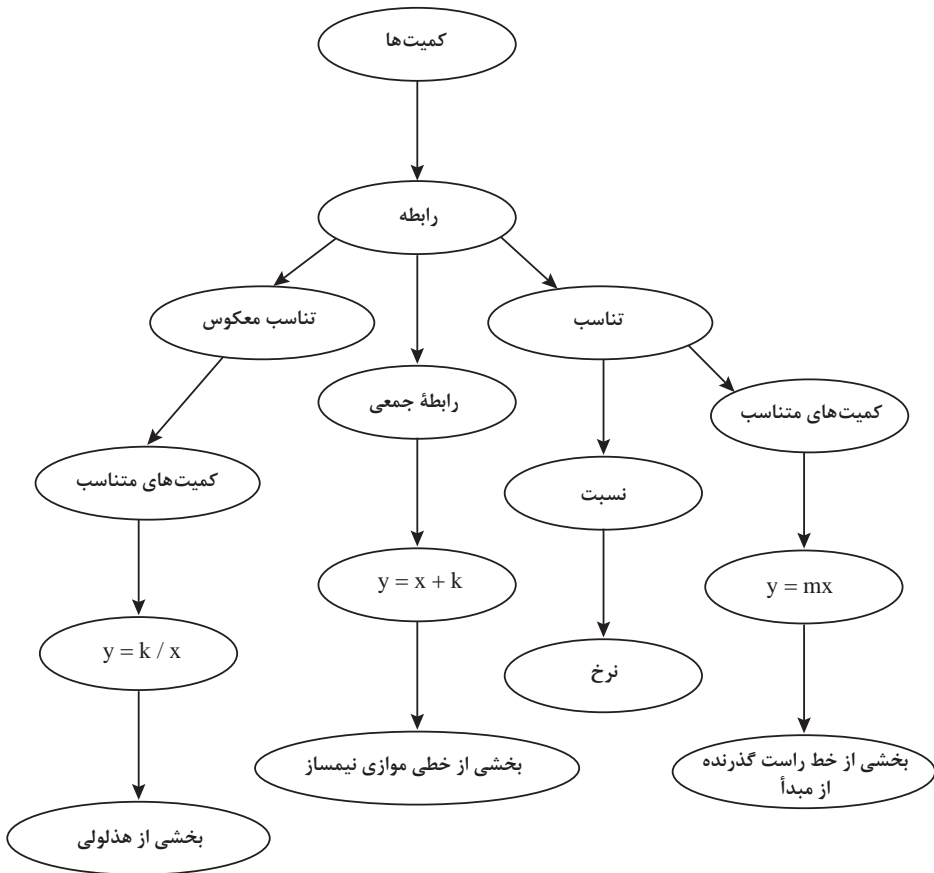


فصل اول

نسبت و تناسب



اهداف کلی فصل

- درک مفهوم کمیت‌های متناسب مستقیم
- درک مفهوم کمیت‌های متناسب معکوس
- درک مفهوم نرخ

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- با استفاده از مقادیر متناظر دو کمیت، وجود رابطه بین دو کمیت متناسب را تشخیص دهند و نوع رابطه (مستقیم یا معکوس) را مشخص کنند.
- رابطه بین دو کمیت متناسب را به روش‌های مختلف (روش هندسی، روش جبری و ...) نمایش دهند.
- با داشتن رابطه بین دو کمیت، مقادیر متناظر کمیت‌ها را به دست آورند.
- مسائل مرتبط با نسبت در کمیت‌های متناسب را با روش‌های جبری و هندسی و ... حل کنند.

