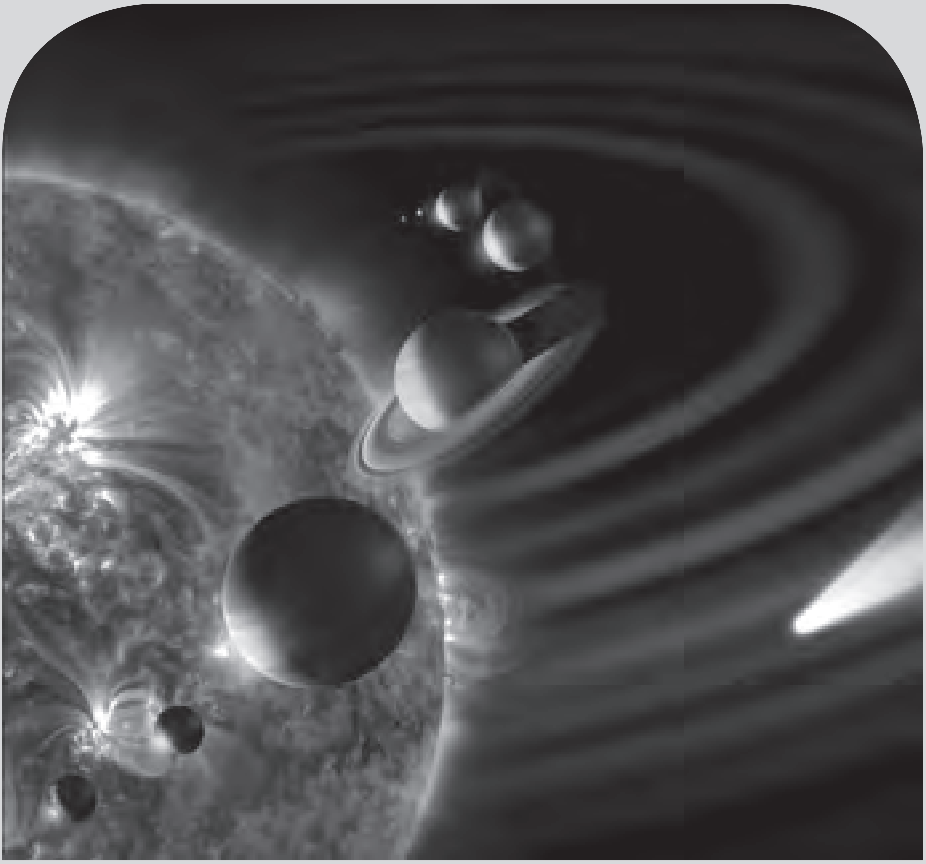
فصل ۱

مجموعه ها

وَ هُوَ الَّذی جَعَلَ لَکُم النُّجومَ لِتَهتَدوا بِها فی ظُلُماتِ البَرِّ وَالبَحرِ ......

او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به وسیلهٔ آنها راه یابید...

(سورهٔ انعام، آیهٔ ۹۷)



منظومهٔ شمسی مجموعه‌ای است شامل ستارهٔ خورشید و سیّاره‌هایی که روی مدارهای خاصّی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستارهٔ خورشید، ستاره‌هایی با بزرگی چندهزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازهٔ خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می‌پوشاندند.

نگاه کلی به فصل

دانش‌آموزان در کتاب نهم برای اولین بار با مفهوم مجموعه، اعمال روی مجموعه‌ها و نمایش مجموعه‌ها و کاربردهای آن آشنا می‌شوند.

درس اوّل ازاین فصل به معرفی مجموعه می‌پردازد و واژهٔ مجموعه را که در زبان محاوره‌ای به‌کار می‌رود با اصطلاح مجموعه که در ریاضی به‌کار می‌رود مقایسه و به بیان تفاوت‌های آن می‌پردازد. در این درس به معرفی دو مفهوم بسیار مهم یعنی عضویت و جزئیت (زیر مجموعه) پرداخته شده و همچنین به بیان توصیفی مجموعه‌ها و تبدیل آن به زبان ریاضی و تعریف مجموعهٔ تُهی دراین درس پرداخته می‌شود.

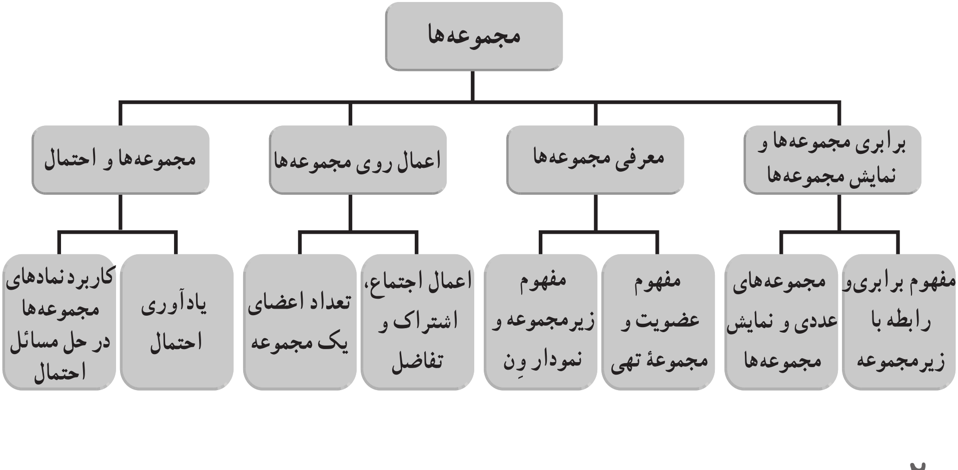
در درس دوم مفهوم برابری بین دو مجموعه معرفی و نمایش مجموعه‌ها در شکل‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در درس سوم به معرفی سه عمل اجتماع، اشتراک و تفاضل بین مجموعه‌ها و استفاده از نمودار ون برای نمایش آنها پرداخته شده است.

