

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

# هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

دورهٔ پیش‌دانشگاهی

رشتهٔ علوم ریاضی

وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : شورای برنامه‌ریزی درسی متوسطه، دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

نام کتاب : هندسه تحلیلی و جبر خطی - ۲۹۴/۱

مؤلفان : محمدرضا پورنکی، یحیی تابش

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۰۹۲۶۶۸۸۳، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبسایت : [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir)

رسام : مریم دهقان زاده

صفحه‌آرا : معصومه چهره آرا ضیابری

طراح جلد : مریم کیوان

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران - تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

تلفن : ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹-۳۷۵۱۵

چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ پانزدهم ۱۳۹۴

حقوق چاپ محفوظ است.

شابک ۹۶۴-۰۵-۰۹۵۱-۵ ISBN 964-05-0951-5



اساس همهٔ شکست‌ها و پیروزی‌ها از خود آدم شروع می‌شود. انسان اساس پیروزی است و اساس شکست است. باور انسان اساس تمام امور است.

امام خمینی (ره)



## فهرست مطالب

۱	یادداشت
۴	فصل ۱ بردارها
۴	۱.۱ معرفی فضای $IR^3$
۷	بردارها در $IR^3$
۱۰	تعبیر هندسی
۱۱	بردارهای یکّه
۱۳	تمرین
۱۴	۲.۱ ضرب داخلی
۱۶	ویژگی های ضرب داخلی
۲۳	تمرین
۲۵	۳.۱ ضرب خارجی
۲۶	ویژگی های ضرب خارجی
۳۰	مساحت متوازی الاضلاع
۳۱	حجم متوازی السطوح
۳۲	تمرین

۳۵	فصل ۲ معادلات خط و صفحه
۳۵	۱.۲ خط در فضا
۳۷	فاصلهٔ یک نقطه از یک خط
۳۹	وضعیت نسبی دو خط در فضا
۴۱	تمرین
۴۲	۲.۲ صفحه در فضا
۴۳	فاصلهٔ یک نقطه از یک صفحه
۴۵	وضعیت نسبی دو صفحه در فضا
۴۶	وضعیت نسبی یک خط و یک صفحه در فضا
۴۷	تمرین
۵۱	فصل ۳ مقاطع مخروطی
۵۲	۱.۳ دایره
۵۴	تمرین
۵۵	۲.۳ بیضی
۶۴	تمرین
۶۴	۳.۳ سهمی
۷۰	تمرین
۷۰	۴.۳ هذلولی
۷۶	تمرین
۷۶	۵.۳ انتقال محورهای مختصات
۸۲	تمرین
۸۳	۶.۳ دوران محورهای مختصات
۹۱	تمرین
۹۴	فصل ۴ ماتریس و دترمینان
۹۴	۱.۴ ماتریس‌ها
۹۶	جمع ماتریس‌ها و ضرب اعداد حقیقی در آنها

۹۹	ضرب ماتریس ها
۱۰۵	ترانژادهٔ یک ماتریس
۱۰۷	ماتریس ها و تبدیلات هندسی در صفحه
۱۱۰	تمرین
۱۱۳	۲.۴ دترمینان ها
۱۱۷	دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس های $3 \times 3$
۱۱۸	ویژگی های دترمینان ماتریس های $3 \times 3$
۱۲۶	تمرین
۱۳۱	<b>فصل ۵ دستگاه معادلات خطی</b>
۱۳۱	۱.۵ ماتریس های وارونپذیر
۱۳۲	وارونپذیری ماتریس های $2 \times 2$
۱۳۴	وارونپذیری ماتریس های $3 \times 3$
۱۳۶	تمرین
۱۳۸	۲.۵ دستگاه معادلات خطی
۱۴۴	دستور کرامر برای حل دستگاه های سه معادلهٔ سه مجهولی
۱۴۶	روش حذفی گاوس و روش گاوس – جردن برای حل دستگاه های سه معادلهٔ سه مجهولی
۱۴۹	تمرین
۱۵۱	<b>مراجع</b>

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار ( Email )

ارسال نمایند. [talif@talif.sch.ir](mailto:talif@talif.sch.ir)

دفترتالیف کتاب های درسی ابتدایی توسط نظری



## یادداشت

۱. از سپیده دم تاریخ عدد، شمارش و هندسه راهگشای مسائل گوناگون در زندگی بشر بوده اند. با ادامه این روند ریاضیات از یک سو به عنوان ابزار حل مسأله در خدمت عموم قرار گرفت و از سوی دیگر موجب پیدایش ساختارهای منطقی و دستگاه‌های اصولی شد که به عنوان ابزار تربیت فکر، خود به تولید فرآورده‌های جدیدی پرداخت که بعضاً در خدمت عموم قرار گرفت. این فرآیند موجب پیدایش شاخه‌های مختلفی در ریاضیات گردید.

از نظر تاریخی حساب و به دنبال آن جبر از یک سو و هندسه از سوی دیگر، از بررسی مسائل و پدیده‌های مختلفی نشأت می‌گیرند. با این حال حتی از دوران باستان، ایجاد ارتباط میان بینش هندسی و طرز تفکر حسابی جبری، ثمرات چشمگیری برای ریاضیات به ارمغان آورده است. شاید نخستین مورد اسلوب مند از این ارتباط، نسبت دادن یک عدد (طول) به هر پاره خط است که می‌توان آن را سرآغاز هندسه تحلیلی یک بعدی، یا حساب هندسی از دیدگاه دیگر، تلقی کرد. این اقدام به کشف اعداد ناگویا و پیدایش مفهوم عدد حقیقی منجر گردید. به دنبال پایه‌گذاری جبر توسط خوارزمی و موفقیت این شاخه از ریاضیات در حل و رده‌بندی مسائل حساب، کوشش‌های گوناگونی برای استفاده از آن در بررسی مسائل هندسی نیز صورت گرفت که در قرن هفدهم میلادی توسط ریاضیدانان فرانسوی دکارت و فرما به صورتی منسجم در چارچوب هندسه تحلیلی ظاهر گردید. هندسه تحلیلی بستر پیدایش و تکوین بخش عظیمی از ریاضیات جدید است. بالاخص حساب دیفرانسیل و انتگرال در چارچوب هندسه تحلیلی مطرح می‌شود و صورت‌های جدید هندسه مانند هندسه دیفرانسیل و هندسه جبری از هندسه تحلیلی آغاز شده‌اند. نیمی از این کتاب به مباحث هندسه تحلیلی اختصاص دارد. در نیمه دیگر، ماتریس به عنوان یک شیء ریاضی و سپس به عنوان یک تبدیل هندسی مطرح می‌شود که از جبر ماتریسی آغاز کرده و با کاربردهای متنوع ماتریس‌ها ادامه می‌دهیم. چه ماتریس‌ها به عنوان یک ابزار پردازش‌های کامپیوتری در عصر فن‌آوری اطلاعات هم‌چنان از اهمیت زیادی برخوردار است. و بالاخره در این کتاب کوشش بر

این نیز بوده است که حتی المقدور ثمرات ارتباط متقابل جبر و هندسه مورد تأکید قرار گیرد و دانش آموز با شمه‌هایی از تجلی وحدت ریاضیات در مقابل انشعابات اجتناب‌ناپذیر ناشی از رشد و گسترش این دانش آشنا گردد.



۲. نظام جدید آموزش متوسطه و به دنبال آن پیش‌دانشگاهی، نهضت نوسازی و نوگرایی در آموزش و پرورش کشورمان تلقی می‌شود که می‌توان ثمره‌های مثبت زیادی بر آن برشمرد. ولی هر تغییر و تحوّل نیاز به بازنگری و تصحیح مسیر پیموده شده دارد. کتاب هندسه تحلیلی و جبرخطی نیز از این مسیر طبیعی مستثنی نیست. کمیته برنامه‌ریزی دوره پیش‌دانشگاهی، درس هندسه تحلیلی و جبرخطی را با توجه به نظر کارشناسان، سنتهای آموزش کشور، و تجربه سایر کشورها و روند جهانی به‌عنوان یکی از مواد درسی دوره پیش‌دانشگاهی تصویب کرد. سپس کمیته برنامه‌ریزی گروه ریاضی دفتر تألیف کتابهای درسی ابتدایی و متوسطه نظری با توجه به ضرورت پیش‌تاز بودن در آموزش ریاضی و با توجه به این که در برنامه نظام جدید ابتدا قرار بود فقط عده‌ای از دانش‌آموزان (حداکثر دو برابر ظرفیت دانشگاهها) به دوره پیش‌دانشگاهی راه یابند و بقیه جذب دوره‌های کاردانی و آموزشهای کاربردی شوند، برنامه این درس را به گونه‌ای تنظیم و تصویب کرد که تألیف نخستین کتاب براساس آن تدوین شد. ولی با تحوّل برنامه و راه یافتن عموم دانش‌آموزان به دوره پیش‌دانشگاهی عملاً اجرای برنامه تصویب شده دچار مشکلاتی شد که منجر به حذف بخش‌های زیادی از کتاب قبلی گردید. با توجه به این تحولات و با توجه به اظهارنظرهای همکاران دبیر ریاضی در سرتاسر کشور، برنامه جدید با حفظ اصول اولیه و با نگرشی کاربردی تدوین شد و ویرایش جدید کتاب به همه دانش‌آموزان ایرانی تقدیم می‌شود. دانش‌آموزانی که در هزاره میلادی جدید به چالشی جهانی فراخوانده شده‌اند که ...

### حضورى گرهمى خواهى از او غایب مشو حافظ.

ویرایش جدید کتاب هندسه تحلیلی و جبرخطی برای بار اول در سال تحصیلی ۸۱-۱۳۸۰ منتشر شد. پس از آن دبیران محترم شرکت‌کننده در دوره آموزش ضمن خدمت در تابستان ۱۳۸۰ و هم‌چنین بعضی از دبیران محترم از سرتاسر کشور نظر اصلاحی خود را برای مؤلفان ارسال داشتند. مؤلفان با سپاس از همکاری آنان، بعضی از این نظرها را در چاپ جدید سال ۱۳۸۱ مورد توجه قرار داده و در متن کتاب تغییرات لازم را اعمال کرده‌اند. دریافت هرگونه نظر سازنده از سوی دبیران محترم موجب مزید تشکر مؤلفان خواهد بود.

## پیدایش هندسهٔ تحلیلی

در سال ۱۶۳۷ میلادی رنه دکارت ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی با ادغام جبر و هندسه، انقلابی در ریاضیات پدید آورد. دکارت، محل قرار گرفتن یک نقطه را در صفحه (یا فضا) با دو تایی (یا سه تایی) مرتبی از اعداد حقیقی بیان کرد و توانست اشکال هندسی را با معادلات جبری بیان نماید. امروزه این بخش از ریاضیات که توسط دکارت ابداع شد و توسعه یافت به هندسهٔ تحلیلی موسوم است.



دکارت

# بردارها

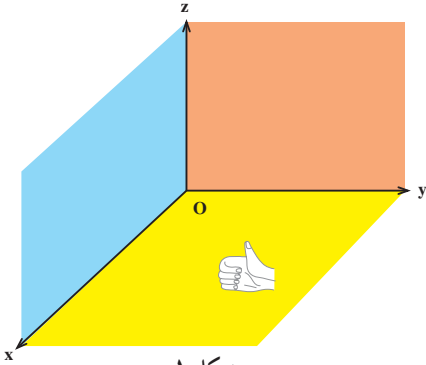
## ۱.۱ معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

قبلاً با فضای  $\mathbb{R}^2$  به عنوان مجموعه تمام زوج‌های مرتب  $(x, y)$  که  $x$  و  $y$  اعداد حقیقی اند آشنا شده‌ایم:  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ . همچنین دیده‌ایم که می‌توان برای نمایش هندسی آن از یک دستگاه مختصات قائم، مرکب از دو خط جهت‌دار متعامد، به نام محورهای مختصات استفاده کرد. اکنون آماده‌ایم که فضای  $\mathbb{R}^3$  را معرفی کنیم.

منظور از فضای  $\mathbb{R}^3$ ، مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب  $(x, y, z)$  است که در آنها  $x$ ،  $y$  و  $z$  اعداد حقیقی اند:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

برای نمایش هندسی  $\mathbb{R}^3$ ، یک دستگاه مختصات قائم، مرکب از سه خط جهت‌دار دوبه‌دو متعامد، به نام محورهای مختصات را معرفی می‌کنیم که در نقطه‌ای مانند  $O$  متقاطع‌اند و  $O$  مبدأ مشترکی است که از آن نقطه، فاصله در امتداد هر سه خط با یک واحد طول سنجیده می‌شود. خطوط  $Ox$ ،  $Oy$  و  $Oz$  به ترتیب محور  $x$ ها، محور  $y$ ها و محور  $z$ ها نامیده می‌شوند و خود نقطه  $O$  مبدأ مختصات نام دارد. این محورها سه صفحه مختصات دو به‌دو متعامد مشخص می‌کنند: صفحه  $xy$  که شامل محور  $x$ ها و  $y$ ها، صفحه  $yz$  که شامل محور  $y$ ها و  $z$ ها و صفحه  $xz$  که شامل محور  $x$ ها و  $z$ ها است. برای مثال در شکل ۱، صفحه  $yz$  صفحه کاغذ است و جهت مثبت (جهت مثبت روی محورها با علامت پیکان مشخص شده است) محور  $x$ ها به خارج صفحه کاغذ و در زاویه قائم با صفحه  $yz$  اشاره دارد. این دستگاه یک دستگاه راست‌گرد نامیده می‌شود، زیرا که با انگشتان

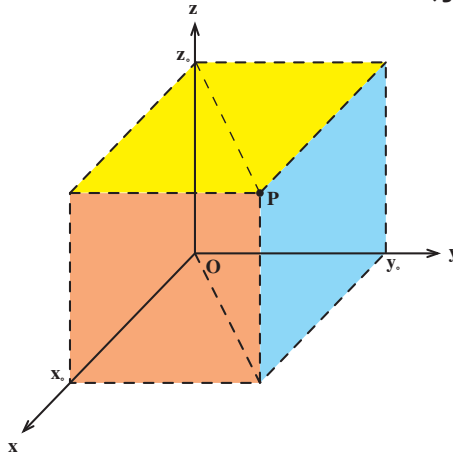


شکل ۱

دست راست جهت‌های مثبت روی محورها، مطابق شکل ۱ مشخص می‌شوند.

با معلوم بودن سه تایی مرتب  $(x_0, y_0, z_0)$  از  $\mathbb{R}^3$ ، نقطه به طول  $x_0$  را بر محور  $x$  ها، نقطه به طول  $y_0$  را بر محور  $y$  ها و نقطه به طول  $z_0$  را بر محور  $z$  ها رسم می‌کنیم. سپس صفحه‌گذرا از  $x_0$  و موازی صفحه  $yz$ ، صفحه‌گذرا از  $y_0$  و موازی صفحه  $xz$

و صفحه‌گذرا از  $z_0$  و موازی با صفحه  $xy$  را می‌کشیم. نقطه منحصربه‌فرد  $P$  که در آن، سه صفحه متقاطع اند (به شکل ۲ نگاه کنید) نقطه به مختصات  $x_0$ ،  $y_0$  و  $z_0$  یا دقیقتر، نقطه به طول  $x_0$ ، عرض  $y_0$  و ارتفاع  $z_0$  نامیده می‌شود.



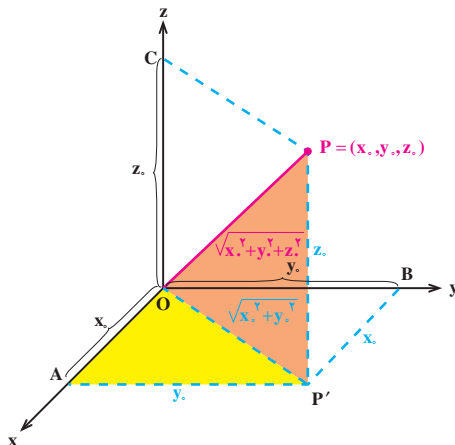
شکل ۲

برعکس اگر صفحات گذرا از نقطه  $P$  در فضا به ترتیب موازی صفحات  $yz$ ،  $xz$  و  $xy$ ، محور  $x$  ها،  $y$  ها و  $z$  ها را در نقاط به طول  $x_0$ ، عرض  $y_0$  و ارتفاع  $z_0$  قطع کند، در این صورت  $P$  سه تایی مرتب  $(x_0, y_0, z_0)$  از  $\mathbb{R}^3$  را مشخص می‌کند و این تناظر بین سه تایی‌های مرتب  $(x, y, z)$  از اعداد حقیقی و نقاط فضا دو سوئی است. واضح است که در این تناظر  $O$  با  $(0, 0, 0)$  متناظر می‌گردد.

توجه می‌کنیم که به خاطر نکاتی که در بالا به آن اشاره کردیم در صحبت از  $\mathbb{R}^3$ ، زبان هندسی آزادانه بکار می‌رود. مثلاً معمولاً به جای «نقطه به طول  $x$ ، عرض  $y$  و ارتفاع  $z$ » می‌گوییم نقطه  $(x, y, z)$ . بالاخص  $P = (x, y, z)$  یعنی نقطه  $(x, y, z)$  است. همچنین  $O = (0, 0, 0)$  را نقطه صفر می‌نامیم.

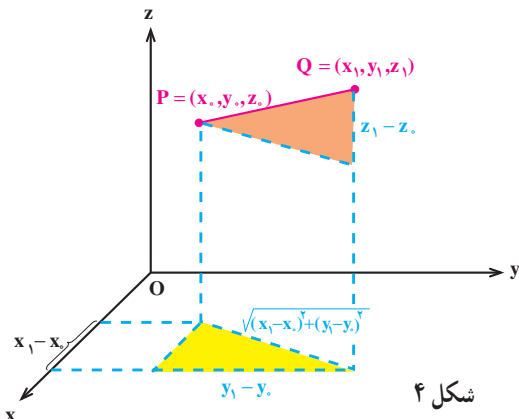
واضح است که دو نقطه  $P = (x_0, y_0, z_0)$  و  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  بر هم منطبق اند اگر و فقط اگر مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند، یعنی  $x_0 = x_1$ ،  $y_0 = y_1$  و  $z_0 = z_1$ . در این حالت می نویسیم  $P = Q$ .

اکنون می خواهیم فاصله بین یک نقطه از  $\mathbb{R}^3$  را از مبدأ مختصات پیدا کنیم. برای این منظور فرض می کنیم نقطه  $P$  مختصات  $(x_0, y_0, z_0)$  باشد و فاصله نقطه  $P$  از مبدأ مختصات، یعنی نقطه  $O = (0, 0, 0)$ ، را با  $|OP|$  نشان می دهیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

در مثلث قائم الزاویه  $OAP'$ ، طول وتر  $OP'$  برابر  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  است و در مثلث قائم الزاویه  $OPP'$  نیز طول وتر  $OP$  برابر  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$  خواهد بود. پس

$$|OP| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \quad (1)$$


شکل ۴

حال، اگر نقطه  $P$  به مختصات  $(x_0, y_0, z_0)$  و نقطه  $Q$  به مختصات  $(x_1, y_1, z_1)$  باشد، آنگاه طول  $PQ$ ، یعنی  $|PQ|$ ، را نیز می توانیم به کمک شکل ۴ به دست بیاوریم. با توجه

به شکل ۴ داریم :

$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad (2)$$

مثال ۱. اگر  $P = (-1, 3, 6)$  و  $Q = (4, 0, 5)$ ، مقادیر  $|PQ|$ ،  $|OP|$  و  $|OQ|$  را در زیر محاسبه کرده‌ایم.

$$|PQ| = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (0 - 3)^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{35},$$

$$|OP| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{46},$$

$$|OQ| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

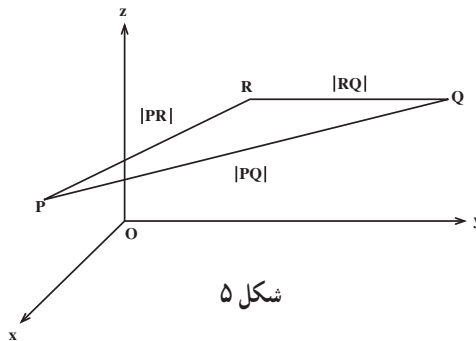
با توجه به حقایق هندسی، سه ویژگی زیر برای طول پاره خط بین دو نقطه  $P$  و  $Q$  از  $\mathbb{R}^3$  برقرار است.

**ویژگی ۱ طول.**  $|PQ| = 0$  اگر و فقط اگر  $P = Q$ ،

**ویژگی ۲ طول.**  $|PQ| = |QP|$ ،

**ویژگی ۳ طول.** به ازای هر نقطه دلخواه  $R$  از  $\mathbb{R}^3$ ،  $|PQ| \leq |PR| + |RQ|$  (نامساوی مثلث).

توجه می‌کنیم که برقراری ویژگی ۳ از آنجا است که در هر «مثلث»، طول هر ضلع کوچکتر از یا مساوی با مجموع طول‌های دو ضلع دیگر است (به شکل ۵ نگاه کنید).

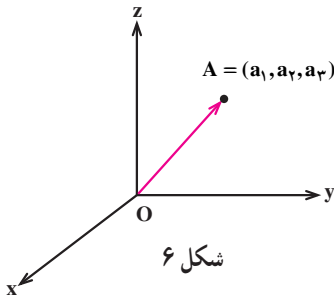


شکل ۵

بردارها در  $\mathbb{R}^3$

فرض کنیم  $A = (a_1, a_2, a_3)$  نقطه‌ای غیر صفر از  $\mathbb{R}^3$  باشد. می‌توانیم به نقطه  $A$  یک پاره خط

۱- در اینجا منظور از «مثلث»، مثلث یا خط راست می‌باشد.



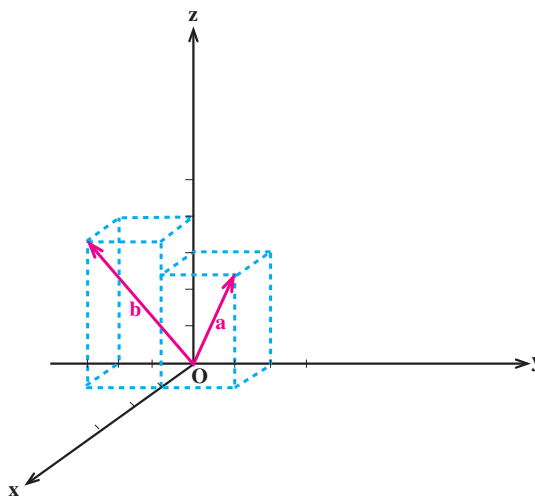
جهت‌دار نسبت دهیم. در واقع این پاره‌خط جهت‌دار را پاره‌خطی با نقطه شروع  $O = (0, 0, 0)$  و نقطه پایان  $A = (a_1, a_2, a_3)$  در نظر می‌گیریم (به شکل ۶ نگاه کنید).

شکل ۶

برعکس اگر یک پاره‌خط جهت‌دار داشته باشیم که نقطه شروع آن  $O = (0, 0, 0)$  باشد، آنگاه نقطه پایان آن، نقطه‌ای غیر صفر مانند  $A = (a_1, a_2, a_3)$  را نمایش خواهد داد. در نتیجه یک تناظر دوسویی بین پاره‌خط‌های جهت‌دار با نقطه شروع  $O = (0, 0, 0)$  و نقاط غیر صفر  $\mathbb{R}^3$  موجود است.

**تعریف.** به هر پاره‌خط جهت‌دار با نقطه شروع  $O = (0, 0, 0)$  یک بردار در  $\mathbb{R}^3$  یا به اختصار یک بردار می‌گوییم. اگر این بردار را با  $a$  نمایش دهیم و نقطه پایان این بردار  $(a_1, a_2, a_3)$  باشد، می‌نویسیم «بردار  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ». در هر بردار  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ،  $a_1$ ،  $a_2$  و  $a_3$  مؤلفه‌های بردار  $a$  نامیده می‌شوند.

مثال ۲. بردارهای  $a = (1, 2, 3)$  و  $b = (1, -2, 4)$  را در شکل ۷ نمایش داده‌ایم.



شکل ۷



بنابر آنچه در بالا به آن اشاره کردیم یک تناظر دوسویی بین بردارهای  $\mathbb{R}^3$  و نقاط غیر صفر  $\mathbb{R}^3$  موجود است. قرارداد می‌کنیم که نقطهٔ صفر  $\mathbb{R}^3$  یعنی  $O = (0, 0, 0)$  را بردار صفر بنامیم. لذا یک تناظر دوسویی بین بردارهای  $\mathbb{R}^3$  و نقاط  $\mathbb{R}^3$  به وجود می‌آید. در این تناظر نقطهٔ  $O = (0, 0, 0)$  با بردار صفر  $o = (0, 0, 0)$  متناظر می‌شود.

بنابر تعریف، دو بردار  $a = (a_1, a_2, a_3)$  و  $b = (b_1, b_2, b_3)$  مساوی‌اند اگر و فقط اگر مؤلفه‌های آنها نظیر به نظیر مساوی باشند، یعنی  $a_1 = b_1$ ،  $a_2 = b_2$  و  $a_3 = b_3$ . در این حالت می‌نویسیم  $a = b$ .

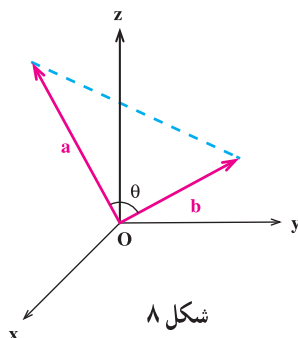
همچنین بنابر (۱) طول یک بردار  $a = (a_1, a_2, a_3)$  که با  $|a|$  نشان داده می‌شود، برابر است

با

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

زاویهٔ بین دو بردار غیر صفر  $a$  و  $b$  را زاویه‌ای مانند  $\theta$  در نظر می‌گیریم که  $0 \leq \theta \leq \pi$  (به شکل

۸ نگاه کنید).



شکل ۸

**تعریف.** فرض کنیم  $a = (a_1, a_2, a_3)$  و  $b = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند. حاصلجمع این

دو بردار را که با  $a + b$  نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

اگر  $r$  یک عدد حقیقی باشد، حاصلضرب  $r$  در  $a$  نیز چنین است

$$ra = (ra_1, ra_2, ra_3).$$

$-a$  را با  $-a$  نشان می‌دهیم و به آن قرینهٔ  $a$  می‌گوییم، یعنی  $-a = (-a_1, -a_2, -a_3)$ .

همچنین تفاضل  $b$  از  $a$  را که با  $a - b$  نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a - b = a + (-b).$$

مثال ۳. برای بردارهای  $a = (1, -3, 2)$  و  $b = (-4, -1, 0)$ ،  $a + b$ ،  $a - b$  و  $-\frac{1}{2}a$  را پیدا می‌کنیم.

$$a + b = (1 + (-4), -3 + (-1), 2 + 0) = (-3, -4, 2),$$

$$a - b = (1 - (-4), -3 - (-1), 2 - 0) = (5, -2, 2),$$

$$-\frac{1}{2}a = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right).$$

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه بردار دلخواه،  $o = (0, 0, 0)$  بردار صفر و  $r$  و  $s$  دو عدد

حقیقی باشند. در این صورت داریم

$$(1) \quad a + b = b + a \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی جمع}),$$

$$(2) \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\text{خاصیت شرکتپذیری جمع}),$$

$$(3) \quad a + o = o + a = a$$

$$(4) \quad a + (-a) = (-a) + a = o$$

$$(5) \quad r(a + b) = ra + rb$$

$$(6) \quad (r + s)a = ra + sa$$

$$(7) \quad (rs)a = r(sa)$$

$$(8) \quad 1a = a$$

$$(9) \quad 0a = o$$

$$(10) \quad r \cdot o = o$$

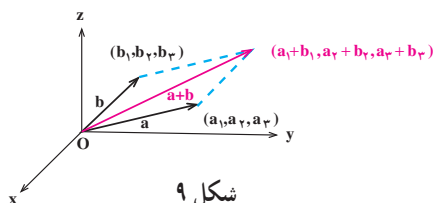
**اثبات.** درستی تمام این ویژگی‌ها به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود که آن را به عنوان تمرین

رها می‌کنیم. ■

### تعبیر هندسی

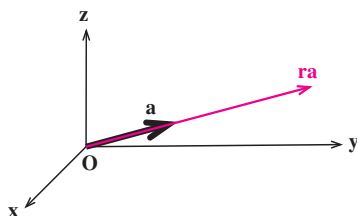
دیدیم که حاصلجمع دو بردار  $a = (a_1, a_2, a_3)$  و  $b = (b_1, b_2, b_3)$  برداری مانند  $a + b$  است

که  $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ . شکل ۹ در زیر تعبیر هندسی از  $a + b$  را نشان می‌دهد.



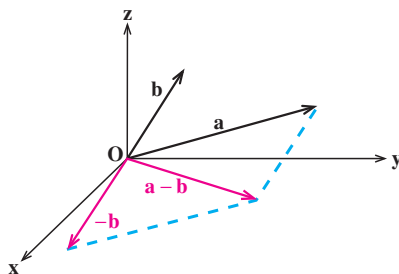
شکل ۹

و در مورد حاصلضرب یک عدد حقیقی  $r$  در بردار  $a = (a_1, a_2, a_3)$  که بردار  $ra = (ra_1, ra_2, ra_3)$  است نیز در حالت  $r > 1$  تعبیر هندسی در شکل ۱۰ دیده می‌شود.



شکل ۱۰

دو بردار غیر صفر  $a$  و  $b$  را هم راستا می‌نامیم اگر یک عدد حقیقی غیر صفر  $r$  موجود باشد که  $b = ra$ . واضح است که  $|b| = |r||a|$ ، که در آن  $|r|$  قدر مطلق عدد حقیقی  $r$  را نمایش می‌دهد و  $|a|$  و  $|b|$  به ترتیب نمایانگر طول بردارهای  $a$  و  $b$  است. در مورد تفاضل  $b$  از  $a$ ، یعنی  $a - b = a + (-b)$ ، و قرینه  $b$ ، یعنی  $-b$ ، شکل ۱۱ تعبیر هندسی موردنظر را ارائه می‌دهد.



شکل ۱۱

## بردارهای یکه

بردار یکه برداری است با طول واحد. در بین بردارهای یکه، سه بردار

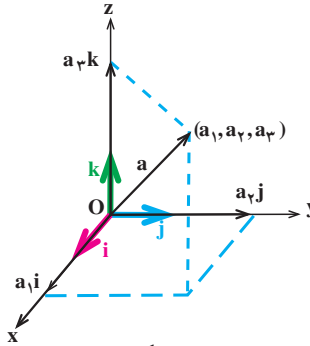
$$i = (1, 0, 0), \quad j = (0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 1)$$

در بیان بردارها از اهمیت و کاربرد ویژه‌ای برخوردار هستند. به سادگی و با استفاده از ویژگی‌های جمع دو بردار و ضرب آنها در یک عدد حقیقی، هر بردار  $a = (a_1, a_2, a_3)$  را می‌توانیم به صورت ترکیب بردارهای  $i$ ،  $j$  و  $k$  بنویسیم

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\
 &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\
 &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\
 &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

پس بردار  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  به صورت  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  قابل نمایش است (به شکل ۱۲

نگاه کنید).



شکل ۱۲

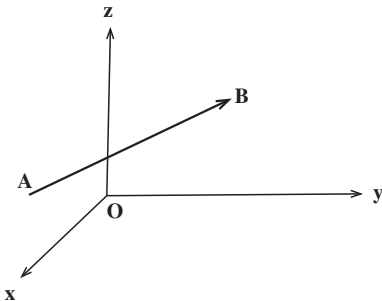
به ازای هر بردار غیر صفر  $\mathbf{a}$ ، بردار جهت  $\mathbf{a}$  برداری با طول واحد است که هم راستا و هم جهت با  $\mathbf{a}$  می باشد. اگر بردار جهت  $\mathbf{a}$  را با  $\mathbf{e}_a$  نمایش دهیم آنگاه

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}.$$

در واقع  $\mathbf{e}_a$  جهت  $\mathbf{a}$  را مستقل از طول آن مشخص می کند و

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}_a.$$

یعنی هر بردار با یک کمیت عددی غیر منفی  $|\mathbf{a}|$  که طول آن است، و یک جهت  $\mathbf{e}_a$  مشخص می شود.



شکل ۱۳

تذکره. هر پاره خط جهت دار در  $\mathbb{R}^3$  نظیر AB

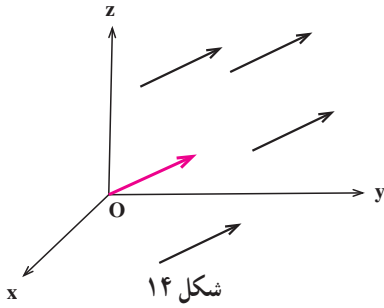
در شکل ۱۳ را یک پیکان می نامیم. اگر A نقطه ابتدای

پیکان و B نقطه انتهای آن باشد، پیکان را با نماد  $\vec{AB}$

نمایش می دهیم. هر پیکان را می توانیم با مختصات نقاط

ابتدایی و انتهایی آن مشخص کنیم.

پیکان های موازی و هم جهت که از لحاظ هندسی



هم طول هستند را با یکدیگر هم‌ارز می‌گیریم، زیرا برای این نوع پیکان‌ها طول و جهت اهمیت دارد. از این‌رو بین پیکان‌های هم‌ارز پیکانی که از مبدأ مختصات شروع می‌شود، یعنی همان بردار را در نظر می‌گیریم. لذا از این پس پیکان و بردار را یکی می‌گیریم و به جای پیکان‌ها، بردارهای متناظر آن را در نظر می‌گیریم (به شکل ۱۴ نگاه کنید). از نظر مختصاتی بردار متناظر با پیکانی که از

$P = (x_0, y_0, z_0)$  شروع می‌شود و به  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  ختم می‌شود، عبارت است از  $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$  و آن را بردار هم‌ارز با  $\vec{PQ}$  می‌نامیم.



۱. نقاطی با مختصات  $(1, 1, 1)$ ،  $(0, 0, -2)$ ،  $(1, -2, 2)$  و  $(-1, -2, -3)$  را در یک دستگاه مختصات قائم نمایش دهید.

۲. رؤوس یک مکعب عبارتند از  $(0, 0, 0)$ ،  $(2, 0, 0)$ ،  $(0, 2, 0)$ ،  $(0, 0, 2)$ ،  $(2, 2, 0)$ ،  $(0, 2, 2)$ ،  $(2, 0, 2)$  و  $(2, 2, 2)$ . این مکعب را در یک دستگاه مختصات قائم نمایش دهید.

۳. قرینه مکعب تمرین ۲ را نسبت به هر یک از صفحات مختصات قائم با مشخص کردن مختصات رؤوس پیدا کنید.

۴. در هر یک از حالات زیر، فاصله  $P$  از  $Q$  را پیدا کنید.

(الف)  $Q = (0, 1, 1)$  ،  $P = (\sqrt{2}, 0, 0)$

(ب)  $Q = (\frac{1}{p}, \frac{\sqrt{2}}{p}, 0)$  ،  $P = (1, 0, -\frac{1}{p})$

۵. محیط مثلث  $ABC$  را با فرض  $A = (-1, 0, 0)$  ،  $B = (2, 0, \sqrt{7})$  و  $C = (3, \sqrt{2}, \sqrt{7})$  پیدا کنید.

۶. مختصات نقطه  $M$  وسط پاره‌خط  $PQ$  را که  $P = (x_0, y_0, z_0)$  و  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  پیدا کنید.

۷. طول میانه  $AM$  از مثلث  $ABC$  را که در تمرین ۵ ذکر شده است به دست آورید.

۸. قضیه ۱ را ثابت کنید.

۹. در هر یک از حالات زیر، بردار هم‌ارز با بیگان  $\vec{PQ}$  را به صورت  $ai + bj + ck$  بنویسید.

(الف)  $Q = (0, 0, 0)$  ،  $P = (3, -4, 1)$

(ب)  $Q = (1, -3, 2)$  ،  $P = (3, -1, 3)$

(ج)  $Q = (2, 1, 1)$  ،  $P = (2, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3})$

۱۰. در هر یک از حالات زیر بردارهای  $a + b$  ،  $a - b$  و  $ra$  را پیدا کنید.

