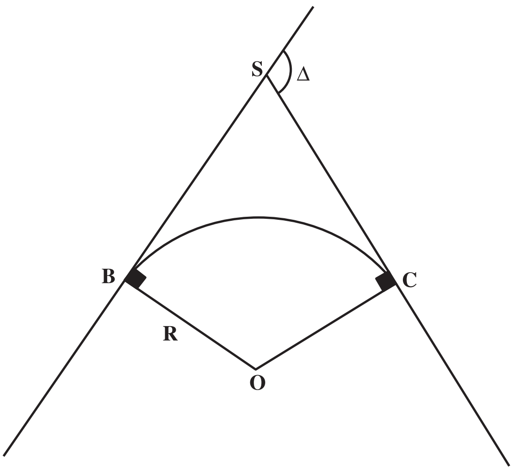
در این شکل ۸ـ۳۱ زاویه‌ی انحراف $\Delta = ۳۶^\circ$ ، $۲۵'$ و زاویه‌ی $\varphi = ۱۲^\circ$ ، $۱۸'$ نشان داده شده است. مطلوب است محاسبه‌ی زاویه‌ی φ' ، $\hat{\varphi}' = M\hat{T}_۲S$.



شکل ۸ــ۳۱

مسأله‌ی ۲

موضوع: الف) محاسبه‌ی زاویه‌ی مرکزی برحسب زاویه‌ی انحراف Δ ، ب) محاسبه‌ی طول قوس $\overset{\frown}{BC}$. در صورتی‌که زاویه‌ی انحراف $\Delta = ۲۴^\circ, ۳۰'$ و شعاع قوس **۳۵/ ۴۲** متر باشد (شکل ۸ــ۳۲).



شکل ۸ــ۳۲

کارگروهی دانش‌آموزان

دانش‌آموزان هرگروه برای خود یک سرگروه تعیین کنید. هر یک اعضای درس را برای اعضاء بازگو کنند با دریافت تعدادی سؤال از هر یک از اعضاء، از گروه آزمون پیشرفت برگزار کنید، سؤالات را با همکاری یکدیگر تصحیح کرده و میزان یادگیری اعضاء را ارزیابی کنید.

مطالعه‌ی آزاد

نکته: آقای غیاث‌الدین جمشید کاشانی، معروف به جمشید کاشی بر نیمکت راهروی دادگاه غمگین نشسته است. قرار است دقایقی دیگر در حالی که لباس زندان بر تن دارد، برود و از خود دفاع کند. اما بهتر است که به او نخندید که مثلاً چه دفاعی؟ این را هم می‌دانیم، اما اتفاق است خبر که نمی‌کند آدم هم آدم است یک وقت دیدی خودت جای او قرار گرفتی. سراغش می‌روم و بعد از کلی تعارف و استدلال امیدوارش می‌کنم به این که بتواند از دادگاه تخفیف بگیرد. راضی که می‌شود، مصاحبه را شروع می‌کنم:

ــ آقای غیاث‌الدین جمشید کاشانی! آیا بهتر نیست شما قبل از آن که وصیت خود و آخرین حرف‌تان را در محضر عدالت بگویید، برای خواننده‌های ما توضیح بدهید که جرم‌تان چیست؟

ــ جرم من شکنجه بیش از حد است!

ــ اگر امکان دارد بیش‌تر توضیح بدهید. چه کسی را شکنجه کرده‌اید و هدف شما چه بوده است؟

ــ من یک زبان بسته را شکنجه کرده‌ام به خاطر این که محاسبات ریاضی‌دان‌ها دقیق شود، عدد زبان بسته‌ی پی (π).

ــ از نوع پاسخ‌دادن‌تان مشخص است که هنوز نسبت به این زبان بسته دشمنی دارید.

ــ بله درست است. به ما طوری یاد داده‌اند که این اعداد، شوم و نحس‌اند و بدبختی می آورند.

ــ چه کسانی؟

ــ استادهای ریاضی‌دان ما.

ــ اگر امکان دارد داستان را از اول برای ما تعریف کنید.

جمشید به این جا که رسید آهی کشید در فکر فرو رفت و این‌طور گفت :

ــ ببینید همه ما می‌دانیم در طبیعت، انسان چیزهایی تکراری می‌بیند، مثلاً دو تا، سه تا یا چند تا از هر چیز، سرتان را درد نیاورم مصری‌ها اعداد خرده را هم وارد معامله کردند. آن‌ها به همه اطمینان دادند که عدد لازم نیست همیشه صحیح باشد بلکه روی خرده‌ی اعداد هم می‌شود حساب کرد و خودتان می‌دانید که کسر را اختراع کردند.

یک پرتقال برای دو نفر یعنی یک تقسیم بر دو، به هر کدام چقدر می‌رسد؟

یک قسمت از دو قسمت ؛ پس کسر از تقسیم درست شد.