در درس چهارم ضمن یادآوری مسائل احتمال که دانش‌آموزان در دو کتاب ریاضی هفتم و هشتم مطالعه کرده‌اند به‌کاربردها و استفاده‌های مفهوم مجموعه و نمادهایی که برای مجموعه‌ها و تعداد اعضای یک مجموعه به‌کار برده شده، در احتمال و حل مسائل مربوط به احتمال اشاره شده است.

دانش‌آموزان در کتاب ریاضی دهم مبحث مجموعه‌ها را کامل‌تر فرا خواهند گرفت.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

در تصویر ابتدای فصل مجموعه‌ها، علاوه بر اینکه منظومه شمسی به عنوان یک مجموعه معرفی شده است، که در تعبیر ذکر شده برای مجموعه‌ها کاملاً صدق می‌کند، (اعضاء غیر تکراری و کاملاً مشخص) توجه دانش‌آموزان را به عظمت خلقت معطوف داشته و توسط آیه‌ای از آیات قرآن کریم، هدفمند بودنِ این خلقت را متذکر می‌شویم.

دانستنی‌هایی برای معلم

نظریه مجموعه‌ها توسط جرج کانتور در سال ۱۸۷۳ پایه‌ریزی و در ابتدا به صورت شهودی و غیرصوری بیان و گسترش یافت.

امروزه نظریه مجموعه‌ها به عنوان مبانی و یکی از پایه‌ای‌ترین مفاهیم در ریاضیات به‌کار می‌رود. اصلی‌ترین موضوع‌ها در ریاضیات، مانند اعداد و توابع براساس مجموعه‌ها پایه‌ریزی و پیشرفت کرده‌اند.

دو پارادکس معروف در نظریه مجموعه‌ها وجود دارد که یکی متعلق به خود کانتور است و به پارادکس کانتور معروف است و دیگری پارادکس راسل که توسط راسل به‌دست آمده است.

پارادکس کانتور : اگر U مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها فرض شود واضح است که عدد اصلی این مجموعه باید بزرگ‌ترین عدد اصلیِ مجموعه‌های موجود باشد یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد باید همواره $|A|\leq|U|$ اما از طرفی بنابر قضیهٔ کانتور عدد اصلیِ مجموعهٔ توانیِ U (مجموعهٔ شاملِ همهٔ زیر مجموعه‌های U) کوچک‌تر از عدد اصلیِ U است و این تناقض است.

پارادکس راسل : مجموعهٔ $R=\{A:$ عضو خودش نباشد $A\}$ را در نظر می‌گیریم (مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که عضوی از خود نباشند) آیا $R\in R$ است؟

* اگر $R\in R$ در این صورت بنابر تعریف مجموعهٔ R باید $R\notin R$ که تناقض است!
* اگر $R\notin R$ لذا بنابر تعریف مجموعهٔ R باید $R\in R$ که تناقض است!

منطق فازی (Fuzzy logic) که اولین بار توسط پروفسور لطفی‌زاده در سال ۱۹۶۵م و به‌دنبال تنظیم نظریه مجموعه‌های فازی توسط وی، پایه‌ریزی و ابداع گردید، امروزه در بسیاری از شاخه‌های ریاضی و علوم غیر ریاضی کاربرد دارد.

منطق فازی از فضای بین دو ارزش «بروم» یا «نروم» ارزش‌های جدید «شاید بروم» یا «می‌روم اگر» یا «احتمال دارد بروم» را استخراج کرده و به کار می‌گیرد. یک چراغ فقط به دو وضعیت «روشن» یا

«خاموش» محدود نیست و مواردی مانند «کم نور» یا «پرنور» نیز برای یک لامپ تعریف می‌شود!

مفهوم مجموعه‌های فازی در مقابل مجموعه‌های قطعی (Crisp sets) قرار دارد در واقع از تعمیم و گسترش مفهوم مجموعه‌های قطعی به مفهوم مجموعه‌های فازی می‌رسیم.

مجموعه‌های قطعی همان مجموعه‌های عادی و معمولی هستند که در کتاب‌های درسی آنها را مجموعه می‌نامیم. در مجموعه‌های فازی مفهوم عضویت نسبی است و فقط به عضوبودن یا نبودن محدود نمی‌شود!

معرفی منابع برای معلمان

- مبانی ریاضیات گسسته، تألیف حمیدرضا امیری و یدا... ایلخانی‌پور، انتشارات مدرسه
- دانشنامه ریاضی، تألیف گروه نویسندگان، پرویز شهریاری، غلامرضا یاسی پور و... انتشارات کانون فرهنگی آموزش
- نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن، تألیف تی. لین، یو – فنگ لین، ترجمه عمید رسولیان، مرکز نشر دانشگاهی

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ متناظر با هر عبارت یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه یک عبارت بنویسید.

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و اول

ب) مجموعهٔ مثلث‌هایی که ۴ ضلع دارند.