(الف)  $r = 2$  ،  $b = -i + 2j - 3k$  ،  $a = 2i - 5j + 10k$

(ب)  $r = -1$  ،  $b = \frac{1}{4}i - \frac{1}{4}j - 3k$  ،  $a = i + j - 3k$

(ج)  $r = \frac{1}{3}$  ،  $b = j + k$  ،  $a = 2i$

۱۱. در هر یک از حالات زیر طول بردار  $a$  را پیدا کنید.

(الف)  $a = i - j + k$  ، (ب)  $a = -3i + 4j - 12k$

(ج)  $a = \sqrt{2}i - j + k$  ، (د)  $a = 4i - 8j + 8k$

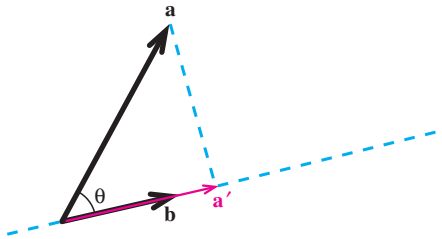
۱۲. به ازای هر یک از بردارهای  $a$  که در تمرین ۱۱ ذکر شده‌اند، بردار  $e_a$  را پیدا کنید.

## ۲.۱ ضرب داخلی

دو بردار غیرصفر  $a$  و  $b$  را که زاویه بین آنها  $\theta$  است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  (به شکل ۱ نگاه کنید). می‌خواهیم تصویر قائم  $a$  را روی امتداد  $b$  پیدا کنیم. این تصویر

قائم را بردار  $a'$  می‌نامیم.



شکل ۱

واضح است که  $a'$  در امتداد  $b$  و هم جهت با آن است، پس  $a' = rb$  و  $r > 0$ . در نتیجه

$|a'| = |rb| = r|b|$  و لذا  $r = \frac{|a'|}{|b|}$ . اما از آنجایی که  $\cos \theta = \frac{|a'|}{|a|}$  پس  $|a'| = |a| \cos \theta$  و در نتیجه

$$r = \frac{|a| \cos \theta}{|b|}$$

و بدین ترتیب به دست می آوریم

$$a' = \frac{|a| \cos \theta}{|b|} b,$$

یا

$$a' = \frac{|a||b| \cos \theta}{|b|^2} b. \quad (1)$$

به عنوان تمرین بررسی کنید که در حالت  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  و حالات خاص  $\theta = 0$ ،  $\theta = \frac{\pi}{2}$  و

$\theta = \pi$  نیز تصویر قائم  $a$  روی امتداد  $b$ ، یعنی  $a'$ ، از فرمول (1) به دست می آید. عدد  $|a||b| \cos \theta$  که در فرمول (1) ظاهر شده است، عددی است وابسته به دو بردار غیر صفر  $a$  و  $b$  و زاویه بین آنها  $\theta$ . در ریاضیات این عدد وابسته به دو بردار غیر صفر بسیار ظاهر می شود و لذا شایسته داشتن نامی است. این عدد وابسته به دو بردار غیر صفر را ضرب داخلی این دو بردار می نامند.

**تعریف.** فرض کنیم  $a$  و  $b$  دو بردار غیر صفر باشند و  $\theta$  زاویه بین آنها. در این صورت ضرب

داخلی  $a$  در  $b$  را  $a \cdot b$  با نماد  $a \cdot b$  نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta.$$

اگر یکی از دو بردار  $a$  یا  $b$  و یا هر دو برابر صفر باشند، آنگاه زاویه بین آنها قابل تعریف نیست.

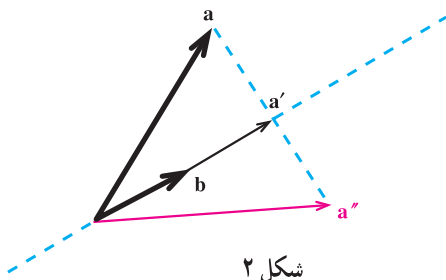
در این حالت قرارداد می کنیم که  $a \cdot b = 0$ .

**تذکره.** ضرب داخلی به دلیل وجود نقطه در  $a \cdot b$  اغلب ضرب نقطه ای نیز نامیده می شود.

همچنین، به خاطر این که حاصل  $a \cdot b$  یک عدد می باشد، به ضرب داخلی، ضرب اسکالر نیز می گویند.

اکنون با توجه به تعریف بالا می توانیم فرمول (1) را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b. \quad (1')$$



شکل ۲

در زیر فرمولی نیز برای محاسبهٔ قرینهٔ یک بردار غیرصفر نسبت به امتداد بردار غیرصفر دیگر پیدا می‌کنیم. برای این منظور گیریم  $a$  و  $b$  دو بردار غیرصفر باشند و  $a''$  را قرینهٔ  $a$  نسبت به امتداد  $b$  فرض می‌کنیم (به شکل ۲ نگاه کنید). توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} a'' &= a + 2(a' - a) \\ &= 2a' - a. \end{aligned}$$

لذا بنابر فرمول (۱') به دست می‌آوریم

$$a'' = b \frac{2a \cdot b}{|b|^2} - a. \quad (2)$$

## ویژگی‌های ضرب داخلی

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم ضرب داخلی را بیان خواهیم کرد.

**ویژگی ۱ ضرب داخلی.** برای هر دو بردار  $a$  و  $b$ ،  $a \cdot b = b \cdot a$ .

برای بررسی درستی ویژگی ۱ ملاحظه می‌کنیم که اگر یکی از بردارهای  $a$  یا  $b$  و یا هر دو بردار صفر باشد، آنگاه  $a \cdot b$  و  $b \cdot a$  هر دو بنابر قرارداد برابر صفر می‌باشند و لذا تساوی برقرار است. پس فرض می‌کنیم  $a$  و  $b$  دو بردار غیرصفر باشند که زاویهٔ بین آنها  $\theta$  است. در این حالت نیز داریم

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta = |b||a|\cos\theta = b \cdot a.$$

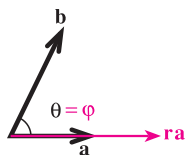
**ویژگی ۲ ضرب داخلی.** برای هر دو بردار  $a$  و  $b$  و هر عدد حقیقی  $r$ ،

$$r \cdot a \cdot b = r(a \cdot b) = a \cdot rb$$

در ویژگی ۲، فقط درستی تساوی اول را بررسی می‌کنیم. درستی تساوی دوم به عنوان تمرین رها می‌شود. اگر یکی از بردارهای  $a$  یا  $b$  و یا هر دو بردار صفر باشد و یا  $r = 0$ ، دو طرف تساوی اول برابر صفر است و لذا تساوی اول برقرار است. پس فرض می‌کنیم  $a$  و  $b$  هر دو بردارهای غیرصفر



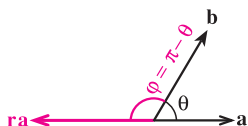
هستند و  $r \neq 0$ . زاویه بین  $a$  و  $b$  را  $\theta$  و زاویه بین  $ra$  و  $b$  را  $\varphi$  می‌گیریم. اکنون با توجه به این که



شکل ۳

$$\varphi = \begin{cases} \theta & : r > 0 \\ \pi - \theta & : r < 0 \end{cases} \quad (\text{به شکل ۳ و ۴ نگاه کنید})$$

داریم



شکل ۴

$$\cos \varphi = \begin{cases} \cos \theta & : r > 0 \\ -\cos \theta & : r < 0 \end{cases} = \frac{r}{|r|} \cos \theta.$$

لذا به دست می‌آوریم

$$ra \cdot b = |ra||b|\cos \varphi = |r||a||b|\frac{r}{|r|}\cos \theta = r(|a||b|\cos \theta) = r(a \cdot b).$$

**ویژگی ۳ ضرب داخلی.** برای هر بردار  $a$ ،  $a \cdot a = |a|^2$ .

اگر  $a$  بردار صفر باشد، طرفین تساوی برابر صفر است و لذا تساوی برقرار است. اگر  $a$  برداری غیرصفر باشد، با توجه به این که زاویه بین  $a$  و خودش برابر صفر است به دست می‌آوریم

$$a \cdot a = |a||a|\cos 0 = |a|^2.$$

با توجه به ویژگی ۳ واضح است که  $a \cdot a \geq 0$ . همچنین  $a \cdot a = 0$  اگر و فقط اگر  $|a|^2 = 0$  اگر و فقط اگر  $|a| = 0$  اگر و فقط اگر  $a = 0$ .

**ویژگی ۴ ضرب داخلی.** برای هر دو بردار غیرصفر  $a$  و  $b$ ،  $a$  بر  $b$  عمود است اگر و فقط اگر

$$a \cdot b = 0.$$

برای بررسی درستی ویژگی ۴، بگیریم  $\theta$  زاویه بین دو بردار غیرصفر  $a$  و  $b$  باشد. در این صورت

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow |a||b|\cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \quad \text{با توجه به غیرصفر بودن بردارهای } a \text{ و } b$$

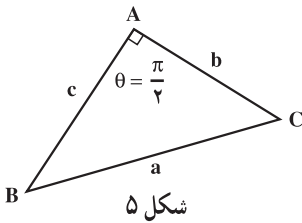
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$a$  و  $b$  بر هم عمود باشند  $\Leftrightarrow$

مثال ۱. توجه می‌کنیم که بردارهای  $i$ ،  $j$  و  $k$  دو به دو بر هم عمودند، لذا بنابر ویژگی ۴ ضرب داخلی  $i \cdot j = j \cdot i = j \cdot k = k \cdot j = k \cdot i = i \cdot k = 0$  همچنین با توجه به این که  $|i| = |j| = |k| = 1$ ، بنابر ویژگی ۳ ضرب داخلی به دست می‌آوریم  $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ .

اکنون فرمولی برای محاسبه  $a \cdot b$  بر حسب مختصات  $a$  و  $b$  بیان می‌کنیم. برای این منظور به قضیه‌ای از هندسه نیازمندیم که ابتدا در زیر به آن اشاره می‌کنیم. به کمک این قضیه که به قضیه کسینوسها معروف است قضیه ۲ را ثابت خواهیم کرد که همان ارائه فرمولی برای محاسبه  $a \cdot b$  بر حسب مختصات  $a$  و  $b$  است.

**قضیه ۱ (قضیه کسینوسها).** مثلث  $ABC$  را در نظر می‌گیریم. بگیریم  $a$ ،  $b$  و  $c$  طول اضلاع این مثلث باشد که به ترتیب روبه‌روی زوایای  $A$ ،  $B$  و  $C$  هستند. اگر  $\theta$  زاویه بین  $AB$  و  $AC$  باشد، آنگاه  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$ .



**اثبات ۱.** ابتدا فرض می‌کنیم  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (به شکل ۵ نگاه کنید). در این صورت  $\cos \theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  و لذا حکم قضیه به صورت  $a^2 = b^2 + c^2$  تبدیل می‌شود که همان قضیه فیثاغورس است و برقرار می‌باشد.

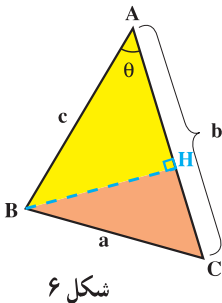
حال فرض می‌کنیم  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  (به شکل ۶ نگاه کنید).

$BH$ ، ارتفاع وارد بر ضلع  $AC$  را رسم می‌کنیم. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $BHC$  داریم

$$a^2 = BH^2 + HC^2. \quad (1)$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویه  $ABH$  داریم

$$c^2 = BH^2 + AH^2. \quad (2)$$



۱- در اثبات این قضیه، برای راحتی طول پاره خط  $X$  را به جای  $|X|$  با  $X$  نمایش داده‌ایم.

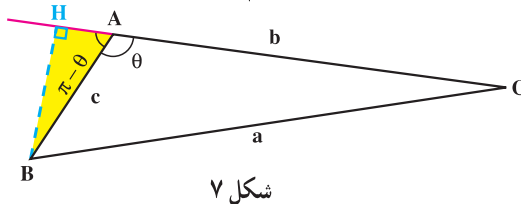
اکنون بنابر رابطه (۱) می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} a^2 &= BH^2 + HC^2 \\ &= BH^2 + (b - AH)^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + b^2 - 2bAH \\ &= c^2 + b^2 - 2bAH. \end{aligned} \quad \text{بنابر رابطه (۲)}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه  $ABH$ ،  $\cos\theta = \frac{AH}{c}$  و لذا  $AH = c \cos\theta$ . در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\theta$$

اکنون آنچه باقی می‌ماند حالت  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  می‌باشد (به شکل ۷ نگاه کنید).



شکل ۷

$BH$ ، ارتفاع وارد بر ضلع  $AC$  را رسم می‌کنیم. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه

$BHC$  داریم

$$a^2 = BH^2 + HC^2. \quad (۳)$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویه  $ABH$  داریم

$$c^2 = BH^2 + AH^2. \quad (۴)$$

اکنون بنابر رابطه (۳) می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} a^2 &= BH^2 + HC^2 \\ &= BH^2 + (b + AH)^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + b^2 + 2bAH \\ &= c^2 + b^2 + 2bAH. \end{aligned} \quad \text{بنابر رابطه (۴)}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه  $ABH$ ،  $\cos(\pi - \theta) = \frac{AH}{c}$  و چون  $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ ، لذا

$AH = -c \cos\theta$ . در نتیجه  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\theta$  که در این حالت نیز

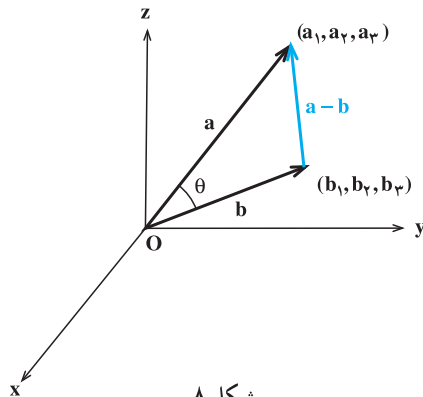
به‌دست می‌دهد. ■

**قضیه ۲.** فرض کنیم  $a = (a_1, a_2, a_3)$  و  $b = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند. در این صورت

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

**اثبات.** اگر یکی از  $a$  یا  $b$  و یا هر دو بردار صفر باشد آنگاه دو طرف تساوی صفر است و لذا تساوی برقرار می‌باشد. پس فرض می‌کنیم  $a$  و  $b$  هر دو بردارهای غیرصفر باشند و  $\theta$  زاویه بین آنها.

اگر  $\theta \neq 0$  و  $\pi$ ، آنگاه بردارهای  $a$ ،  $b$  و  $a-b$  مثلثی تشکیل می‌دهند (به شکل ۸ نگاه کنید).



شکل ۸

در مثلث شکل ۸، با استفاده از قضیه کسینوسها داریم

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

در حالات  $\theta = 0$  یا  $\theta = \pi$ ، از بردارهای  $a$ ،  $b$  و  $a-b$  مثلثی به وجود نمی‌آید، ولیکن در این دو حالت نیز تساوی بالا مجدداً برقرار است (چرا؟). لذا در هر صورت

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b,$$

پس

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2).$$

اکنون با توجه به این که  $a-b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$  به دست می‌آوریم

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \blacksquare$$

مثال ۲. می‌خواهیم تصویر قائم بردار  $a = (1, 2, -2)$  را روی امتداد بردار  $b = (1, 2, 2)$  پیدا کنیم. توجه می‌کنیم که  $a \cdot b = (1)(1) + (2)(2) + (-2)(2) = 1$ . چون  $|b|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$  لذا فرمول (۱') نتیجه می‌دهد که

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{1}{9} (1, 2, 2) = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right).$$

تصویر قائم بردار غیرصفر  $a$  روی امتداد بردار غیرصفر  $b$

مثال ۳. برای بردارهای معرفی شده در مثال قبل، قرینه بردار  $a$  نسبت به امتداد بردار  $b$  به کمک فرمول (۲) به صورت زیر به دست می‌آید

$$a'' = \frac{2a \cdot b}{|b|^2} b - a = \frac{2}{9} (1, 2, 2) - (1, 2, -2) = \left(\frac{-7}{9}, \frac{-14}{9}, \frac{22}{9}\right).$$

قرینه بردار غیرصفر  $a$  نسبت به امتداد بردار غیرصفر  $b$

مثال ۴. نشان می‌دهیم بردارهای  $a = (-4, 5, 7)$  و  $b = (1, -2, 2)$  بر هم عمودند. بنابراین قضیه ۲ داریم

$$a \cdot b = (-4)(1) + (5)(-2) + (7)(2) = 0,$$

و لذا بنابر ویژگی ۴ ضرب داخلی،  $a$  بر  $b$  عمود است.

مثال ۵. می‌خواهیم زاویه بین دو بردار  $a = (2, -1, 2)$  و  $b = (1, -1, 0)$  را پیدا کنیم. بنابراین قضیه ۲ داریم

$$a \cdot b = (2)(1) + (-1)(-1) + (2)(0) = 3.$$

حال گیریم  $\theta$  زاویه بین  $a$  و  $b$  باشد، پس  $a \cdot b = |a||b| \cos \theta$  و یا

$$3 = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (0)^2} \cos \theta.$$

در نتیجه  $3 = 3\sqrt{2} \cos \theta$ ، پس  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و لذا  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**ویژگی ۵ ضرب داخلی.** برای هر سه بردار  $a, b, c$  و  $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$  و  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

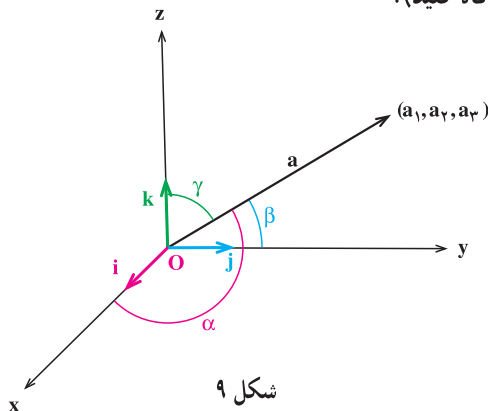
برای بررسی درستی ویژگی ۵ کافی است قرار دهیم  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ،  $b = (b_1, b_2, b_3)$  و

$c = (c_1, c_2, c_3)$  در این صورت  $b + c = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$  و لذا بنابر قضیه ۲ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= a \cdot b + a \cdot c. \end{aligned}$$

درستی تساوی دوم به‌عنوان تمرین رها می‌شود.

به کمک قضیه ۲ می‌توانیم زوایایی که یک بردار غیر صفر با محورهای مختصات می‌سازد پیدا کنیم. گیریم بردار  $a = (a_1, a_2, a_3)$  با محور  $x$  ها، محور  $y$  ها و محور  $z$  ها به ترتیب زوایای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  بسازد (به شکل ۹ نگاه کنید).



شکل ۹

چون  $i = (1, 0, 0)$ ،  $j = (0, 1, 0)$  و  $k = (0, 0, 1)$ ، لذا قضیه ۲ نتیجه می‌دهد که  $a \cdot i = a_1$ ،  $a \cdot j = a_2$  و  $a \cdot k = a_3$  در نتیجه

$$\begin{aligned} a_1 &= a \cdot i = |a||i|\cos\alpha = |a|\cos\alpha, \\ a_2 &= a \cdot j = |a||j|\cos\beta = |a|\cos\beta, \\ a_3 &= a \cdot k = |a||k|\cos\gamma = |a|\cos\gamma. \end{aligned}$$

پس  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  از فرمول‌های زیر قابل محاسبه‌اند

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|a|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|a|}. \quad (3)$$

$\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  را زوایای هادی بردار  $a$  می‌نامند. توجه می‌کنیم که

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_1^2}{|a|^2} + \frac{a_2^2}{|a|^2} + \frac{a_3^2}{|a|^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|a|^2} = \frac{|a|^2}{|a|^2} = 1,$$

و لذا برای کسینوس زوایای هادی بردار  $a$ ، تساوی زیر برقرار است.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

**مثال ۶.** می‌خواهیم کسینوس زوایای هادی بردار  $a = (12, -15, -16)$  را پیدا کنیم. توجه

می‌کنیم که  $|a| = \sqrt{(12)^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = 25$  و لذا بنابر تساوی‌های ظاهر شده در (۳)

$$\cos \alpha = \frac{12}{25}, \quad \cos \beta = \frac{-15}{25} \quad \text{و} \quad \cos \gamma = \frac{-16}{25}.$$

**مثال ۷.** در این مثال به کمک تساوی (۴) نشان می‌دهیم که برداری وجود ندارد که با

محورهای مختصات زوایای  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ،  $\beta = \frac{3\pi}{4}$  و  $\gamma = \frac{\pi}{3}$  بسازد. زیرا اگر چنین برداری موجود

باشد زوایای هادی آن  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  خواهد بود و لذا کسینوس زوایای هادی آن، یعنی

$$\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta = \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \cos \gamma = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

(۴) صدق کنند:  $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ . پس  $\frac{5}{4} = 1$  و این تناقض است.



۱. برای هر یک از بردارهای  $a$  و  $b$  که در زیر آمده است، زاویه بین  $a$  و  $b$  را پیدا کنید.

(الف)  $a = (1, 1, 0)$ ،  $b = (0, -1, -1)$

(ب)  $a = (-4, 2, -5)$ ،  $b = \left(\frac{1}{2}, 6, 2\right)$

(ج)  $a = (1, 0, 0)$ ،  $b = (\sqrt{3}, 1, 0)$

(د)  $a = (0, 0, 1)$ ،  $b = (0, \sqrt{3}, 1)$

۲. نشان دهید بردارهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  که در زیر تعریف شده‌اند دوه‌دو برهم عمودند.

$$a = (2, 1, -1), \quad b = (3, 7, 13), \quad c = (20, -29, 11).$$

۳. برای هر یک از بردارهای  $a$  و  $b$  که در زیر آمده است، تصویر قائم  $a$  را روی امتداد  $b$  و

قرینه  $a$  را نسبت به امتداد  $b$  پیدا کنید.

(الف)  $a = (2, -1, 2)$  ،  $b = (1, 0, 0)$

(ب)  $a = (1, 0, 0)$  ،  $b = (-2, 3, -4)$

(ج)  $a = (1, 1, 0)$  ،  $b = (-1, 2, 4)$

(د)  $a = (2, 3, 1)$  ،  $b = (3, 2, 1)$

۴. فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱، ۲ و ۳ با این خاصیت که

$$a + b + c = 0 \quad \text{مقدار } a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a \text{ را محاسبه کنید.}$$

۵. فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه بردار غیرصفر باشند. اگر  $a \cdot b = a \cdot c$ ، با مثالی نشان دهید که

$$b = c \quad \text{لزومی ندارد.}$$

۶. تصویر قائم بردار  $a = (4, -3, 2)$  را بر امتداد برداری که با قسمت مثبت محورهای مختصات

زوایای حاده مساوی می‌سازد به دست آورید.

۷. فرض کنید  $a = (3, -6, -1)$ ،  $b = (1, 4, -5)$  و  $c = (3, -4, 12)$ . تصویر قائم  $a + b$  را

بر امتداد  $c$  به دست آورید.

۸. فرض کنید  $a = (1, -3, 4)$ ،  $b = (3, -4, 2)$  و  $c = (-1, 1, 4)$ . تصویر قائم  $a$  را بر امتداد

$b + c$  به دست آورید.

۹. الف) فرض کنید  $a$  و  $b$  دو بردار دلخواه باشند. نامساوی  $|a \cdot b| \leq |a||b|$  را ثابت کنید (این

نامساوی به نامساوی کوشی - شوارتس معروف است)،

ب) به کمک الف ثابت کنید برای اعداد حقیقی  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  داریم

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

ج) به کمک ب ثابت کنید برای اعداد حقیقی  $a_1, a_2, a_3$  داریم

$$\left( \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}$$

۱۰. فرض کنید  $a$  و  $b$  دو بردار غیرصفر باشند. ثابت کنید  $a$  بر  $b$  عمود است اگر و فقط اگر

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \quad \text{(با اثبات این تمرین، اثباتی جدید از کدام قضیه معروف هندسه ارائه کرده‌اید؟)}$$



۱۱. فرض کنید  $a$  و  $b$  دو بردار دلخواه باشند. نامساوی مثلث را ثابت کنید:  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (با اثبات این تمرین، اثباتی جدید از کدام قضیه معروف هندسه ارائه کرده‌اید؟).

۱۲. فرض کنید  $a$  و  $b$  دو بردار دلخواه باشند. ثابت کنید  $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$  (تعبیر هندسی رابطه بالا چیست؟).

۱۳. فرض کنید  $a$  و  $b$  دو بردار باشند و  $a + b$  و  $a - b$  غیرصفر باشند. شرطی لازم و کافی برای عمود بودن  $a + b$  بر  $a - b$  را پیدا کنید (کدام مطلب هندسی را از حل این تمرین به دست آورده‌اید؟).

### ۳.۱ ضرب خارجی

در این بخش، برخلاف بخش قبل که به دو بردار یک عدد وابسته کردیم، می‌خواهیم به دو بردار یک بردار وابسته کنیم. این بردار را ضرب خارجی دو بردار مذکور می‌نامند.

**تعریف.** فرض کنیم  $a = (a_1, a_2, a_3)$  و  $b = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند. ضرب خارجی  $a$  در  $b$  را که با نماد  $a \times b$  نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

**مثال ۱.** فرض کنیم  $a = (2, -1, 3)$  و  $b = (-1, -2, 4)$ . در این صورت

$$\begin{aligned} a \times b &= (2, -1, 3) \times (-1, -2, 4) \\ &= ((-1)(4) - (3)(-2), (3)(-1) - (2)(4), (2)(-2) - (-1)(-1)) \\ &= (2, -11, -5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \times a &= (-1, -2, 4) \times (2, -1, 3) \\ &= ((-2)(3) - (4)(-1), (4)(2) - (-1)(3), (-1)(-1) - (-2)(2)) \\ &= (-2, 11, 5). \end{aligned}$$

توجه می‌کنیم که برای دو بردار  $a$  و  $b$  که در این مثال معرفی شده‌اند داریم  $a \times b = -(b \times a)$ . این موضوع تصادفی نمی‌باشد و می‌توان این مطلب را برای هر دو بردار  $a$  و  $b$  در حالت کلی ثابت کرد (به ویژگی ضرب خارجی نگاه کنید).

مثال ۲. بردارهای  $i, j$  و  $k$  را در نظر می‌گیریم. بنا بر تعریف بالا

$$i \times j = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = ((0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0)) = (0, 0, 1) = k.$$

به همین ترتیب به‌عنوان تمرین می‌توانید بررسی کنید  $k \times i = j$  و  $j \times k = i$ .

## ویژگی‌های ضرب خارجی

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم ضرب خارجی را بیان خواهیم کرد.

**ویژگی ۱ ضرب خارجی.** برای هر دو بردار  $a$  و  $b$ ،  $a \times b = -(b \times a)$ .

برای بررسی درستی ویژگی ۱ قرار می‌دهیم  $a = (a_1, a_2, a_3)$  و  $b = (b_1, b_2, b_3)$ . توجه

می‌کنیم که

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} b \times a &= (b_1, b_2, b_3) \times (a_1, a_2, a_3) \\ &= (b_2 a_3 - b_3 a_2, b_3 a_1 - b_1 a_3, b_1 a_2 - b_2 a_1). \end{aligned}$$

لذا به راحتی ملاحظه می‌شود که  $a \times b = -(b \times a)$ .

**ویژگی ۲ ضرب خارجی.** برای هر بردار  $a$ ،  $a \times a = 0$ .

برای بررسی درستی ویژگی ۲ توجه می‌کنیم که بنا بر ویژگی ۱،  $a \times a = -(a \times a)$  و لذا

$$a \times a = 0 \text{ یا } 2(a \times a) = 0$$

**ویژگی ۳ ضرب خارجی.** برای هر دو بردار  $a$  و  $b$  و هر عدد حقیقی  $r$ ،

$$ra \times b = r(a \times b) = a \times rb$$

در ویژگی ۳، فقط درستی تساوی اول را بررسی می‌کنیم. درستی تساوی دوم به‌عنوان تمرین

رها می‌شود. برای این منظور قرار می‌دهیم  $a = (a_1, a_2, a_3)$  و  $b = (b_1, b_2, b_3)$ . در نتیجه

$$\begin{aligned}
ra \times b &= (ra_1, ra_2, ra_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\
&= (ra_2b_3 - ra_3b_2, ra_3b_1 - ra_1b_3, ra_1b_2 - ra_2b_1) \\
&= r(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= r(a \times b).
\end{aligned}$$

**ویژگی ۴ ضرب خارجی.** برای هر سه بردار  $a, b$  و  $c$ ،  $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$  و  $(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ .

در ویژگی ۴ فقط درستی تساوی اول را ثابت می‌کنیم. بررسی درستی تساوی دوم به صورت تمرین رها می‌شود. برای این منظور قرار می‌دهیم  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ،  $b = (b_1, b_2, b_3)$  و  $c = (c_1, c_2, c_3)$  لذا

$$\begin{aligned}
a \times (b+c) &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\
&= (a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3), \\
&\quad a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)) \\
&= ((a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2), (a_3b_1 - a_1b_3) + \\
&\quad (a_3c_1 - a_1c_3), (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1c_2 - a_2c_1)) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) + \\
&\quad (a_2c_3 - a_3c_2, a_3c_1 - a_1c_3, a_1c_2 - a_2c_1) \\
&= a \times b + a \times c.
\end{aligned}$$

**مثال ۳.** به کمک مثال ۲ و ویژگی‌های بالا می‌توانیم بنویسیم

$$i \times (i \times k) = i \times [-(k \times i)] = i \times (-j) = -(i \times j) = -k,$$

و

$$(i \times i) \times k = o \times k = o.$$

در نتیجه  $i \times (i \times k) \neq (i \times i) \times k$  و این مثال نشان می‌دهد که ضرب خارجی خاصیت شرکتپذیری ندارد. یعنی این که در حالت کلی برای سه بردار  $a, b$  و  $c$ ،  $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$  و لذا نوشتن  $a \times b \times c$  بدون درج پرانتز، بی‌معنی است.

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $a$  و  $b$  دو بردار دلخواه باشند. در این صورت

$$a.(a \times b) = 0, \quad b.(a \times b) = 0.$$

**اثبات.** قرار می دهیم  $a = (a_1, a_2, a_3)$  و  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ، در نتیجه

$$a.(a \times b) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$

و

$$b.(a \times b) = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0. \blacksquare$$

**نتیجه.** اگر  $a$  و  $b$  دو بردار غیرصفر باشند طوری که  $a \times b$  نیز غیرصفر گردد، آنگاه  $a \times b$  هم بر  $a$  و هم بر  $b$  عمود است.

**مثال ۴.** می خواهیم برداری پیدا کنیم که بر هر دو بردار  $a = (4, -1, 3)$  و  $b = (2, 3, -1)$  عمود باشد. بنابر نتیجه بالا، بردار مطلوب برابر است با  $a \times b = (-8, 10, 14)$ .

**قضیه ۲.** برای هر دو بردار غیرصفر  $a$  و  $b$  که زاویه بین آنها  $\theta$  است داریم

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta.$$

**اثبات.** به کمک تعریف و با فرض  $a = (a_1, a_2, a_3)$  و  $b = (b_1, b_2, b_3)$  می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} |a \times b|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 \\ &= |a|^2|b|^2 - |a|^2|b|^2 \cos^2\theta \\ &= |a|^2|b|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= |a|^2|b|^2 \sin^2\theta \\ &= (|a||b|\sin\theta)^2. \end{aligned}$$

در نتیجه  $|a \times b|^2 = (|a||b|\sin\theta)^2$  . چون  $0 \leq \theta \leq \pi$  ، لذا  $\sin\theta \geq 0$  . در نتیجه  $|a \times b| = |a||b|\sin\theta$  نامنفی می‌باشند و لذا  $|a \times b| = |a||b|\sin\theta$  . ■

**ویژگی ۵ ضرب خارجی.** برای هر دو بردار غیرصفر  $a$  و  $b$  ،  $a$  با  $b$  موازی است اگر و فقط اگر  $a \times b = 0$

برای بررسی درستی ویژگی ۵، گیریم  $\theta$  زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  باشد. در این صورت

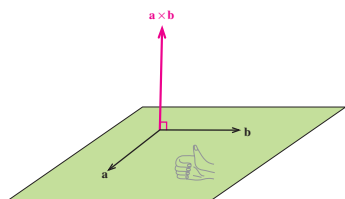
$$a \times b = 0 \Leftrightarrow |a \times b| = 0$$

$$\Leftrightarrow |a||b|\sin\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta = 0 \quad \text{با توجه به غیرصفر بودن بردارهای } a \text{ و } b$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi$$

$$\Leftrightarrow a \text{ و } b \text{ با هم موازی باشند}$$



شکل ۱

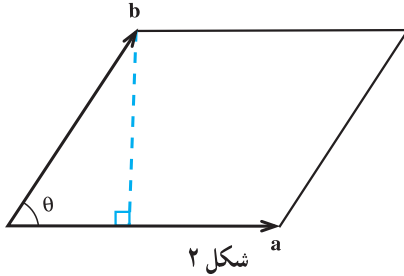
تذکر. قضیه ۲ و نتیجه قبل از آن، یک تعبیر هندسی از ضرب خارجی دو بردار به دست می‌دهد. در واقع اگر  $a$  و  $b$  دو بردار غیرصفر باشند و  $a \times b$  نیز غیرصفر باشد، آنگاه از نظر هندسی،  $a \times b$  برداری عمود بر صفحه گذرا از  $a$  و  $b$  می‌باشد که طول آن  $|a||b|\sin\theta$  است که در آن  $\theta$  زاویه بین  $a$  و  $b$

است. می‌توان ثابت کرد که جهت  $a \times b$  نیز به سمت جهت انگشت شست دست راست است وقتی که انگشتان از طرف  $a$  به  $b$  باشند. بررسی دلیل این موضوع از برنامه درسی این کتاب خارج است (به شکل ۱ نگاه کنید).

در انتهای این بخش نشان می‌دهیم که مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار  $a$  و  $b$  ساخته می‌شود و حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار  $a$ ،  $b$  و  $c$  به وجود می‌آید را می‌توان برحسب ضرب خارجی بردارهای تولیدکننده آن متوازی‌الاضلاع یا متوازی‌السطوح بیان کرد. این موضوع تعبیر هندسی دیگری را از ضرب خارجی به دست می‌دهد.

## مساحت متوازی الاضلاع

گیریم  $a$  و  $b$  دو بردار غیرصفر باشند که زاویه بین آنها  $\theta$  است و فرض می‌کنیم  $\pi \neq \theta \neq 0$ . متوازی‌الاضلاعی که روی این دو بردار بنا می‌شود را در نظر می‌گیریم (به شکل ۲ نگاه کنید).



اندازه ارتفاع متوازی‌الاضلاع واضح است که  $\sin \theta = \frac{\text{اندازه ارتفاع متوازی‌الاضلاع}}{|b|}$  و لذا  $|b| \sin \theta = \text{اندازه ارتفاع متوازی‌الاضلاع}$ . در نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با  $|a||b| \sin \theta = |a \times b|$ .