پیش نیازها:

- آشنایی با مفهوم نسبت

نگاه کلی به فصل:

مفهوم نسبت به دلیل کاربردهای آن از گذشته تا امروز در علوم مختلف و زندگی روزمره از اهمیت خاصی برخوردار است یکی از نسبت‌های معروف نسبت طلایی است: معبد پارتنون (معبد دختر) در سال‌های ۳۴۷ تا ۳۳۸ قبل از میلاد مسیح در آکروپولیس واقع در آتن ساخته شده است و عظیم‌ترین یادگار هنر معماری یونان باستان است، نسبت ارتفاع به طول تیر بزرگ این معبد نسبت طلایی است.



شکل ۱- معبد پارتنون

پرگار جالبی که در پمپی (یکی از شهرهای ایتالیا) در کارگاه مجسمه‌سازی پیدا شده است دال بر آن است که یونانی‌ها و رومی‌ها نه تنها از نسبت طلایی آگاهی داشته‌اند بلکه از آن استفاده هم می‌کرده‌اند. این پرگار هم‌اکنون در موزه ناپل نگاه‌داری می‌شود که نسبت بین اجزای آن به نسبت طلایی نزدیک است. در خطاطی استاد میرعماد توانست با نزدیک کردن اجزای حروف و کلمات به نسبت طلایی آنها را به درجه‌اعلی زیبایی برساند.



شکل ۲ - نمونه‌ای از خط استاد میر عماد

در پدیده‌های طبیعی اجزای موجودات زنده تحت تأثیر شرایط محیطی با نسبت‌های خاصی رشد می‌کنند مثلاً نسبت نوک انگشتان تا آرنج به فاصله‌ی مچ تا آرنج یا نسبت فاصله‌ی شانه تا بالای سر به اندازه‌ی سر در هر فرد عدد ثابتی است (که نزدیک نسبت طلایی است). در مسائل مالی، نسبت‌های مالی (Financial Ratios) را می‌توان از جمله ابزار سودمند در تعیین موقعیت مالی شرکت‌ها به حساب آورد. محاسبه‌ی نسبت برخی از اقلام مهم مالی درک درستی از واقعیت‌های مهم درباره‌ی نتایج عملیات و وضعیت مالی یک شرکت را به دست می‌دهد. با بررسی و تحلیل این نسبت‌ها می‌توان به آسیب‌شناسی فعالیت مالی یک شرکت نیز دست یافت.

در زندگی روزمره برای تهیه‌ی غذا معمولاً مواد اولیه را با نسبت‌های خاصی مخلوط می‌کنند، در عکاسی موسیقی و ... نیز کاربرد نسبت دیده می‌شود.

در این فصل با تمرکز بر مفهوم کمیت‌های متناسب، نسبت بین مقادیرهای دو کمیت مطرح می‌شود و مسئله‌های مربوط به آنها بررسی می‌شوند. سپس مفهوم رابطه‌ی بین دو کمیت متناسب معکوس مطرح می‌شود و تفاوت آن با رابطه‌ی بین دو کمیت متناسب مستقیم برجسته می‌شود.

مثال	توصیف فرایند	فرایند
ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی	- ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	حل مسئله
- استفاده از رسم شکل، نمودار و روش جبری برای حل مثال ۳	شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسئله‌ها و یا انتخاب مناسب آنها	
- تشریح چگونگی استفاده از یک طول مشخص برحسب گیره بزرگ برای بیان طول برحسب گیره کوچک (قسمت ۴ از فعالیت ۱)	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	ارتباط کلامی
- استفاده از زبان ریاضی برای بیان رابطه معکوس بین دو کمیت (نتیجه صفحه ۲۷ کتاب درسی)	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	استدلال و اثبات
- ارائه دلیل برای رد نظر مینا در مورد تعیین درصد روغن به سس (مسئله ۲ صفحه ۲۲)	به‌کارگیری استدلال	
- استفاده از روش جبری و رسم نمودار برای حل مسئله مربوط به پس‌انداز ماهانه علی (سؤال ۴ صفحه ۲۲). - رسم نمودار رابطه بین سبب زمینی و قیمت آن با توجه به رابطه وزن سبب زمینی و قیمت آن (سؤال ۶ کار در کلاس ۶)	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	پیوندها و اتصالات
- استفاده از نسبت برای بیان نرخ یک کالا	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	
- استفاده از روش رسم شکل برای حل مسائل مربوط به نسبت (سؤال ۴ از مسائل صفحه ۲۲). - نمایش‌های جبری و رسم نمودار برای حل مسائل مربوط به نسبت. (صفحه ۲۲ سؤال ۴)	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	بازنمایی‌ها
- مقایسه نرخ‌های متفاوت یک کالا (مسئله ۴ صفحه ۳۰)	مانند مقایسه کردن ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	سایر مهارت‌های تفکر