ج) مجموعهٔ اعداد صحیح منفی و بزرگ‌تر از ۲

د) مجموعهٔ اعداد طبیعی و کوچک‌تر از ۷

هـ) $A=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

و) $B=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱\}$

۲ــ جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) $A=\{۰,\varnothing,\{\varnothing\},\{\ \}\}$ دارای ...... عضو است

ب) عبارت «۵ عددِ اول و کوچک‌تر از ۲۰» مجموعه‌ای مشخص و یکتا را ....

ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۲ و ۳ مجموعهٔ ...... نامیده می‌شود.

۳ــ هر یک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

الف) $A=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ ب) $B=\{۵,۶,۷,\ldots\}$

ج) $C=\{۷\}$ د) $D=\left\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},...\right\}$

۴ــ هر یک از مجموعه‌های زیر که با نماد ریاضی مشخص شده‌اند را با اعضایشان بنویسید.

الف) $A=\{x\mid x\in \mathbb{N},۵<x<۱۱\}$ ب) $B=\{x\mid x\in \mathbb{Z},-۷\le x<۷\}$

ج) $C=\left\{\frac{x}{x+۱}\mid x\in \mathbb{N},۳<x<۹\right\}$ د) $E=\{۳K\mid k=-۱,-۲,-۳\}$

۵ــ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{۰,\varnothing,۲\}$ را بنویسید.

۶ــ اگر $A=\{۱,۲,۳,\{۱\},\{۴\}\}$, $B=\{۴,۵,۶,۷\}$ کدام گزاره درست و کدام گزاره نادرست است.

الف) $\{۱\}\in A$ ب) $\{۱\}\subseteq A$ ج) $\{۲,۳,\{۲\}\}\subseteq A$

د) $\{۴,۵\}\subseteq B$ هـ) $A\nsubseteq B$ و) $\{۱,\{۱\},۲\}\subseteq A$

ز) $۷\in A$ ح) $\{۴\}\subseteq A$ ط) $\{۴\}\subseteq B$

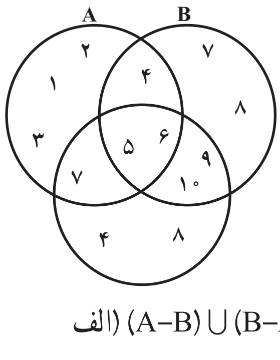
۷ــ سه مجموعهٔ $A=\{۴,۶,۷,۸,۹,۲\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۸\}$ و C={۳و۴و۵و۹و۱۰} را در نظر گرفته و هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید.

الف) $(A\cap B)\cap C$ ب) $(A\cup B)\cap C$ ج) $(A\cup C)-B$

د) $(A-B)\cup(B-C)$ هـ) $(A-B)\cup(A-C)$ و) $A-(B\cap C)$

ز) $(A\cup C)-B$ ح) $(A-B)\cup(C-B)$

۸ ــ با توجه به نمودار زیر حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بنویسید.



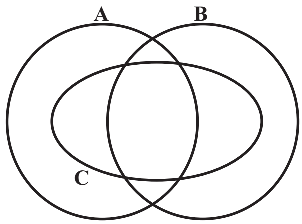
الف) $(A-B)\cup(B-A)$ ب) $(A\cup C)-B$ ج) $A\cup(B\cup C)$

د) $(A\cup B)\cup C$ هـ) $A\cap(B\cup C)$ و) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

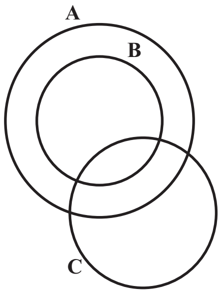
ز) $(A-B)-C$ ح) $A-(B-C)$ ط) $(A\cap C)-B$

ی) $(A-B)\cap(C-B)$ ک) $(A\cap B)\cap C$

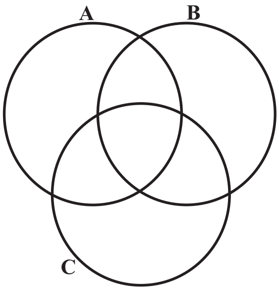
۹ــ در هر یک از شکل‌های زیر، مجموعهٔ مورد نظر را هاشور بزنید.



$(A \cap C) - (C - B)$



$(A - B) \cup (B \cap C)$



(A – B)UC

اهداف

ــ درک دقیق و شفافی از واژۀ مجموعه در ریاضیات داشته باشد.
ــ دو ویژگی مهم اعضای یک مجموعه یعنی تکراری نبودن و مشخص بودن را درک کند.
ــ از نمودار وِن برای نمایش مجموعه‌ها استفاده کند.
ــ مفهوم عضویت را درک کند.
ــ مفهوم مجموعۀ تهی را درک کرده و بتواند برای مجموعۀ تهی مصداق پیدا کند.
ــ بتواند بیان توصیفی برای یک مجموعه را به مجموعه‌ای با اعضای کاملاً مشخص تبدیل کند و برعکس برای مجموعه‌ها بیان توصیفی شفافی بیاورد.

روش تدریس

هدف فعالیت اوّل این درس لزوم استفاده از مفهوم مجموعه و نماد مجموعه است. اینکه دانش‌آموز احساس نیاز کند که گاهی اوقات لازم است تعدادی از اشیاء را از بقیه جدا کنیم و یا آنها را متمایز کرده و دسته‌بندی کنیم.

در این فعالیت علاوه بر هدف فوق‌الذکر دانش‌آموز یاد می‌گیرد که برای مشخص کردن یک مجموعه از اشیاء، از حروفی چون A , B , C ,... استفاده کرده و این اشیاء را در دو آکلاد قرار داده و به هر کدام از آن اشیاء یک عضو بگوید.