توجه می‌کنیم که اگر  $\theta = 0$  یا  $\theta = \pi$  و یا این که یکی از دو بردار  $a$  و  $b$  و یا هر دو برابر صفر باشد، آنگاه متوازی‌الاضلاع شکل ۲ به یک خط و یا یک نقطه تبدیل می‌گردد و لذا مساحت متوازی‌الاضلاع در این حالت برابر صفر است. از طرفی در این حالت  $|a \times b|$  نیز صفر خواهد بود و در نتیجه در این حالات نیز مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با  $|a \times b|$ . پس در هر صورت داریم

$$|a \times b| = \text{مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط دو بردار } a \text{ و } b. \quad (1)$$

**نتیجه.** مساحت مثلثی که با دو بردار  $a$  و  $b$  تولید می‌شود برابر است با  $\frac{1}{2}|a \times b|$ .

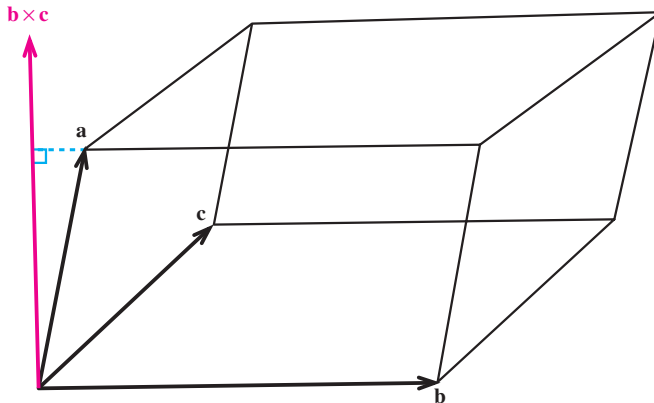
**مثال ۵.** می‌خواهیم مساحت مثلث  $ABC$  به رؤوس  $A = (1, 2, 0)$ ،  $B = (3, 0, -3)$  و  $C = (5, 2, 6)$  را پیدا کنیم. واضح است که مساحت این مثلث با مساحت مثلثی که توسط بردارهای  $a = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2, -2, -3)$  و  $b = \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (4, 0, 6)$  تولید می‌شود برابر است و لذا بنا بر نتیجه بالا،  $\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2}|a \times b|$ . اما بنا بر تعریف ضرب خارجی،

و لذا مساحت مثلث ABC برابر است با  $a \times b = (-12, -24, 8)$

$$\frac{1}{2} |a \times b| = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + (8)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{784} = \frac{28}{2} = 14.$$

## حجم متوازی السطوح

گیریم  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه بردار باشند که در یک صفحه واقع نباشند. متوازی السطوحی که روی این سه بردار بنا می شود را در نظر می گیریم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

واضح است که ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با تصویر قائم بردار  $a$  روی بردار  $b \times c$ ، یعنی  $(b \times c) \cdot \frac{a \cdot (b \times c)}{|b \times c|^2}$ . لذا اندازه این ارتفاع برابر است با

$$\left| \frac{a \cdot (b \times c)}{|b \times c|^2} (b \times c) \right| = \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|b \times c|^2} |b \times c| = \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|b \times c|}$$

متوازی السطوح برابر است با

$$\text{اندازه ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = |b \times c| \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|b \times c|} = |a \cdot (b \times c)|.$$

در حالت خاصی که  $a$ ،  $b$  و  $c$  در یک صفحه قرار بگیرند، متوازی السطوح به یک متوازی الاضلاع یا یک خط و یا یک نقطه تبدیل می شود (چرا؟) و لذا حجم متوازی السطوح در این حالت برابر صفر است. از طرفی در این حالت خاص  $|a \cdot (b \times c)|$  نیز صفر خواهد بود (چرا؟) و در نتیجه در این حالت خاص نیز حجم متوازی السطوح برابر است با  $|a \cdot (b \times c)|$ . توجه می کنیم که در

محاسبه حجم متوازی السطوح می توانستیم هر یک از وجوه را به عنوان قاعده در نظر بگیریم، لذا  
 (۲)  $|a \cdot (b \times c)| = |b \cdot (c \times a)| = |c \cdot (a \times b)|$ . حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار  $a$ ،  $b$  و  $c$  بنا می شود

مثال ۶. می خواهیم حجم متوازی السطوحی را که توسط بردارهای  $a = (1, 1, 0)$ ،  $b = (0, 1, 1)$

و  $c = (1, 0, 1)$  تولید می شود پیدا کنیم. چون  $b \times c = (1, 1, -1)$ ، لذا بنا بر (۲)

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |a \cdot (b \times c)| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = |1 + 1 + 0| = 2.$$

مثال ۷. می خواهیم بررسی کنیم که بردارهای  $a = (2, 3, -1)$ ،  $b = (1, -1, 3)$  و

$c = (1, 9, -11)$  هم صفحه اند یا نه. برای این منظور کافی است  $a \cdot (b \times c)$  را محاسبه کنیم (چرا؟).

چون  $b \times c = (-16, 14, 10)$  پس  $a \cdot (b \times c) = -32 + 42 - 10 = 0$ . یعنی این که حجم

متوازی السطوح تولید شده توسط بردارهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  برابر صفر است که این نشان می دهد

متوازی السطوح تولید شده در این جا یک متوازی الاضلاع یا خط است و لذا  $a$ ،  $b$  و  $c$  در یک

صفحه قرار می گیرند.



۱. برای هر یک از بردارهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  که در زیر آمده است،  $b \times c$  و  $a \cdot (b \times c)$  را محاسبه

کنید.  $|b \times c|$  و  $|a \cdot (b \times c)|$  نمایانگر چه هستند؟

الف)  $a = (1, 1, 0)$ ،  $b = (0, 1, 1)$  و  $c = (-1, -3, 4)$

ب)  $a = (-3, 1, 1)$ ،  $b = (1, 0, -1)$  و  $c = (1, 1, -1)$

۲. برداری عمود بر دو بردار  $a = (1, -3, 2)$  و  $b = (-2, 1, -5)$  پیدا کنید.

۳. فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه بردار غیر صفر باشند. اگر  $a \times b = a \times c$ ، با مثالی نشان دهید که

لزومی ندارد  $b = c$ .

۴. فرض کنید  $a$  و  $b$  بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه  $\frac{\pi}{4}$  می سازند. مساحت

مثلثی را که توسط بردارهای  $a - 2b$  و  $3a + 2b$  تولید می شود پیدا کنید.

۵. بردارهای  $a$  و  $b$  مفروض اند با این خاصیت که  $|a| = 3$ ،  $|b| = 26$  و  $|a \times b| = 72$ . مقدار



a.b را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید a, b و c بردارهایی دلخواه و i, j و k بردارهای یگه باشند. عبارات زیر را ساده کنید.

الف)  $i \times (j+k) - j \times (i+k) + k \times (i+j+k)$

ب)  $(a+b+c) \times c + (a+b+c) \times b + (b-c) \times a$

ج)  $(2a+b) \times (c-a) + (b+c) \times (a+b)$

د)  $2i.(j \times k) + 3j.(i \times k) + 4k.(i \times j)$

۷. فرض کنید a, b و c سه بردار باشند با این خاصیت که  $a+b+c=0$ . ثابت کنید  $a \times b = b \times c = c \times a$ .

۸. فرض کنید a, b, c و d بردارهایی باشند با این خاصیت که  $a \times b = c \times d$  و  $a \times c = b \times d$ . ثابت کنید اگر بردارهای  $a-d$  و  $b-c$  غیر صفر باشند، آنگاه با هم موازیند.

۹. فرض کنید a, b و c بردارهایی باشند با این خاصیت که  $(a \times b) + (b \times c) + (c \times a) = 0$ . ثابت کنید بردارهای a, b و c در یک صفحه قرار می گیرند.

۱۰. فرض کنید a, b و c بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید

$$a \times (b \times c) = (a.c)b - (a.b)c.$$

۱۱. فرض کنید a, b و c بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0.$$

۱۲. فرض کنید p, q, r و s بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید بردارهای  $a = p \times s$  و  $b = q \times s$  و  $c = r \times s$  در یک صفحه قرار می گیرند.

## ابوریحان بیرونی



ابوریحان محمد بن احمد بیرونی  
در سال ۳۶۲ قمری / ۳۵۲ شمسی / ۹۷۳ میلادی در  
بیرون خوارزم متولد شد.  
در سال ۴۴۲ قمری / ۴۲۹ شمسی / ۱۰۵۰ میلادی  
در خوارزم درگذشت.  
ریاضیدان، منجم و دانشمند و یکی از مفاخر بی نظیر  
دنیای علم بود.

ابوریحان بیرونی

کارهای ریاضی او عبارتند از :

۱. تعریف مفاهیم اولیه ریاضی برای دانش آموزان نجوم در کتاب التفهیم
  ۲. بررسی عمیق روی مسأله‌ی تثلیث زاویه
  ۳. محاسبه‌ی تقریبی وتر یک درجه و طول قوس بدون استفاده از قاعده‌ی انتگرال‌گیری
  ۴. محاسبه‌ی مجموع سری  $2^k$ .
  ۵. دستور محاسبه‌ی طول قوس
  ۶. محاسبه‌ی تقریبی ضلع نه‌ضلعی منتظم به وسیله‌ی معادله‌ی درجه‌ی سه
- $$1. 3x. x^3$$

### منابع

۱. بیرونی‌نامه، ابوالقاسم قربانی
۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۷۹
۳. دائرةالمعارف فارسی جلد ۱ صفحه‌ی ۳۰
۴. دانشنامه‌ی جهان اسلام جلد ۵ صفحه‌ی ۱۶۳
۵. زندگی‌نامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی صفحه‌ی ۱۷۶
۶. زندگی‌نامه‌ی علمی دانشوران بنیاد دانشنامه‌ی بزرگ فارسی جلد ۱ صفحه‌ی ۲۷۹
۷. لغت‌نامه‌ی دهخدا تحت نام ابوریحان بیرونی

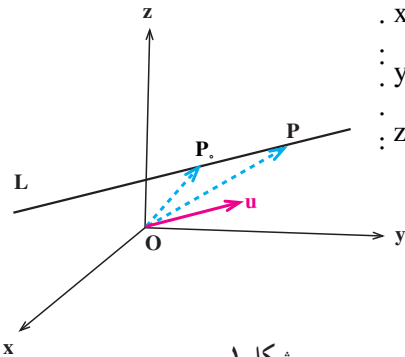
# ۲

## معادلات خط و صفحه

### ۱.۲ خط در فضا

یک خط مانند  $L$  با نقطه معلومی چون  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  روی  $L$  و بردار ناصفر  $u(p, q, r)$  موازی با  $L$  به طور منحصر به فرد مشخص می شود. اکنون می خواهیم معادله خط  $L$  را پیدا کنیم. برای این منظور فرض کنیم  $P(x, y, z)$  نقطه دلخواهی باشد. در این صورت  $P$  روی خط  $L$  است اگر و فقط اگر بردارهای  $u$  و  $\vec{P_0P}$  با هم موازی باشند (به شکل ۱ نگاه کنید) و این معادل است با این که عدد حقیقی  $t$  موجود باشد با این ویژگی که  $\vec{P_0P} = tu$ . اما  $\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  و در نتیجه  $\vec{P_0P} = tu$  معادل است با این که  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(p, q, r)$ . بنابراین نقطه  $P(x, y, z)$  روی خط  $L$  است اگر و فقط اگر عدد حقیقی  $t$  موجود باشد که  $x - x_0 = pt$ ،  $y - y_0 = qt$  و  $z - z_0 = rt$ . در نتیجه معادله خط  $L$  که از نقطه معلومی چون  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  می گذرد و با بردار  $u(p, q, r)$  موازی است عبارت است از:

$$\begin{cases} x - x_0 = pt \\ y - y_0 = qt \\ z - z_0 = rt \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (1)$$



شکل ۱

این شکل از معادلات خط به معادلات پارامتری خط موسوم اند، و در آن  $t$  پارامتر نامیده می‌شود. در واقع به ازای هر  $t$ ، یک نقطه از خط  $L$  به دست می‌آید و برعکس هر نقطه از خط  $L$ ، به ازای  $t$  ای در معادلات (۱) صدق می‌کند و لذا وقتی  $t$  در  $\mathbb{R}$  تغییر می‌کند تمام نقاط خط  $L$  به وجود می‌آید.

مثال ۱. معادلات پارامتری خطی که از نقطه  $P_0 = (2, -4, 1)$  می‌گذرد و موازی با بردار

$$u = \left(3, \frac{1}{4}, -1\right)$$

است با توجه به آنچه در بالا ذکر کردیم به صورت زیر است

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + \frac{1}{4}t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

اکنون می‌خواهیم شکل دیگری از معادله خط را پیدا کنیم. با توجه به معادلات پارامتری خط که از نقطه  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  می‌گذرد و موازی با بردار  $u = (p, q, r)$  است و در (۱) به آن اشاره شد و با فرض این که  $p, q, r$  هر سه مخالف صفر باشند به دست می‌آوریم  $\frac{x - x_0}{p} = t, \frac{y - y_0}{q} = t$

$$\text{و } \frac{z - z_0}{r} = t.$$

لذا از حذف پارامتر  $t$  به معادلات زیر می‌رسیم

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \quad (2)$$

این معادلات را معادلات متقارن خط  $L$  می‌نامیم.

مثال ۲. معادلات متقارن خط  $L$  را که از دو نقطه  $P_1 = (4, -6, 5)$  و  $P_2 = (2, -3, 0)$

می‌گذرد پیدا می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که این خط موازی با بردار  $P_2P_1 = (-2, 3, -5)$  می‌باشد و لذا می‌توانیم فرض کنیم  $u = (-2, 3, -5)$ . اکنون با توجه به این که  $P_1 = (4, -6, 5)$  نقطه‌ای از این خط است، معادلات متقارن خط  $L$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{x - 4}{-2} = \frac{y + 6}{3} = \frac{z - 5}{-5}.$$

تذکر. توجه می‌کنیم که در محاسبه معادلات متقارن یک خط فرض کردیم که  $p$ ،  $q$  و  $r$  هر سه مخالف صفر هستند. اکنون اگر یکی از  $p$ ،  $q$  یا  $r$  صفر باشد، مثلاً  $p = 0$ ، معادلات پارامتری خط به صورت

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + qt, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + rt \end{cases}$$

تبدیل خواهد شد و لذا معادلات متقارن خط در این حالت به صورت زیر است

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

در حالات دیگر نیز در مورد صفر شدن یکی یا دو تا از  $p$ ،  $q$  یا  $r$  از روی معادلات پارامتری می‌توان معادلات متقارن را به دست آورد.

**مثال ۳.** می‌خواهیم معادلات متقارن خطی را که از نقطه  $P_1 = (-2, -2, 1)$  می‌گذرد و موازی با بردار  $u = (0, 2, -3)$  است به دست آوریم. با توجه به آنچه در بالا اشاره کردیم این معادلات به صورت زیر است

$$x = -2, \quad \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 1}{-3}$$

**مثال ۴.** می‌خواهیم معادلات متقارن خطی را که از دو نقطه  $P_1 = (2, 3, -1)$  و  $P_2 = (2, 3, 4)$

می‌گذرد به دست آوریم. برای این منظور توجه می‌کنیم که این خط موازی با بردار  $u = P_2 P_1 = (0, 0, 5)$  می‌باشد و چون از نقطه  $P_1$  نیز می‌گذرد، لذا معادلات متقارن آن به صورت زیر خواهد بود

$$x = 2, \quad y = 3.$$

## فاصله یک نقطه از یک خط

می‌خواهیم فاصله نقطه مفروض  $P$  را که خارج خط  $L$  قرار دارد از آن پیدا کنیم. قضیه زیر برای این منظور کارساز است.

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $L$  خطی باشد که با بردار غیر صفر  $u$  موازی است و  $P$  را نقطه‌ای

می‌گیریم که خارج (یا روی)  $L$  قرار دارد. در این صورت فاصله  $P$  از  $L$ ، یعنی  $D$ ، برابر است با

$$D = \frac{|\mathbf{u} \times \vec{P}_0P|}{|\mathbf{u}|},$$

که در آن  $P_0$  نقطه دلخواهی روی  $L$  است.

**اثبات.** فرض کنیم  $\theta$  زاویه بین بردارهای  $\mathbf{u}$  و  $\vec{P}_0P$  باشد، پس  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

اگر  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه با توجه به شکل ۲ داریم  $\sin \theta = \frac{D}{|\vec{P}_0P|}$  و لذا  $D = |\vec{P}_0P| \sin \theta$ .

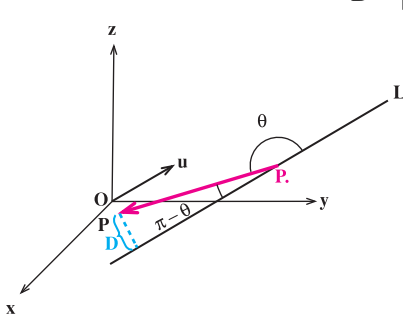
توجه می‌کنیم که اگر  $\theta = 0$  یا  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، مجدداً تساوی اخیر برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  و با توجه به شکل ۳ به دست می‌آوریم  $\sin(\pi - \theta) = \frac{D}{|\vec{P}_0P|}$ .

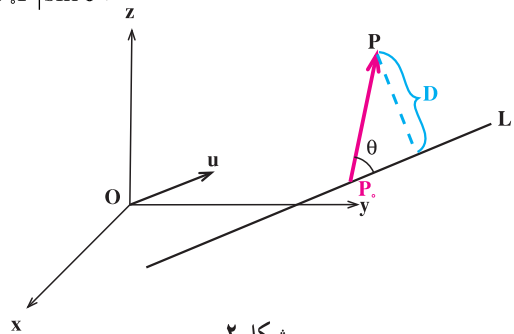
در نتیجه  $D = |\vec{P}_0P| \sin(\pi - \theta)$ . چون  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ ، لذا در این حالت نیز به دست می‌آوریم  $D = |\vec{P}_0P| \sin \theta$ . اگر  $\theta = \pi$ ، نیز تساوی اخیر برقرار است.

پس در هر حال داریم

$$D = |\vec{P}_0P| \sin \theta.$$



شکل ۳



شکل ۲

اما با توجه به این که  $|\mathbf{u} \times \vec{P}_0P| = |\mathbf{u}| |\vec{P}_0P| \sin \theta$ ، به دست می‌آوریم  $|\mathbf{u} \times \vec{P}_0P| = |\mathbf{u}| D$  و لذا

$$\blacksquare. D = \frac{|\mathbf{u} \times \vec{P}_0P|}{|\mathbf{u}|}$$

مثال ۵. می‌خواهیم فاصله نقطه  $P = (5, -6, 2)$  را از خط  $L$  که با معادلات پارامتری زیر داده شده است پیدا کنیم

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

برای این منظور نقطه  $P_0 = (1, -1, 2)$  را روی  $L$  در نظر می‌گیریم. بردار  $u = (0, 4, -3)$  موازی خط  $L$  است و در نتیجه

$$\begin{aligned} D &= \frac{|u \times \vec{P_0 P}|}{|u|} = \frac{|(0, 4, -3) \times (4, -5, 0)|}{|(0, 4, -3)|} = \frac{|(-15, -12, -16)|}{|(0, 4, -3)|} \\ &= \frac{\sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2}}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5. \end{aligned}$$

### وضعیت نسبی دو خط در فضا

به‌طور کلی دو خط متمایز در فضا یکی از سه وضعیت نسبی موازی، متقاطع یا متناظر را دارند. گیریم  $L_1$  و  $L_2$  دو خط متمایز باشند که به ترتیب با بردارهای  $u_1 = (p_1, q_1, r_1)$  و  $u_2 = (p_2, q_2, r_2)$  موازی‌اند.

حالت اول:  $L_1$  و  $L_2$  موازی هستند.

$L_1$  و  $L_2$  موازی‌اند اگر و فقط اگر  $u_2$  و  $u_1$  موازی باشند. یعنی معادلاً  $\lambda \in \mathbb{R}$  موجود باشد که  $u_1 = \lambda u_2$ ، یا  $(p_1, q_1, r_1) = \lambda (p_2, q_2, r_2)$ . پس  $L_1$  و  $L_2$  موازی‌اند اگر و فقط اگر  $p_1 = \lambda p_2$ ،  $q_1 = \lambda q_2$  و  $r_1 = \lambda r_2$ .

مثال ۶. می‌خواهیم وضعیت نسبی دو خط  $L_1$  و  $L_2$  را که با معادلات

$$L_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1} \quad \text{و} \quad L_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$$

با  $u_1 = (-2, 1, 2)$  و  $u_2 = (1, -\frac{1}{2}, -1)$  موازی‌اند و داریم  $-2 = -2(1)$ ،  $1 = -2(-\frac{1}{2})$  و

$-1 = -2(\frac{1}{2})$ ، پس  $L_1$  و  $L_2$  موازی خواهند بود.

حالت دوم:  $L_1$  و  $L_2$  متقاطع هستند.

$L_1$  و  $L_2$  متقاطع اند اگر یک نقطه مشترک داشته باشند که در این صورت این نقطه مشترک منحصر به فرد است (چرا؟).

مثال ۷. نشان می‌دهیم دو خط  $L_1$  و  $L_2$  به معادلات  $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$  و

$L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$  (که موازی نمی‌باشند (چرا؟)) متقاطع اند و نقطه تقاطع آنها را پیدا می‌کنیم.

برای این منظور نقطه‌ای پیدا می‌کنیم که مختصات آن در معادلات هر دو خط صدق کند. معادلات پارامتری خط  $L_1$  به صورت زیر است

$$L_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم به ازای چه  $t$  ای نقطه‌ای از این خط روی خط  $L_2$  قرار دارد. اگر یکی از نقاط خط  $L_1$  روی خط  $L_2$  قرار بگیرد، باید مختصات آن نقطه از  $L_2$  در معادلات  $L_2$  صدق کند.

پس باید معادلات  $\frac{(2+2t)-1}{1} = \frac{-2+t}{-2} = \frac{2-t}{2}$  را حل کنیم. از این معادلات جواب  $t = 0$  به دست

می‌آید (چرا؟). پس  $L_1$  و  $L_2$  متقاطع هستند و به ازای  $t = 0$  نقطه تقاطع  $L_1$  و  $L_2$  یعنی  $P = (2, -2, 2)$  به دست می‌آید.

حالت سوم:  $L_1$  و  $L_2$  متنافر هستند.

اگر  $L_1$  و  $L_2$  نه موازی باشند و نه متقاطع، آنگاه  $L_1$  و  $L_2$  را متنافر می‌نامیم.

مثال ۸. وضعیت نسبی دو خط  $L_1$  و  $L_2$  به معادلات  $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$  و

$L_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  را بررسی می‌کنیم.  $L_1$  موازی بردار  $u_1 = (2, -1, 1)$  و  $L_2$  موازی بردار

$u_2 = (1, 2, 3)$  است. چون  $u_1$  و  $u_2$  موازی نمی‌باشند، پس  $L_1$  و  $L_2$  نیز موازی نمی‌باشند. وجود نقطه مشترک را روی  $L_1$  و  $L_2$  تحقیق می‌کنیم. معادلات پارامتری  $L_2$  به صورت زیر است

$$L_2: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$



این مقادیر را در معادلات  $L_1$  جایگزین می‌کنیم

$$\frac{t \cdot 1}{2} = \frac{2t}{-1} = \frac{3t \cdot 2}{1}$$

این معادلات جواب ندارند زیرا  $\frac{t \cdot 1}{2} = \frac{2t}{-1}$  به ازای  $t = \frac{-1}{5}$  برقرار است و

پس  $L_1$  و  $L_2$  متقاطع نیز نمی‌باشند، یعنی  $L_1$  و  $L_2$  متناظرند. به ازای  $t = \frac{-2}{5}$   $\frac{2t}{-1} = \frac{3t \cdot 2}{1}$



۱. در هر یک از حالات زیر معادلات پارامتری و متقارن خطوطی را که یک نقطه از آنها داده شده است و امتداد آنها نیز موازی بردار مفروض  $u$  است پیدا کنید.

(الف)  $u = (3, -1, 5)$  ،  $(-2, 1, 0)$

(ب)  $u = (11, -13, -15)$  ،  $(-1, 13, 20)$

(ج)  $u = (-1, 1, 0)$  ،  $(7, -1, 2)$

(د)  $u = (1, -1, 0)$  ،  $(-3, 6, 2)$

۲. معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه  $(3, -1, 2)$  و موازی خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = z$$

۳. معادلات پارامتری خط گذرا از نقاط  $(-2, 5, 7)$  و  $(-1, 1, 0)$  را پیدا کنید.

۴. نشان دهید خط گذرا از نقاط  $(0, 0, 5)$  و  $(1, -1, 4)$  عمود بر خط زیر است.

$$\frac{x}{7} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-9}{3}$$

۵.  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید تا نقطه  $(a, b, 1)$  روی خط

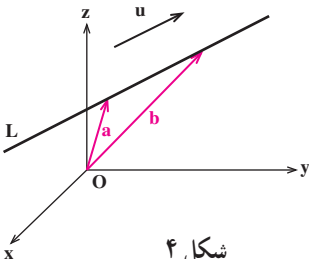
گذرا از نقطه  $(2, 5, 7)$  و  $(0, 3, 2)$  قرار گیرد.

۶.  $u$  را برداری می‌گیریم که موازی خط مفروض  $L$  است.

نشان دهید اگر  $a$  و  $b$  بردارهایی باشند که از مبدأ مختصات شروع

شوند و انتهای آنها روی  $L$  قرار گیرد، آنگاه

$$u \cdot a = u \cdot b$$



شکل ۴

۷. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از خط گذرا از نقطهٔ  $(3, -3, -3)$  و موازی بردار  $(4, -2, -4)$  پیدا کنید.

۸. فاصلهٔ دو خط موازی زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2} \quad \text{و} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}.$$

۹. فاصلهٔ نقطهٔ  $(5, 0, -4)$  را از خط زیر پیدا کنید.

$$x-1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

۱۰. فاصلهٔ نقطهٔ  $(2, 1, 0)$  را از خط زیر پیدا کنید.

$$x = -2, \quad y = 1 = z.$$

۱۱. وضعیت نسبی خطوط ذکر شده در تمرین ۱ را به ترتیب زیر تعیین کنید.

(الف و ب)، (ب و ج)، (ج و د)

## ۲.۲ صفحه در فضا

یک صفحه مانند  $n$  با نقطهٔ معلومی چون  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  در  $n = (a, b, c)$  بردار ناصفر عمود بر  $n$  به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود. اکنون می‌خواهیم معادلهٔ صفحهٔ  $n$  را پیدا کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم  $P = (x, y, z)$  نقطه‌ای دلخواه باشد. در این صورت  $P$  روی صفحهٔ  $n$  است اگر و فقط اگر بردارهای  $n$  و  $P_0P$  بر هم عمود باشند (به شکل ۱ نگاه کنید) و این معادل است با این که ضرب داخلی  $n \cdot P_0P$  برابر صفر باشد. اما  $n \cdot P_0P = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot n$  و در نتیجه

$$n \cdot P_0P = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

بنابراین نقطهٔ  $P = (x, y, z)$  روی صفحهٔ  $n$  است

اگر و فقط اگر

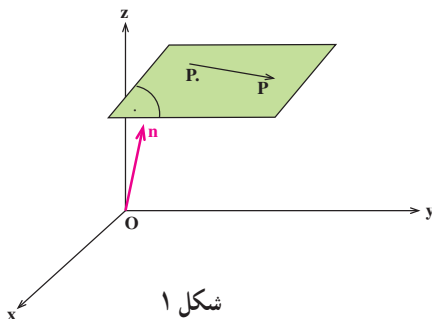
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

در نتیجه معادلهٔ صفحهٔ  $n$  که از نقطهٔ معلومی چون

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  می‌گذرد و بردار ناصفر

$n = (a, b, c)$  عمود است عبارت است از

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$



شکل ۱

اگر معادله بالا را بسط دهیم و به جای  $ax \cdot by \cdot cz$  که عددی ثابت است،  $d$  قرار دهیم می‌توانیم معادله صفحه را به صورت زیر نیز بنویسیم

$$ax \cdot by \cdot cz = d.$$

مثال ۱. معادله صفحه گذرا از نقطه  $P_0 = (-2, 4, 5)$  و عمود بر بردار  $n = (7, 0, -6)$  با توجه به آنچه در بالا گفتیم عبارت است از  $0 = (z - 5)(-6) \cdot (y - 4) \cdot (x - 2) \cdot 7$ ، یا

$$-44 = 7x - 6z.$$

مثال ۲. معادله صفحه گذرا از نقطه  $P_0 = (\frac{1}{4}, 0, 3)$  و عمود بر خط  $L$  با معادلات

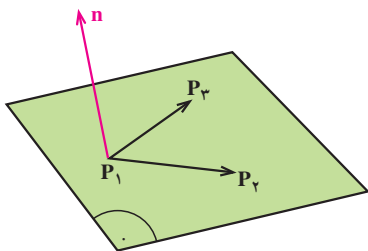
$\frac{x}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{5}$  را پیدا می‌کنیم. توجه می‌کنیم که خط  $L$  با بردار  $(4, -1, 5)$  موازی است و لذا صفحه مطلوب بر بردار  $n = (4, -1, 5)$  عمود خواهد بود. در نتیجه معادله آن عبارت است از

$$0 = 5(z - 3) \cdot (-1)(y - 0) \cdot 4(x - \frac{1}{4}) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = 0$$

یا  $5z = 17$  یا  $4(x - \frac{1}{4}) \cdot (-1)(y - 0) \cdot 5(z - 3) = 0$

مثال ۳. معادله صفحه گذرا از سه نقطه  $P_1 = (1, 0, 2)$ ،  $P_2 = (-1, 3, 4)$  و  $P_3 = (3, 5, 7)$

را پیدا می‌کنیم. توجه می‌کنیم که این صفحه شامل دو بردار  $P_1P_2$  و  $P_1P_3$  است (به شکل ۲ نگاه کنید). لذا برداری که بر این دو بردار عمود باشد بر این صفحه نیز عمود است و می‌تواند نقش  $n$  را بازی کند. اما برداری که بر این دو بردار عمود است را می‌توانیم ضرب خارجی این دو بردار در نظر بگیریم:



شکل ۲

$n = P_1P_2 \times P_1P_3$  چون  $P_1P_2 = (-2, 3, 2)$  و  $P_1P_3 = (2, 5, 5)$  یعنی  $n = (5, 14, -16)$  در نتیجه  $n = (5, 14, -16)$  این که معادله صفحه مطلوب عبارت است از

$$0 = 5(x - 1) \cdot 14(y - 0) - 16(z - 2) = 0$$

$$-27 = 5x \cdot 14y - 16z$$

### فاصله یک نقطه از یک صفحه

می‌خواهیم فاصله نقطه مفروض  $P$  را که خارج صفحه است. قرار دارد از آن پیدا کنیم.

قضیه زیر برای این منظور کارساز است.

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $\Gamma$  صفحه‌ای باشد که بردار  $n$  عمود است و  $P$  را نقطه‌ای می‌گیریم که خارج (یا روی)  $\Gamma$  قرار دارد. در این صورت فاصله  $P$  از  $\Gamma$ ، یعنی  $D$ ، برابر است با

$$D = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{P}_0 P|}{|\vec{n}|},$$

که در آن  $P_0$  نقطه دلخواهی روی  $\Gamma$  است.

**اثبات.** فرض کنیم  $\theta$  زاویه بین بردار  $n$  و بردار  $\vec{P}_0 P$  باشد، پس  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

اگر  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه با توجه به شکل ۳ داریم  $\cos \theta = \frac{D}{|\vec{P}_0 P|}$  و لذا  $D = |\vec{P}_0 P| \cos \theta$ .

توجه می‌کنیم که اگر  $\theta = 0$  یا  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، مجدداً تساوی اخیر برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  و با توجه به شکل ۴ به دست می‌آوریم  $\cos(\pi - \theta) = \frac{D}{|\vec{P}_0 P|}$ .

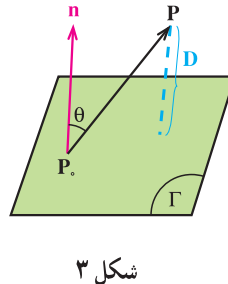
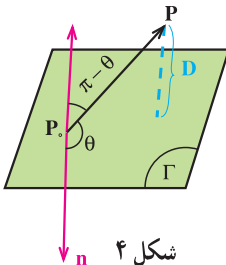
و در نتیجه  $D = |\vec{P}_0 P| \cos(\pi - \theta)$ . چون  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ ، لذا در این حالت به دست

می‌آوریم  $D = |\vec{P}_0 P| (-\cos \theta)$ . اگر  $\theta = \pi$ ، نیز تساوی اخیر برقرار است.

پس برای  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  داریم  $D = |\vec{P}_0 P| \cos \theta$  و برای  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  داریم

$$D = |\vec{P}_0 P| (-\cos \theta)$$

$$D = |\vec{P}_0 P| |\cos \theta|.$$



اما با توجه به این که  $|n \cdot P \cdot P| = |n| |P \cdot P| \cos$  به دست می آوریم  $|n \cdot P \cdot P| = |n|D$  و لذا

$$D = \frac{|n \cdot P \cdot P|}{|n|}$$

مثال ۴. می خواهیم فاصله نقطه  $P = (0, 2, 1)$  را از صفحه  $\cdot$  به معادله

$\sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0$  .  $x \cdot y \cdot \sqrt{2}z$  . به دست آوریم . برای این منظور نقطه  $P_0 = (\sqrt{2}, -2, 0)$  را روی  $\cdot$  در نظر می گیریم . بردار  $n = (1, 1, \sqrt{2})$  بر صفحه  $\cdot$  عمود است و در نتیجه

$$D = \frac{|n \cdot P \cdot P|}{|n|} = \frac{|(1, 1, \sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}, 4, 1)|}{|(1, 1, \sqrt{2})|} = \frac{4}{2} = 2.$$

### وضعیت نسبی دو صفحه در فضا

دو صفحه متمایز  $\cdot_1$  . به معادله  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  و  $\cdot_2$  . به معادله  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  را

در نظر می گیریم . توجه می کنیم که  $\cdot_1$  . بردار  $n_1 = (a_1, b_1, c_1)$  و  $\cdot_2$  . بردار  $n_2 = (a_2, b_2, c_2)$  عمود است .  $\cdot_1$  و  $\cdot_2$  . یا با هم موازی هستند و یا موازی نیستند که در این حالت  $\cdot_1$  و  $\cdot_2$  . را متقاطع می نامیم .

حالت اول:  $\cdot_1$  و  $\cdot_2$  موازی هستند .

دو صفحه  $\cdot_1$  و  $\cdot_2$  موازی اند اگر و فقط اگر  $n_1$  و  $n_2$  موازی باشند . یعنی معادلاً  $\mathbb{R}$  .

موجود باشد که  $n_1 = rn_2$  ، یا  $(a_1, b_1, c_1) = r(a_2, b_2, c_2)$  . پس  $\cdot_1$  و  $\cdot_2$  موازی اند اگر و فقط اگر  $a_1 = ra_2$  ،  $b_1 = rb_2$  ،  $c_1 = rc_2$  .

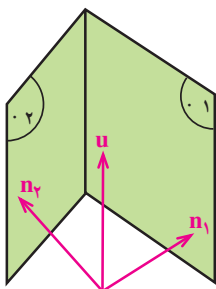
مثال ۵. دو صفحه به معادلات  $3z = 8$  .  $4y$  .  $2x$  و  $1 = 6z$  .  $8y$  .  $4x$  موازی اند .

حالت دوم:  $\cdot_1$  و  $\cdot_2$  متقاطع هستند .

اگر  $\cdot_1$  و  $\cdot_2$  در یک نقطه متقاطع باشند، در این صورت فصل مشترک  $\cdot_1$  و  $\cdot_2$  یک خط

خواهد بود . واضح است که این خط با برداری که بر  $n_1$  و  $n_2$  عمود است موازی می باشد و لذا می توانیم فرض کنیم با ضرب خارجی  $n_2 \cdot n_1 = u$  موازی است . حال با داشتن یک نقطه که روی

این خط باشد، معادله آن به راحتی قابل محاسبه است (به شکل ۵ نگاه کنید).