بخش اول: نسبت‌های مستقیم

اهداف بخش

- درک مفهوم نسبت به‌عنوان رابطه بین مقادیر دو کمیت
- استفاده از روش‌های مختلف (رسم شکل، روش هندسی، روش جبری) برای حل مسائل مربوط به کمیت‌های متناسب مستقیم
- مدل‌سازی رابطه بین دو کمیت متناسب مستقیم به کمک عبارت ضربی
- یافتن مقادیر متناظر دو کمیت متناسب مستقیم
- درک مفهوم نرخ و استفاده از آن برای محاسبه مقادیر کمیت‌های متناسب
- استفاده از مفهوم نرخ برای مقایسه رابطه بین کمیت‌های متناسب
- محاسبه ضریب تبدیل برای واحدهای مختلف یک کمیت یا دو کمیت مختلف

واژه‌های کلیدی:

نسبت، تناسب، ضریب تبدیل، نرخ، رابطه جمعی، رابطه ضربی.

نگاه کلی به بخش:

این بخش با طرح مسئله‌ای مربوط به اندازه‌گیری طول با یک واحد مشخص آغاز می‌شود تا زمینه انجام یک فعالیت برای درک کمیت‌های متناسب فراهم شود. هنرجویان با انجام این فعالیت ضمن حل مسئله طرح شده رابطه بین دو مقدار از یک کمیت را در قالب جدول و نمودار نشان می‌دهند. این رابطه با نسبت بین مقادیر این کمیت‌ها مشخص می‌شود که به‌عنوان ضریب تبدیل نام‌گذاری می‌شود. مثال‌هایی که در ادامه می‌آیند، ضمن اشاره به نقش ضریب تبدیل واحدها روش‌های رسم شکل، هندسی و جبری برای حل مسائل مرتبط با نسبت را ارائه می‌کنند. در ادامه نسبت بین کمیت‌های متناسبی که از یک جنس نیستند یا واحدهای اندازه‌گیری آنها یکسان نیست به‌عنوان نرخ معرفی می‌شوند و زمینه لازم برای مقایسه نرخ‌های دو کمیت فراهم می‌شود. در قسمت آخر بخش به نوع دیگری از رابطه بین دو کمیت اشاره می‌شود که به جای ثابت بودن تقسیم دو مقدار کمیت، تفاضل مقدار دو کمیت ثابت هستند. این گونه رابطه‌ها را رابطه جمعی می‌نامند. رابطه بین کمیت‌های متناسب در واقع رابطه‌ای ضربی است.

ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب می‌توان ضمن اشاره به تاریخچه و اهمیت استفاده از نسبت، از هنرجویان خواست که نمونه‌هایی از کاربرد نسبت در زندگی روزمره یا دروس دیگر خود را مطرح کنند، در صورتی که مطالب ارائه شده توسط آنها قابلیت تبدیل به فعالیت را داشته باشد، فعالیتی بر پایه آن مطرح کنید. در غیر این صورت با بیان شفاهی مسئله مطرح شده در کتاب یا با مطالعه متن ابتدای فصل انگیزه لازم برای انجام فعالیت توسط هنرجویان را فراهم کنید.