در این فعالیت سعی بر این است تا دانش‌آموز درک کند و به این موضوع پی‌ببرد که اولاً توصیف برای مشخص کردن هر مجموعه باید کاملاً روشن و شفاف بوده و مجموعه‌ای یکتا معرفی کند و دوم اینکه جابه‌جایی اعضای مجموعه، مجموعۀ جدیدی تولید نمی‌کند به عنوان مثال عبارت «۳ عدد اول و یک رقمی» به صورت‌های مختلفی می‌تواند تعبیر شود : {۲,۳,۵} یا {۲,۵,۷} یا ... لذا این عبارت نمی‌تواند مشخص کنندۀ یک مجموعه باشد.

در پاراگراف انتهایی این صفحه، تعبیر دقیق ریاضی برای مجموعه بیان شده و دانش‌آموز باید تفاوت آن را با کلمۀ مجموعه که در زبان محاوره‌ای به‌کار می‌رود درک کند. توجه داشته باشید که در معرفی مجموعه، قید شده است **دسته‌ای از اشیاء مشخص** و هیچ محدودیتی برای این اشیاء بیان نشده است. به عبارت دیگر اینکه اعضای یک مجموعه باید دارای یک ویژگی یا خاصیت مشترک باشند یا

هم‌جنس باشند یا … جزء شرایط تشکیل یک مجموعه نیست بنابراین مجموعهٔ $A=\{a,b,۲,۳,$ خورشید$\}$ یک مجموعهٔ ۵ عضوی به حساب می‌آید که اعضای آن هیچ ویژگی مشترکی ندارند.

در فعالیت‌های صفحهٔ ۳ علاوه بر معرفی مفهوم و نماد عضویت و نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار وِن، روی تکراری نبودن اعضای یک مجموعه و مشخص بودنِ اعضاء تأکید شده است.

توجه داشته باشید که برای استفاده از نمودار وِن هم می‌توانیم از منحنی‌های بسته استفاده کنیم و هم از خط شکسته بسته از قبیل اشکال هندسی شناخته شده مانند دایره، مستطیل و …

در ابتدای صفحهٔ ۴، مجموعهٔ تهی به عنوان مجموعه‌ای که فاقد عضو است معرفی شده و با تذکر این نکته که مجموعهٔ تهی یعنی $\{\ \}$ یا $\varnothing$ با مجموعه‌های $\{\varnothing\}$ و $\{۰\}$ یکی نیست از اشکالات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان جلوگیری شده است.

در کار در کلاس صفحهٔ ۴ سعی می‌شود تا مفاهیم و مطالب قبلی بهتر جا بیفتد و دانش‌آموزان در این کار در کلاس مجموعهٔ تهی را به عنوان یک مجموعه و همچنین مجموعه‌های یک عضوی را به عنوان یک مجموعه شناسایی و خودشان قادر به معرفی چنین مجموعه‌هایی شوند. در کار در کلاس شمارهٔ ۴ تمرین بسیار خوبی برای درک و تعمیق مطالب بیان شده است.

دانش‌آموزان با خواندن عبارت‌ها و مجموعه‌های سمت چپ ابتدا مجموعه را در ذهن خود ساخته و سپس به دنبال آن در ستون سمت راست، می‌گردند. کار در کلاس شمارهٔ پنج مجدداً تأکید بر مشخص بودنِ اعضا دارد.

تمرین صفحهٔ ۵، مطالب این درس را دوره کرده و تأکید بیشتری روی بیان مجموعه‌هایی با عبارات و با نمادهای ریاضی دارد.

تمرین ۳ یک مسئله پاسخ باز است که دانش‌آموزان به آن جواب‌های متفاوتی خواهند داد و با کنترل جواب‌های آنها به نوع نگاه و سطح درک آنها از مجموعه پی‌خواهید برد.

اهداف

ــ دانش‌آموزان مفهوم برابری و مفهوم زیرمجموعه در مجموعه‌ها را درک کرده و تشخیص می‌دهند که در چه صورتی دو مجموعه برابر نیستند و در چه صورتی $A \not\subseteq B$.

ــ دانش‌آموزان ارتباط دوطرفه مفهوم برابری و زیرمجموعه بودن را درک می‌کنند.

ــ زیر مجموعه‌های بدیهی هر مجموعه ($\varnothing$ و خود مجموعه) معرفی می‌شوند.

ــ دانش‌آموزان باید بتوانند تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه را تشخیص داده و بنویسند.

ــ نمایش مجموعه‌های اعدادِ معروف و نمادگذاری آنها و همچنین استفاده از نماد ریاضی برای نمایش مجموعه‌ها جزء اهداف آموزشی این درس است.

ــ دانش‌آموزان باید بتوانند مجموعه‌هایی که با اعضا مشخص شده‌اند یا با یک عبارت توصیفی بیان شده‌اند را با استفاده از نمادهای ریاضی مشخص کنند.

روش تدریس

در فعالیت صفحهٔ ۶ دانش‌آموزان دو مجموعهٔ A و B را می‌سازند (تشخیص می‌دهند) که این مجموعه‌ها به دو صورت معرفی شده‌اند و مشاهده می‌کنند که تمام اعضای A درB و تمام اعضای B نیز در A بوده و در واقع $A=B$ است. سپس با معرفی مجموعهٔ A و نوشتن اعضای آن در عبارت‌های تعریف شده در الف، ب و ج به دنبال مجموعه‌ای برابر با A می‌گردند.

و در همین فعالیت با مفهوم نابرابری در مجموعه‌ها نیز آشنا می‌شوند و جلوی این بدفهمی که «اگر A با B برابر نباشد تمام اعضای A نباید در B باشند» گرفته می‌شود.