شکل ۵

مثال ۶. فصل مشترک دو صفحه  $۱$  به معادله  $z = 1 - 2y - 3x$  و  $۲$  به معادله  $۴y - 6z = 2 - 5x$  را به دست می آوریم. این فصل مشترک خطی است که با بردار  $n_1 = (3, -2, 1)$  و  $n_2 = (5, 4, -6)$  در نتیجه  $u = (8, 23, 22)$  حال کافی است نقطه ای روی این خط پیدا کنیم. چون نقطه  $(-1, -1, 0)$  روی هر دو صفحه قرار دارد، پس روی خط فصل مشترک است و لذا معادلات خط فصل مشترک دو صفحه به صورت

$$\frac{x}{8} = \frac{y + 1}{23} = \frac{z}{22} \text{ می باشد.}$$

### وضعیت نسبی یک خط و یک صفحه در فضا

$$x = x_0 + pt$$

خط  $L$  به معادلات  $\mathbb{R}$  ،  $t$  ،  $y = y_0 + qt$  و صفحه  $ax + by + cz = d$  را

$$z = z_0 + rt$$

در نظر می گیریم. توجه می کنیم که  $L$  با بردار  $(p, q, r)$  موازی است و  $(a, b, c)$  عمود  $L$  و  $(a, b, c)$  موازی هستند که معادلاً در این حالت بردار عمود بر صفحه بر خط  $L$  نیز باید عمود باشد و این معادل است با این که  $(a, b, c) \cdot (p, q, r) = 0$  یا  $ap + bq + cr = 0$ ؛ و یا با هم موازی نیستند که در این صورت متقاطع اند.

مثال ۷. وضعیت نسبی خط  $L$  به معادلات  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$  و صفحه  $x - y - z = 2$  به معادله

$2x - y - z = 2$  را تعیین می کنیم. خط  $L$  با بردار  $(1, 2, -1)$  موازی است و صفحه  $2x - y - z = 2$  عمود  $(2, 1, -1)$  چون  $(2, 1, -1) \cdot (1, 2, -1) = 5 \neq 0$ ، لذا  $L$  و  $2x - y - z = 2$  موازی نمی باشند. اکنون نقطه

تقاطع  $L$  و  $\cdot$  را پیدا می‌کنیم. معادلات پارامتری خط  $L$  به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= -t \end{aligned}$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم به ازای چه  $t$  ای نقطه‌ای از این خط روی صفحه قرار می‌گیرد. برای این منظور باید معادله  $t = 2 - 2t$  را حل کنیم. اما این معادله به صورت  $5t = 0$  ساده می‌شود که تنها جواب آن  $t = 0$  است. یعنی به ازای  $t = 0$ ، نقطه  $(1, 0, 0)$  از صفحه روی خط  $L$  واقع می‌شود و این یعنی  $L$  و  $\cdot$  متقاطع‌اند.



۱. در هر یک از حالات زیر معادله صفحه گذرا از نقطه  $P_0$  و عمود بر بردار  $n$  را پیدا کنید.

الف)  $P_0 = (-1, 2, 4)$ ،  $n = (-4, 15, -\frac{1}{4})$

ب)  $P_0 = (2, 0, -2)$ ،  $n = (2, 3, -4)$

ج)  $P_0 = (9, 17, -17)$ ،  $n = (2, 0, -3)$

د)  $P_0 = (2, 3, -5)$ ،  $n = (0, 1, 0)$

۲. معادله صفحه گذرا از سه نقطه  $(2, -1, 4)$ ،  $(5, 3, 5)$  و  $(2, 4, 3)$  را پیدا کنید.

۳. معادله صفحه گذرا از نقطه  $(1, -1, 2)$  و خط  $\frac{z-5}{4} = \frac{y-1}{2} = x$  را پیدا کنید.

۴. معادله صفحه گذرا از دو خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{4}, \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{4}$$

۵. معادله فصل مشترک صفحه‌های  $x-z=1$  و  $4z=2-2x-3y$  را پیدا کنید.

۶. معادله صفحه گذرا از نقطه  $(-9, 12, 14)$  و عمود بر دو صفحه تمرین ۵ را پیدا کنید.

۷. فاصله نقطه  $(3, -1, 4)$  را از صفحه  $2z=5-y-2x$  پیدا کنید.

۸. فاصله مبدأ مختصات را از صفحه  $ax \cdot by \cdot cz = d$  پیدا کنید.

۹. آیا چهار نقطه  $(2, 3, 2)$ ،  $(1, -1, -3)$ ،  $(1, 0, -1)$  و  $(5, 9, 5)$  همگی روی یک صفحه

قرار دارند؟

۱۰. خط  $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-5}{7}$  و صفحه  $z=0$  و  $2(y-3) - z=0$  و  $2(x-1)$  : مفروض

است. دو نقطه روی  $L$  به فاصله ۳ از  $\cdot$  پیدا کنید.

۱۱. کدامیک از صفحه‌های زیر بر هم منطبق‌اند، یا با هم موازی‌اند، یا بر هم عمودند.

(الف)  $2y - 3z = 2$  ،  $x$  ،

(ب)  $15x - 9y - z = 2$  ،

(ج)  $4 = 0$  ،  $6z$  ،  $-2x - 4y$  ،

(د)  $0 = 1 - \frac{1}{3}z - 3y - 5x$  .

۱۲. در هر یک از موارد زیر وضعیت نسبی خط و صفحه داده شده را بررسی کنید.

(الف)  $8 = \frac{x-3}{8} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-3}{-1}$  ،  $5z = 12$  ،  $x - 3y$  ،

(ب)  $2 = \frac{x}{8} = \frac{y-1}{23} = \frac{z-1}{22}$  ،  $4y - 6z = 2$  ،  $5x$  ،

(ج)  $5 = \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{7}$  ،  $2z = 5$  ،  $x - 2y$  .

۱۳. معادله صفحه گذرا از نقطه  $(-1, 2, 3)$  را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

(الف) با صفحه  $xy$  موازی باشد،

(ب) بر محور  $x$ ها عمود باشد،

(ج) بر محور  $z$ ها عمود باشد.

۱۴. معادله صفحه گذرا از نقطه  $(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  و عمود بر خط زیر را پیدا کنید.

$x = 2t$  ،  $3$  .

$y = 6t$  ،  $6$  ،  $t \in \mathbb{R}$  .

$z = 9t$

۱۵. معادله خط گذرا از نقطه  $(2, -1, 0)$  و عمود بر صفحه  $5 = 4z - 3y - 2x$  را پیدا کنید.

۱۶. خط  $L$  با معادلات  $3 = \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = -z$  و صفحه  $1 = 4z - 2y - 3x$  با معادله

مفروض است.



الف) نقطه  $P$ ، نقطه تقاطع  $L$  و  $\cdot$  را پیدا کنید،  
 ب) معادله صفحه عمود بر  $L$  در نقطه  $P$  را پیدا کنید،  
 ج) معادله خط گذرا از  $P$  و عمود بر  $\cdot$  را نیز پیدا کنید.  
 ۱۷. معادله صفحه عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه  $(3, 1, 0)$  و  $(5, -1, 3)$  را پیدا کنید.

۱۸. نقاط فصل مشترک دو به دوی هر دسته از صفحه‌های زیر را پیدا کنید. آیا هر دسته از صفحه‌های زیر یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؟

الف)  $x \cdot z = 3$ ،  $y \cdot z = 2$ ،  $x \cdot y = 1$ ،

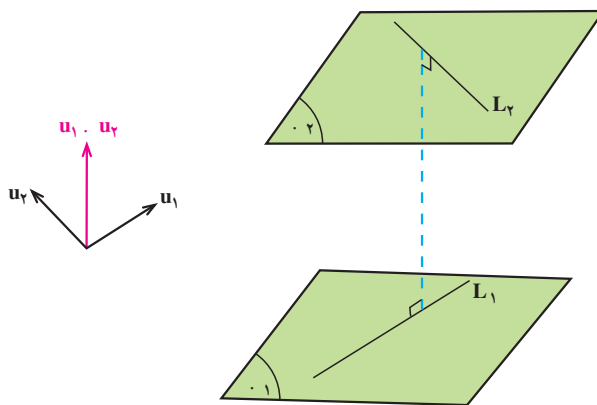
ب)  $x - y - z = 0$ ،  $-x \cdot 2y - z = 3$ ،  $x \cdot y - z = 2$

۱۹. برای دو خط متناظر  $L_1$  با معادلات  $\frac{x \cdot 1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z \cdot 2}{1}$  و  $L_2$  با معادلات  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

کوتاهترین فاصله بین دو خط (طول عمود مشترک) را پیدا کنید.

(راهنمایی: طول مورد نظر، طول پاره خطی است که محصور بین دو خط داده شده است و بر

هر دو عمود است (به شکل ۶ نگاه کنید). راستای این عمود مشترک در راستای  $u_1 \cdot u_2$  قرار دارد که  $u_1$  و  $u_2$  به ترتیب دو بردار موازی با  $L_1$  و  $L_2$  هستند. حال صفحه‌های ۱ و ۲ که راستای عمود بر هر دوی آنها  $u_1 \cdot u_2$  است را در نظر می‌گیریم. فاصله این دو صفحه، فاصله مطلوب است.)



شکل ۶

## خواجه نصیرالدین طوسی



خواجه نصیر طوسی

ابوجعفر محمد بن حسن معروف به  
خواجه نصیر طوسی

در سال ۵۹۷ قمری / ۵۷۹ شمسی /  
۱۱۹۰ میلادی در طوس متولد شد.

در سال ۶۷۲ قمری / ۶۵۲ شمسی /  
۱۲۷۳ میلادی در کاظمین درگذشت.

منجم، سیاستمدار و ریاضیدان  
کارهای ریاضی او عبارتند از:

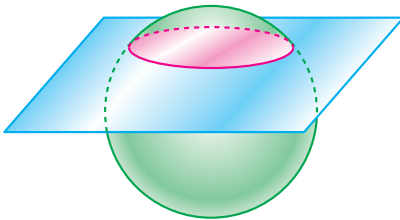
۱. نگارش کتاب کشف القناع در اسرار شکل القناع درباره‌ی مثلثات مسطح و کروی و تعیین شکل قطاع کروی و مقاطع مخروطی
۲. نگارش کتاب جامع الحساب درباره‌ی نظریه‌ی اعداد و تلفیق حساب و هندسه

### منابع

۱. تاریخ علم جرج سارتن، جلد ۱ صفحات ۴۱۷ تا ۴۲۵
۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۸۲
۳. زندگینامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی، صفحه‌ی ۴۸۶
۴. زندگینامه‌ی علمی دانشوران جلد ۳ صفحات ۵۰۸ تا ۵۱۴
۵. لغت‌نامه‌ی دهخدا تحت نام نصیرالدین طوسی

# ۳

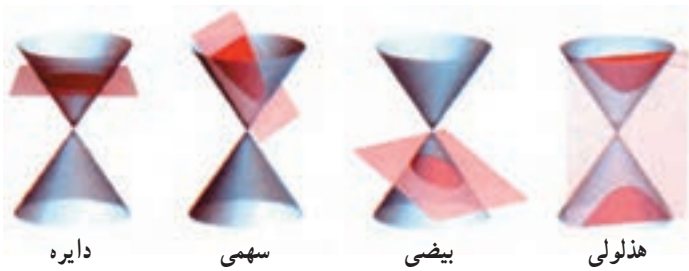
## مقاطع مخروطی



شکل ۱

اگر یک رویهٔ کره مانند یک توپ را با یک صفحه قطع کنیم، در محل تقاطع صفحه و کره چه شکلی حاصل می‌شود؟ بله درست است. به هر ترتیب که این کار را انجام دهیم، یک دایره به دست می‌آید که اندازه‌های آن متفاوت است و اگر این دایره از مرکز کره بگذرد، بزرگترین دایرهٔ ممکن حاصل می‌شود (به شکل ۱ نگاه کنید). حال یک

رویهٔ مخروطی را در نظر می‌گیریم. اگر این رویه را با یک صفحه قطع کنیم، فصل مشترک صفحه و رویه چه شکلی دارد؟ در اینجا دیگر همواره یک شکل نخواهیم داشت و بسته به وضعیت صفحه نسبت به مخروط چند شکل متفاوت حاصل می‌شود (به شکل‌های زیر نگاه کنید).



دایره

سهمی

بیضی

هذلولی



نقطه

خط

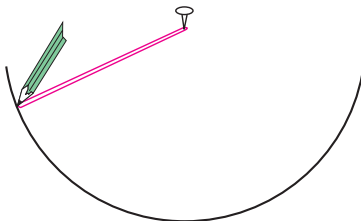
دو خط متقاطع

شکل ۲

برای مشاهده این شکل‌ها یک برگ کاغذ را به صورت یک مخروط درآوردید و با یک قیچی با ایجاد برشهای مختلف در آن (به صورت فصل مشترک یک صفحه با مخروط) این مقاطع را که به مقاطع مخروطی معروفند به دست آورید. در این فصل می‌خواهیم با این مقاطع مخروطی آشنا شویم و ویژگی‌های آنها را مشخص کنیم.

### ۱.۳ دایره

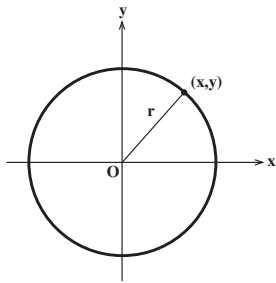
**تعریف.** دایره مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت  $O$  در آن صفحه به نام مرکز مقدار مثبت ثابتی باشد.



شکل ۱

برای رسم یک دایره کافی است یک مداد را به یک تکه نخ ببندیم. اکنون با ثابت نگاهداشتن یک سر نخ می‌توانیم دایره را رسم کنیم. طول نخ همان مقدار ثابتی است که در تعریف آمده است و شعاع دایره نامیده می‌شود.

حال یک دستگاه مختصات قائم را در نظر می‌گیریم. نقطه  $(x, y)$  روی دایره‌ای به شعاع  $r$  و به مرکز مبدأ مختصات است اگر و فقط اگر فاصله آن نقطه از مرکز دایره برابر  $r$  باشد. پس نقطه  $(x, y)$  روی دایره مذکور است اگر و فقط اگر



شکل ۲

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r,$$

اگر و فقط اگر

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

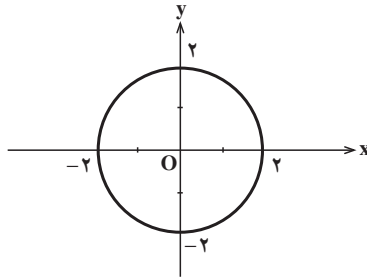
در نتیجه می‌توانیم بگوییم

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

معادله دایره‌ای به شعاع  $r$  و به مرکز مبدأ مختصات است.

مثال ۱. معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ می‌باشد. این دایره

را در زیر رسم کرده‌ایم.



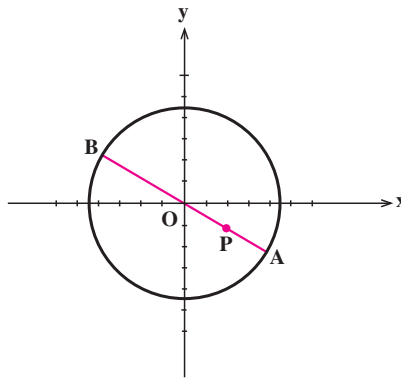
شکل ۳

مثال ۲. دایره به معادله  $x^2 + y^2 = 20$  را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بررسی کنیم نقطه

$P = (2, -1)$  داخل دایره است یا خارج آن. توجه می‌کنیم که  $5 < 20 = (-1)^2 + (2)^2$ . در نتیجه

نقطه  $P$  داخل دایره قرار دارد (چرا؟). اکنون کمترین و بیشترین فاصله  $P$  را از نقاط دایره پیدا می‌کنیم. واضح است نقاطی از دایره که کمترین و بیشترین فاصله را از نقطه  $P$  دارند از برخورد قطر

گذرا از  $P$  با دایره به دست می‌آیند (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

معادله قطر گذرا از  $P$ ،  $y = \frac{-1}{2}x$  می‌باشد. اکنون برای به دست آوردن مختصات نقاط  $A$  و  $B$

کافی است دستگاه معادلات صفحه بعد را حل کنیم

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = \frac{-1}{2}x \end{cases}$$

در نتیجه مختصات A و B به صورت  $A = (4, -2)$  و  $B = (-4, 2)$  به دست می‌آیند. لذا

$$|PA| = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5},$$

$$|PB| = \sqrt{(-4-2)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{5},$$

به ترتیب کمترین و بیشترین فاصله P از نقاط دایره است.

مثال ۳. می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند  $P = (x, y)$  را پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه  $A = (2, 4)$ ، برابر فاصله آنها از نقطه  $B = (1, 2)$  باشد. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$|AP| = \sqrt{2}|BP|,$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2},$$

اگر و فقط اگر

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 2[(x-1)^2 + (y-2)^2],$$

اگر و فقط اگر

$$x^2 + y^2 = 100.$$

پس مکان مطلوب دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع  $\sqrt{100}$  است.



۱. نمودار هر یک از دایره‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $x^2 + y^2 = 9$ ,

ب)  $x^2 + y^2 = 25$ ,

ج)  $x^2 + y^2 = 100$

د)  $x^2 + y^2 = 50$

۲. معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که از نقطه  $(-1, 2)$  بگذرد.

۳. معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که بر خط  $4x + 3y = 10$  مماس باشد.

۴. معادله خطی را بنویسید که در نقطه  $(3, 4)$  بر دایره  $x^2 + y^2 = 25$  مماس باشد.

۵. از نقطه  $(3, 0)$  دو مماس بر دایره  $x^2 + y^2 = 3$  رسم می‌کنیم تا بر دایره در نقاط A و B

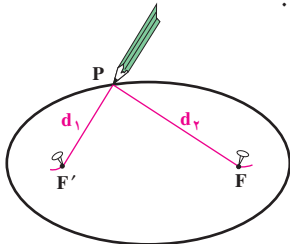
مماس شوند. مختصات A و B را پیدا کنید.

### ۲.۳ بیضی

یکی دیگر از مقاطع مخروطی بیضی است که در این بخش به بررسی آن می‌پردازیم.

**تعریف.** بیضی مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه

ثابت و متمایز  $F'$  و  $F$  در آن صفحه به نام کانون مقدار مثبت ثابتی باشد.



برای رسم بیضی یک تکه نخ به طول مقدار ثابت مورد نظر،

در نظر گرفته و دو سر آن را در محل دو کانون ثابت می‌کنیم. حال

یک مداد را داخل این نخ کرده و با گرداندن مداد داخل نخ،

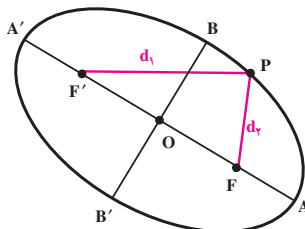
بیضی مورد نظر را رسم می‌کنیم.

$d_1 + d_2$  همیشه مقدار ثابت طول نخ است.

شکل ۱

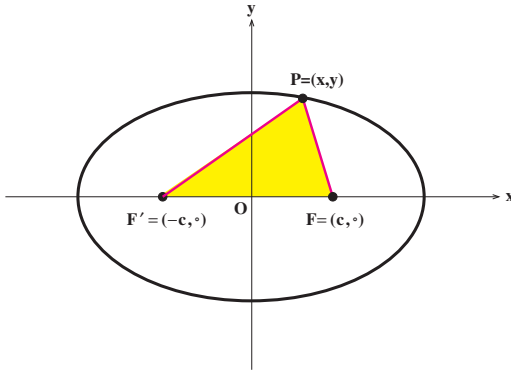
$AA'$  قطر بزرگ و  $BB'$  قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود.  $F$  و  $F'$  کانونهای بیضی

هستند و نقطه  $O$  وسط  $FF'$  را مرکز بیضی می‌نامیم.



$d_1 + d_2 = \text{ثابت}$

شکل ۲



شکل ۳

حال می‌خواهیم با استفاده از تعریف، معادله بیضی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا کنیم. مرکز بیضی را در مبدأ مختصات فرض می‌کنیم و کانونهای آن را دو نقطه قرینه  $F' = (-c, 0)$  و  $F = (c, 0)$  روی محور  $x$  ها می‌گیریم (به شکل ۳ نگاه کنید).

نقطه دلخواه  $P$  را روی بیضی مذکور در نظر می‌گیریم. مجموع فواصل  $P$  از  $F'$  و  $F$  مقدار ثابتی است که آن را برابر  $2a$  می‌گیریم

که در آن  $a$  مثبت است (دلیل این انتخاب به خاطر ساده شدن محاسبات می‌باشد). ملاحظه می‌کنیم که

$$|PF'| + |PF| > |F'F|,$$

$$2a > 2c,$$

$$a > c.$$

فرض کنیم نقطه  $P = (x, y)$  روی بیضی مذکور قرار داشته باشد. در این صورت

$$|PF'| + |PF| = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$c^2 x^2 + a^4 - 2cax = a^2 x^2 + a^2 c^2 - 2cax + a^2 y^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

برعکس، گیریم نقطه  $P = (x, y)$  این ویژگی را داشته باشد که

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$



می توانیم بنویسیم

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

$$x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} |PF'| + |PF| &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx} + \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx} \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} + \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} \\ &= \left|a + \frac{c}{a}x\right| + \left|a - \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned}$$

اما  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}$  با توجه به  $a^2 - c^2 > 0$  نتیجه می دهد که  $0 \leq \frac{x^2}{a^2} \leq 1$  و  $0 \leq \frac{y^2}{a^2 - c^2} \leq 1$ .

پس  $0 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ ، یا  $-c \leq \frac{c}{a}x \leq c$ . لذا  $0 < a - c \leq a + \frac{c}{a}x \leq a + c$  و

$$\left|a - \frac{c}{a}x\right| = a - \frac{c}{a}x \text{ و } \left|a + \frac{c}{a}x\right| = a + \frac{c}{a}x \text{ در نتیجه } 0 < a - c \leq a - \frac{c}{a}x \leq a + c$$

لذا می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} |PF'| + |PF| &= \left|a + \frac{c}{a}x\right| + \left|a - \frac{c}{a}x\right| \\ &= a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x \\ &= 2a. \end{aligned}$$

در نتیجه P روی بیضی قرار دارد.

پس نقطه  $P = (x, y)$  روی بیضی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

توجه می‌کنیم که  $a^2 - c^2 > 0$ . قرار می‌دهیم  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  و در نتیجه نقطه  $P = (x, y)$  روی بیضی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

از آنچه در بالا به آن اشاره کردیم می‌توانیم نتیجه بگیریم معادله بیضی به مرکز مبدأ مختصات که کانونهای آن  $F = (c, 0)$  و  $F' = (-c, 0)$  می‌باشند و مقدار ثابت آن برابر  $2a$  است عبارت از

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

نقاط تقاطع این بیضی با محور  $x$ ها، نقاط  $(a, 0)$  و  $(-a, 0)$  و نقاط تقاطع آن با محور  $y$ ها، نقاط  $(0, b)$  و  $(0, -b)$  است (چرا؟). بنابراین طول قطر بزرگ برابر  $2a$  و طول قطر کوچک برابر  $2b$  است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که طول قطر بزرگ واقعاً از طول قطر کوچک بزرگتر

است:

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad (a, b, c > 0),$$

$$b^2 - a^2 < 0,$$

$$(b - a)(b + a) < 0,$$

$$b - a < 0,$$

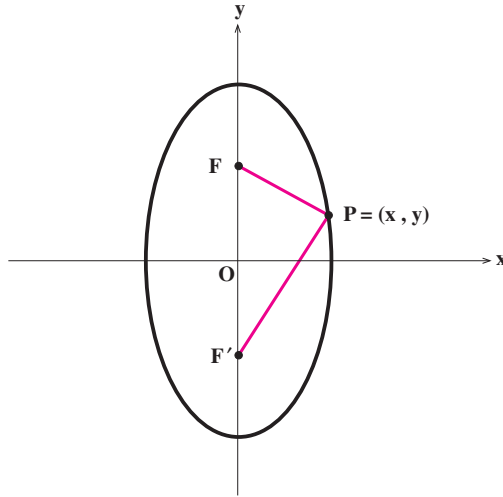
چون  $(b + a)$  مثبت است

$$2b < 2a.$$

لذا طول قطر بزرگ، بزرگتر است از طول قطر کوچک.

ممکن است از ابتدا نقاط کانون را روی محور  $y$ ها در نظر بگیریم. یعنی  $F = (0, c)$  و

$F' = (0, -c)$  را کانونهای بیضی بگیریم (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

در این صورت معادله بیضی عبارت است از :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

که  $a > b$  و رابطه بین  $a$ ،  $b$  و  $c$  همان رابطه  $b^2 = a^2 - c^2$  است. مرکز هم چنان در مبدأ مختصات است ولی قطر بزرگ در امتداد محور  $y$ ها و قطر کوچک در امتداد محور  $x$ ها قرار می گیرد. اکنون در زیر خلاصه ای از آنچه تاکنون به دست آورده ایم را می نویسیم.

### معادله استاندارد بیضی

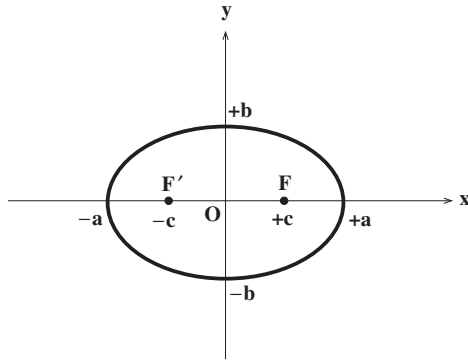
$$. a > b > 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

نقاط تقاطع با محور  $x$ ها:  $(a, 0)$  و  $(-a, 0)$ .

نقاط تقاطع با محور  $y$ ها:  $(0, b)$  و  $(0, -b)$ .

کانونها:  $F = (c, 0)$  و  $F' = (-c, 0)$  که  $c^2 = a^2 - b^2$ .

طول قطر بزرگ  $2a$ ، و طول قطر کوچک  $2b$ .



شکل ۵

$$. a > b > 0, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (۲)$$

نقاط تقاطع با محور xها:  $(b, 0)$  و  $(-b, 0)$

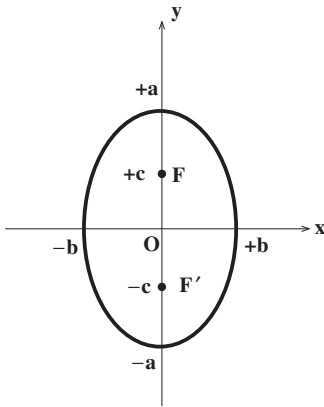
نقاط تقاطع با محور yها:  $(0, a)$  و  $(0, -a)$

کانونها:  $F = (c, 0)$  و  $F' = (0, -c)$  که

$$. c^2 = a^2 - b^2$$

طول قطر بزرگ  $2a$ ، و طول قطر کوچک

$2b$ .

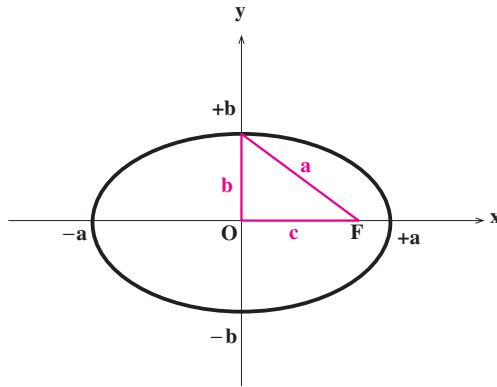


شکل ۶

در هر دو حالت بالا، محور xها و محور yها محورهای تقارن بیضی و مبدأ مختصات نیز مرکز تقارن بیضی است.

تذکره. در بیضی  $\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\right)$ ، فاصله نقطه تقاطع بیضی با

محور  $y$ ها (با محور  $x$ ها) از کانونها برابر  $a$  است (چرا؟).



شکل ۷

مثال ۱. می‌خواهیم بیضی‌های زیر را رسم کنیم:

الف)  $9x^2 + 16y^2 = 144$  ،      ب)  $2x^2 + y^2 = 10$

برای رسم الف توجه می‌کنیم که

$$9x^2 + 16y^2 = 144,$$

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1,$$

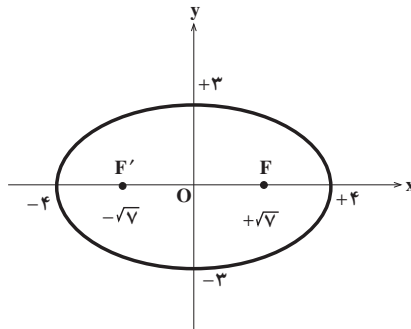
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$a^2 = 16$  و  $b^2 = 9$ . پس نقاط تقاطع با محور  $x$ ها عبارت است از  $(4, 0)$  و  $(-4, 0)$ . همچنین

نقاط تقاطع با محور  $y$ ها  $(0, 3)$  و  $(0, -3)$  می‌باشد. چون  $c^2 = 16 - 9$  لذا  $c^2 = 7$ ،  $c = \sqrt{7}$ . پس

کانونها عبارتند از  $F = (\sqrt{7}, 0)$  و  $F' = (-\sqrt{7}, 0)$ . طول قطر بزرگ برابر است با  $2 \times 4 = 8$  و طول

قطر کوچک  $2 \times 3 = 6$ .



شکل ۸

برای رسم ب نیز به صورت زیر عمل می کنیم

$$2x^2 + y^2 = 10,$$

$$\frac{2x^2}{10} + \frac{y^2}{10} = 1,$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

نقاط تقاطع با محور xها عبارتند از  $(\sqrt{5}, 0)$  و  $(-\sqrt{5}, 0)$ . نقاط تقاطع با محور yها نیز

$(0, \sqrt{10})$  و  $(0, -\sqrt{10})$  می باشند. چون

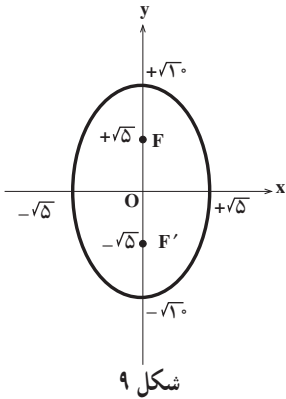
$$c^2 = a^2 - b^2,$$

$$c^2 = 10 - 5,$$

$$c = \sqrt{5},$$

پس  $F = (0, \sqrt{5})$  و  $F' = (0, -\sqrt{5})$  کانونها هستند. طول

قطر بزرگ برابر  $2\sqrt{10}$  و طول قطر کوچک برابر  $2\sqrt{5}$  است.



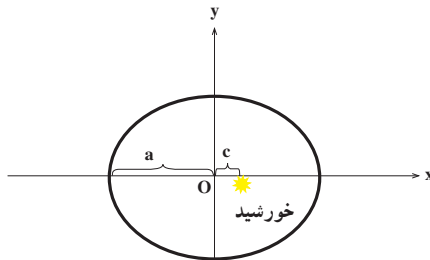
شکل ۹

مثال ۲. مدار گردش زمین به دور خورشید، یک بیضی است که خورشید در یکی از کانونهای

آن قرار دارد. اگر بیشترین فاصله زمین از خورشید  $152/1$  میلیون کیلومتر و نزدیکترین فاصله آن

$147/1$  میلیون کیلومتر باشد، طول قطرهای بزرگ و کوچک آن را پیدا می کنیم. برای این منظور

همانطور که از روی شکل ۱۰ دیده می شود داریم



شکل ۱۰

$$\begin{cases} a+c=152/1 \\ a-c=147/1 \end{cases}$$

پس

$$\begin{cases} a=149/6 \\ c=2/5 \end{cases}$$

در نتیجه

$$b = \sqrt{(149/6)^2 - (2/5)^2} \cong 149/57$$

پس طول قطر بزرگ تقریباً برابر  $2 \times 149/6 = 299/2$  و طول قطر کوچک تقریباً برابر  $2 \times 149/57 = 299/14$  میلیون کیلومتر است. همانطور که ملاحظه می‌کنیم قطرهای بزرگ و کوچک با هم اختلاف زیادی ندارند که از آن می‌توان نتیجه گرفت که مدار زمین به دایره خیلی نزدیک است.



یوهان کپلر (۱۶۳۰-۱۵۷۱) منجم آلمانی کشف کرد که مدار گردش زمین به دور خورشید بیضی است.

شکل ۱۱

تذکر. همانطور که در مثال فوق دیدیم، بعضی از بیضی‌ها ممکن است به دایره نزدیک باشند

ولی بعضی از بیضی‌ها نیز ممکن است کاملاً کشیده باشند. در بیضی  $\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\right) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

که  $a > b > 0$  و  $c^2 = a^2 - b^2$ ، نسبت  $\frac{c}{a}$  که با  $e$  نشان داده می‌شود را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم.

در واقع خروج از مرکز شاخص کشیدگی بیضی است. هر چقدر خروج از مرکز کوچکتر باشد و به صفر نزدیکتر شود، بیضی به دایره نزدیکتر است و هر چقدر خروج از مرکز بزرگتر باشد، بیضی کشیده تر است. در مثال ۲ خروج از مرکز برابر است با

$$e = \frac{2/5}{149/6} \cong 0.017,$$

که کوچک بودن آن بیانگر این است که مدار گردش زمین به دور خورشید به دایره نزدیک است.



۱. نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده، خروج از مرکز آنها را نیز مشخص کنید.

$$\text{الف) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad \text{ب) } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad \text{ج) } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

۲. نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده و خروج از مرکز آنها را مشخص کنید.

$$\text{الف) } x^2 + 9y^2 = 9, \quad \text{ب) } 4x^2 + y^2 = 4, \quad \text{ج) } 16x^2 + 25y^2 = 400$$

۳. نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده و خروج از مرکز آنها را مشخص کنید.

$$\text{الف) } 3x^2 + 2y^2 = 24, \quad \text{ب) } 4x^2 + 7y^2 = 28, \quad \text{ج) } 2x^2 + 3y^2 = 24$$

۴. مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه  $(2, 0)$  برابر نصف فاصله آنها از خط  $x = 8$  باشد.

۵. مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه  $(0, 9)$  برابر  $\frac{3}{4}$  فاصله آنها از خط  $y = 16$  باشد.

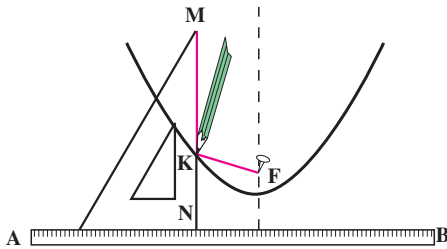
### ۳.۳ سهمی

فصل مشترک یک صفحه با مخروط ممکن است یک سهمی باشد. در این بخش تعریف دقیق سهمی را ذکر کرده و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم.

**تعریف.** سهمی مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک



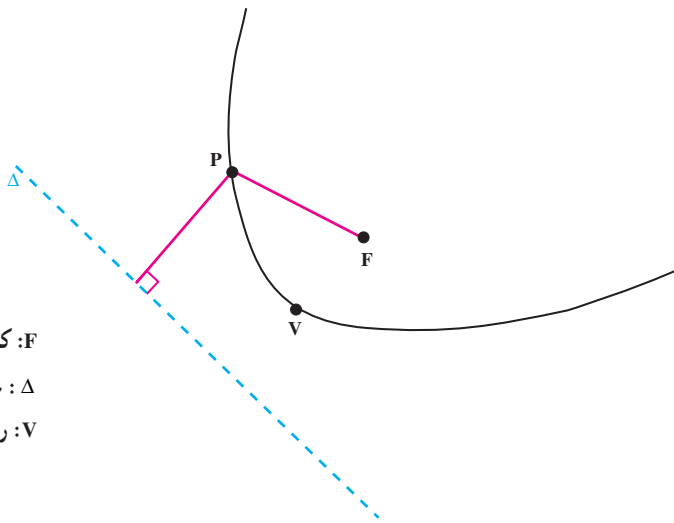
خط ثابت  $\Delta$  در آن صفحه و یک نقطه ثابت  $F$  خارج از  $\Delta$  و در آن صفحه به یک فاصله باشند. نقطه ثابت  $F$  را کانون و خط ثابت  $\Delta$  را خط هادی سهمی می‌نامیم.