فعالیت آموزشی

نمایش رابطه بین دو کمیت متناسب معمولاً با روش‌های زیر انجام می‌شود:

■ جدول

■ رسم نمودار

■ یک عبارت به زبان فارسی

■ معادله (عبارت جبری)

هر کدام از این روش‌ها ویژگی‌های خاص خود را دارند که برخی از آنها عبارت‌اند از: در نمایش جدولی با ارائه چند مقدار متناظر از مقادیر متناسب، یکسان بودن نسبت این مقادیر (تناسب) به خوبی مشخص می‌شود.

در رسم نمودار، دید کلی‌تری از رابطه بین مقادیر متناسب به نمایش در می‌آید.

بیان رابطه بین دو کمیت متناسب به صورت یک عبارت به زبان فارسی امکان درک بهتر مفهوم نسبت را افزایش می‌دهد.

در نمایش جبری، ارتباط بین مقادیر در قالب یک فرمول (معادله) ارائه می‌شود استفاده از این معادله برای یافتن مقادیر متناظر به‌سادگی قابل انجام است.

در هر کدام از قسمت‌ها توصیه می‌شود از هنرجویان خواسته شود تا نمایش‌های مختلف رابطه بین دو نسبت را به یکدیگر تبدیل کنند.

17 در جدول زیر، مقادیر متناسب به اندازه‌ای بر حسب کرده‌اند که با مقادیر متناسب یکسان اندازه را به حسب کرده کوچک نشان می‌دهد این جدول را کامل کنید.

1	2
2	4
3	6

18 در زیر، نموداری رسم کرده که رابطه بین اندازه به حسب کرده در یک و اندازه به حسب کرده کوچک را نشان دهد.

19 اگر طول کتاب $\frac{1}{2}$ و عرض آن $\frac{1}{3}$ بوده بود، رابطه بین طول و عرض کتاب را به حسب کرده کوچک پیدا کنید.

20 نسبت طول کرده در یک به طول کرده کوچک را بنویسید. چگونه می‌تواند با داشتن طول کتاب و عرض کرده در یک از این نسبت برای پیدا کردن طول کتاب به حسب کرده کوچک استفاده کنید؟

اهداف موضوعی:

■ درک رابطه بین دو واحد اندازه‌گیری از یک کمیت از طریق مقایسه نسبت مقادیر متناظر.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت استفاده از جدول، مهارت استفاده از نمودار، الگویابی، تفکر بصری
۱ جدول تکمیل شده:

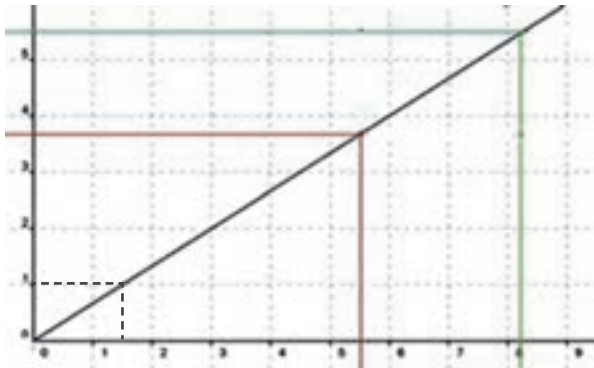
اندازه برحسب گیره‌های کوچک	اندازه برحسب گیره‌های بزرگ
۰	۰
۳	۲
۶	۴
۹	۶

۲ نمودار رسم شده:



۲ با استفاده از نمودار ملاحظه می‌شود طول و عرض برحسب گیره کوچک عبارت است از:

طول بر حسب گیره کوچک تقریباً برابر $8\frac{1}{5}$ و عرض بر حسب گیره کوچک برابر $5\frac{6}{10}$ است.