در کار در کلاس صفحهٔ ۶ دانش‌آموزان با مقایسهٔ عضو به عضو و اضافه کردنِ یک عضو، برابری در دو مجموعه را ایجاد می‌کنند. در سؤال ۲ کار در کلاس یک مسئله باز پاسخ مطرح شده که تنوع پاسخ‌های دانش‌آموزان را در برخواهد داشت که البته بسیاری از این پاسخ‌ها قابل تأمل خواهد بود.

فعالیت صفحهٔ ۷ به مفهوم زیرمجموعه می‌پردازد و نیز به زیرمجموعه‌های بدیهی هر مجموعه مانند A یعنی به معرفی $\varnothing$ و A به عنوان زیرمجموعه‌های A و البته با بیان این مطلب که در چه شرایطی $A \not\subseteq B$ به نوعی زیرمجموعه بودنِ تهی را اثبات می‌کند (نوعی برهان خلف).

ذکر مثال بالای صفحهٔ ۸ و آوردن دلیل برای هر مورد برای تعمیق و تثبیت مفاهیم زیرمجموعه‌بودن و زیرمجموعه نبودن بسیار مفید است. در کار در کلاس صفحهٔ ۸ مفاهیم زیرمجموعه، عضویت و زیرمجموعه نبودن از طریق استفاده از نمودار ون و شهودی کردنِ این مفاهیم و از طریق مجموعه‌های عددی بررسی می‌شود.

بهتر است از دانش‌آموزان خواسته شود تا برای نوشتن زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به ترتیب از مجموعهٔ هیچ عضوی (تُهی) شروع کرده و بعد تمام یک عضوی‌ها و دو عضوی‌ها و ... را بنویسند.

در مطالب صفحهٔ ۹ سعی بر این است تا دانش‌آموزان مجموعه‌های عددی را بتوانند با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسند و برعکس. به عنوان مثال مجموعهٔ $A=\{۴,۷,۱۰,...\}$ با مجموعهٔ $\{۳k+۱|k\in \mathbb{N}\}$ برابر است. همچنین مجموعهٔ $B=\{۴K-۳|-۲< k \leq ۳ \ , \ k\in \mathbb{Z}\}$ با مجموعهٔ $\{-۷,-۳,۱,۵,۹,۱۳\}$ برابر است.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۰ علاوه بر اینکه دانش‌آموز مجموعه‌هایی را که با نماد ریاضی مشخص شده یا با عبارتی بیان شده‌اند را باید با اعضایشان مشخص کند به لزوم استفاده از نمادهای ریاضی برای بیان مجموعه‌ها پی می‌برد زیرا مجموعهٔ اعداد گویا را نمی‌توانیم با همهٔ اعضایش بنویسیم.

در تمرین صفحهٔ ۱۰ همهٔ مفاهیم ذکر شده در این درس مورد سؤال و پرسش قرار می‌گیرد و دوره می‌شود.

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

اهداف

ــ دانش‌آموزان با ۳ عمل از اعمال بین مجموعه‌ها یعنی عمل اجتماع، عمل اشتراک و عمل تفاضل آشنا می‌شوند.

ــ دانش‌آموزان سه عمل مذکور را به صورت نمادگذاری ریاضی و نمودار ون درک می‌کنند.

ــ دانش‌آموزان با معرفی دو مجموعهٔ A و B (به صورت نمایش همهٔ اعضا یا نمودار ون) باید بتوانند $(A \cup B)$ ، $(A \cap B)$, $(A-B)$, $(B-A)$ را بنویسند.

ــ دانش‌آموزان عدد اصلی مجموعه‌ها یا تعداد اعضای مجموعه‌ها را تشخیص داده و از نماد $n(A)$ برای نمایش تعداد اعضای A استفاده می‌کنند.

روش تدریس

در فعالیت صفحهٔ ۱۱، ابتدا دانش‌آموزان به صورت غیر رسمی و غیر صوری با مفاهیم اشتراک و اجتماع آشنا شده و سپس در دو کادر پایین صفحه این دو مفهوم یا دو عمل بین مجموعه‌ها را به دو صورت استفاده از نمادهای ریاضی و استفاده از نمودار وِن درک می‌کنند.

مثال بالای صفحهٔ ۱۲ به درک بهتر این مطالب می‌پردازد و به صورتی کاملاً عملی دانش‌آموز را درگیر محاسبهٔ اشتراک و اجتماع دو مجموعه می‌کند.

فعالیت صفحهٔ ۱۲ فعالیتی بسیار غنی و خلاقانه است و هدف اصلی از طرح این فعالیت آن است که دانش‌آموز مفهوم اجتماع را با این گزاره که «اگر عضوی حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشد در اجتماع آن دو مجموعه است» بهتر درک کند در ادامهٔ این فعالیت از دانش‌آموز خواسته شده تا حالت‌های دیگری برای این دو مجموعه بیابد که تعداد کل حالت‌های ممکن و صحیح برای A و B عبارت از ۸ حالت که دانش‌آموزان باید همهٔ حالت‌ها را بیابند.