شکل ۱

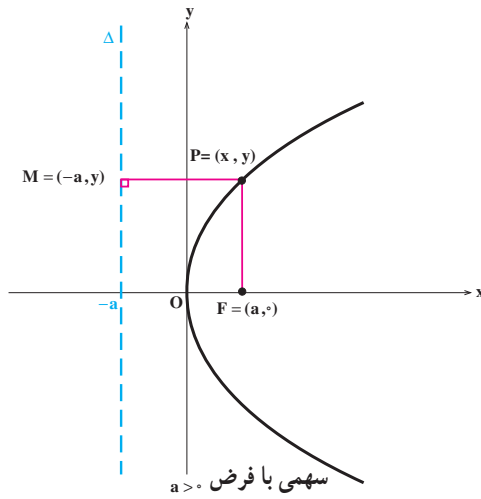
برای رسم سهمی خط‌کشی مانند  $AB$  به‌عنوان هادی در نظر گرفته و یک تکه نخ به اندازه طول یک ضلع  $MN$  از یک گونیا را نیز انتخاب می‌کنیم. یک سر نخ را در نقطه  $M$  ثابت می‌کنیم و سر دیگر را در نقطه  $F$ ، یعنی کانون سهمی. مداد را مطابق شکل در یک نقطه  $K$  قرار داده به‌طوری‌که

تکه نخ بین نقاط  $F$ ،  $K$  و  $M$  محکم قرار گرفته باشد. با لغزاندن گونیا در امتداد  $AB$  نوک مداد یک سهمی رسم می‌کند.

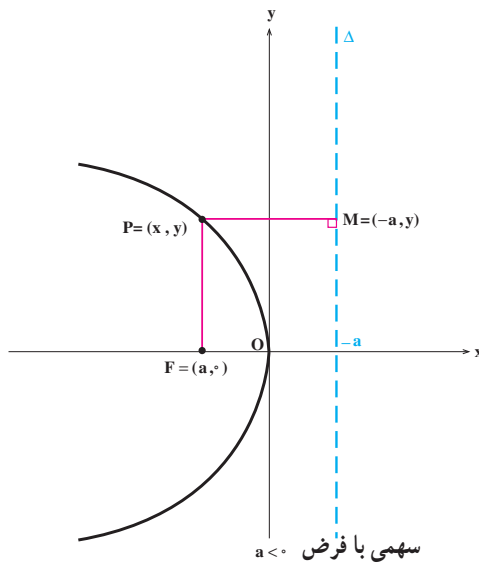


شکل ۲

حال معادله سهمی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا می‌کنیم. کانون سهمی را نقطه  $F$  به مختصات  $(a, 0)$  می‌گیریم و رأس سهمی را در مبدأ مختصات فرض می‌کنیم. لذا خط هادی آن خط  $x = -a$  خواهد بود. بسته به این‌که  $a > 0$  یا  $a < 0$  دهانه سهمی به ترتیب به سمت راست و یا به سمت چپ باز می‌شود (به شکل‌های ۳ و ۴ نگاه کنید).



شکل ۳



شکل ۴

حال در هر دو حالت نقطه  $P = (x, y)$  روی سهمی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$|PM| = |PF|$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2},$$

اگر و فقط اگر

$$(x+a)^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

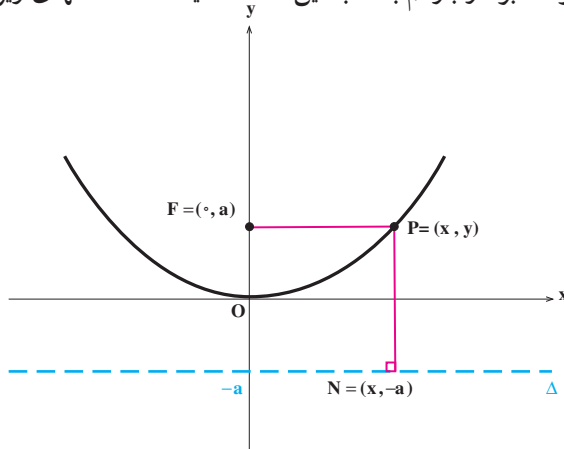
اگر و فقط اگر

$$x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2,$$

اگر و فقط اگر

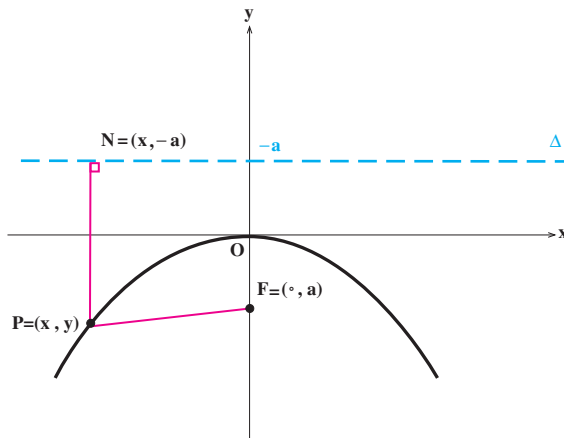
$$y^2 = 4ax.$$

بدین ترتیب رابطهٔ اخیر معادلهٔ سهمی است. ممکن است کانون سهمی را روی محور  $y$ ها بگیریم. یعنی کانون را نقطهٔ  $F$  به مختصات  $(0, a)$  بگیریم. اگر رأس سهمی در مبدأ مختصات باشد، خط هادی آن خط  $y = -a$  خواهد بود و بازهم بسته به این که  $a > 0$  یا  $a < 0$  حالت‌های زیر را داریم.



شکل ۵

سهمی با فرض  $a > 0$



شکل ۶

سهمی با فرض  $a < 0$

در این حالت نیز با محاسباتی مشابه قبل به دست می‌آوریم

$$x^2 = 4ay.$$

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه را که در این بخش مطرح شد می‌آوریم.

## معادله استاندارد سهمی

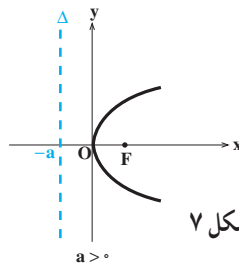
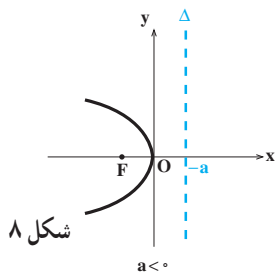
$$y^2 = 4ax \quad (1)$$

رأس:  $(0, 0)$ .

کانون:  $F = (a, 0)$ .

خط هادی:  $x = -a$ .

محور تقارن: محور  $x$ ها.



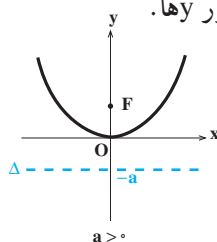
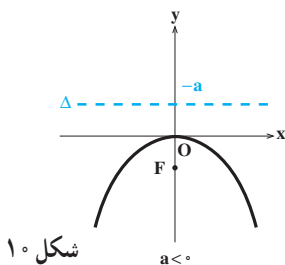
$$x^2 = 4ay \quad (2)$$

رأس:  $(0, 0)$ .

کانون:  $F = (0, a)$ .

خط هادی:  $y = -a$ .

محور تقارن: محور  $y$ ها.

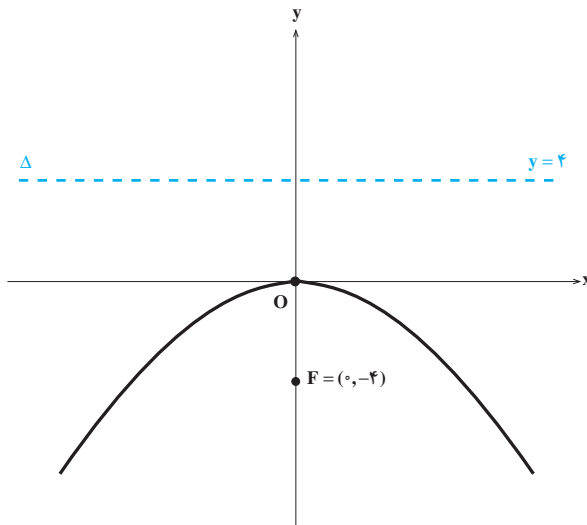


مثال ۱. می‌خواهیم سهمی  $x^2 = -16y$  را رسم کنیم و کانون و خط هادی آن را مشخص کنیم. توجه می‌کنیم که معادله فوق معادله یک سهمی است که کانون آن روی محور  $y$ ها قرار دارد. از طرفی

$$4a = -16,$$

$$a = -4.$$

پس  $F = (0, -4)$  کانون این سهمی و خط به معادله  $y = -(-4) = 4$  خط هادی آن است.



شکل ۱۱

مثال ۲. می‌خواهیم معادله یک سهمی را که مبدأ مختصات رأس آن بوده و محور  $y$ ها محور تقارن آن باشد و از نقطه  $(-1, -5)$  بگذرد پیدا کنیم و مختصات کانون و خط هادی آن را به دست آوریم. توجه می‌کنیم که معادله این سهمی به صورت  $x^2 = 4ay$  است. اکنون با توجه به این که مختصات نقطه  $(-1, -5)$  در معادله اخیر صدق می‌کند،  $a$  به دست می‌آید:

$$(-1)^2 = 4a(-5),$$

$$1 = -20a,$$

$$a = -\frac{1}{20}.$$

پس معادله این سهمی  $x^2 = -\frac{1}{5}y$  است. واضح است که  $F = (0, -\frac{1}{20})$  کانون این سهمی و خط به معادله  $y = \frac{1}{5}$  خط هادی آن است.



۱. سهمی‌های زیر را رسم کرده، مختصات کانون و معادله خط هادی آنها را نیز تعیین کنید.

(الف)  $y^2 = 4x$  ، (ب)  $x^2 = 4y$  ، (ج)  $x^2 = -8y$  ،  
(د)  $x^2 = 58y$  ، (ه)  $y^2 = -93x$  ، (و)  $x^2 = -105y$  .

۲. معادله هر یک از سهمی‌های زیر را که محور تقارن آنها مشخص شده و یک نقطه از آنها نیز داده شده است پیدا کنید. در هر مورد مختصات کانون و معادله خط‌های را نیز تعیین کنید.

(الف) محور  $x$  ها،  $(4, 8)$  ، (ب) محور  $y$  ها،  $(4, 2)$  ،  
(ج) محور  $x$  ها،  $(-5, 10)$  ، (د) محور  $x$  ها،  $(-3, 6)$  ،  
(ه) محور  $y$  ها،  $(-6, -9)$  ، (و) محور  $x$  ها،  $(-6, -12)$  .

۳. با استفاده از تعریف سهمی، معادله یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطه  $(2, 2)$  و خط هادی آن  $y = 4$  باشد.

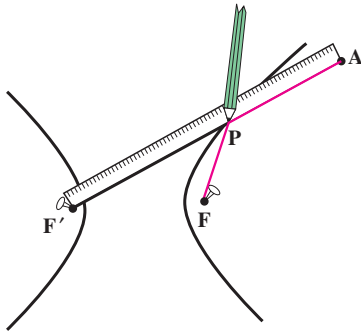
۴. با استفاده از تعریف سهمی، معادله یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطه  $(6, 4)$  و خط هادی آن  $x = 2$  باشد.

### ۴.۳ هذلولی

هذلولی یکی دیگر از مقاطع مخروطی است که از دو قطعه متمایز تشکیل شده است. ابتدا به تعریف آن توجه کنید.

**تعریف.** هذلولی مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که قدر مطلق تفاضل فاصله آنها از دو نقطه ثابت و متمایز  $F$  و  $F'$  در آن صفحه به نام کانون مقدار مثبت ثابتی باشد.

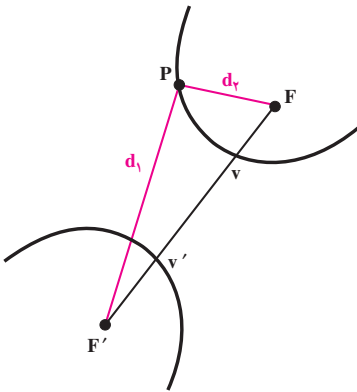
برای رسم یک هذلولی یک خط کش و یک تکه نخ که طول آن از طول خط کش کوتاهتر است انتخاب می‌کنیم به طوری که تفاضل طول خط کش و قطعه نخ همان مقدار ثابت مورد نظر باشد. یک سر نخ را در نقطه  $A$  ثابت کرده، سر دیگر آن را در یکی از کانونهای هذلولی ثابت می‌کنیم. یک سر دیگر



شکل ۱

خط کش را هم در کانون دیگر ثابت می کنیم. مطابق شکل یک مداد را در کنار خط کش و نخ قرار می دهیم و با دوران خط کش در نقطه  $F'$  مسیری که مداد ایجاد می کند و یک شاخه از هذلولی است را رسم می کنیم (شاخه دیگر هذلولی مشابهاً با تعویض نقطه ثابت خط کش به  $F$  حاصل می شود). حال نشان می دهیم که واقعاً یک هذلولی رسم شده است. برای این منظور کافی است نشان دهیم که نقطه  $P$  روی هذلولی قرار دارد، یعنی قدر مطلق تفاضل فاصله  $P$  از  $F$  و  $F'$  برابر مقدار ثابت (تفاضل طول خط کش و طول نخ) است و این نیز برقرار است زیرا

$$\begin{aligned} |PF'| - |PF| &= |PF'| + |PA| - |PF| - |PA| \\ &= |AF'| - (|PF| + |PA|) \\ &= (\text{طول نخ}) - (\text{طول خط کش}) \\ &= \text{مقدار ثابت.} \end{aligned}$$

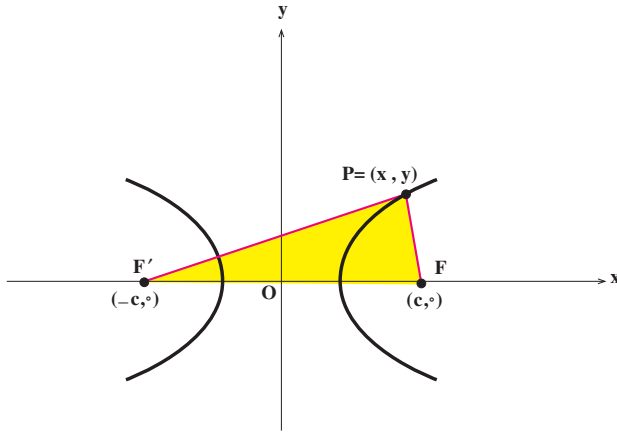


$$|d_1 - d_2| = \text{ثابت}$$

شکل ۲

در شکل رویه  $F$  و  $F'$  کانونهای هذلولی هستند و  $V$  و  $V'$  نیز رؤوس هذلولی نامیده می شوند.

حال معادله هذلولی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا می کنیم. کانونهای هذلولی را دو نقطه  $F = (c, 0)$  و  $F' = (-c, 0)$  می گیریم.



شکل ۳

نقطه دلخواه P را روی هذلولی مذکور در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مقدار تفاضل ثابت با  $2a$  نشان داده شود که در آن  $a$  مثبت است. ملاحظه می‌کنیم که

$$|PF'| - |PF| < |FF'|,$$

$$2a < 2c,$$

$$a < c.$$

حال نقطه  $P = (x, y)$  روی هذلولی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$||PF'| - |PF|| = 2a,$$

اگر و فقط اگر

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a,$$

اگر و فقط اگر

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

اگر و فقط اگر

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

برای ساده‌تر شدن معادله، با توجه به این که  $c^2 - a^2 > 0$ ، می‌توانیم فرض کنیم  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

پس

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

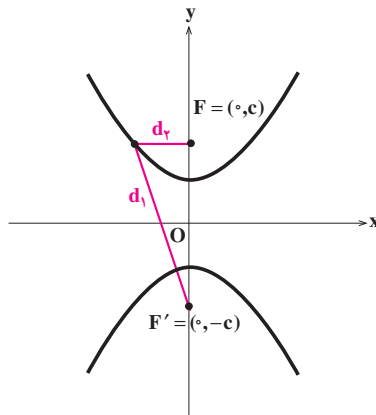


معادلهٔ هذلولی مذکور می‌باشد. از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود که هذلولی در نقاط  $(a, 0)$  و  $(-a, 0)$  (رئوس) محور  $x$ ها را قطع می‌کند ولی محور  $y$ ها را قطع نمی‌کند.

اگر کانونهای هذلولی را روی محور  $y$ ها انتخاب کنیم، یعنی فرض کنیم  $F = (0, c)$  و  $F' = (0, -c)$  کانونها باشند، به‌طور مشابه معادلهٔ هذلولی به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

که در آن  $c > 0$  و داریم  $b^2 = c^2 - a^2$ . مرکز هذلولی نیز هم‌چنان در مبدأ مختصات قرار دارد.



شکل ۴

برای این که رسم نمودار هذلولی با سهولت و دقت بیشتری انجام شود، ملاحظات زیر را

معمول می‌داریم. مثلاً هذلولی  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  را در نظر می‌گیریم و ابتدا  $y$  را بر حسب  $x$  استخراج می‌کنیم:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

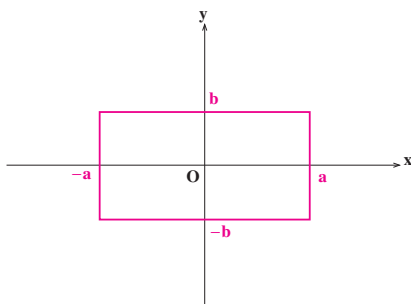
اگر  $|x|$  بزرگ شود و به سمت بینهایت میل کند عبارت زیر رادیکال به ۱ میل خواهد کرد. پس

برای مقادیر بزرگ  $|x|$ ، نمودار هذلولی نزدیک خطهای زیر است:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

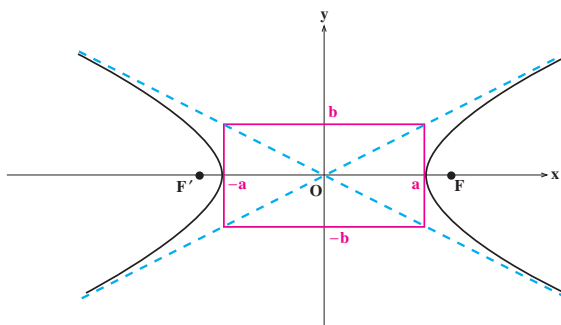
این خطوط مجانبهای هذلولی نامیده می‌شوند، یعنی هذلولی به این خطوط رفته رفته نزدیک

می‌شود. برای سهولت در رسم مجانبها و سپس هذلولی می‌توانیم ابتدا مستطیل صفحهٔ بعد را رسم کنیم.



شکل ۵

سیس اقطار این مستطیل که همان مجانبها هستند را رسم کرده و هذلولی را رسم می‌کنیم.

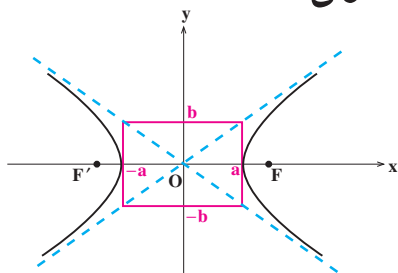


شکل ۶

با استفاده از رابطه  $c^2 = a^2 + b^2$ ، به راحتی می‌توان دید اگر قوسی بر مرکز مبدأ مختصات و شعاعی برابر نصف قطر مستطیل رسم کنیم، آنگاه نقطه تقاطع آن با محور xها، کانونهای هذلولی را مشخص می‌کند.

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه در این بخش مطرح کردیم را بیان می‌کنیم.

### معادله استاندارد هذلولی



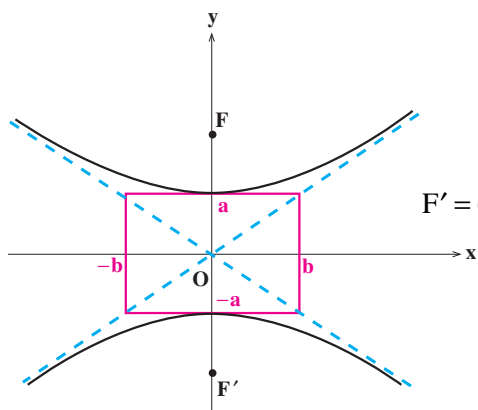
شکل ۷

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

رؤوس:  $(-a, 0)$  و  $(a, 0)$

کانونها:  $F = (c, 0)$  و  $F' = (-c, 0)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



شکل ۸

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (۲)$$

رؤوس:  $(0, a)$  و  $(0, -a)$

کانونها:  $F = (0, c)$  و  $F' = (0, -c)$

که  $c^2 = a^2 + b^2$

در هر دو حالت محور  $x$  ها و  $y$  ها محورهای تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن هذلولی است.

مثال ۱. در زیر هذلولی  $9x^2 - 16y^2 = 144$  را رسم می کنیم. برای این منظور توجه می کنیم

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{از طرفی}$$

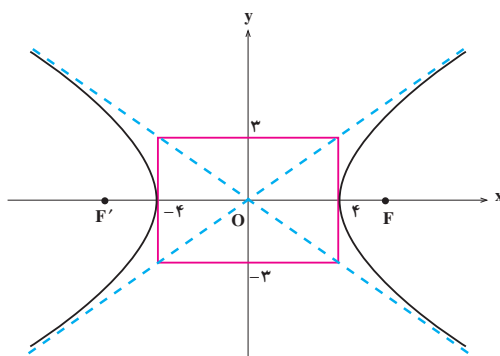
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$c = 5.$$

پس  $F = (5, 0)$  و  $F' = (-5, 0)$  کانونهای هذلولی هستند و نمودار آن به صورت زیر

است:



شکل ۹



۱. هریک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید.

$$\text{الف) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{ب) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\text{ج) } \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad \text{د) } \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

۲. هریک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید.

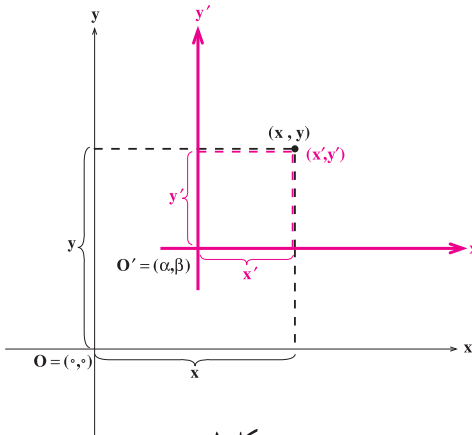
$$\text{الف) } 4x^2 - y^2 = 16 \quad \text{ب) } x^2 - 9y^2 = 9$$

$$\text{ج) } 9y^2 - 16x^2 = 144 \quad \text{د) } 4y^2 - 25x^2 = 100$$

### ۵.۳ انتقال محورهای مختصات

تاکنون معادلات مقاطع مخروطی را در حالتی یافته‌ایم که مرکز آنها در مبدأ مختصات قرار داشته و محورهای آنها موازی محورهای مختصات بوده است. در این بخش می‌خواهیم معادلات مقاطع مخروطی را در حالتی پیدا کنیم که محورهای آنها موازی محورهای مختصات بوده و مرکز آنها نقطه‌ای دلخواه باشد.

برای این منظور از انتقال محورهای مختصات استفاده می‌کنیم. فرض کنیم مبدأ مختصات، یعنی نقطه  $O = (0,0)$  را به نقطه  $O' = (\alpha, \beta)$  منتقل کنیم. البته این انتقال را طوری انجام می‌دهیم که محورها در حالت انتقال یافته با محورهای قبل از انتقال موازی باشند. می‌خواهیم بررسی کنیم که



شکل ۱

اگر یک نقطه در صفحه، نسبت به دستگاه اولیه دارای مختصات  $(x, y)$  باشد و نسبت به دستگاه جدید منتقل شده دارای مختصات  $(x', y')$ ، آنگاه این دو مختصات چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند. با توجه به شکل ۱ این رابطه به صورت زیر به دست می‌آید:

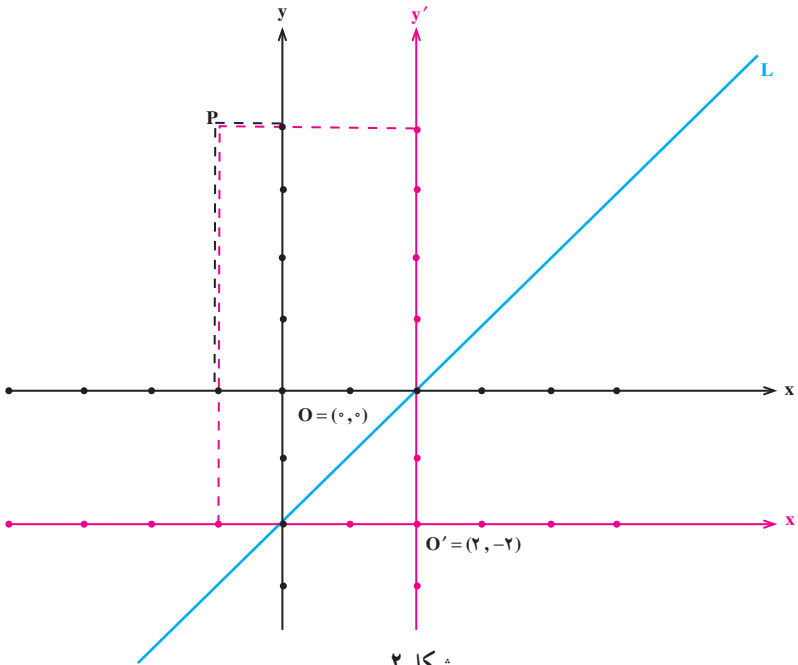
$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

مثال ۱. فرض کنیم یک دستگاه مختصات قائم با مبدأ مختصات  $O = (0, 0)$  داده شده است. یک نقطه در صفحه این دستگاه مختصات قائم انتخاب می‌کنیم، مثلاً نقطه  $P = (-1, 4)$ . اکنون مبدأ مختصات را به نقطه  $O' = (2, -2)$  منتقل می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم که مختصات  $P$  در دستگاه جدید چه خواهد شد.

اگر مختصات  $P$  در دستگاه جدید  $(x', y')$  باشد، بنابر تساوی‌های بالا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} x' = -1 - 2 = -3 \\ y' = 4 - (-2) = 6 \end{cases}$$

پس مختصات  $P$  در دستگاه جدید برابر  $(-3, 6)$  است (به شکل ۲ نگاه کنید).



اکنون فرض می‌کنیم خطی مانند  $L$  در صفحه دستگاه اولیه داده شده است که در این صفحه معادله‌ای به صورت

$$x - y = 2$$

دارد. می‌خواهیم ببینیم که این خط در دستگاه جدید چه معادله‌ای دارد. نقطه‌ای دلخواه روی خط  $L$  انتخاب می‌کنیم که در دستگاه اولیه دارای مختصات  $(x, y)$  و در دستگاه جدید دارای مختصات

چون  $(x', y')$  است.

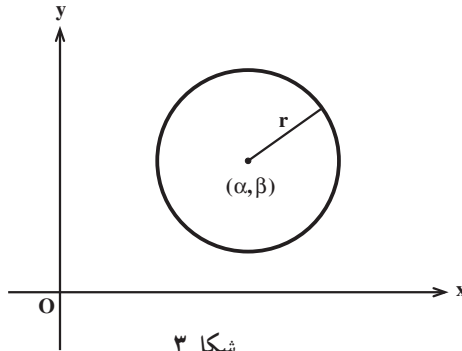
$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

پس با توجه به این که  $x - y = 2$ ، به دست می آوریم  $2 = (x' + 2) - (y' - 2)$ ، یا  $x' - y' = -2$ .

پس اگر نقطه‌ای روی خط  $L$  باشد که در دستگاه جدید دارای مختصات  $(x', y')$  باشد، آنگاه  $x' - y' = -2$  برعکس، اگر نقطه‌ای در دستگاه جدید دارای مختصات  $(x', y')$  باشد و در تساوی  $x' - y' = -2$  صدق کند، آنگاه لزوماً روی خط  $L$  است (چرا؟). پس  $x' - y' = -2$

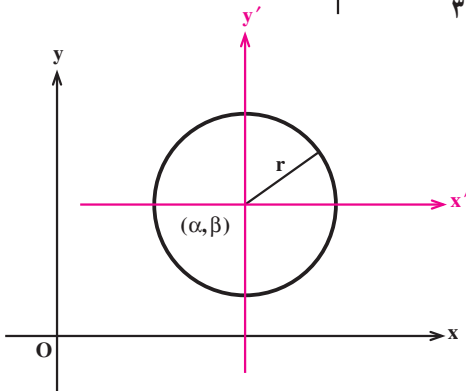
معادله خط  $L$  نسبت به دستگاه جدید است.

اکنون فرض می کنیم که یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. می خواهیم معادله دایره‌ای را که مرکز آن نقطه  $(\alpha, \beta)$  می باشد و شعاع آن  $r$  است پیدا کنیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

مبدأ مختصات دستگاه را به نقطه  $(\alpha, \beta)$  منتقل می کنیم (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

معادله دایره داده شده نسبت به دستگاه جدید به صورت  $x'^2 + y'^2 = r^2$  است. اما

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

و لذا  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$  معادله دایره در دستگاه قدیم است. در نتیجه می توانیم بگوییم معادله دایره به شعاع  $r$  و به مرکز  $(\alpha, \beta)$  به صورت زیر است

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

مثال ۲. با دسته بندی جملات معادله  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$  به صورت

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 4,$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 = 4,$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9,$$

ملاحظه می کنیم که معادله داده شده، معادله دایره ای به مرکز  $(2, -1)$  و شعاع ۳ است.

مثال ۳. می خواهیم مکان هندسی نقاطی مانند  $P = (x, y)$  را پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه

$A = (7, 1)$  دو برابر فاصله آنها از نقطه  $B = (1, 4)$  باشد. برای این منظور توجه می کنیم که

$$|AP| = 2|BP|,$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x - 7)^2 + (y - 1)^2} = 2\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2},$$

اگر و فقط اگر

$$(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 4[(x - 1)^2 + (y - 4)^2],$$

اگر و فقط اگر

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 30y + 18 = 0,$$

اگر و فقط اگر

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 6 = 0,$$

اگر و فقط اگر

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 20.$$

پس مکانِ مطلوب، دایره‌ای به مرکز  $(-۱, ۵)$  و به شعاع  $\sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$  است.

حال گیریم یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. می‌خواهیم معادلهٔ یک بیضی را که مرکز آن نقطهٔ  $(\alpha, \beta)$  می‌باشد پیدا کنیم. فرض می‌کنیم طول قطر بزرگ این بیضی  $۲a$  و طول قطر کوچک آن  $۲b$  باشد. کانونهای این بیضی را نیز نقاط  $F = (\alpha + c, \beta)$  و  $F' = (\alpha - c, \beta)$  فرض می‌کنیم (یعنی بیضی را به صورت افقی در نظر می‌گیریم). مانند بحث روی معادلهٔ دایره، مبدأ مختصات

را به نقطهٔ  $(\alpha, \beta)$  منتقل می‌کنیم. معادلهٔ این بیضی نسبت به دستگاه جدید  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = ۱$  است.

اما

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

و لذا  $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = ۱$  معادلهٔ بیضی در دستگاه قدیم است. در نتیجه می‌توانیم بگوییم

معادلهٔ بیضی به مرکز  $(\alpha, \beta)$ ، کانونهای  $F = (\alpha + c, \beta)$  و  $F' = (\alpha - c, \beta)$  و قطر بزرگ به طول  $۲a$  و قطر کوچک به طول  $۲b$  به صورت زیر است

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = ۱,$$

که در آن  $a > b$  و  $c^2 = a^2 - b^2$ .

همچنین اگر کانونها  $F = (\alpha, \beta + c)$  و  $F' = (\alpha, \beta - c)$  فرض شوند (یعنی بیضی را بیضی قائم در نظر بگیریم) آنگاه معادلهٔ بیضی به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = ۱.$$

مثال ۴. نوع مقطع مخروطی  $۴x^2 + y^2 - ۳۲x + ۶y + ۵۷ = ۰$  را تعیین کرده و آن را رسم

می‌کنیم. برای این منظور با دسته‌بندی معادله به صورت

$$۴(x^2 - ۸x) + y^2 + ۶y + ۵۷ = ۰,$$

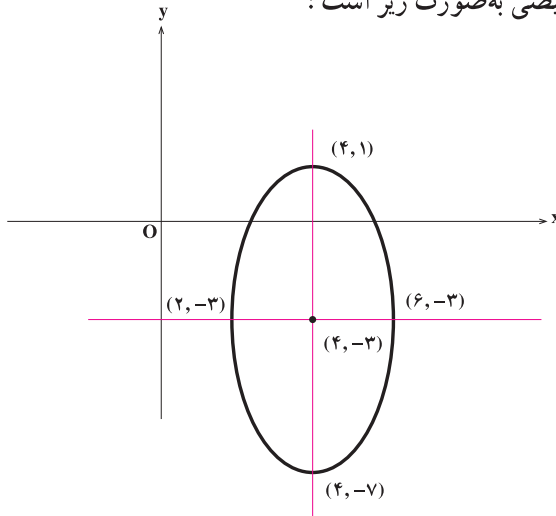
$$۴(x - ۴)^2 - ۶۴ + (y + ۳)^2 - ۹ + ۵۷ = ۰,$$



$$4(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16,$$

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1,$$

درمی یابیم که نوع مقطع مخروطی داده شده بیضی است که مرکز آن  $(4, -3)$  می باشد و در آن  $a = 4$  و  $b = 2$ . نمودار این بیضی به صورت زیر است:



شکل ۵

اکنون مشابه آنچه در بالا دیدیم می توانیم نشان دهیم که

$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$$

معادله یک سهمی است که رأس آن نقطه  $(\alpha, \beta)$ ، کانون آن نقطه  $F = (\alpha + a, \beta)$  و خط هادی آن دارای معادله  $x = \alpha - a$  است.

همچنین

$$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$$

نیز معادله یک سهمی است که رأس آن نقطه  $(\alpha, \beta)$ ، کانون آن نقطه  $F = (\alpha, \beta + a)$  و خط هادی آن دارای معادله  $y = \beta - a$  است.

در مورد هذلولی به مرکز  $(\alpha, \beta)$  نیز می توانیم معادلات زیر را به دست آوریم

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1,$$

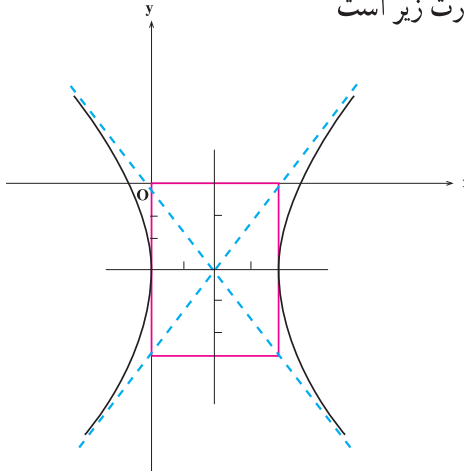
$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1.$$

مثال ۵. نوع مقطع مخروطی  $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$  را تعیین کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم. توجه می‌کنیم که با دسته‌بندی، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$$

پس این مقطع مخروطی یک هذلولوی به مرکز  $(2, -3)$  است که در آن  $a=2$  و  $b=3$ .

نمودار این هذلولوی به صورت زیر است



شکل ۶



۱. نشان دهید هر یک از معادلات زیر، معادله یک دایره است و شعاع و مرکز هر یک از آنها را به دست آورید.

الف)  $x^2 + y^2 - 4y = 5$ ,

ب)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$ ,

ج)  $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ .

۲. معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $(-1, -2)$  بوده و از نقطه  $(2, 3)$  بگذرد.

۳. معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $(2, -2)$  بوده و بر خط  $y = x + 4$  مماس باشد.

۴. معادله دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطه  $(4, 6)$ ،  $(-2, -2)$  و  $(5, -1)$  بگذرد.

۵. مکان هندسی نقاطی مانند  $(x, y)$  را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه  $(-2, 1)$  نصف فاصله آنها از نقطه  $(4, -2)$  باشد.