۴ توجه داشته باشید که اگر از نقطه ۱ روی محور لایها موازی محورها x رسم کنیم و سپس از محل برخورد آن با نمودار موازی محور لایها رسم کنیم، مشاهده می‌شود که $1/5$ گیره کوچک داریم یعنی نسبت طول گیره بزرگ به طول گیره کوچک عبارت است از $5/3$ (توجه کنید نسبت تعداد گیره‌های بزرگ به تعداد گیره‌های کوچک $5/3$ است). برای به دست آوردن طول بر حسب گیره کوچک کافی است طول بر حسب گیره بزرگ را در $3/5$ ضرب کنیم.

$$(\text{طول بر حسب گیره کوچک} = \text{طول بر حسب گیره بزرگ}) \times \frac{3}{5}$$

$$\text{مثلاً در این مسئله داریم: طول کتاب} = 8\frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{5} \times \frac{3}{5} = 5\frac{6}{10}$$

$$\text{عرض کتاب بر حسب گیره کوچک: } 3\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{5} \times \frac{3}{5} = 5\frac{6}{10}$$

هرگاه دو کمیت متناسب رابطه مستقیم داشته باشند دارای ویژگی‌های مهم زیر هستند:

- ✓ با افزایش یکی از آنها دیگری نیز افزایش می‌یابد.
 - ✓ نمودار رابطه آنها یک خط راست است که از مبدأ می‌گذرد و شیب این خط همان نسبت بین دو کمیت (ضریب تبدیل) می‌باشد.
- پس از حل فعالیت توسط هنرجویان می‌توان سؤالات زیر را از آنها پرسید:
- آیا با افزایش یک کمیت (یا واحد)، کمیت (یا واحد) دیگر افزایش می‌یابد یا کاهش می‌یابد.
 - آیا نمودار این رابطه، یک خط راست است؟

- آیا می‌توانید معادله این خط را بنویسید؟
- شیب (ضریب زاویه) این خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟
- نمودار دو کمیت متناسب مستقیم از کدام نقطه همیشه می‌گذرد؟ (جواب: (۰ و ۰))

۱۱) آیا دو نسبت ۲۲ به ۵۵ و ۶ به ۱۱ دو نسبت مساوی‌اند؟
 بله، K برابر است با
 خیر؛ نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با نسبت ۲۲ به ۵۵ و K برابر است با

۱۲) آیا دو نسبت ۲ به ۵ و ۱۰ به ۲۵ دو نسبت مساوی‌اند؟
 بله؛ K برابر است با
 خیر؛ نسبت ۲ به ۵ برابر است با نسبت به

۱۳) اثر یک روزنامه عکس‌ها با ایجاد 50% چاپ می‌شوند. در مرحله صفحه‌آرایی تصمیم گرفته شد عکس‌ها با طول ۱۲ چاپ شوند. عرض عکس‌ها چقدر باید باشد؟

اهداف:

- حل مسئله مرتبط با نسبت
- ۱) خیر، نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با ۴۲ به ۷۷ و K برابر است با: $\frac{۶}{۱۱}$
- ۲) بله، برابر است با: $\frac{۲}{۵}$
- ۳) $\frac{۵}{۶} = \frac{x}{۱۲} = k \Rightarrow x = ۱۲k = ۱۲ \times \frac{۵}{۶} = ۱۰$

فعالیت آموزشی

در میدان نریمان، هر ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی ۳۰۰۰ تومان است.

اهداف موضوعی:

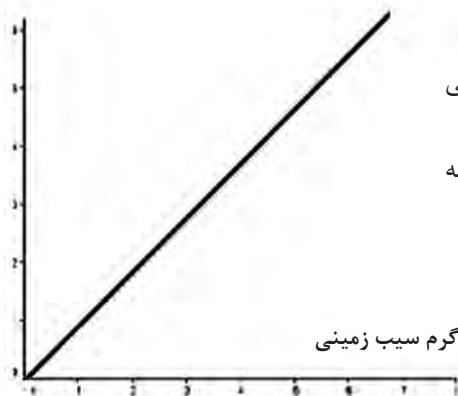
درک مفهوم نرخ

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی، بازنمایی‌های چندگانه
- ۱ نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن، برابر است با: 3000 تومان به 3 کیلو گرم سیب زمینی
- ۲ نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن برابر است با 1000 تومان به 1 کیلوگرم سیب‌زمینی.
- ۳ این نسبت نشان می‌دهد که با 1000 تومان می‌توان 1 کیلو گرم سیب‌زمینی خرید.
- ۴ نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن، برابر است با: 3 کیلوگرم سیب‌زمینی به 3000 تومان
- ۵ نسبت وزن سیب‌زمینی به قیمت آن برابر است با $\frac{1}{1000}$ کیلوگرم سیب‌زمینی به 1 تومان.
- ۶ این نسبت نشان می‌دهد که با 1 تومان می‌توان $\frac{1}{1000}$ کیلوگرم (1 گرم) سیب‌زمینی خرید.
- ۷ برای پیدا کردن قیمت 5 کیلوگرم سیب‌زمینی رابطه زیر را کامل کنید.

$$\frac{5 \text{ کیلوگرم سیب‌زمینی}}{5000 \text{ تومان}} = \frac{3 \text{ کیلوگرم سیب‌زمینی}}{3000 \text{ تومان}}$$

قیمت بر حسب هزار تومان



- ۸ نمودار رابطه بین مقدار سیب زمینی و قیمت آنها را رسم کنید.
- ۹ شیب، نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن را نشان می‌دهد.

در مثال‌های این قسمت نسبت دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف (نرخ) در بافت‌های مختلف عنوان شده است تا هنرجو درک بهتری از مفهوم نرخ داشته باشد و زمینه مقایسه نرخ‌های مختلف از دو کمیت در بافت‌های عنوان شده فراهم شود. در این قسمت همچنین روش‌های مختلف حل مسائل مربوط به نرخ مطرح شده است.

۴۰ در ۳۰ کیلومتر

(۱) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده در دو ماشین مختلف به ترتیب $\frac{۳۰}{۳۰}$ لیتر و $\frac{۲۷}{۳۰}$ کیلومتر است. کدام ماشین یا مصرفه‌تر است؟

(۲) بلیت‌های یک سینما در یک ساعت مانده به شروع فیلم، در هر دقیقه به میزان ثابتی به فروش می‌رسد. اگر این سینما ۲۴۰ بلیت را در ۱۶ دقیقه بفروشد، ابتدا نرخ فروش بلیت در دقیقه را پیدا کنید. سپس به کمک آن، تعداد بلیت‌های فروخته شده در هر ساعت را به دست آورید.

اهداف:

- کسب مهارت در محاسبه نرخ دو کمیت متناسب .
- کسب مهارت در استفاده از نرخ در حل مسائل.

۱) نرخ مصرف در ماشین اول $\frac{۳۰}{۳۰} = ۰/۰۹۳$ و در ماشین دوم $\frac{۲۷}{۳۰} = ۰/۰۹$

است یعنی ماشین اول در یک کیلومتر $۰/۰۹۳$ لیتر و ماشین دوم در یک کیلومتر $۰/۰۹$ لیتر مصرف می‌کند، پس مصرف ماشین دوم کمتر و مقرون به صرفه‌تر است.

۲) $\frac{۲۴۰}{۱۶} = ۲۴۰ \div ۱۶ = ۱۵$ در دقیقه

تعداد بلیت‌های فروخته شده در ساعت: $۱۵ \times ۶۰ = ۹۰۰$

فعالیت آموزشی

فعالیت ۳

علی و احمد با سرعت برابر در یک مسیر دایره‌ای دوچرخه سواری می‌کردند. علی زودتر از احمد دوچرخه‌سواری را شروع کرده بود؛ به طوری که وقتی که او ۹ دور زده بود، احمد ۴ دور زده بود.