در شمارهٔ ۲ فعالیت صفحهٔ ۱۲ به طور مشابه، اول به صورت غیر رسمی با مفهوم عمل تفاضل آشنا شده و سپس در کادر بالای صفحهٔ ۱۳ تعریف ریاضی و نمودار وِن برای عمل تفاضل آورده شده که ذکر یک مثال در پایین کادر دانش‌آموزان را به صورت عملی درگیر محاسبهٔ تفاضل دو مجموعه کرده و در عین حال دانش‌آموز مشاهده می‌کند که $(A-B)$ با $(B-A)$ لزوماً برابر نیست.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۳ به تعمیق و تا حدودی به تعمیم مفاهیم ذکر شده پرداخته‌ایم و در پایین صفحه یک نماد یا قرارداد برای نمایش تعداد اعضای یک مجموعه آورده شده است. برای

دست‌ورزی بیشتر و تعمیق مفاهیم اجتماع، اشتراک و تفاضل می‌توانید از مثال‌های متنوعی مانند مثال زیر کمک بگیرید :

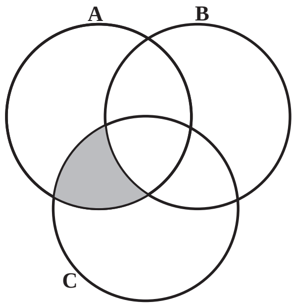
۱ــ اگر $A-B=\{۲,۳,۴\}$ و $B=\{۹,۸,۷\}$ برای A چند حالت وجود دارد؟ آنها را بنویسید.

۲ــ اگر $A-B=\{۵,۶,۲\}$ و $A\cup B=\{۵,۶,۲,۹,۱۱,۱۵\}$ با استفاده از نمودار وِن ۴ حالت برای A و B مشخص کنید.

در تمرین‌های صفحهٔ ۱۴ همهٔ مطالب و مفاهیم ذکر شده در این درس را مرور کرده و به تثبیت آنها می‌پردازیم.

در تمرین ۲ قسمت‌های (هـ) و (و) به این نکات پرداخته شده است که لزوماً $A-B$ و $B-A$ ممکن است با هم برابر نبوده و همین‌طور تعداد اعضای آنها که البته در حالت‌هایی می‌توانند برابر هم باشند ولی حکم کلی نبوده و البته اگر $(B-A)=(A-B)$ آنگاه واضح است که $n(B-A)=n(A-B)$ ولی برعکس این مطلب درست نیست یعنی اگر $n(B-A)=n(A-B)$ باشد نمی‌توان همواره نتیجه گرفت که $B-A=A-B$ به عنوان مثال اگر فرض کنید $A=\{۲,۴,۶,۸\}$, $B=\{۶,۸,۳,۵\}$ واضح است که $A-B=\{۲,۴\}$, $B-A=\{۳,۵\}$ که $(A-B)\neq(B-A)$ ولی تعداد اعضای آنها برابر است.

تمرین ۴ الگوهای بسیاری را برای هاشورزدن به دانش‌آموزان معرفی می‌کند. به عنوان مثال :



$(A-B)\cap C$

اهداف

ــ یادآوری مفهوم احتمال و رابطهٔ محاسبهٔ احتمال یک پیشامد تصادفی
ــ استفاده از نمادهای ریاضی برای محاسبهٔ احتمال در مسائل مربوطه
ــ ارتباط بین مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن (فضای نمونه‌ای) و زیر مجموعه‌های آن به عنوان پیشامدهای تصادفی
ــ یادآوری مفهوم پیشامدهای هم‌شانس و غیر هم‌شانس

روش تدریس

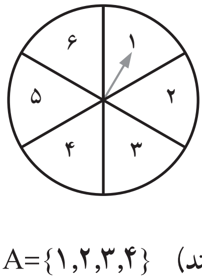
در اولین مثال (صفحهٔ ۱۵) هدف اصلی تشکیل مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های ممکن یعنی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و در هر چهار قسمت الف، ب، ج و د تشکیل مجموعه‌های حالت‌های مطلوب است. استفاده از نمادهای ریاضی و فرمول $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبهٔ احتمال نیز از اهدافِ حلِ این مثال می‌باشد.

در قسمت (ج) توجه دارید که پیشامد مورد نظر مجموعه‌ای فاقد عضو یعنی $\varnothing$ است و $n(\varphi)=۰$ و بنابراین $p(\varphi)=۰$ است.

در فعالیت صفحهٔ ۱۶ دانش‌آموز باید پس از تشخیص همهٔ حالت‌های ممکن یعنی $S=\{۱,۲,۳\}$ برای هر کدام از زیرمجموعه‌های S یا پیشامدهای تصادفی که به صورت مجموعه‌ای از اعداد تعریف شده است، با بیان توصیفی و مانند نمونه یک پیشامد تعریف کند.

به عنوان یک فعالیت تکمیلی از فعالیت زیر استفاده کنید.

فعالیت



مانند نمونه و با توجه به چرخندهٔ مقابل برای هر یک از مجموعه‌های تعریف شده یک پیشامد با بیان توصیفی تعریف کنید و سپس احتمال آن را به دست آورید.