۶. نوع هریک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

(الف)  $4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$ ،

(ب)  $16x^2 + 9y^2 + 64x + 54y + 1 = 0$ ،

(ج)  $x^2 + 8x + 8y = 0$ ،

(د)  $y^2 + 12x + 4y - 32 = 0$ ،

(هـ)  $x^2 + y^2 + 12x + 10y + 45 = 0$ ،

(و)  $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ ،

(ز)  $-9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y - 144 = 0$ ،

(ح)  $16x^2 - 25y^2 - 160x = 0$ ،

### ۶.۳ دوران محورهای مختصات

در بخش قبل دیدیم که معادلات

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 ,$$

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 , \quad \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1 ,$$

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) , \quad (x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta) ,$$

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 , \quad \frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1 ,$$

به ترتیب معادلات دایره، بیضی، سهمی و هذلولی بودند که محورهای آنها موازی محورهای مختصات بود و  $(\alpha, \beta)$  برای دایره، بیضی و هذلولی مرکز و برای سهمی رأس محسوب می‌شد. اگر هریک از این معادلات را پس از به توان رساندن جملات آن و ساده کردن مرتب کنیم، معادله‌ای به صورت

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

به دست می آوریم. اکنون می خواهیم بررسی کنیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله (۱) صدق می کنند چیست. برای پاسخ به این سؤال چند حالت را در نظر می گیریم.

$$a=c=0 \quad (1)$$

در این حالت معادله (۱) به معادله  $dx+ey+f=0$  تبدیل می شود که یک خط، یا کل صفحه (وقتی  $d=e=f=0$ ) را مشخص می کند و یا مکانی را به دست نمی دهد (وقتی  $d=e=0$  و  $f \neq 0$ ).

$$a=0 \text{ و } c \neq 0 \quad (2)$$

در این حالت معادله (۱) به معادله  $cy^2 + dx + ey + f = 0$  تبدیل می شود. در این صورت اگر  $d=0$ ، به دست می آوریم  $cy^2 + ey + f = 0$  که یک خط، یا دو خط موازی را مشخص می کند و یا مکانی را به دست نمی دهد. اگر  $d \neq 0$  نیز پس از مرتب کردن، به معادله

$$\left(y - \frac{-e}{2c}\right)^2 = 4\left(\frac{-d}{4c}\right)\left(x - \frac{e^2 - 4cf}{4cd}\right)$$

دست می یابیم که یک سهمی را مشخص می کند.

$$a \neq 0 \text{ و } c=0 \quad (3)$$

این حالت مشابه حالت ۲ می باشد و مکانی که در این حالت معادله (۱) به دست می دهد، یک خط، یا دو خط موازی و یا یک سهمی می باشد و یا مکانی توسط (۱) مشخص نمی شود.

$$a \neq 0 \text{ و } c \neq 0 \quad (4)$$

در این حالت پس از مرتب کردن معادله (۱) به صورت مربعات کامل خواهیم داشت

$$a\left(x - \frac{-d}{2a}\right)^2 + c\left(y - \frac{-e}{2c}\right)^2 = \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4ac}$$

پس در این حالت معادله (۱)، بجز در حالات استثنایی که یک نقطه و یا دو خط متقاطع را به دست می دهد؛ یک دایره، یک بیضی و یا یک هذلولی را مشخص می کند و یا مکانی را به دست نمی دهد. با توجه به آنچه در بالا گفته شد می توانیم قضیه زیر را بنویسیم.

**قضیه ۱.** مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

صدق می کنند، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط متقاطع و یا کل صفحه می باشد؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است.

توجه می‌کنیم که معادله (۱)، یک حالت خاص از معادله درجه دوم کلی زیر می‌باشد که در آن

$$b=0$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2)$$

اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله (۲) صدق

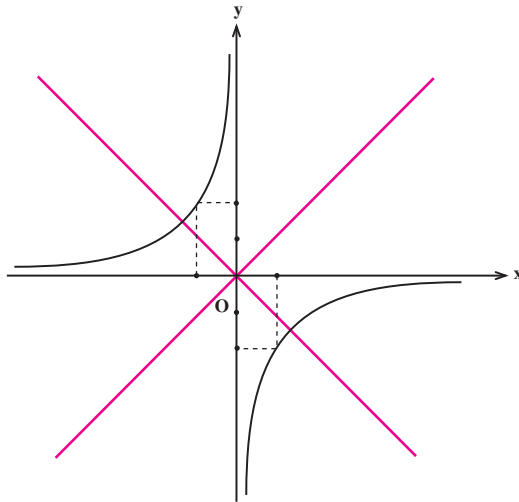
می‌کنند چیست.

ابتدا یک حالت خاص را بررسی می‌کنیم. مثلاً فرض کنیم  $a=c=d=e=0$ ،  $b=1$  و  $f=-2$ .

پس می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه را پیدا کنیم که در معادله  $xy = -2$  صدق

می‌کنند. این معادله را می‌توانیم به صورت  $y = \frac{-2}{x}$  بنویسیم. از سال سوم به یاد داریم که این معادله

یک تابع هموگرافیک را مشخص می‌کند و لذا نمودار آن به صورت زیر است.



شکل ۱

ببینیم چه اتفاقی افتاده است. نمودار  $xy = -2$  به یک هذلولی شبیه شده است. سوالی که پیش می‌آید این است که اگر واقعاً شکل بالا یک هذلولی است پس چرا معادله آن به شکل معادلاتی که در بخش ۴ مطالعه کردیم نمی‌باشد. البته این موضوع نمی‌تواند هذلولی بودن شکل بالا را زیر سؤال ببرد. در واقع اگر نمودار شکل ۱ یک هذلولی باشد خطوط قرمز موجود در شکل که موازی محورهای مختصات نمی‌باشند محورهای این هذلولی خواهند بود و لذا انتظاری نیست که معادله این هذلولی به صورت معادلات هذلولی‌های با محورهای موازی محورهای مختصات باشد.

اکنون می‌خواهیم سعی کنیم که نشان دهیم شکل بالا یک هذلولی است. به نظر شما چگونه با این مسأله برخورد کنیم. برای این منظور محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. قطعاً اگر شکل بالا هذلولی باشد، بایستی در دستگاه جدید دارای معادله‌ای باشد از نوع معادلات هذلولی‌های مطرح شده در بخش ۴، زیرا محورهای آن موازی محورهای دستگاه مختصات جدید خواهند شد.

ابتدا مسأله دوران محورها را حول مبدأ مختصات به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  بررسی می‌کنیم. گیریم یک نقطه در دستگاه قدیم دارای مختصات  $(x, y)$  و نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات  $(x', y')$  باشد. رابطه بین این دو مختصات را پیدا می‌کنیم.

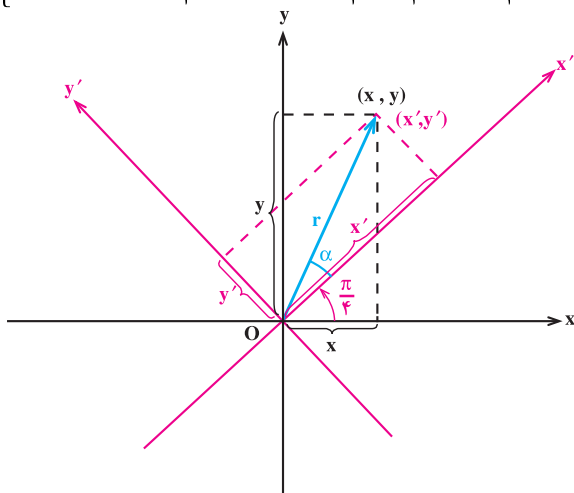
$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \\ y = r \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \end{array} \right. \text{ و } \left\{ \begin{array}{l} x' = r \cos \alpha \\ y' = r \sin \alpha \end{array} \right. \text{ می‌توانیم بنویسیم}$$

با توجه به شکل ۲ می‌توانیم بنویسیم

لذا با استفاده

از بسط سینوس و کسینوس به دست می‌آوریم

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - r \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \\ y = r \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} + r \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \end{array} \right.$$



شکل ۲

پس اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات  $(x, y)$  باشد، در دستگاه

دوران یافته جدید با مختصات  $(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y', \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y')$  ظاهر می شود. پس  $xy = -2$

در دستگاه جدید معادله ای به شکل  $(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y') = -2$

$$یا \quad \frac{1}{4}x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 = -2$$

$$\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{4} = 1$$

دارد که همان معادله هذلولی با محورهای موازی محورهای مختصات است، البته محورهای دستگاه جدید. پس ثابت کردیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله  $xy = -2$  صدق می کنند یک هذلولی است. این کار را با دوران محورهای مختصات حول مبدأ مختصات به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  در جهت مثلثاتی، بازنویسی معادله  $xy = -2$  در دستگاه جدید و علم به این که معادله بازنویسی شده  $xy = -2$  در دستگاه جدید معادله یک هذلولی است انجام دادیم.

حال فرض کنیم اطلاعاتی از این که باید محورهای مختصات را به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  دوران می دادیم تا

بازنویسی شده معادله  $xy = -2$  در دستگاه جدید به صورتی آشنا تبدیل شود نداشتیم، ولیکن می دانستیم که با دوران محورهای مختصات و بازنویسی معادله  $xy = -2$  نسبت به دستگاه جدید مکان مطلوب مشخص خواهد شد، چگونه بایستی زاویه مناسب دوران را پیدا می کردیم. بیایید مجدداً مسأله دوران محورهای مختصات را مطرح کنیم. گیریم یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. محورهای آن را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه زاویه ثابت  $\theta$  دوران می دهیم. می خواهیم ببینیم اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات  $(x, y)$  باشد و نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات  $(x', y')$ ، آنگاه این دو مختصات چه رابطه ای با هم دارند.

مجدداً با توجه به شکل ۲ و با فرض این که زاویه دوران به جای  $\frac{\pi}{4}$ ،  $\theta$  باشد می توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha + \theta) \\ y = r \sin(\alpha + \theta) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x' = r \cos \alpha \\ y' = r \sin \alpha \end{cases} \quad . \text{ لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس به دست می آوریم}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta = (\cos \theta)x' - (\sin \theta)y' \\ y = r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta = (\sin \theta)x' + (\cos \theta)y' \end{cases} \quad (3)$$

پس اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات  $(x, y)$  باشد، نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات  $((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y', (\sin \theta)x' + (\cos \theta)y')$  خواهد بود. حال فرض کنیم  $xy = -2$  معادله منحنی مورد مطالعه در دستگاه قدیم باشد. معادله این منحنی در دستگاه دوران یافته جدید را پیدا می کنیم:

$$((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y')((\sin \theta)x' + (\cos \theta)y') = -2,$$

$$(\cos \theta \sin \theta)x'^2 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)x'y' - (\sin \theta \cos \theta)y'^2 + 2 = 0.$$

معادله اخیر، معادله منحنی مورد مطالعه در دستگاه جدید است.  $\theta$  را باید چگونه انتخاب می کردیم تا این معادله قابل شناسایی می شد؟ بله پاسخ شما درست است. در اینجا جمله شامل  $x'y'$  یک جمله مزاحم در شناسایی است و باید  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  را طوری انتخاب کنیم که ضریب این جمله صفر شود:

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0,$$

$$\cos 2\theta = 0,$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

پس اگر محورها را به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم (یعنی زاویه ای که قبلاً نیز بررسی کرده بودیم)، به معادله

$$\frac{1}{4}x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 + 2 = 0,$$

یا

$$\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{4} = 1,$$

می رسمیم که معادله منحنی مورد مطالعه در دستگاه جدید است. مجدداً مانند قبل می توانیم متوجه شویم که  $xy = -2$  نیز معادله یک هذلولی بوده است، چرا که بازنویسی شده این معادله نسبت به دستگاه دوران یافته یک هذلولی است.

حال با همین دیدگاه به بررسی مکان هندسی نقاطی از صفحه که معادله (۲)، یعنی

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$



مشخص می کند می پردازیم.

گیریم محورهای مختصات را به اندازه زاویه  $\theta$  حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم. منحنی که معادله (۲) مشخص می کند در دستگاه جدید دارای معادله

$$a((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y')^2 + b((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y')((\sin \theta)x' + (\cos \theta)y') \\ + c((\sin \theta)x' + (\cos \theta)y')^2 + d((\cos \theta)x' - (\sin \theta)y') + e((\sin \theta)x' + (\cos \theta)y') \\ + f = 0,$$

می باشد. این معادله پس از به توان رساندن جملات آن و مرتب کردن جملات به صورت

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$

تبدیل می شود، که در آن ضریب  $x'y'$ ، یعنی  $B$ ، به صورت زیر است:

$$B = 2(c - a)\sin \theta \cos \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

حال  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  را طوری تعیین می کنیم که ضریب  $x'y'$  برابر صفر شود، یعنی داشته باشیم  $B = 0$ :

$$2(c - a)\sin \theta \cos \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0,$$

$$(c - a)\sin 2\theta + b \cos 2\theta = 0,$$

$$(c - a)\tan 2\theta + b = 0,$$

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a - c}.$$

پس اگر  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  را طوری انتخاب کنیم که  $\tan 2\theta = \frac{b}{a - c}$ ، آنگاه بازنویسی شده معادله

(۲) نسبت به دستگاه دوران یافته به اندازه زاویه  $\theta$  به صورت

$$Ax'^2 + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0,$$

خواهد بود. اما بنا بر قضیه ۱، مکان هندسی نقاطی از صفحه را که معادله اخیر به دست می دهد، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط متقاطع و یا کل صفحه می باشد؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است و لذا مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله (۲) صدق می کنند نیز چنین است. پس قضیه زیر را ثابت کرده ایم.

**قضیه ۲.** مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

صدق می کنند، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط

مقاطع و یا کل صفحه می باشد؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است.

مثال ۱. می خواهیم نوع مقطع مخروطی  $17x^2 - 6xy + 9y^2 - 72 = 0$  را تعیین کنیم. در این مثال داریم  $a=17$ ،  $b=-6$ ،  $c=9$ ،  $d=e=0$  و  $f=-72$ . محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه زاویه  $\theta$  دوران می دهیم که در آن  $\theta$  از تساوی زیر به دست می آید

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{-6}{17-9} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}.$$

اکنون با توجه به اتحاد  $\frac{1}{\cos^2 2\theta} = 1 + \tan^2 2\theta$  به دست می آوریم  $\cos 2\theta = \frac{-4}{5}$  و لذا از

اتحادهای  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$  و  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$  نتیجه می شود  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$  و

$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ . اکنون معادله داده شده در مثال، نسبت به دستگاه دوران یافته با توجه به (۳)

به صورت

$$17\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)^2 - 6\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right) + 9\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)^2 - 72 = 0$$

تبدیل می شود که پس از ساده کردن به صورت

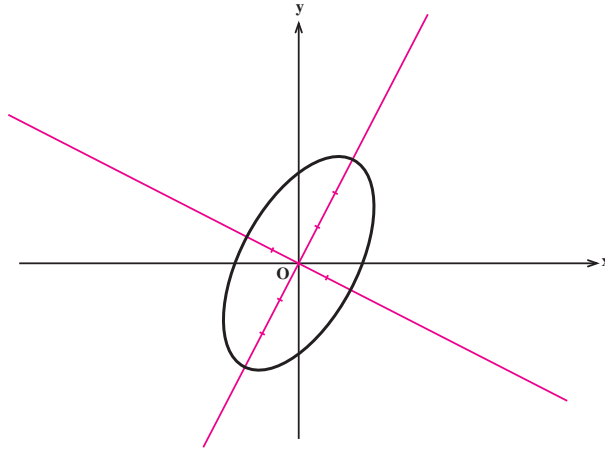
$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

در می آید. چون این معادله یک بیضی را مشخص می کند، لذا معادله داده شده در مثال نیز بیضی را

مشخص می کرده است. حال با توجه به  $\tan 2\theta = \frac{-3}{4}$  و به کمک ماشین حساب های مهندسی می توانیم

اندازه زاویه  $\theta$  را به دست آوریم که در اینجا تقریباً برابر  $71/6$  درجه می باشد. پس برای رسم بیضی داده شده در مثال کافی است محورهای مختصات را به اندازه  $71/6$  درجه حول مبدأ مختصات در

جهت مثلثاتی دوران دهیم و سپس در دستگاه جدید بیضی  $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$  را رسم کنیم:



شکل ۳



۱. اگر محورهای مختصات را به اندازه زاویه  $\theta$  حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم، هر یک از معادلات زیر را نسبت به دستگاه جدید بازنویسی کنید.

الف)  $x^2 + y^2 = 49$  ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ,

ب)  $x^2 + y^2 = 25$  ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$  ,

ج)  $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$  ,  $\theta = \frac{\pi}{6}$  ,

د)  $x^2 + 8xy + y^2 - 75 = 0$  ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  .

۲. با استفاده از دوران محورهای مختصات به اندازه‌ای مناسب، نوع هر یک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و آنها را رسم کنید.

الف)  $x^2 - 4xy + y^2 - 12 = 0$  ,

ب)  $x^2 + xy + y^2 - 6 = 0$  ,

ج)  $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0$  ,

د)  $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$  ,

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 16\sqrt{3}x - 16y = 0, \quad \text{هـ)}$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y = 0. \quad \text{و)}$$

۳. فرض کنید معادله  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  داده شده است. محورهای

مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه‌ای دلخواه دوران می‌دهیم. اگر معادله بالا

نسبت به دستگاه جدید دوران یافته به صورت  $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0$

بازنویسی شود، ثابت کنید  $B^2 - 4AC = b^2 - 4ac$ .

از این‌جا نتیجه‌گیری کنید مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

صدق می‌کنند به صورت زیر رده‌بندی می‌شوند:

$b^2 - 4ac$	نوع مکان هندسی
منفی	تهی، نقطه، دایره، بیضی
صفر	تهی، یک خط، دو خط موازی، کل صفحه، سهمی
مثبت	دو خط متقاطع، هذلولی

## داستان ماتریس

می‌گویند مفهوم ماتریس قبل از این که ابداع شود تعمیق و گسترش یافته بود، چه مقدم بر آن مفهوم دترمینان در مطالعه دستگاه‌های معادلات خطی در اوایل قرن هیجدهم میلادی مطرح شده بود. ولی واژه ماتریس اولین بار در سال ۱۸۵۰ میلادی به وسیله جیمز جوزف سیلوستر، ریاضیدان انگلیسی، در واقع برای تمیز دادن ماتریس‌ها از دترمینان‌ها به کار گرفته شد.



سیلوستر

# ۴

## ماتریس و دترمینان

### ۱.۴ ماتریس‌ها

ماتریس را به عنوان آرایه‌ای مستطیلی از اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

اعداد داخل آرایه را درآیه‌های ماتریس می‌نامیم. زیرنویس‌های  $i$  و  $j$  درآیه  $a_{ij}$ ، برای مشخص کردن سطر و ستونی که  $a_{ij}$  در آنها قرار دارد، به کار می‌روند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس است. درآیه  $a_{23}$  در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد و در این مثال، این درآیه ۲ می‌باشد. در این مثال درآیه  $a_{33}$  برابر صفر است.

ماتریسی را که دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون باشد، ماتریس  $m \times n$  (بخوانید ماتریس  $m$  در  $n$ )<sup>۱</sup>

می‌نامیم. وقتی که  $m = n$ ، ماتریس را ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  می‌نامیم. برای مثال  $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

۱- هر ماتریس  $1 \times 1$  مانند  $[a_{11}]$  را با عدد حقیقی  $a_{11}$  یکی می‌گیریم.

یک ماتریس  $3 \times 2$  است، حال آنکه  $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  یک ماتریس  $2 \times 3$  می باشد و  $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ماتریس مربعی از مرتبه ۲. در جدول بندی داده ها، وقتی که تعداد آنها زیاد است، موضوع استفاده از ماتریس ها به طور طبیعی پیش می آید. برای مثال فاصله بین شهرهای اصفهان، تهران و شیراز را می توان به صورت یک ماتریس جدول بندی کرد :

شیراز تهران اصفهان

$$\begin{matrix} \text{اصفهان} \\ \text{تهران} \\ \text{شیراز} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 414 & 481 \\ 414 & 0 & 895 \\ 481 & 895 & 0 \end{bmatrix}$$

اغلب نماد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

را به صورت  $[a_{ij}]_{m \times n}$  خلاصه می کنیم. زیرنویس  $m \times n$  اندازه ماتریس را نشان می دهد و کل نماد به معنی یک ماتریس  $m \times n$  است که درآیه سطر  $i$ ام و ستون زام آن  $a_{ij}$  است. برای مثال، با این نماد،  $[ij]_{2 \times 3}$  یعنی ماتریس  $2 \times 3$  ای که درآیه سطر  $i$ ام و ستون زام آن برابر  $j$  می باشد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

همچنین  $[a_{ij}]_{3 \times 3}$  با تعریف  $a_{ij} = \begin{cases} j-i & \text{اگر } j < i \\ j+i & \text{اگر } j \geq i \end{cases}$  یعنی ماتریس مربعی از مرتبه ۳ که به صورت

زیر است :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تذکره. از این پس، وقتی در این کتاب می نویسیم  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  است (یا ماتریس

$(A = [a_{ij}]_{m \times n})$ ،  $m$  و  $n$  را حداکثر ۳ فرض می‌کنیم.

فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  باشد. درآیه‌های  $a_{11}$ ،  $a_{22}$ ،  $\dots$ ،  $a_{nn}$  را درآیه‌های قطر اصلی ماتریس  $A$  می‌نامیم. اگر درآیه‌های خارج از قطر اصلی ماتریس  $A$  برابر

صفر باشند،  $A$  را ماتریس قطری از مرتبه  $n$  می‌نامیم. مثلاً  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  یک ماتریس قطری مرتبه ۳

است. اگر درآیه‌های بالای قطر اصلی ماتریس  $A$  برابر صفر باشند،  $A$  را ماتریس پایین مثلثی از

مرتبه  $n$  می‌نامیم. مثلاً  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$  یک ماتریس پایین مثلثی از مرتبه ۳ است. اگر درآیه‌های پایینی

قطر اصلی ماتریس  $A$  برابر صفر باشند،  $A$  را ماتریس بالامثلثی از مرتبه  $n$  می‌نامیم. مثلاً  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

یک ماتریس بالامثلثی از مرتبه ۳ است.

**تعریف.** دو ماتریس  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times q}$  مساوی اند اگر دارای مرتبه یکسان

باشند، یعنی  $m = p$  و  $n = q$ ، و به ازای هر  $i$  و هر  $j$ ،  $a_{ij} = b_{ij}$ . اگر  $A$  و  $B$  مساوی باشند، می‌نویسیم  $A = B$ .

## جمع ماتریس‌ها و ضرب اعداد حقیقی در آنها

در بالا ماتریس‌ها را معرفی کردیم و این‌که چه موقع دو ماتریس مساوی‌اند را تعریف کردیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم جمع دو ماتریس چه مواقعی امکان دارد و در این صورت حاصلجمع دو ماتریس چه خواهد بود. همچنین ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس را تعریف خواهیم کرد.

**تعریف.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  دو ماتریس هم‌رتبه باشند. در این

صورت مجموع آنها، یعنی  $A + B$ ، یک ماتریس  $m \times n$  است:  $A + B = [c_{ij}]_{m \times n}$ ، و به صورت



زیر تعریف می‌شود

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

همچنین برای عدد حقیقی داده شده  $r$ ، حاصلضرب  $rA$  در ماتریس  $A$ ، یعنی  $rA$ ، نیز یک

ماتریس  $m \times n$  است:  $rA = [d_{ij}]_{m \times n}$ ، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d_{ij} = ra_{ij}.$$

برای مثال دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$  را نمی‌توانیم جمع کنیم، زیرا

هم مرتبه نمی‌باشند ولیکن مجموع دو ماتریس  $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ماتریس

زیر است:

$$C + D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

همچنین ضرب عدد حقیقی ۲ در ماتریس  $A$  نیز ماتریس زیر است:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

این اعمال را با یک مثال ساده تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. دو دبیرستان  $a$  و  $b$  را در نظر می‌گیریم. تعداد دانش‌آموزانی که در دبیرستان  $a$  مجاز

به گرفتن درس «هندسه تحلیلی و جبر خطی» و «ریاضیات گسسته» می‌باشند  $100$  نفر و در دبیرستان

$b$  برابر  $50$  نفر می‌باشند. تعداد دانش‌آموزان این دو دبیرستان که در درس «هندسه تحلیلی و جبر

خطی» و «ریاضیات گسسته» قبول یا مردود شده‌اند در ماتریس‌های زیر جدول‌بندی

شده‌اند (ماتریس  $A$  مربوط به دبیرستان  $a$  و ماتریس  $B$  مربوط به دبیرستان  $b$  است):

	مردود قبول	مردود قبول
هندسه تحلیلی و جبر خطی $A =$ ریاضیات گسسته	$\begin{bmatrix} 90 & 10 \\ 189 & 11 \end{bmatrix}$	هندسه تحلیلی و جبر خطی $B =$ ریاضیات گسسته
		$\begin{bmatrix} 42 & 8 \\ 40 & 10 \end{bmatrix}$

لذا برای مثال،  $90$  دانش‌آموز از دبیرستان  $a$  در درس «هندسه تحلیلی و جبر خطی» قبول

شده‌اند، حال آنکه در دبیرستان  $b$  فقط  $42$  نفر در این درس قبول شده‌اند.

مجموع دو ماتریس  $A$  و  $B$ ، یعنی  $A+B = \begin{bmatrix} 132 & 18 \\ 129 & 21 \end{bmatrix}$ ، تعداد کل دانش‌آموزان این دو

دبیرستان را که در این دو درس قبول یا مردود شده‌اند نشان می‌دهد. بنابراین ۱۳۲ دانش‌آموز از این دو دبیرستان در درس «هندسه تحلیلی و جبر خطی» قبول و ۱۸ نفر در این درس مردود شده‌اند. همچنین ۱۲۹ دانش‌آموز از این دو دبیرستان در درس «ریاضیات گسسته» قبول و ۲۱ نفر آنها در این

درس مردود شده‌اند. ماتریس  $\begin{bmatrix} 88 & 12 \\ 86 & 14 \end{bmatrix}$   $(A+B) = \frac{2}{3}(A+B) = \frac{1}{15}(A+B)$  نیز درصد قبولی یا

مردودی در این دو دبیرستان را نشان می‌دهد. مثلاً ۸۸٪ دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس «هندسه تحلیلی و جبر خطی» قبول شده‌اند (و ۱۲٪ مردود) و ۸۶٪ دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس «ریاضیات گسسته» قبول شده‌اند (و ۱۴٪ مردود).

**تعریف.** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد. قرینه  $A$  را ماتریسی  $m \times n$  تعریف می‌کنیم که از حاصلضرب عدد  $-1$  در ماتریس  $A$  به وجود می‌آید. این ماتریس را با  $-A$  نمایش می‌دهیم، یعنی  $-A = (-1)A$ .

توجه می‌کنیم که درآیه‌های قرینه ماتریس  $A$ ، قرینه درآیه‌های ماتریس  $A$  هستند و لذا بنا بر تعریف جمع دو ماتریس، مجموع  $A$  و  $-A$  ماتریس  $m \times n$  است که تمام درآیه‌هایش برابر صفر است. چنین ماتریسی را ماتریس صفر می‌نامیم و آن را با  $O$  (اگر لازم به تأکید باشد با  $O_{m \times n}$ ) نمایش می‌دهیم.

**تعریف.** اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم‌رتبه باشند، تفاضل  $B$  از  $A$  را با  $A - B$  نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A - B = A + (-B).$$

جمع ماتریس‌ها و ضرب آنها در اعداد حقیقی از همان قوانین معمولی حساب تبعیت می‌کنند. در قضیه صفحه بعد این ویژگی‌های ابتدایی را به‌طور رسمی بیان می‌کنیم.

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ،  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  و  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  سه ماتریس هم مرتبه

باشند و  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی. در این صورت

$$(1) \quad A + B = B + A \quad (\text{خاصیت جابه جایی جمع})$$

$$(2) \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری جمع})$$

$$(3) \quad A + O = O + A = A$$

$$(4) \quad A + (-A) = (-A) + A = O$$

$$(5) \quad r(A + B) = rA + rB$$

$$(6) \quad (r + s)A = rA + sA$$

$$(7) \quad (rs)A = r(sA)$$

$$(8) \quad 1A = A$$

**انبات.** اثبات ویژگی‌های بالا همه سر راست است و به کمک تعریف به سادگی انجام می‌شود.

آنها را به عنوان تمرین رها می‌کنیم. ■

## ضرب ماتریس‌ها

نحوه ضرب کردن ماتریس‌ها، که اکنون شرح خواهیم داد، در نگاه اول چندان آشنا نیست و بررسی منشأ این تعریف از برنامه‌دستی این کتاب خارج است.

**تعریف.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  دو ماتریس باشند (توجه می‌کنیم که

تعداد ستون‌های  $A$  برابر تعداد سطرهای  $B$  است). در این صورت حاصلضرب  $A$  در  $B$  (با همین

ترتیب)، یعنی  $AB$ ، یک ماتریس  $m \times p$  است:  $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$ ، و به صورت زیر تعریف

می‌شود

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

توجه می‌کنیم که بنابر تعریف بالا برای این که درآیة سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $AB$ ، یعنی

$c_{ij}$ ، را پیدا کنیم باید حاصلضرب داخلی سطر  $i$ ام از ماتریس  $A$  را (به عنوان یک بردار) در ستون  $j$ ام

از ماتریس B (به عنوان برداری دیگر) محاسبه کنیم. برای مثال حاصلضرب

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

بدون معنی است ولیکن

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix},$$

زیرا

$$(1, 2, 3) \cdot (7, 9, 11) = (1 \times 7) + (2 \times 9) + (3 \times 11) = 58,$$

$$(1, 2, 3) \cdot (8, 10, 12) = (1 \times 8) + (2 \times 10) + (3 \times 12) = 64,$$

$$(4, 5, 6) \cdot (7, 9, 11) = (4 \times 7) + (5 \times 9) + (6 \times 11) = 139,$$

$$(4, 5, 6) \cdot (8, 10, 12) = (4 \times 8) + (5 \times 10) + (6 \times 12) = 154.$$

تذکره. اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد، آنگاه منظور از  $A^2$  یعنی AA،  $A^3$  یعنی

$A^2A$  و الی آخر.

مثال زیر نشان می دهد که چگونه ضرب ماتریس ها ممکن است در یک مبحث زیست شناسی

پیش آید.

مثال ۲. در بخشی از یک جنگل، شیر و گرگ هایی زندگی می کنند که از خرگوش و آهوهای

آن جنگل تغذیه می کنند. همچنین این خرگوش و آهوها از کلم، کاهو و علف موجود در آن جنگل

تغذیه می کنند. ماتریس زیر مقدار کلم، کاهو و علفی را که هر یک از خرگوش و آهوها به طور متوسط

در روز می خورند بر حسب گرم مشخص می کند

	کلم	کاهو	علف
A =	خرگوش	$\begin{bmatrix} 200 & 350 & 150 \\ 300 & 150 & 200 \end{bmatrix}$	
	آهو		

پس یک آهو مقدار ۱۵۰ گرم کاهو را در یک روز مصرف می کند. ماتریس دیگری تعداد

خرگوش و آهوهای را که شیر یا گرگ‌ها به طور متوسط در یک روز می‌خورند، مشخص می‌نماید

$$B = \begin{matrix} & \text{آهو} & \text{خرگوش} \\ \begin{matrix} \text{شیر} \\ \text{گرگ} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

لذا یک گرگ به طور متوسط، چهار خرگوش و دو آهو را در یک روز می‌خورد. می‌خواهیم تعیین کنیم هر شیر و گرگ چند گرم کلم، کاهو و علف را به طور غیرمستقیم در یک روز مصرف می‌کند. برای مثال بررسی می‌کنیم که یک شیر، چند گرم کلم را به طور غیرمستقیم مصرف می‌کند. اولاً، یک شیر، سه خرگوش را می‌خورد و هر خرگوش، ۲۰۰ گرم کلم را می‌خورد. لذا، با خوردن خرگوش‌ها، یک شیر به طور غیرمستقیم  $3 \times 200$  گرم کلم را مصرف می‌کند. همچنین یک شیر، یک آهو را می‌خورد و آهو ۳۰۰ گرم کلم را مصرف کرده است. در این صورت، یک شیر به طور غیرمستقیم  $1 \times 300$  گرم کلم را مصرف می‌کند. پس روی هم رفته، یک شیر،  $3 \times 200 + 1 \times 300$  گرم کلم را به طور غیرمستقیم مصرف می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که این عدد همان درآیه سطر اول و ستون اول از ماتریس BA است. همین طور، درآیه سطر اول و ستون دوم آن مقداری از کاهو برحسب گرم است که یک شیر به طور غیرمستقیم می‌خورد، و به همین ترتیب حاصلضرب BA را حساب می‌کنیم

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 350 & 150 \\ 300 & 150 & 200 \end{bmatrix}, \\ = \begin{bmatrix} 900 & 1200 & 650 \\ 1400 & 1700 & 1000 \end{bmatrix}.$$

از اینجا اطلاعات مطلوب را می‌توانیم بخوانیم. برای مثال، هر گرگ به طور غیرمستقیم ۱۰۰۰ گرم از علف را مصرف می‌کند.

تذکره. فرض کنیم A و B دو ماتریس مربعی از مرتبه ۲ باشند که به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در این صورت

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

پس  $AB \neq BA$  و این نشان می‌دهد که حاصلضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد (به این دلیل در تعریف حاصلضرب دو ماتریس  $A$  و  $B$  نوشتیم حاصلضرب  $A$  در  $B$  (با همین ترتیب) ولیکن برای مجموع  $A$  و  $B$  چنین چیزی نوشتیم). حتی

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهد که حاصلضرب دو ماتریس غیرصفر، ممکن است صفر شود!

در زیر چند ویژگی ابتدایی مربوط به حاصلضرب ماتریس‌ها را بیان می‌کنیم. ویژگی اول برقراری خاصیت شرکت‌پذیری برای ضرب ماتریس‌ها است.

**قضیه ۲.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ،  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  و  $C = [c_{ij}]_{p \times q}$  سه ماتریس باشند. در این صورت  $A(BC) = (AB)C$ .

**اثبات.** ماتریس  $BC$  یک ماتریس  $n \times q$  است و لذا  $A(BC)$  ماتریس  $m \times q$  خواهد بود. از طرفی  $AB$  ماتریس  $m \times p$  است و در نتیجه  $(AB)C$  نیز یک ماتریس  $m \times q$  خواهد بود. پس  $A(BC)$  و  $(AB)C$  هم مرتبه هستند. اکنون قرار می‌دهیم  $BC = [d_{ij}]_{n \times q}$ ،  $A(BC) = [e_{ij}]_{m \times q}$ ،  $AB = [f_{ij}]_{m \times p}$  و  $(AB)C = [g_{ij}]_{m \times q}$  و ثابت می‌کنیم برای هر  $i$  و هر  $j$ ،  $e_{ij} = g_{ij}$ :

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left( \sum_{t=1}^p b_{kt} c_{tj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^p a_{ik} (b_{kt} c_{tj}) \\ &= \sum_{t=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kt} c_{tj}) \\ &= \sum_{t=1}^p \sum_{k=1}^n (a_{ik} b_{kt}) c_{tj} \\ &= \sum_{t=1}^p \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kt} \right) c_{tj} \end{aligned}$$

$$= \sum_{t=1}^p f_{it} c_{tj}$$

$$= g_{ij}.$$

در نتیجه  $\blacksquare . A(BC) = (AB)C$

ویژگی دیگر حاکی از توزیع پذیری ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع آنها است.

**قضیه ۳.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ،  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  و  $C = [c_{ij}]_{n \times p}$  سه ماتریس باشند.

در این صورت  $A(B+C) = AB + AC$ .