پس هر عدد درسته را هم می‌شود خردش کرد مثل صدتومانی که به پنج تا بیست‌تومانی یا چهار سکه بیست و پنج تومانی خرد می‌شود. این‌طوری همه‌ی اعداد را خرد و حقیر کردند. مثلاً اندازه‌ی محیط مربع نسبت به یک ضلعش چقدر است؟ همه می‌دانید ۴.

$$۴ \ . \ \frac{\text{اندازه‌ی محیط مربع}}{\text{اندازه‌ی ضلع مربع}}$$

یا اندازه‌ی مساحت مربع نسبت به ضلعش چقدر است؟ می‌شود خود ضلع.

$$\text{اندازه‌ی ضلع مربع} \ . \ \frac{\text{اندازه‌ی مساحت مربع}}{\text{اندازه‌ی ضلع مربع}}$$

یک روز یک معلم باهوش چینی برای تنبیه شاگردانش به آن‌ها مسأله‌ای داد که در هیچ کتابی قبل از آن نیامده بود اول کلی توضیح داد تا بچه‌ها را قانع کرد که دایره یک شکل گوگولی و ناز است چرا؟ چون تناسب اندام دارد (مثل خود چینی‌ها!). پس همه‌ی

دایره‌ها باید اندازه‌ی محیط‌شان به قطرشان نسبت ثابتی داشته باشد. چرا مربع داشته باشد و دایره نداشته باشد؟ پس اگر هر دایره‌ای را به همان اندازه که دلمان بخواهد بکشیم و محیط و قطرش را اندازه بگیریم و اندازه‌ی محیط را بر اندازه‌ی قطر تقسیم کنیم یک عدد ثابت می‌شود که بعدها یونانی‌ها این عدد ثابت را پی π نامیدند.

$$\pi = \frac{\text{اندازه‌ی محیط دایره}}{\text{اندازه‌ی قطر دایره}}$$

یعنی دیگر می‌دانیم قطر هر دایره را باید چند برابر کنیم تا محیط آن را به دست آوریم و برعکس اگر محیط دایره را داشته باشیم تقسیم بر چند کنیم تا اندازه‌ی قطرش را بفهمیم که البته معمولاً دومی، سخت‌تر می‌شود. سپس جمشید گفت: آن معلم چینی نمی‌دانست چه کار مهمی کرده است هر چند چینی‌ها همیشه فکر می‌کردند جواب ۳/۵ است. یونانی‌ها هم به دنبال این عدد گشتند اما هیچ کس مثل من شانس نیاورد. ما خیلی این در و آن در زدیم تا این که بالاخره گیر افتاد. من این عدد گم شده‌ی زبان بسته را تنها که گیر آوردم با ترفندهایی شکنجه کردم و از زیر زبانش حرف کشیدم.

ــ می‌شود بهتر توضیح بدهید؟

ــ ترفندهای مرا شما نمی‌فهمید فقط ریاضی‌دان‌ها می‌فهمند اما سعی می‌کنم اهمیت و هیجان داستان را کمی بیش‌تر به شما نشان دهم.

ــ خب حالا توضیح بدهید شما چه کاری انجام داده‌اید؟

ــ بنده ارقام عدد π را آن قدر دقیق حساب کردم که سه قرن بعد از من کسی نتوانست آن را دقیق‌تر کند.

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳$$

ــ ریاضی‌دان‌ها کلاً چه مدت این عدد را شکنجه داده‌اند؟

ــ این‌طور نمی‌شود جواب داد فقط می‌توان گفت هزار سال که روی شاخش است.

ــ به عنوان آخرین حرف یا وصیت چه چیزی برای گفتن دارید؟

ــ می‌خواستم به دیگران بگویم زرنگی هم حدی دارد، اما زیبایی نه، ریاضی گرچه حیله است اما از بس زیباست هیچ کس نمی‌تواند بعد از آن که دچارش شد یا

آلوده‌اش شد، ترکش کند. من هم نمی‌توانم به عنوان حرف آخر از کسانی که بعد از من به این دام می‌افتند می‌خواهم اگر خواستند از این‌گونه اعداد حرف بکشند بدانند چه سؤالاتی باید بپرسند که این طوری نه وقت خودشان را تلف کنند و نه جان و عمر آن بیچاره‌ها را.

من کم‌کم با غیاث‌الدین جمشید خداحافظی می‌کنم و او را با اتهاماتش تنها می‌گذارم بالاخره او احتیاج به تفکر دارد تا برای دفاع در دادگاه خود را آماده کند.

منبع : ماجراهای حسابی

سرگذشت : پیدایش اعداد

نویسنده : امید وهابی املشی

منابع فارسی

هندسه، تألیف، سرژلانگ جین مورو، ترجمه‌ی دکتر محمدعلی رضوانی.