$A=\{۱,۲,۳,۴\}$ (عقربه روی اعداد کوچک‌تر از ۵ بایستد) $\longrightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

$B=\{۱,۵,۶\} \rightarrow$ (عقربه روی عدد ۱ یا ۵ یا ۶ بایستد) $\rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}$

$C=\{۲,۳,۵\} \rightarrow (\qquad\qquad\qquad\qquad) \rightarrow P(C)=$

$D=\{۳,۶\} \rightarrow (\qquad\qquad\qquad\qquad) \rightarrow P(D)=$

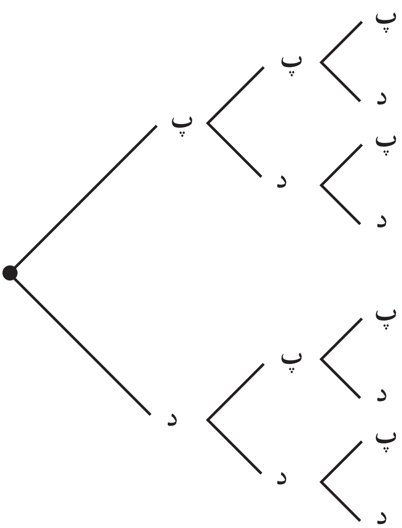
$E=\{۱,۴\} \rightarrow (\qquad\qquad\qquad\qquad) \rightarrow P(E)=$

توجه داشته باشید که توصیف‌هایی که دانش‌آموزان برای تعریف یک پیشامدِ معین استفاده می‌کنند، ممکن است با هم فرق داشته باشد ولی صحیح باشند.

در فعالیت صفحهٔ ۱۶ موضوع پیشامدهای هم‌شانس نیز مطرح شده که یادآوری از سال‌های قبل است و دانش‌آموز صرفاً از روی عدد حاصل از محاسبهٔ احتمالِ پیشامدها پی می‌برد که هم‌شانس هستند یا غیر هم‌شانس. کار در کلاس صفحهٔ ۱۶ به خوبی همهٔ اهداف و مفاهیم ذکر شده را مرور کرده و باعث تعمیق آنها می‌شود. در این کار در کلاس و در قسمت (ب) یک سؤال باز پاسخ مطرح شده است و دانش‌آموزان در می‌یابند که هر زیرمجموعه از S یا هر پیشامد تصادفی که شاملِ ۴ عضو باشد، می‌تواند پاسخ این سؤال باشد.

در تمرین‌های آخر این فصل (صفحهٔ۱۷) ۲ تمرین شمارهٔ ۲ و شمارهٔ ۴ نیاز به توجه خاص دارد و به طور حتم باید توسط شما بررسی شود و راه‌حل‌های دانش‌آموزان را مشاهده کرده و در صورت نیاز این دو تمرین در کلاس تحلیل شود.

بهتر است برای حل تمرین۲، نمودار درختی رسم شود تا دانش‌آموزان تمامِ ۸ حالتِ ممکن را مشاهده کنند.



(پ , پ , پ)
(د , پ , پ)
(پ , د , پ)
(د , د , پ)
(پ , پ , د)
(د , پ , د)
(پ , د , د)
(د , د , د)

در تمرین ۴ نیز بهتر است همهٔ حالت‌ها را در یک جدول ۶×۶ مشاهده کنند.

		تاس قرمز					
		۱	۲	۳	۴	۵	۶
	۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
	۲	(۲,۱)	(۲,۲)	...	...	...	(۲,۶)
تاس آبی	۳	(۳,۱)	...	...	...	...	(۳,۶)
	۴	(۴,۱)	...	...	(۴,۴)	...	(۴,۶)
	۵	(۵,۱)	...	...	(۵,۴)	...	(۵,۶)
	۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

این توجه داده شود که (۶,۵) با (۵,۶) فرق دارد و دو حالت مجزا هستند. (۶,۵) یعنی تاس آبی ۶ آمده و تاس قرمز ۵ و (۵,۶) یعنی تاس آبی ۵ و تاس قرمز ۶ آمده است.

حل تمرین‌های فصل ۱

تمرین

۱ــ متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید :

الف) $A = \{۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵\}$ مکعب عددهای طبیعی از یک تا پنج ــ A مجموعه‌ای ۵عضوی است

ب) $C = \{۱۰\}$ مجموعه اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۱ــ مجموعهٔ C، ۱ عضو دارد

ج) عددهای طبیعیِ مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ {۹۹۹، ...، ۹،۶،۳} ــ این مجموعه، ۳۳۳ عضو دارد

د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ { } ــ این مجموعه، بدون عضو است.

هـ) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد. { } ــ این مجموعه، بدون عضو است.

و) عددهای اوّل دورقمی که مضرب ۷ باشد. { } ــ این مجموعه، بدون عضو است.

۲ــ جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند .

ب) مجموعهٔ $\{۲,۳,۴,...,۹\}$ دارای ___۸___ عضو است.

ج) مجموعهٔ $A = \{۰, \varnothing\}$ دارای ___۲___ عضو است.

د) با توجه به مجموعهٔ $A = \{۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ ؛ داریم : ۵، عضو A است یا با نماد ریاضی، $\underline{۵ \in A}$ و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی، $\underline{۱۲ \notin A}$.

۳ــ سه مجموعهٔ متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد.

$C = \{۱،۲،۳،...،۹\}$ $B = \{۲،۴،۶،۸\}$ $A = \{۲،۳،۵،۷\}$

تمرین

۱ـ مجموعهٔ $A = \{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ را درنظر بگیرید. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟ C و B

$$B = \{x|\, x\in A\,,\, x^{۲} \le ۲\} \quad , \quad C = \{x|\, x\in A, -۱ \le x \le ۱\} \quad , \quad D = \{x|\, x\in A\,,\, x^{۴} = ۱\}$$

$$B = \{-۱\,،۰\,،۱\} \qquad C = \{-۱\,،۰\,،۱\} \qquad D = \{-۱\,،۱\}$$

۲ـ سه مجموعه مانند A ،B و C بنویسید به‌طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$؟ بله

$$A = \{۱\,،۲\} \qquad B = \{۱،۲،۳\} \qquad C= \{۱،۲،۳،۴\}$$

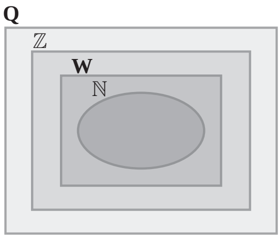
۳ـ تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) $A =\{x\,|\, x\in \mathbb{N}, ۲x+۱=۳\}$ ب) $B = \{۲x \,|\, x = ۰,۲,۳\}$