**اثبات.** ماتریس  $B+C$  یک ماتریس  $n \times p$  است و لذا  $A(B+C)$  ماتریس  $m \times p$  خواهد بود. از طرفی  $AB$  و  $AC$  هر دو ماتریس‌های  $m \times p$  هستند و لذا  $AB + AC$  نیز یک ماتریس  $m \times p$  خواهد بود. پس  $A(B+C)$  و  $AB + AC$  هر دو ماتریس‌های  $m \times p$  هستند. اکنون قرار می‌دهیم  $B+C = [d_{ij}]_{n \times p}$ ،  $A(B+C) = [e_{ij}]_{m \times p}$ ،  $AB = [f_{ij}]_{m \times p}$ ،  $AC = [g_{ij}]_{m \times p}$  و  $AB + AC = [h_{ij}]_{m \times p}$  ثابت می‌کنیم برای هر  $i$  و هر  $j$ ،  $e_{ij} = h_{ij}$ :

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^n (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}$$

$$= f_{ij} + g_{ij}$$

$$= h_{ij}.$$

در نتیجه  $\blacksquare . A(B+C) = AB + AC$

تذکر. برای ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  داریم  $(A+B)C = AC + BC$ ، مشروط بر آنکه کلیه اعمال جمع و ضرب این دستورها امکان پذیر باشند. این مطلب را به صورت قضیه‌ای دقیق، مانند

قضیه قبل، بیان کرده و آن را به عنوان تمرین ثابت کنید.

ویژگی (۳) از قضیه ۱ حاکی از آن است که ماتریس صفر این خاصیت را دارد که با هر ماتریسی جمع شود، خود آن ماتریس را به ما می دهد، همانگونه که در میان اعداد وقتی عدد صفر با هر عددی جمع شود، حاصل همان عدد است. اکنون با توجه به این که عدد یک وقتی در عددی ضرب شود، خود آن عدد را به ما می دهد، سؤال طبیعی پیش می آید و آن این که «آیا در میان ماتریس ها، ماتریسی وجود دارد که در هر ماتریسی ضرب شود، خود آن ماتریس را بدهد یا خیر؟». جواب به این سؤال مثبت است. در زیر این ماتریس را تعریف می کنیم و سپس «خاصیت ویژه» آن را ثابت می کنیم.

**تعریف.** ماتریس همانی از مرتبه  $n$  که آن را با  $I$  (اگر لازم به تأکید باشد با  $I_n$ ) نشان می دهیم را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$I = [\delta_{ij}]_{n \times n} \quad \text{که در آن} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

توجه می کنیم که در واقع ماتریس همانی مرتبه  $n$ ، یعنی  $I_n$ ، ماتریسی قطری است که تمام

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{مثلاً}$$

**قضیه ۴.** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس مربعی مرتبه  $n$  باشد. در این صورت  $AI_n = I_n A = A$ .

**اثبات.** واضح است که  $AI_n$  و  $A$  هر دو  $n \times n$  و لذا هم مرتبه هستند. قرار می دهیم

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \quad \text{و} \quad AI_n = [b_{ij}]_{n \times n} \quad \text{و ثابت می کنیم برای هر } i \text{ و } j, \quad b_{ij} = a_{ij} :$$

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} \\ &= a_{ij} \delta_{jj} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{ik} \delta_{kj} \\ &= a_{ij}(1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{ik}(0) \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$



در نتیجه  $AI_n = A$ . به همین شکل می توانیم ثابت کنیم  $I_n A = A$ . ■

تذکره. ویژگی (۴) از قضیه ۱ حاکی از آن است که هر ماتریس  $m \times n$  مانند  $A$  دارای قرینه است، یعنی ماتریسی  $(-A)$  موجود است که مجموع آن با  $A$  برابر  $O$  می شود، همانند اعداد، که برای هر عدد  $a$  قرینه ای موجود است، یعنی عددی  $(-a)$  که مجموع آن با  $a$  برابر صفر می گردد. اکنون با توجه به این که هر عدد مخالف صفر  $a$  دارای وارون است، یعنی این که عددی  $(\frac{1}{a})$  موجود است که حاصلضرب آن در  $a$  برابر یک می شود، سؤالی طبیعی پیش می آید و آن این که «آیا برای هر ماتریس غیر صفر  $A$ ، ماتریسی موجود است که وقتی در آن ضرب شود، حاصل برابر  $I$  شود؟». معادلاً «آیا هر ماتریس غیر صفر  $A$ ، وارون دارد؟». جواب به این سؤال منفی است، زیرا مثلاً اگر برای  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ماتریسی مانند  $B$  موجود باشد که  $AB = I$  آنگاه  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  . بنابراین ویژگی های ذکر شده در بالا  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  یا  $O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  که تناقض است. در بخش ۱ از فصل ۵ در مورد این موضوع بیشتر بحث خواهیم کرد.

### ترانهادهٔ یک ماتریس

**تعریف.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد. در این صورت ترانهادهٔ  $A$  که آن را با  $A^t$  نمایش می دهیم یک ماتریس  $n \times m$  است:  $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$ ، و به صورت زیر تعریف می شود

$$b_{ij} = a_{ji} .$$

توجه می کنیم که در واقع ترانهادهٔ یک ماتریس مانند  $A$ ، ماتریسی است که از عوض کردن جای سطرها و ستون های ماتریس  $A$  به دست می آید. برای مثال اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  آنگاه

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} .$$

در زیر ویژگی های ابتدایی مربوط به ارتباط یک ماتریس و ترانهادهٔ آن را می آوریم.

**قضیه ۵.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$  دو ماتریس مربعی مرتبه  $n$  باشند و  $r$

یک عدد حقیقی. در این صورت

$$(A + B)^t = A^t + B^t \quad (۱)$$

$$(rA)^t = rA^t \quad (۲)$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (۳)$$

$$(A^t)^t = A \quad (۴)$$

**اثبات.** اثبات ویژگی‌های بالا همه سر راست است و به کمک تعریف به سادگی انجام می‌شود.

فقط ویژگی (۳) را ثابت می‌کنیم و بقیه را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

واضح است که  $(AB)^t$  و  $B^t A^t$  هر دو ماتریس‌های  $n \times n$  و لذا هم مرتبه هستند. اکنون

قرار می‌دهیم  $AB = [c_{ij}]_{n \times n}$ ،  $(AB)^t = [d_{ij}]_{n \times n}$ ،  $A^t = [e_{ij}]_{n \times n}$ ،  $B^t = [f_{ij}]_{n \times n}$  و

$$B^t A^t = [g_{ij}]_{n \times n} \quad \text{و ثابت می‌کنیم برای هر } i \text{ و هر } j, d_{ij} = g_{ij} :$$

$$\begin{aligned} d_{ij} &= c_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n f_{ik} e_{kj} \\ &= g_{ij} \end{aligned}$$

در نتیجه  $(AB)^t = B^t A^t$ . ■

**تعریف.** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  باشد.  $A$  را متقارن می‌نامیم هرگاه

$$A^t = A \quad \text{و آنرا پاد متقارن می‌نامیم هرگاه } A^t = -A.$$

برای مثال ماتریس  $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$  یک ماتریس متقارن است، زیرا  $A^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} = A$ ، و

$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$  پاد متقارن زیرا  $B^t = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = -B$ ، حال آنکه  $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$  نه متقارن است

و نه پاد متقارن.

تذکر. فرض کنیم  $A$  یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  باشد. با توجه به ویژگی‌های ذکرشده در قضیه بالا داریم

$$\left[ \frac{1}{2}(A + A^t) \right]^t = \frac{1}{2}(A + A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t),$$

$$\left[ \frac{1}{2}(A - A^t) \right]^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t).$$

در نتیجه  $\frac{1}{2}(A + A^t)$  ماتریس متقارن و  $\frac{1}{2}(A - A^t)$  ماتریس پاد متقارن است. اکنون

با توجه به

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

نتیجه می‌گیریم که هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

### ماتریس‌ها و تبدیلات هندسی در صفحه

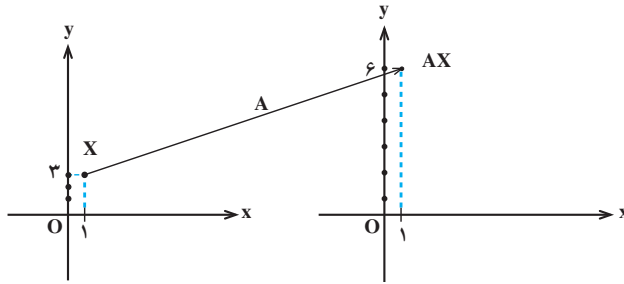
در اینجا نقاط  $\mathbb{R}^2$  را به جای  $(x, y)$  با ماتریس  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  که یک ماتریس  $2 \times 1$  است نمایش

می‌دهیم. گیریم  $A$  یک ماتریس  $2 \times 2$  باشد. برای هر نقطه  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  از  $\mathbb{R}^2$  یک  $AX = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  یک

ماتریس  $2 \times 1$  است و لذا نقطه‌ای از  $\mathbb{R}^2$  را نمایش می‌دهد. در واقع این نقطه از ضرب ماتریس  $A$  در  $X$  به وجود می‌آید. پس می‌توانیم بگوییم که یک ماتریس  $2 \times 2$  با ضرب در نقطه‌ای از  $\mathbb{R}^2$ ، آن را به نقطه‌ای از  $\mathbb{R}^2$  می‌نگارد و لذا ماتریس‌های  $2 \times 2$  را می‌توانیم به عنوان تبدیلات هندسی در صفحه در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  را در نظر می‌گیریم. این ماتریس نقطه  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  از  $\mathbb{R}^2$  را

به نقطه  $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$  می‌نگارد (به شکل ۱ نگاه کنید).



شکل ۱

اکنون فرض کنیم  $F$  یک شکل هندسی خاص در صفحه باشد. مثلاً می‌توانیم  $F$  را محیط و

درون دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در نظر بگیریم:  $F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ .

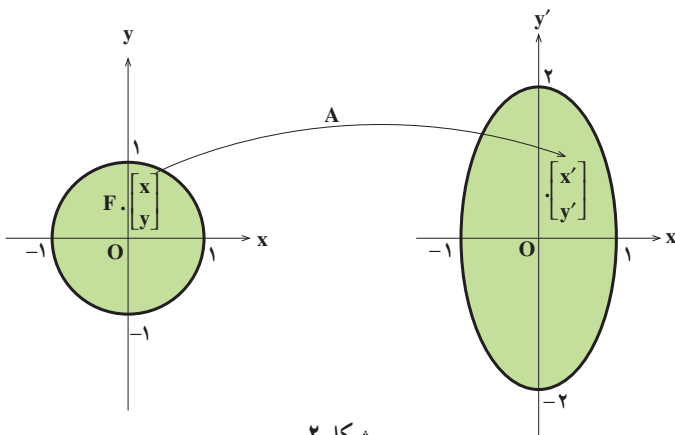
می‌خواهیم بررسی کنیم  $A$  شکل  $F$  را به چه شکلی تبدیل خواهد کرد. یعنی اگر  $A$  بر تک تک نقاط  $F$  اثر کند، نقاط حاصل چه شکلی پدید می‌آورند. بگیریم  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in F$ ، لذا  $x^2 + y^2 \leq 1$ . حال اگر

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$  برابر است با  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ، یعنی نقطه حاصل، یعنی  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  روی  $A$

و لذا  $x = x'$  و  $y = \frac{1}{2}y'$ . در نتیجه  $x'^2 + (\frac{1}{2}y')^2 \leq 1$ ، یا  $x'^2 + \frac{y'^2}{4} \leq 1$ . پس نقاط حاصل از اثر

روی نقاط  $F$ ، یعنی  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  ها، در  $x'^2 + \frac{y'^2}{4} \leq 1$  صدق می‌کنند و لذا شکل حاصل از اثر  $A$  روی

$F$ ، محیط و درون یک بیضی است به مرکز مبدأ مختصات، قطر بزرگ ۴ و قطر کوچک ۲ (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

در سال دوم دیده‌ایم که ماتریس‌های  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  و

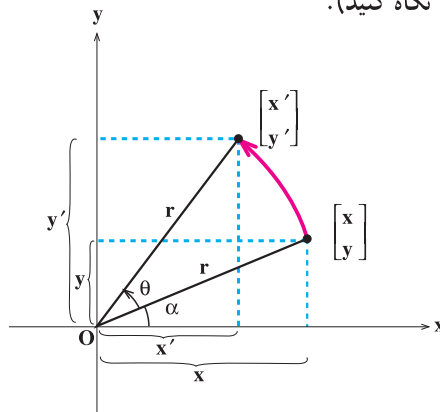
$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  در اثر روی نقاط صفحه به ترتیب آنها را نسبت به محور  $x$  ها، محور  $y$  ها، خط  $y=x$ ، خط  $y=-x$  و مبدأ مختصات قرینه می‌کند. در مثال زیر ماتریسی را پیدا می‌کنیم که در اثر روی نقاط صفحه آنها را به اندازه زاویه ثابت  $\theta$  حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران می‌دهند.

مثال ۴. فرض کنیم نقطه  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  را به اندازه زاویه ثابت  $\theta$  حول مبدأ مختصات در جهت

مثلثاتی دوران دهیم. می‌خواهیم مختصات نقطه حاصل از این دوران را پیدا کنیم. گیریم  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  نقطه

حاصل از دوران باشد. واضح است که فاصله  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  از مبدأ مختصات برابر می‌باشد که آن را

$r$  فرض می‌کنیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

چون  $\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$  و  $\begin{cases} x' = r \cos(\alpha + \theta) \\ y' = r \sin(\alpha + \theta) \end{cases}$ ، لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس

به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x' = (\cos \theta)x + (-\sin \theta)y \\ y' = (\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{cases}$$

لذا دوران یافته  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه  $\theta$  می باشد. حال توجه می کنیم که

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\cos \theta)x + (-\sin \theta)y \\ (\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

در نتیجه ماتریس

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

که آن را با  $R_\theta$  نمایش می دهیم، در اثر روی نقاط  $\mathbb{R}^2$ ، آنها را به اندازه  $\theta$  در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دوران می دهد.



۱. ماتریس های زیر را به صورت آرایه مستطیلی بنویسید.

(الف)  $[i + j]_{2 \times 2}$  ، (ب)  $[ij]_{3 \times 3}$  ،

(ج)  $[i^2 + j^2]_{2 \times 3}$  ، (د)  $[2i + 3j]_{3 \times 3}$  .

۲. عبارات زیر را محاسبه کنید.

(الف)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ب)  $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(ج)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

۳. فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ . یک ماتریس  $3 \times 2$  مانند  $C$  را طوری

پیدا کنید که  $A + B - C = O_{3 \times 3}$ .

۴. قضیه ۱ را ثابت کنید.

۵. حاصلضربهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\text{ب) } \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{۶. اگر } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

نشان دهید  $CA = C$  و  $AC = A$ ،  $AB = BA = O$ .

۷. فرض کنید  $a, b, c, d$  چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

بنابراین، یک واحد از  $a$ ، شش واحد از  $c$  است، یک واحد از  $b$  هشت واحد از  $d$  است، و یک واحد از  $c$  نصف واحد از  $b$  است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح

دهید که چرا  $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$ . آیا می‌توانید بدون محاسبه مستقیم  $A^2$  را پیدا کنید؟

۸. کارخانه‌ای سه محصول  $a, b, c$  را به دو بازار  $m$  و  $n$  می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته

شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

داده شده است. ماتریس‌های  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$  به ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شده هر واحد از  $a, b$  و  $c$  را نشان می‌دهند. درآیه‌های هر یک از ماتریس‌های  $AB, AC$  و  $AB - AC$  را تعبیر کنید.

۹. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید  $A^2 - 4A - 5I_3 = O$ .

۱۰. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، مطلوب است محاسبه  $A^{10}$ .

۱۱. اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$ .

۱۲. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، به کمک محاسبه توان‌های مختلف  $A$ ، نشان دهید عدد طبیعی

$n$  موجود است که  $A^n = O$ .

۱۳. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $A^n = (2^n - 1)A - 2(2^{n-1} - 1)I_2$ .

۱۴. ویژگی‌های ۱، ۲ و ۴ از قضیه ۵ را ثابت کنید.

۱۵. اگر  $AB = BA$  که  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ یا ۳ هستند و هر دو متقارن یا هر دو

پاد متقارن، ثابت کنید  $AB$  متقارن است.

۱۶. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس

پاد متقارن بنویسید.

۱۷. فرض کنید  $F$  محیط و درون دایره  $x^2 + y^2 = 4$  باشد:

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  در اثر روی  $F$ ،  $F$  را به چه شکل هندسی تبدیل می‌کند؟

۱۸. برای زاویه ثابت داده شده  $\theta$  و عدد طبیعی  $n$ ، ثابت کنید  $R_\theta^n = R_{n\theta}$ ، یعنی

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}. \quad 112$$



۱۹. به کمک تمرین قبل  $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{\circ\circ}$  را محاسبه کنید.

## ۲.۴ دترمینان‌ها

در سال دوم دیده‌ایم که می‌توانیم به یک ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  یک عدد وابسته

کنیم که به آن دترمینان ماتریس  $A$  می‌گفتند و با  $|A|$  یا  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  نمایش می‌دادند و به صورت

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

تعریف می‌شد. اکنون در این بخش می‌خواهیم مفهوم دترمینان را برای ماتریس  $3 \times 3$  تعریف کنیم. در زیر تعاریفی می‌آوریم و به کمک آنها این مفهوم را شرح می‌دهیم.

**تعریف.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت  $ij$  - امین کهاد

ماتریس  $A$  را که با  $M_{ij}$  نمایش می‌دهیم ماتریسی  $2 \times 2$  تعریف می‌کنیم که از حذف سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $A$  به دست می‌آید.

مثال ۱. برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ ، داریم  $M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$  و

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

**تعریف.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت  $ij$  - امین همسازۀ

ماتریس  $A$  را که با  $A_{ij}$  نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|,$$

که در آن  $|M_{ij}|$  دترمینان ماتریس  $2 \times 2$  ی  $M_{ij}$  است.

مثال ۲. برای ماتریس مثال قبل، داریم:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10.$$

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت اعداد

$$(1) \quad a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$(2) \quad a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$(3) \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$(4) \quad a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$(5) \quad a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$(6) \quad a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

همگی با هم مساوی هستند.

**اثبات.** برابری دو عدد ظاهر شده در ۱ و ۲ را برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

بررسی می کنیم.

$$\text{عدد ظاهر شده در ۱} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\
&\quad a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{21}[-(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{32})] + a_{22}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + \\
&\quad a_{23}[-(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})] \\
&= a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \\
&\quad a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= 2 \text{ عدد ظاهر شده در } 2.
\end{aligned}$$

درستی این که تمامی اعداد ظاهر شده در قضیه با هم برابرند، محاسباتی مشابه محاسبات بالا

دارد. ■

**تعریف.** فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  ماتریسی دلخواه باشد. دترمینان  $A$  را که

با  $|A|$  یا  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  نمایش می‌دهیم، یکی از ۶ عدد مساوی معرفی شده در قضیه ۱ تعریف

می‌کنیم.

تذکر. اگر  $|A|$  را از عدد معرفی شده در ۱ محاسبه کنیم، می‌گوییم  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به سطر اول حساب کرده‌ایم. اگر مثلاً از عدد معرفی شده در ۶ محاسبه کنیم می‌گوییم  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به ستون سوم حساب کرده‌ایم و الی آخر.

مثال ۳. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  را در نظر می‌گیریم.  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به سطر

دوم پیدا می‌کنیم :

$$\begin{aligned} |A| &= 4A_{21} + 2A_{22} + 3A_{23} \\ &= 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4(16) + 2(14) - 3(11) = -69. \end{aligned}$$

اگر  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به ستون سوم محاسبه می‌کردیم نیز، نتیجه بالا به دست می‌آمد :

$$\begin{aligned} |A| &= 2A_{13} + 3A_{23} + 4A_{33} \\ &= 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(10) - 3(11) + 4(-14) = -69. \end{aligned}$$

مثال ۴. می‌خواهیم  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$  را محاسبه کنیم. در اینجا به خاطر وجود دو صفر در سطر

اول، به صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به سطر اول محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

مثال ۵. می‌خواهیم  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$  را محاسبه کنیم. در اینجا نیز به خاطر وجود دو صفر

در ستون اول، به صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به ستون اول محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} b & c \\ 0 & f \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} = adf.$$

تذکر. از مثال قبل درمی‌یابیم که برای ماتریس‌های  $3 \times 3$  که بالا مثلثی هستند، دترمینان برابر

است با حاصلضرب درآیه‌های روی قطر اصلی آن ماتریس. دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  که پایین مثلثی و یا قطری هستند نیز چنین می‌باشد.

**قضیه ۲.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$  دو ماتریس دلخواه باشند. در این صورت  $|AB| = |A||B|$ .

**اثبات.** بررسی درستی این قضیه به کمک محاسبه، سرراست ولی طاقت‌فرسا می‌باشد که آن را به صورت یک تمرین رها می‌کنیم. ■

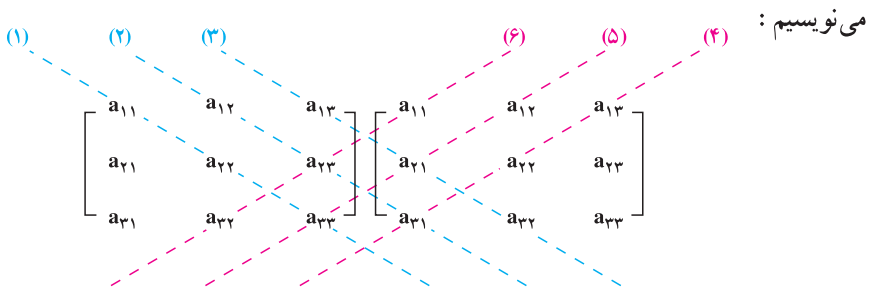
**نتیجه.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  ماتریسی دلخواه باشد و  $n$  یک عدد طبیعی. در این صورت  $|A^n| = |A|^n$ .

**اثبات.** بنابر قضیه ۲،  $|A^2| = |AA| = |A||A| = |A|^2$ ،  $|A^3| = |A^2A| = |A^2||A| = |A|^2|A| = |A|^3$  و لذا به کمک استقرا به سادگی به دست می‌آید  $|A^n| = |A|^n$ . ■

### دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های $3 \times 3$

در زیر روشی را جهت محاسبه دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  که منسوب به ساروس است ارائه

می‌کنیم. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  را در نظر می‌گیریم. این ماتریس را ۲ بار کنار هم



به خطوط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و درآیه‌های روی آنها توجه کنید. درآیه‌های روی خط ۱ را در هم ضرب می‌کنیم. این کار را برای درآیه‌های روی خط ۲ و خط ۳ نیز انجام می‌دهیم و سپس سه عدد به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. گیریم حاصلجمع این سه عدد  $p$  باشد. اکنون همین عمل را برای خطوط ۴، ۵، ۶ تکرار می‌کنیم. اگر  $q$  عددی باشد که در این مرحله به وجود می‌آید، آنگاه به راحتی دیده می‌شود که  $p - q$  با ۶ عدد مساوی معرفی شده در قضیه ۱ برابر است و لذا  $|A| = p - q$ . این روش محاسبه دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  به روش ساروس معروف است. آنچه در بالا گفتیم را در فرمول زیر خلاصه می‌کنیم:

$$|A| = \underbrace{(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})}_p - \underbrace{(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})}_q.$$

حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۱	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۲	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۳	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۴	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۵	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۶
----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

**مثال ۶.** ماتریس معرفی شده در مثال ۳ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم به روش ساروس مقدار دترمینان آن را محاسبه کنیم:

$$|A| = (24 - 15 + 16) - (-4 + 18 + 11) = 25 - 94 = -69.$$

### ویژگی‌های دترمینان ماتریس‌های $3 \times 3$

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  را بیان خواهیم کرد. کلیه این ویژگی‌ها را در مورد سطرها مطرح و سپس ثابت می‌کنیم. این ویژگی‌ها در مورد ستون‌ها نیز برقرار است و اثبات در حالت ستونی مشابه اثبات در حالت سطری است.

**ویژگی ۱ دترمینان.** اگر کلیه درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی  $3 \times 3$  مانند

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

را در عدد حقیقی  $\lambda$  ضرب کنیم و یک ماتریس جدید به دست آوریم،

آنگاه دترمینان ماتریس جدید،  $\lambda$  برابر دترمینان ماتریس  $A$  است.

برای بررسی درستی ویژگی ۱، گیریم  $B$  ماتریس  $3 \times 3$  جدید به دست آمده از ضرب یک سطر ماتریس  $A$  (مثلاً سطر  $i$ ام آن) در عدد ثابت  $\lambda$  باشد. با بسط دترمینان  $B$  نسبت به سطر  $i$ ام به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |B| &= \lambda a_{i1} B_{i1} + \lambda a_{i2} B_{i2} + \lambda a_{i3} B_{i3} \\ &= \lambda (a_{i1} B_{i1} + a_{i2} B_{i2} + a_{i3} B_{i3}). \end{aligned}$$

اما چون سطرهای  $A$  و  $B$ ، بجز احتمالاً سطر  $i$ ام، یکسان هستند، لذا به وضوح  $A_{i1} = B_{i1}$ ،  $A_{i2} = B_{i2}$  و  $A_{i3} = B_{i3}$  در نتیجه

$$\begin{aligned} |B| &= \lambda (a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3}) \\ &= \lambda |A|, \end{aligned}$$

که درستی این ویژگی را نتیجه می‌دهد.

**مثال ۷.** بنابر ویژگی ۱ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

**نتیجه.** برای ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  و عدد ثابت  $\lambda$ ،

$$|\lambda A| = \lambda^3 |A|.$$

**نکات.** کافی است سه بار از ویژگی ۱ استفاده کنیم:

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 |A|. \quad \blacksquare$$

**ویژگی ۲ دترمینان.** اگر کلیه درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی  $3 \times 3$  مانند

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ برابر صفر باشند، آنگاه } |A| = 0.$$

برای بررسی درستی ویژگی ۲، گیریم کلیه درآیه‌های یک سطر ماتریس  $A$  (مثلاً سطر  $i$ ام آن) برابر صفر باشد. با بسط دترمینان  $A$  نسبت به سطر  $i$ ام به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \\ &= 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + 0 \cdot A_{i3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

مثال ۸. بنابر ویژگی ۲ می‌توانیم بنویسیم  $\begin{vmatrix} 88 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$

**ویژگی ۳ دترمینان.** اگر در ماتریسی  $3 \times 3$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  جای دو

سطر (دو ستون) را عوض کنیم تا ماتریس جدیدی به دست آوریم، آنگاه دترمینان ماتریس جدید، قرینه دترمینان ماتریس  $A$  است.

برای بررسی درستی ویژگی ۳، ابتدا فرض می‌کنیم جای دو سطر متوالی مثلاً سطر اول و دوم را عوض کرده‌ایم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$



حال دترمینان A را با بسط نسبت به سطر اول و دترمینان B را با بسط نسبت به سطر دوم پیدا می‌کنیم

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$$|B| = a_{11}B_{11} + a_{12}B_{12} + a_{13}B_{13}.$$

ولی برای  $j=1, 2, 3$  داریم  $A_{1j} = (-1)^{1+j}|M_{1j}|$  که در آن  $M_{1j}$  ماتریس حاصل از حذف

سطر اول و ستون  $j$ ام ماتریس A است و  $B_{1j} = (-1)^{2+j}|\overline{M}_{1j}|$  که در آن  $\overline{M}_{1j}$  ماتریس حاصل از

حذف سطر دوم و ستون  $j$ ام ماتریس B است. اما توجه می‌کنیم که  $\overline{M}_{1j} = M_{1j}$  و لذا

$$B_{1j} = (-1)^{2+j}|\overline{M}_{1j}| = -(-1)^{1+j}|M_{1j}| = -A_{1j}.$$

پس

$$|B| = a_{11}(-A_{11}) + a_{12}(-A_{12}) + a_{13}(-A_{13})$$

$$= -(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13})$$

$$= -|A|.$$

تعویض سطر دوم و سوم نیز وضعیتی مشابه دارد. ولی اگر بخواهیم سطر اول و سوم را جابه‌جا

کنیم ابتدا سطر اول و دوم را جابه‌جا کرده، سپس سطر دوم و سوم و بالاخره سطر اول و دوم را

جابه‌جا می‌کنیم که مجدداً مقدار دترمینان در  $-1 = (-1)(-1)(-1)$  ضرب می‌شود و لذا در هر حال

دترمینان ماتریس جدید، قرینه دترمینان ماتریس A است.

$$\text{مثال ۹. بنابر ویژگی ۳ داریم} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

**ویژگی ۴ دترمینان.** اگر ماتریسی  $3 \times 3$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  دارای دو سطر

(دو ستون) یکسان باشد، آنگاه  $|A| = 0$ .

برای بررسی درستی ویژگی ۴، گیریم سطر  $i_1$ ام و  $i_2$ ام ماتریس A یکسان باشند. اگر جای سطر

$i_1$ ام و سطر  $i_2$ ام را با هم تعویض کنیم، آنگاه به خاطر یکسان بودن این دو سطر ماتریس حاصل همان

A است. پس بنابر ویژگی ۳،  $|A| = -|A|$ ،  $2|A| = 0$ ، یا  $|A| = 0$ .

$$\text{مثال ۱۰. بنابر ویژگی ۴ داریم } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ اگر در ماتریسی } 3 \times 3 \text{ مانند}$$

یک سطر (ستون) مضربی از یک سطر (ستون) دیگر باشد، آنگاه  $|A| = 0$ .

برای بررسی درستی ویژگی ۵، گیریم سطر  $i_1$  ام ماتریس  $A$ ،  $\lambda$  برابر سطر  $i_2$  ام آن باشد. بنابر ویژگی ۱ می‌توانیم بنویسیم  $|A| = \lambda|B|$  که در آن  $B$  ماتریسی است که سطر  $i_1$  ام و سطر  $i_2$  ام آن یکسان است. اما ویژگی ۴ نتیجه می‌دهد که  $|B| = 0$  و لذا  $|A| = \lambda \times 0 = 0$ .

$$\text{مثال ۱۱. بنابر ویژگی ۵ داریم } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 14 & 1 \\ 7 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**ویژگی ۶ دترمینان.** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  بوده که سطر  $i$  ام آن به صورت

$$b_{i1} + c_{i1} \quad b_{i2} + c_{i2} \quad b_{i3} + c_{i3}$$

باشد. اگر  $B$  و  $C$  را ماتریس‌های  $3 \times 3$  بگیریم که سطرهای آن، بجز احتمالاً سطر  $i$  ام، با سطرهای  $A$  یکی است و سطر  $i$  ام  $B$

$$b_{i1} \quad b_{i2} \quad b_{i3}$$

و سطر  $i$  ام  $C$

$$c_{i1} \quad c_{i2} \quad c_{i3}$$

است، آنگاه

$$|A| = |B| + |C|.$$

برای بررسی درستی ویژگی ۶،  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به سطر  $i$ ام محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = (b_{i1} + c_{i1})A_{i1} + (b_{i2} + c_{i2})A_{i2} + (b_{i3} + c_{i3})A_{i3}$$

$$= (b_{i1}A_{i1} + b_{i2}A_{i2} + b_{i3}A_{i3}) + (c_{i1}A_{i1} + c_{i2}A_{i2} + c_{i3}A_{i3}).$$

اما چون سطرهای  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، بجز احتمالاً سطر  $i$ ام، همگی یکسان هستند، لذا به وضوح

$$A_{i1} = B_{i1} = C_{i1}, \quad A_{i2} = B_{i2} = C_{i2}, \quad \text{و} \quad A_{i3} = B_{i3} = C_{i3} \quad \text{و در نتیجه}$$

$$|A| = (b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + b_{i3}B_{i3}) + (c_{i1}C_{i1} + c_{i2}C_{i2} + c_{i3}C_{i3})$$

$$= |B| + |C|.$$

تذکر. مشابه ویژگی ۶ برای ستون‌ها نیز برقرار است.

مثال ۱۲. بنابر ویژگی ۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 4+1 & 1+2 & 2+1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

همچنین

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5+1 \\ 5 & 3 & 1+2 \\ 4 & 2 & 4+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

**ویژگی ۷ دترمینان.** اگر در ماتریسی  $3 \times 3$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  حاصلضرب

در آیه‌های یک سطر (ستون) در یک عدد ثابت را به سطر (ستون) دیگر بیافزاییم تا ماتریس جدید حاصل شود، آنگاه دترمینان ماتریس جدید برابر است با دترمینان ماتریس  $A$ .

برای بررسی درستی ویژگی ۷، گیریم سطر  $i$ ام ماتریس  $A$

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3}$$

و سطر  $i_2$  ام آن

$$a_{i_2,1} \quad a_{i_2,2} \quad a_{i_2,3}$$

باشد. ماتریس  $B$  یک ماتریس  $3 \times 3$  است که تمام سطرهایش، بجز احتمالاً سطر  $i_2$  ام آن، با سطرهای  $A$  یکسان است و سطر  $i_2$  ام آن به صورت زیر است:

$$a_{i_2,1} + \lambda a_{i_1,1} \quad a_{i_2,2} + \lambda a_{i_1,2} \quad a_{i_2,3} + \lambda a_{i_1,3}$$

اگر ثابت کنیم  $|B| = |A|$ ، در واقع ویژگی  $\gamma$  را ثابت کرده ایم.

اکنون  $C$  و  $D$  را ماتریس‌هایی  $3 \times 3$  می‌گیریم که تمام سطرهایشان، بجز احتمالاً سطر  $i_2$  ام،

با سطرهای  $B$  و در نتیجه با سطرهای  $A$  یکسان است. سطر  $i_2$  ام  $C$  را

$$a_{i_2,1} \quad a_{i_2,2} \quad a_{i_2,3}$$

می‌گیریم و سطر  $i_2$  ام  $D$  را

$$\lambda a_{i_1,1} \quad \lambda a_{i_1,2} \quad \lambda a_{i_1,3}$$

فرض می‌کنیم. بنابر ویژگی  $\epsilon$  می‌توانیم بنویسیم  $|B| = |C| + |D|$ .

اما دقت می‌کنیم که تمام سطرهای  $C$  با  $A$  یکی است، حتی سطر  $i_2$  ام آن. لذا  $C$  همان  $A$

است، پس  $|C| = |A|$ . از طرفی سطر  $i_2$  ام  $D$ ،  $\lambda$  برابر سطر  $i_1$  ام آن است. پس بنابر ویژگی  $\delta$ ،

$$|D| = 0 \quad \text{و} \quad |B| = |A| + 0 = |A|$$

مثال ۱۳. بنابر ویژگی  $\gamma$  داریم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+6 & 2+8 & 5+12 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+2 & 5 \\ 3 & 4+6 & 6 \\ 1 & 1+2 & 0 \end{vmatrix}$$

مثال ۱۴. در مثال‌های ۳ و ۶ به دو روش دترمینان  $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$  را محاسبه کردیم: روش

بسط‌دادن و روش ساروس. اکنون می‌خواهیم به کمک ویژگی  $\gamma$  مقدار این دترمینان را محاسبه کنیم.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 - \frac{4}{3}(3) & 2 - \frac{4}{3}(5) & 3 - \frac{4}{3}(2) \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 + \frac{1}{3}(3) & 2 + \frac{1}{3}(5) & 4 + \frac{1}{3}(2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 - \frac{11}{14}(2) & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} - \frac{11}{14}\left(\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} - \frac{11}{14}\left(\frac{14}{3}\right) & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & \frac{48}{14} & 2 \\ 0 & \frac{-207}{42} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= 3 \left( \frac{-207}{42} \right) \left( \frac{14}{3} \right) = -69.$$

ویژگی ۸ دترمینان. برای هر ماتریس  $3 \times 3$  مانند

$$|A^t| = |A|, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

برای بررسی درستی ویژگی ۸ توجه می‌کنیم که اگر  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ، آنگاه

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

و لذا از بسط دترمینان  $A^t$  نسبت به سطر اول به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |A^t| &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= |A|. \end{aligned}$$

مثال ۱۵. بنابر ویژگی ۸ داریم

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$



تمرین

۱. فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ . مقدار  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به هر یک از سطرها

و ستون‌ها پیدا کنید. همچنین  $|A|$  را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

۲. به کمک بسط دادن یا روش ساروس مقدار دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{الف)}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ (ج)}$$

۳. قضیه ۲ را ثابت کنید.