دایرةالمعارف هندسه، تألیف محمدهاشم رستمی.

هندسه، سال دوم ریاضی فیزیک دبیرستان، تألیف احمد بیرشک و محمدطاهر معیری.

هندسه، سال دوم تجربی، تألیف محمود فصیحیان و محمود کرباسی.

هندسه، نظام جدید آموزش متوسطه سال اول، مؤلفان : زهرا گویا و سهیلا غلام‌آزاد.

هندسه، مقدمات ترسیم فنی، مؤلف : احمد متقی‌پور.

ریاضیات ۱ و ۲، نظام جدید آموزش متوسطه سال اول، مؤلف : دکتر اسماعیل بابلیان.

ریاضی، سال دوم راهنمایی، تألیف گروه ریاضی دانشگاه مشهد.

هندسه، رشته‌ی علوم ریاضی مراکز تربیت معلم، مؤلف : صفر باهمّت شیروانه‌ده.

هندسه، سال چهارم ریاضی فیزیک

هندسه، سال سوم علوم تجربی، مؤلفان : محسن حسام‌الدین و محمدهادی شهرستانی.

ریاضیات ۳ و۴، نظری و فنی و حرفه‌ای، مؤلفان : دکتر اسماعیل بابلیان و میرزا جلیلی.

هندسه‌ی تحلیلی، سال چهارم ریاضی فیزیک، مؤلفان : حسین غیور ــ حسین مجذوب‌زنجانی.

هندسه‌ی ۲، نظری، رشته‌ی ریاضی فیزیک سال دوم، مؤلفان : زهرا گویا و سهیلا غلام‌آزاد.

ریاضی سال اول، دوره‌ی راهنمایی، مؤلفان : گروه ریاضی دانشگاه مشهد.

ریاضی سال سوم، دوره‌ی راهنمایی، مؤلفان : گروه ریاضی دانشگاه مشهد.

ریاضیات عالی برای نقشه‌برداری، نویسنده غلامرضا نخعی‌زاده.

جزوه‌ی نقشه‌برداری مسیر، مؤلف : سلطان‌محمود کریمی.
نقشه و نقشه‌برداری، سازمان نقشه‌برداری کشور، مؤلفان : علی اسلامی‌راد و بابک شمعی.
مبانی نقشه‌برداری، نظام جدید متوسطه، فنی و حرفه‌ای، مؤلف : دکتر بهمن مقرب‌نیا.
نقشه‌برداری ۱، فنی و حرفه‌ای (گروه عمران)، مؤلفان : شمس نوبخت و یحیی مهرپویان.
نقشه‌برداری، تألیف مهندس شمس نوبخت.
نقشه‌برداری جدید، جلد ۱ و۲، تألیف دکتر حسن شمسی.
ژئودزی، تألیف مهندس علی نوری.
نقشه‌برداری معدن، سال سوم هنرستان، مؤلف : رحمت‌الله استوار.
ژئودزی ماهواره‌ای، تألیف مهندس علی نخلستانی.
مقدمه‌ای بر نجوم عالی، تألیف عباس ریاضی‌کرمانی.
مبانی حساب و دیفرانسیل و انتگرال، گرانویل، ترجمه‌ی محمود آق اولی.
عکاسی ۱، فنی و حرفه‌ای (گروه هنر) مؤلف : مجتبی آقایی سربرزه.
هیئت، سال پنجم ریاضی، مؤلف : سیدباقر هیوی.
نقشه‌برداری مقدماتی، تألیف دکتر قدرت‌الله تمدنی.
مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه‌ی پرویز شهریاری.
هندسه‌ی دلپذیر، تألیف دکتر احمد شرف‌الدین.
هندسه‌ی مثلث‌ها، ترجمه‌ی ابوالقاسم قربانی.
مجلات نقشه‌برداری، نشریه‌ی علمی و فنی سازمان نقشه‌برداری.
کاتالوگ شرکت‌های لایکا ــ سوکیشا ــ پنتاکس ــ زایس. کرنِ ــ نیکون،تاپ کن.
نقشه‌برداری، سال چهارم هنرستان، بهداشت محیط، مؤلف : بهمن مقرب‌نیا.

منابع خارجی

1 - A text book of Advanced Surveying Jawahar |a| sharma.

2 - A text book of Surveying a levelling R. A GOR 1994.

3 - Surveying volume 1 Dr K.R. ARORA.

4 - Surveying NARINDER SiNGH 1982.

5 - A text book of Surveying J. KAUSHIK 1988.

6 - ELEMENTARY SURVEYING Seventh Edition Russell C. Brinker paul Woif.

7 - Surveying JACK B. evtt.

8 - Site Surveying and Levelling John Clancy.