$A = \{۱\}$ زیرمجموعه‌ها : $\{\ \}$ ، $\{۱\}$

زیرمجموعه‌ها : $\{۰،۴،۶\}$ ، $\{۰،۴\}$ ، $\{۰،۶\}$ ، $\{۴،۶\}$

$B = \{۰،۴،۶\}$ $\{\ \}$ ، $\{۰\}$ ، $\{۴\}$ ، $\{۶\}$ ،



۴ـ نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های Q،W، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت $\subseteq$ باهم مقایسه کنید.

$\mathbb{N}\subseteq W\subseteq \mathbb{Z}\subseteq Q$

۵ـ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید :

$\frac{۲}{۳} \notin W$ الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. × ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. ✓

ج) هر عدد صحیح عددی گویا است. ✓ د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. ✓

تمرین

۱ــ مجموعه‌های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\}$ را درنظر بگیرید؛ سپس هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید :

الف) $A\cup B$ ب) $B\cup C$ ج) $A\cup C$ د) $A\cap B$

هـ) $A-B$ و) $C-B$ ز) $(A-C)\cup(B-C)$ ح) $(A\cup B)-C$

ط) $A\cap A$ ی) $A\cap\varnothing=\varnothing$ ک) $B\cup B$ ل) $C\cup\varnothing$

الف) $A\cup B=\{۱،۲،۳،\ldots،۹\}$

ب) $B\cup C=\{۱،۳،۵،۷،۸،۹،۱۰،۱۱\}$

ج) $A\cup C=\{۱،۲،۴،۶،۷،۸،۹،۱۰،۱۱\}$

د) $A\cap B=\{۹\}$

هـ) $A-B=\{۲،۴،۶،۸\}$

و) $C-B=\{۸،۱۰،۱۱\}$

ز) $(A-C)\cup(B-C)=\{۲،۳،۴،۵،۶،۹\}$

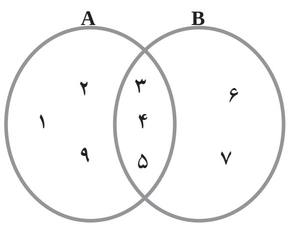
ح) $(A\cup B)-C=\{۲،۳،۴،۵،۶،۹\}$

ط) $A\cap A=\{۲،۴،۶،۸،۹\}$

ک) $B\cup B=\{۱،۵،۷،۳،۹\}$

ل) $C\cup\varnothing=\{۱،۷،۸،۱۰،۱۱\}$

۲ــ با توجه به نمودار زیر، عبارت‌های درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با × مشخص کنید :



✓الف) $B-A=\{۶,۷\}$ ✓ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

×ج) $(A-B)\cup(B-A)=\{۱,۲,۶\}$

✓د) $n(A\cup B)=۸$

×هـ) $A-B=B-A$ ✓و) $n(A-B)=n(B-A)$

۳ــ کلمات و مجموعه‌های داده شدهٔ زیر را در جاهای خالی قرار دهید :

۱) B ۲) A ۳) اجتماع

۴) زیرمجموعهٔ ۵) $(A\cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعهٔ اجتماع همان دو مجموعه است.

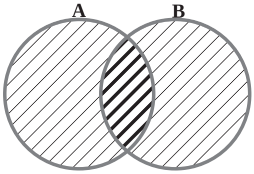
ب) هریک از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ $A\cup B$ است.

ج) اشتراک دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعه هر یک از دو مجموعهٔ A و B است.

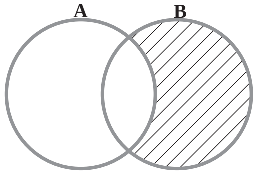
د) مجموعهٔ $A-B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است.

هـ) اجتماع دو مجموعهٔ $(B-A)$ و $(A\cap B)$ با مجموعهٔ B مساوی است.

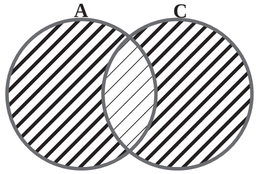
۴ــ در هریک از شکل‌های زیر مجموعهٔ موردنظر را هاشور بزنید.



$A\cup B$



$B-A$



$(A-C)\cup C$

تمرین

۱ــ اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف) عدد رو شده زوج باشد. $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$ ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد. $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$

ج) عدد رو شده زوج و اوّل باشد. $\frac{۱}{۶}$ د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد. $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$

۲ــ اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اوّلاً مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟

{(د،د،د)، (د،د،پ)، (د،پ، د)، (د، پ،پ)، (پ، د،د)، (پ، د، پ) ، (پ،پ،د)، (پ،پ،پ)}

کل حالت‌ها ۸ حالت است.

$\frac{۳}{۸}$ = احتمال اینکه خانواده دقیقاً دو دختر داشته باشد.

۳ــ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :

الف) این مهره آبی باشد. $\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}$ ب) این مهره سبز نباشد. $\frac{۷}{۱۲}$

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد. $\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۱۲}$

۴ــ اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد :
(اگر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S بنامیم، ۳۶ = (n(s))

الف) هر دو بار، عدد اوّل رو شود. $\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$ ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. $\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. $\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$ د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. $\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$