۴. بدون بسط دادن و روش ساروس و تنها به کمک ویژگی‌های دترمینان، مقدار هریک از

دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \text{ (د)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \text{ (ج)}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \text{ (و)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \text{ (ه)}$$

۵. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y) \text{ (الف)}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z \text{ (ب)}$$

$$ج) \begin{vmatrix} 1 & 2x & yz \\ 1 & y & 2xz \\ 1 & z & 2xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$د) \begin{vmatrix} 1 & 1+x & x^2(y+z) \\ 1 & 1+y & y^2(x+z) \\ 1 & 1+z & z^2(x+y) \end{vmatrix} = 0$$

$$ه) \begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$$

$$و) \begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & 2x+y+z & y \\ z & x & x+2y+z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

۶. با در نظر گرفتن  $A = \begin{bmatrix} y & z & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{bmatrix}$  و محاسبه  $AA^t$ ، مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

۷. فرض کنید بتوان یک ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  را به صورت حاصلضرب یک ماتریس

$3 \times 2$  در یک ماتریس  $2 \times 3$  نوشت. ثابت کنید  $|A| = 0$ .

۸. فرض کنید  $\lambda$  و  $\mu$  دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها، مقدار دترمینان

ماتریس  $A = [\lambda i + \mu j]_{3 \times 3}$  را محاسبه کنید.

۹. فرض کنید  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ،  $b = (b_1, b_2, b_3)$  و  $c = (c_1, c_2, c_3)$  بردارهایی از  $\mathbb{R}^3$



باشند. ثابت کنید  $a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$  و به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها نتیجه بگیرید که

$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$  با توجه به این تمرین چه ارتباطی بین هندسه، هندسه تحلیلی و جبر خطی در جلد کتاب مشاهده می‌کنید.

۱۰. اگر  $A = (a_1, a_2)$ ،  $B = (b_1, b_2)$  و  $C = (c_1, c_2)$  رؤوس یک مثلث از صفحه  $\mathbb{R}^2$  باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدرمطلق مقدار زیر

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

۱۱. نشان دهید  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$  معادله خطی است که از نقاط  $(a, b)$  و  $(c, d)$  در  $\mathbb{R}^2$

می‌گذرد.

۱۲. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس  $3 \times 3$  باشند که  $A$  متقارن است. ثابت کنید

$$|A + B| = |A + B^t|$$

۱۳. فرض کنید  $A$  یک ماتریس پاد متقارن  $3 \times 3$  باشد. ثابت کنید  $|A| = 0$ .

۱۴. مربع واحد، مربعی است با رؤوس به مختصات  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . شکل هندسی  $F$

را مربع واحد در نظر می‌گیریم. اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  که دترمینانی مخالف صفر دارد، روی  $F$  اثر کند چه شکلی در صفحه پدید می‌آورد؟ مساحت شکل جدید را محاسبه کنید.

## ابن سینا



ابن سینا

ابوعلی حسین بن عبدالله معروف به  
ابن سینا

در سال ۳۷۰ قمری / ۳۵۹ شمسی /  
۹۸۰ میلادی در بخارا متولد شد.

در سال ۴۲۸ قمری / ۴۱۶ شمسی /  
۱۰۳۷ میلادی در همدان درگذشت.

فیلسوف، پزشک، منجم و ریاضیدان

ایرانی

کارهای ریاضی او عبارتند از:

۱. پژوهش در هندسه و تلخیص هندسه

اقلیدسی در کتاب شفا

۲. دستور کلی برای ساختن اعداد مثلثی، مربعی و مخمسی در نظریه‌ی اعداد

۳. تلاش برای ارتباط و تلفیق هندسه و حساب

۴. تعیین طول و عرض دائرة البروج با استفاده از مثلثات کروی

## منابع

۱. دانشنامه‌ی جهان اسلام صفحه‌ی ۲۹

۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۷۶

۳. دائرة المعارف بزرگ اسلامی جلد ۴ صفحه‌ی ۱

۴. زندگینامه‌ی دانشوران جلد ۱ صفحه‌ی ۳۹

۵. نوابغ علماء العرب و المسلمین فی الرياضیات صفحه‌ی ۱۹۶

# ۵

## دستگاه معادلات خطی

### ۱.۵. ماتریس‌های وارونپذیر

می‌دانیم که برای ماتریس غیرصفر  $A$ ، ممکن است ماتریسی مانند  $B$  موجود نباشد که وقتی در آن ضرب شود برابر  $I$  گردد (به تذکر صفحه ۱۰۵ نگاه کنید). به عبارت دیگر در ضرب ماتریس‌ها، چنین نیست که هر ماتریس غیرصفر «وارون» داشته باشد، برخلاف ضرب اعداد که هر عدد غیرصفر دارای وارون است. در این بخش می‌خواهیم مفهوم وارون یک ماتریس مربعی را تعریف کنیم، همچنین شرطی لازم و کافی برای وارونپذیری ماتریس‌های مربعی مرتبه ۲ و ۳ پیدا خواهیم کرد.

**تعریف.** گیریم  $A$  یک ماتریس مربعی باشد. اگر ماتریس مربعی  $B$  موجود باشد طوری که  $AB = BA = I$ ، آنگاه می‌گوییم  $A$  وارونپذیر است و  $B$  را نیز وارون  $A$  می‌نامیم.

مثال ۱. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  را در نظر می‌گیریم. اگر قرار دهیم  $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ ، آنگاه

$AB = BA = I$ ، لذا  $A$  وارونپذیر است و وارون آن ماتریس  $B$  می‌باشد.

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس مربعی باشد که وارونپذیر است. در این صورت وارون  $A$  منحصر به فرد است.

**اثبات.** گیریم  $B$  و  $C$  هر دو ماتریس‌های مربعی باشند که وارون  $A$  هستند، یعنی  $AB = BA = I$

و  $AC = CA = I$  . اکنون به کمک ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها می‌توانیم بنویسیم

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C ,$$

و لذا وارون  $A$  منحصر به فرد است. ■

تذکره. برای ماتریس وارونپذیر  $A$ ، وارون منحصر به فرد  $A$  را با  $A^{-1}$  نمایش می‌دهیم، لذا

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

مثال ۲. برای ماتریس مثال ۱، یعنی  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، داریم  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$  و این تنها

وارون ماتریس  $A$  است.

**قضیه ۲.** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس مربعی باشد که وارونپذیر است. در این صورت  $|A| \neq 0$ .

**اثبات.** چون  $A$  وارونپذیر است پس  $A^{-1}$  موجود است و  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  . در نتیجه

$$|A| |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = 1 \quad \blacksquare . |A| \neq 0 \text{ و لذا}$$

قضیه قبل یک شرط لازم برای وارونپذیری ماتریس‌های مربعی به دست می‌دهد. در مطالب

آینده این بخش خواهیم دید که این شرط کافی نیز می‌باشد.

## وارونپذیری ماتریس‌های $2 \times 2$

گیریم  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  یک ماتریس  $2 \times 2$  باشد.  $A$  وارونپذیر است اگر و فقط اگر ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \text{ موجود باشد طوری که } AB = BA = I .$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که تحت چه شرایطی ماتریس  $B$  موجود است که  $AB = I$  . برای این

منظور توجه می‌کنیم که  $AB = I$  معادل است با این که

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

یا

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}z & a_{11}y + a_{12}t \\ a_{21}x + a_{22}z & a_{21}y + a_{22}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

پس وجود ماتریس  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  معادل است با این که دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{11}y + a_{12}t = 0 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \\ a_{21}y + a_{22}t = 1 \end{cases}$$

بر حسب  $x, y, z$  و  $t$  دارای جواب باشد. اما این دستگاه با دو دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \end{cases}, \begin{cases} a_{11}y + a_{12}t = 0 \\ a_{21}y + a_{22}t = 1 \end{cases}$$

معادل است. توجه می‌کنیم که این دو دستگاه تماماً فقط و فقط وقتی جواب دارند که  $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$

(چرا؟)،  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ، یا  $|A| \neq 0$  و در این حالت نیز جواب برابر است با

$$\begin{cases} x = \frac{a_{22}}{|A|} \\ z = \frac{-a_{21}}{|A|} \end{cases}, \begin{cases} y = \frac{-a_{12}}{|A|} \\ t = \frac{a_{11}}{|A|} \end{cases}$$

(چرا؟).

لذا ماتریس  $B$  با این خاصیت که  $AB = I$  موجود است اگر و فقط اگر  $|A| \neq 0$ . در این حالت

$$B = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

بررسی مشابه نشان می‌دهد که وجود ماتریس  $B$  با این خاصیت که  $BA = I$  نیز معادل است با

$|A| \neq 0$  و در این حالت نیز  $B$  همان ماتریس معرفی شده در (۱) است. خلاصه مطالب بالا را می‌توانیم

در قضیهٔ صفحهٔ بعد خلاصه کنیم.

**قضیه ۳.** ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  وارونپذیر است اگر و فقط اگر  $|A| \neq 0$  و در این حالت داریم  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ .

مثال ۳. برای ماتریس مثال ۱، یعنی  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، داریم  $|A| = 5 - 6 = -1$  و لذا

$$A^{-1} = - \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

### وارونپذیری ماتریس های $3 \times 3$

در زیر قضیه‌ای مشابه قضیه ۳ برای ماتریس های  $3 \times 3$  بیان می‌کنیم.

**قضیه ۴.** ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  وارونپذیر است اگر و فقط اگر  $|A| \neq 0$ . در

این حالت داریم  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$  که در آن  $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ ،  $A_{ij}$  - امین همسازۀ

ماتریس  $A$  است.

**اثبات.** ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$AA^* = A^*A = |A|I. \quad (1)$$

گیریم  $AA^* = [b_{ij}]$ . با توجه به این که

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3}$$

سطر نام ماتریس  $A$  و

$$A_{j1}$$

$$A_{j2}$$

$$A_{j3}$$

ستون زام ماتریس  $A^*$  است، لذا

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3}. \quad (2)$$

**حالت اول:  $j = i$ .** در این حالت (۲) به صورت  $b_{ii} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$  در می آید.

اما طرف راست تساوی اخیر در واقع بسط دترمینان  $A$  نسبت به سطر  $i$ ام است و لذا برابر  $|A|$  است، یعنی  $b_{ii} = |A|$ .

**حالت دوم:  $j \neq i$ .** ماتریس  $C = [c_{ij}]_{3 \times 3}$  را طوری در نظر می گیریم که تمام سطرهایش، بجز

احتمالاً سطر زام آن، با سطرهای  $A$  یکی باشد و سطر زام آن را نیز برابر سطر  $i$ ام  $A$  می گیریم. پس  $C$  ماتریسی است با لا اقل دو سطر یکسان، سطر  $i$ ام و سطر زام و در نتیجه  $|C| = 0$ . چون سطر زام  $C$  با سطر  $i$ ام  $A$  یکسان است پس  $c_{j1} = a_{i1}$ ،  $c_{j2} = a_{i2}$ ،  $c_{j3} = a_{i3}$  از طرفی  $A$  و  $C$  در تمام سطرها یکسان هستند، بجز احتمالاً در سطر زام و لذا  $C_{j1} = A_{j1}$ ،  $C_{j2} = A_{j2}$  و  $C_{j3} = A_{j3}$ . در نتیجه بنابر (۲)،  $b_{ij} = c_{j1}C_{j1} + c_{j2}C_{j2} + c_{j3}C_{j3}$ . اما طرف دوم تساوی اخیر بسط دترمینان  $C$  بر حسب سطر زام است و لذا برابر  $|C|$  است، یعنی  $b_{ij} = |C|$ . اما  $|C| = 0$  پس  $b_{ij} = 0$ .

از آنچه در حالت اول و دوم ذکر کردیم نتیجه می گیریم که

$$b_{ij} = \begin{cases} |A| & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

$$AA^* = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|I$$

و لذا  $AA^* = |A|I$  با استدلالی مشابه می توان ثابت کرد که  $A^*A = |A|I$ .

پس (۱) ثابت شده است.

اگر  $A$  وارونپذیر باشد بنابر قضیه ۲،  $|A| \neq 0$ . اگر  $|A| \neq 0$  آنگاه رابطه (۱) به صورت

$$A \left( \frac{1}{|A|} A^* \right) = \left( \frac{1}{|A|} A^* \right) A = I$$

$$\blacksquare \cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

مثال ۴. برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$  داریم

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

پس

$$A^* = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

اما  $|A| = -46$ ، لذا

$$A^{-1} = \frac{-1}{46} \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}.$$



۱. وارون هر یک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

(ب)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ،

(الف)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ ،

(د)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ،

(ج)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ،



۲. برای ماتریس مثال ۱، یعنی  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ابتدا اعداد  $m$ ،  $n$  و  $r$  را طوری پیدا کنید که

داشته باشیم  $mA^2 + nA + rI = O$ . سپس به کمک این رابطه  $A^{-1}$  را محاسبه کنید.

۳. فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌های مربعی وارونپذیر باشند و  $\lambda$  یک عدد حقیقی غیر صفر.

ثابت کنید

(الف)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  و وارونپذیر است و

(ب)  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$  و وارونپذیر است و

(ج)  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$  و وارونپذیر است و

۴. فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی وارونپذیر باشد. ثابت کنید  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .

۵. اگر برای ماتریس مربعی  $A$ ، ماتریس مربعی  $B$  موجود باشد که  $AB = I$ ، ثابت کنید  $A$

وارونپذیر است و  $B = A^{-1}$ .

۶. الف) اگر  $A$  و  $P$  ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند و  $P$  وارونپذیر فرض شود، ثابت کنید

برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ ،

ب) ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  داده شده است. ابتدا ماتریس وارونپذیر  $P$  را طوری پیدا کنید که

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . سپس برای عدد طبیعی  $n$ ،  $A^n$  را محاسبه کنید.

۷. فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی باشد با این خاصیت که  $A^2 = A$ . اگر  $\lambda \neq 1$  یک عدد

حقیقی باشد، ثابت کنید  $I - \lambda A$  وارونپذیر است و داریم  $(I - \lambda A)^{-1} = I + \frac{\lambda}{1-\lambda}A$ .

۸. فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی باشد و عدد طبیعی  $n$  موجود باشد که  $A^n = O$ . ثابت

کنید  $I - A$  وارونپذیر است. وارون  $I - A$  چیست؟

۹. در قضیه ۴ ثابت کنید  $|A^*| = |A|^2$ .

۱۰. اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند به قسمی که  $A + B = AB$ ، ثابت کنید با

فرض وارونپذیری  $A$ ،  $B$  نیز وارونپذیر است و داریم  $A^{-1} + B^{-1} = I$ .

۱۱. برای زاویه ثابت داده شده  $\theta$ ، ثابت کنید ماتریس دوران  $R_\theta$  وارونپذیر است و

$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$ .

## ۲.۵ دستگاه معادلات خطی

در این بخش نظر خود را به دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی معطوف می‌کنیم و روش‌های مختلف حل این نوع دستگاه‌ها را بررسی خواهیم کرد. یک دستگاه سه معادله سه مجهولی به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

می‌باشد.  $a_{ij}$  ها را ضرایب و  $x_i$  ها را مجهولات دستگاه می‌نامیم. این دستگاه را می‌توانیم به صورت معادله ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (1')$$

نیز نمایش دهیم. اگر قرار دهیم  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  (که ماتریس ضرایب نام دارد)،

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{که ماتریس مجهولات نام دارد}) \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{، آنگاه دستگاه (1')} \quad \text{به صورت}$$

$$AX = B \quad (1'')$$

تبدیل می‌شود و لذا می‌توانیم بگوییم که هر دستگاه سه معادله سه مجهولی مانند (۱) نظیر یک معادله ماتریسی به شکل (۱'') است و برعکس.

از آنچه در بالا گفتیم می‌توانیم نتیجه بگیریم که بحث در مورد دستگاه (۱) با بحث روی معادله (۱'') معادل است.

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $AX = B$  شکل ماتریسی دستگاه سه معادله سه مجهولی (۱) باشد. اگر  $|A| \neq 0$ ، آنگاه این معادله و در نتیجه دستگاه (۱)، دارای جوابی منحصر به فرد است. این جواب منحصر به فرد معادله و در نتیجه دستگاه (۱)،  $X = A^{-1}B$  می‌باشد.

**اثبات.** اگر  $|A| \neq 0$ ، آنگاه  $A$  وارونپذیر است و لذا  $A^{-1}$  موجود است. واضح است که

$X = A^{-1}B$  جواب معادله است، زیرا  $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$ ، اکنون اگر  $X_1$  و  $X_2$  دو جواب برای  $AX = B$  باشند، آنگاه  $AX_1 = B$  و  $AX_2 = B$  و لذا  $AX_1 = AX_2$ . پس  $(A^{-1}A)X_1 = (A^{-1}A)X_2$ ،  $A^{-1}(AX_1) = A^{-1}(AX_2)$ ، یا  $IX_1 = IX_2$ ، لذا جواب منحصر به فرد است. ■

مثال ۱. دستگاه سه معادله سه مجهولی

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ -4x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ،  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$  را در نظر

می‌گیریم. در نتیجه  $AX = B$  شکل ماتریسی دستگاه داده شده است. چون  $|A| = -46 \neq 0$ ، بنابر

قضیه قبل این معادله جواب منحصر به فرد  $X = A^{-1}B$  دارد. اما  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 5 \\ 23 & 46 & 23 \\ -1 & -7 & 2 \\ 23 & 23 & 23 \\ -2 & -5 & 4 \\ 23 & 46 & 23 \end{bmatrix}$  (به

مثال ۴ بخش قبل نگاه کنید) و لذا

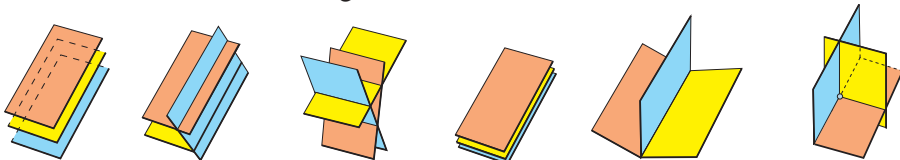
$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 5 \\ 23 & 46 & 23 \\ -1 & -7 & 2 \\ 23 & 23 & 23 \\ -2 & -5 & 4 \\ 23 & 46 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

یعنی  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  جواب معادله و  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$  جواب دستگاه مورد نظر است.

یک دید هندسی نیز در مورد جوابهای دستگاه (۱)، یعنی دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

می توان به کار گرفت. توجه می کنیم که هر یک از معادلات این دستگاه یک صفحه را نمایش می دهد. لذا وجود جواب برای این دستگاه معادل است با وجود نقطه ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادله این دستگاه مشخص می شود. ارتباط بین جوابها و نقاط تقاطع صفحه ها در شکل زیر نمایان شده است.



سه صفحه متقاطع در یک نقطه، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد. سه صفحه متقاطع در یک خط، دستگاه بیشمار جواب دارد. سه صفحه منطبق، دستگاه بیشمار جواب دارد. دستگاه بدون جواب است. دستگاه موازی، دستگاه بدون جواب است. دستگاه بدون جواب است.

شکل ۱

مثال ۲. دستگاه سه معادله سه مجهولی مثال ۱، یعنی دستگاه

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ -4x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

را در نظر می گیریم. می خواهیم این بار به روش هندسی وجود جواب را بررسی کنیم. همان طور که در بالا اشاره کردیم هر یک از معادلات این دستگاه یک صفحه را نمایش می دهد. لذا وجود جواب برای این دستگاه معادل است با وجود نقطه ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادله این دستگاه مشخص می شود. در دو معادله اول با قرار دادن  $x_1 = 0$  به دست می آوریم  $x_2 = \frac{3}{5}$  و  $x_3 = \frac{1}{5}$ .

لذا نقطه  $(0, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$  روی هر دو صفحه ای که توسط دو معادله اول مشخص می شود قرار دارد. پس این دو صفحه مذکور به دلیل این که متمایزاند، یکدیگر را در یک خط قطع می کنند. صفحه مشخص شده توسط معادله اول بر بردار  $\pi_1 = (2, 3, -4)$  عمود است و صفحه مشخص شده توسط معادله دوم

بر بردار  $n_2 = (0, -4, 2)$ . در نتیجه خطی که فصل مشترک دو صفحه مشخص شده توسط دو معادله اول است با بردار  $n_1 \times n_2 = (-1, -4, -8)$  موازی خواهد بود و لذا معادلات پارامتری آن به صورت زیر می باشد.

$$\begin{cases} x_1 = -1 \cdot t. \\ x_2 = \frac{3}{5} - 4t \\ x_3 = \frac{1}{5} - 8t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

حال اگر این خط بر صفحه ای که توسط معادله سوم مشخص می شود منطبق باشد، دستگاه بیشمار جواب دارد؛ اگر آن را قطع نکند، دستگاه جواب ندارد و اگر آن را در یک نقطه قطع کند، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد. پس کافی است بررسی کنیم که به ازای چه  $t$ هایی نقاط خط مذکور روی صفحه  $x_1 - x_2 + 5x_3 = 5$  قرار می گیرد. برای این منظور باید معادله  $-1 \cdot t - (\frac{3}{5} - 4t) + 5(\frac{1}{5} - 8t) = 5$  را حل کنیم. اما این معادله به صورت  $-46t = \frac{23}{5}$  ساده می شود که تنها جواب آن  $t = -\frac{1}{10}$  است. پس فقط به ازای  $t = -\frac{1}{10}$ ، نقطه  $(1, 1, 1)$  از خطی که فصل مشترک دو صفحه مشخص شده توسط دو معادله اول دستگاه است روی صفحه مشخص شده توسط معادله سوم دستگاه قرار می گیرد. لذا دستگاه جوابی منحصر به فرد دارد که عبارت است از

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

اگر در دستگاه (۱)،  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ، آنگاه می گوئیم یک دستگاه سه معادله سه مجهولی همگن داریم. واضح است که یک دستگاه سه معادله سه مجهولی همگن

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

نظیر معادله ماتریسی

$$AX = O \quad (2')$$

است.

مثال ۳. دستگاه سه معادله سه مجهولی همگن

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ . در نتیجه  $AX=O$

شکل ماتریسی دستگاه داده شده است. چون  $|A|=0$ ، لذا برای این معادله و در نتیجه دستگاه داده شده قضیه ۱ کارساز نخواهد بود. البته واضح است که  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  یک جواب این دستگاه همگن می‌باشد (جواب صفر) و برای بررسی وجود یا عدم وجود جواب غیر صفر برای این دستگاه روش هندسی ممکن است کارساز باشد. معادلات اول و دوم دستگاه مذکور یکی هستند. در نتیجه این دستگاه با دستگاه

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

معادل است. اما نقاط  $(x_1, x_2, x_3)$  که در معادله اول صدق می‌کنند نقاط یک صفحه گذرا از مبدأ مختصات می‌باشند. نقاط  $(x_1, x_2, x_3)$  و صادق در معادله دوم نیز چنین است. اما دو صفحه متمایز و گذرا از مبدأ مختصات یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند. پس نقاط  $(x_1, x_2, x_3)$  که روی این خط قرار دارند هم در معادله اول صدق می‌کنند و هم در معادله دوم و لذا هر یک از نقاط روی این خط جوابی برای دستگاه مذکور به دست می‌دهد. پس این دستگاه جوابهای غیر صفر (درواقع بیشمار جواب) دارد.

این که در مثال قبل از صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه سه معادله سه مجهولی همگن نتیجه گرفتیم که دستگاه بیشمار جواب دارد تصادفی نمی‌باشد. قضیه زیر این موضوع را روشن می‌کند.

**قضیه ۲.** فرض کنیم  $AX=O$  شکل ماتریسی دستگاه سه معادله سه مجهولی همگن (۲) باشد. در این صورت این معادله و در نتیجه دستگاه (۲) دارای بیشمار جواب است اگر و فقط اگر  $|A|=0$ .

**اثبات.** ( $\Rightarrow$ ) فرض کنیم  $|A| \neq 0$ . لذا بنا بر قضیه ۱، معادله  $AX=O$  دارای جواب منحصر

به فرد  $X = A^{-1}O = O$  است که تناقض می‌باشد. لذا لزوماً  $|A| = 0$ .

( $\Rightarrow$ ) دستگاه سه معادله سه مجهولی همگن (۲) به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

می‌باشد که ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

شکل ماتریسی آن، یعنی  $AX = O$  را به دست می‌دهد. با فرض  $|A| = 0$ ، ثابت می‌کنیم این دستگاه دارای بیشمار جواب است. برای این منظور روش هندسی<sup>۱</sup> را به کار می‌گیریم. هریک از معادلات این دستگاه صفحه‌ای را مشخص می‌کند و وجود جواب برای این دستگاه معادل است با وجود نقطه‌ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادله این دستگاه مشخص می‌شود. توجه می‌کنیم که هر سه صفحه از مبدأ مختصات عبور می‌کند، زیرا  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  جوابی برای دستگاه همگن است.

**حالت اول:** سه صفحه برهم منطبق باشند.

در این حالت واضح است که بیشمار نقطه مشترک روی صفحاتی که (در واقع یک صفحه هستند) توسط سه معادله این دستگاه مشخص می‌شود وجود خواهد داشت و لذا دستگاه نیز بیشمار جواب خواهد داشت.

**حالت دوم:** دو تا از سه صفحه برهم منطبق باشند.

در این حالت واضح است که یکی از صفحات دو صفحه دیگر را (که در واقع یکی هستند) در یک خط قطع خواهد کرد و مجدداً نقاط این خط نقاط مشترکی است روی سه صفحه تعیین شده توسط سه معادله دستگاه همگن و لذا دستگاه بیشمار جواب دارد.

**حالت سوم:** سه صفحه متمایز باشند.

در این حالت صفحات مشخص شده توسط معادلات دوم و سوم دستگاه به دلیل این که یک نقطه مشترک دارند همدیگر را در یک خط مانند  $L$  قطع می‌کنند. موازی بردار  $n_2 \times n_3$  است که در آن  $n_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$  بردار عمود بر صفحه مشخص شده توسط معادله دوم است و

۱- اثبات این قضیه «صرفاً با ابزارهای جبر خطی» از برنامه درسی این کتاب خارج است.

$n_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$  بردار عمود بر صفحه مشخص شده توسط معادله سوم. حال باید بررسی کنیم که وضعیت این خط نسبت به صفحه مشخص شده توسط معادله اول چگونه است. صفحه مشخص شده توسط معادله اول بر بردار  $n_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$  عمود است و چون بنابر فرض و تمرین ۹ از صفحه ۱۲۸

$$n_1 \cdot (n_2 \times n_3) = |A| = 0,$$

لذا خط  $L$  و صفحه مشخص شده توسط معادله اول موازی خواهند بود که به دلیل وجود یک نقطه مشترک روی آنها در واقع  $L$  بر این صفحه منطبق است. پس تمام نقاط  $L$  نقاط مشترک روی صفحاتی هستند که توسط سه معادله این دستگاه مشخص می‌شود و لذا دستگاه در این حالت نیز بیشمار جواب دارد. ■

### دستور کرامر برای حل دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی

قضیه زیر روشی را برای حل دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی به دست می‌دهد که منسوب به کرامر است.

**قضیه ۳ (دستور کرامر).** گیریم دستگاه سه معادله سه مجهولی (۱) داده شده است.  $A$  را ماتریس ضرایب این دستگاه فرض می‌کنیم و برای  $j = 1, 2, 3$ ،  $A_j$  را ماتریسی  $3 \times 3$  می‌گیریم که از تعویض ستون  $j$ ام  $A$  با

$$\begin{aligned} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{aligned}$$

به دست آمده است. اگر  $|A| \neq 0$ ، در این صورت جواب منحصر به فرد دستگاه (۱) از فرمول‌های

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

به دست می‌آید.

**اثبات.** اگر  $|A| \neq 0$ ، قضیه ۱ نشان می‌دهد که دستگاه سه معادله سه مجهولی (۱) دارای جواب منحصر به فرد  $(x_1, x_2, x_3)$  است. اکنون بنابر ویژگی‌های دترمینان‌ها می‌توانیم بنویسیم



$$\begin{aligned}
x_1|A| &= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= |A_1|.
\end{aligned}$$

در نتیجه  $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$ . به طور مشابه می‌توان  $x_2$  و  $x_3$  را نیز محاسبه کرد و لذا حکم ثابت است. ■

مثال ۴. دستگاه مثال ۱ را در نظر می‌گیریم. به کمک دستور کرامر، جواب این دستگاه برابر

است با

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-46} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-46} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-46} = 1.$$

## روش حذفی گاوس و روش جردن برای حل دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی

همانطور که دیدیم اگر درمینان ماتریس ضرایب دستگاه (۱) غیر صفر باشد، می‌توانیم ماتریس وارون ضرایب دستگاه را پیدا کنیم. با ضرب کردن طرفین (۱) در این ماتریس وارون جواب دستگاه به دست می‌آید. پیدا کردن ماتریس وارون به روشی که ذکر شد نیاز به عملیات و محاسبات زیادی دارد. لذا روش‌های دیگری برای حل دستگاه‌ها که عملیات کمتری نیاز داشته باشد، از لحاظ کاربردهای عملی مورد توجه قرار دارد. در این قسمت روش‌های حذفی گاوس و گاوس-جردن را برای حل دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی ذکر می‌کنیم. در این روش‌ها از قاعده‌های زیر برای حل دستگاه استفاده می‌کنیم:

(۱) اگر طرفین یکی از معادلات را در یک عدد غیر صفر ضرب کنیم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند،

(۲) اگر طرفین یکی از معادلات را به معادله دیگری بیافزاییم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند،

(۳) اگر جای دو معادله را عوض کنیم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند.

### روش حذفی گاوس

روش حذفی گاوس را با ارائه مثال زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

ماتریس ضرایب دستگاه را همراه با یک ستون اضافی که از مقادیر ثابت تشکیل شده است در

نظر می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

نخست عنصری که در سطر اول و ستون اول قرار دارد را محور عملیات قرار داده و عناصر ستون اول در سطرهاى دوم و سوم را با استفاده از قواعد ذکر شده صفر می‌کنیم. پس داریم

$$R_1 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}.$$

(یعنی سطر  $R_1$  را  $R_1$  می‌نامیم)

در گام بعدی عنصر واقع در سطر دوم و ستون دوم را محور عملیات گرفته و عنصر واقع در ستون دوم و سطر سوم را صفر می‌کنیم.

$$R_1 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(یعنی سطر  $R_2$  را  $R_2$  می‌نامیم)

حال که ماتریس ضرایب دستگاه به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل شده است می‌توانیم با استفاده از عملیات برگشتی از پایین به بالا جواب را پیدا کنیم. در واقع در آخرین مرحله دستگاه به صورت زیر درآمده است.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ -3x_2 - 6x_3 = -12 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$

پس  $x_3 = 3$  و با جایگذاری در معادله دوم داریم  $x_2 = -2$ . اکنون این دو مقدار را در معادله اول جایگذاری می‌کنیم، پس  $x_1 = 4$ .

### روش گاوس - جردن

روش گاوس - جردن نیز مشابه روش حذفی گاوس است ولی در اینجا در هر مرحله، عناصر غیر از قطر اصلی در هر ستون را با استفاده از قواعد ذکر شده به صفر تبدیل می‌کنیم. به مثال قبلی توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

مرحله اول مشابه مرحله اول روش حذفی گاوس است.

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}.$$

در مرحله دوم عنصر سطر دوم و ستون دوم ماتریس ضرایب دستگاه را محور گرفته و عناصر ستون دوم در سطر اول و سوم را صفر می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} R_1 + \frac{2}{3}R_2 \\ R_2 \\ R_3 - \frac{5}{3}R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

در گام بعد عنصر روی سطر سوم و ستون سوم محور عملیات است و کلیه عناصر ستون سوم در سطرهاى اول و دوم را صفر می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} R_1 - R_3 \\ R_2 - 6R_3 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

و نهایتاً، عناصر سطر اول، ستون اول؛ سطر دوم، ستون دوم؛ و سطر سوم، ستون سوم را به ۱ تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} R_1 \\ -\frac{1}{3}R_2 \\ -R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

پس جواب عبارت است از  $x_1 = 4$ ،  $x_2 = -2$  و  $x_3 = 3$ .

تذکره. اگر در روش‌های حذفی گاوس و گاوس-جردن عنصری که روی قطر اصلی ماتریس ضرایب دستگاه قرار دارد و باید محور قرار گیرد، صفر باشد جای سطر شامل آن عنصر و یکی از سطرهای دیگر را عوض می‌کنیم. اگر چنین کاری امکان نداشته باشد، یعنی کلیه عناصر در ستون مربوطه برابر صفر باشد، آنگاه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است و دستگاه جواب ندارد.



۱. دستگاه‌های زیر را با پیدا کردن وارون ماتریس ضرایب دستگاه (در صورت وجود) حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_3 + 3 = x_2 + 3x_1 \\ x_1 - 3x_3 = 2x_2 + 1 \\ 3x_2 + x_3 = 2 - 2x_1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

۲. دستگاه‌های زیر را به کمک دستور کرامر، روش حذفی گاوس و گاوس-جردن حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 18 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 18 \\ 5x_1 + 8x_3 = -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -3 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۳. دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

۴. به کمک قضیه ۲، اثبات دیگری برای تمرین ۷ از بخش قبل ارائه کنید. یعنی ثابت کنید اگر

$A$  یک ماتریس مربعی باشد با این خاصیت که  $A^2 = A$  و  $\lambda \neq 1$  یک عدد حقیقی، آنگاه  $I - \lambda A$  وارونپذیر است.  $(I - \lambda A)^{-1}$  را نیز محاسبه کنید.

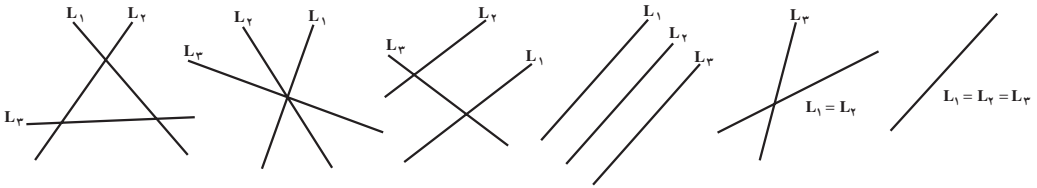
۵. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی باشند، طوری که  $I - AB$  وارونپذیر است. ثابت کنید

$I - BA$  نیز وارونپذیر است (راهنمایی: از قضیه ۲ استفاده کنید).  $(I - BA)^{-1}$  را نیز محاسبه کنید.

۶. دستگاه سه معادله دو مجهولی زیر سه خط  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  را در صفحه مشخص می‌کند.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

شکل‌های زیر حالات مختلف این سه خط را نسبت به هم نشان می‌دهد.



شکل ۲

مجموعه جواب دستگاه داده شده را در هر یک از این حالات توصیف کنید.  
۷. به کمک روش هندسی بررسی کنید که تحت چه شرایطی روی  $a$ ،  $b$  و  $c$  دستگاه

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = a \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = b \\ 7x_1 + 4x_2 + 9x_3 = c \end{cases}$$

الف) دارای جواب منحصر به فرد است،

ب) جواب ندارد،

ج) بیشمار جواب دارد.

۸. دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

الف) توضیح دهید که چرا دستگاه بالا یا جواب ندارد، یا بیشمار جواب دارد.

ب) اگر  $b_1 = b_2 = 0$ ، چرا دستگاه بالا باید بیشمار جواب داشته باشد؟

## مراجع

[1] Barnett, P. A., Ziegler, M. R., *Pre-calculus*, Third edition, Mc Graw - Hill, New York, 1995.

[2] Lang, S, *Linear Algebra*, Third edition, Springer - Verlag, New York, 1987.

[3] O’Nan, Michael, *Linear Algebra*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.

[ترجمه فارسی: اونان، مایکل. جبر خطی. ترجمه علی اکبر محمدی حسن آبادی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳.]

[4] Silverman, Richard A, *Modern Calculus and Analytic Geometry*, Macmillan, New York, 1969.

[ترجمه فارسی: سیلورمن، ریچارد ۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی جدید. ترجمه علی اکبر عالمزاده، انتشارات علمی و فنی، تهران، ۱۳۶۷.]

[۵] تابش، یحیی؛ نیوشا، جعفر. هندسه تحلیلی و جبر خطی. دوره پیش دانشگاهی، رشته علوم ریاضی، دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی وزارت آموزش و پرورش، تهران، ۱۳۷۷.