اهداف موضوعی:

- آشنایی با رابطهٔ جمعی بین دو کمیت
- مقایسهٔ رابطهٔ جمعی و ضربی بین دو کمیت.
- تشخیص نوع رابطه (جمعی یا ضربی) بین دو کمیت با استفاده از مقادیر مختلف دو کمیت.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، الگویابی، مقایسه کردن
- ۱ تکمیل شدهٔ جدول:

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۶
۳	۹
۶	۱۲
۹	۱۵

- ۲ کافی است از اعداد ستون اول (از سمت چپ) ۶ واحد کم کنیم تا اعداد ستون دوم به دست آیند. این فعالیت تمرینی است برای الگویابی در دو مرحله. ابتدا در مرحله اول، اعداد ستون سمت چپ کامل می‌شوند و سپس با کشف رابطه بین دو ستون اعداد ستون دوم کامل می‌شوند.
- ۳ سرعت علی ۳ برابر سرعت احمد است.
- ۴ تکمیل شده جدول:

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۰
۳	۹
۴	۱۲
۵	۱۵

- ۵ کافی است اعداد ستون اول را بر ۳ تقسیم کنیم تا اعداد ستون دوم به دست آیند. در مثال بعد از این فعالیت، سؤالی در مورد رابطهٔ بین سن دو نفر مطرح شده است. با توجه

به اینکه در هر زمان با افزودن عددی ثابت به سن یکی، سن دیگری به دست می‌آید، این رابطه جمعی است. معادله جبری این رابطه به صورت $y = x + k$ است و می‌توان از هنرجویان خواست تفاوت آن را با معادله مربوط به نسبت مستقیم بررسی کنند.

مسئله‌ها



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال

از هنرجویان بخواهید با استفاده از یک نقشه فاصله بین دو نقطه مهم (مثلاً دو شهر مهم در نقشه شهرهای ایران) را روی نقشه اندازه‌گیری کنند و به کمک مقیاس آن (که در کنار نقشه درج شده است) فاصله واقعی این دو شهر را پیدا کنند و آن را با فاصله رسمی اعلام شده بین دو شهر مقایسه کنند. در صورت وجود تفاوت دلیل این تفاوت را بیابند.

۳) مینا برای تهیه نوعی سس سالاد، به کتاب آشپزی مراجعه کرد. نسبت روغن به سرکه در آن سس، ۳ به ۴ بود. مینا گفت: یعنی ۷۵٪ سس روغن است. آیا مینا درست متوجه شده بود؟ توضیح دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، استدلال کردن

جواب: خیر، اگر نسبت روغن به کل سس ۳ به ۴ باشد ۷۵ درصد سس روغن است اما در اینجا نسبت روغن به سرکه گفته شده است.

۴) ماکسی می‌خواهد عکسی را در ابعاد 25×25 بزرگ کند و سپس آن را روی طولی به طول ۵۵ سانتی‌متر چاپ کند. عرض عکس بزرگ شده چقدر خواهد بود؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی، پیوند اتصال ریاضی و خارج ریاضی

طول مقوا را متناظر طول عکس در نظر می‌گیریم:

$$\frac{35}{25} = \frac{55}{x} = k \rightarrow x = 55 \times \frac{25}{35} = \frac{275}{7}$$

۴) علی هر ماه مقداری ثابت پول را پس‌انداز می‌کند. جدول زیر مقدار پس‌انداز او را در چند ماه نشان می‌دهد.

شماره ماه	مقدار پس‌انداز (تومان)
۲	۳۵۰
۴	۷۰۰
۶	۱۰۵۰
۸	-
۱۰	-

این جدول به سه روش رسم شکل، رسم نمودار و جبری کامل کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، پیوندها و اتصال‌ها، الگویابی

رسم شکل:

۱	۱
---	---

۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰
----	----	----	----	----	----	----

۴	۴
---	---

۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

هشت ماه:

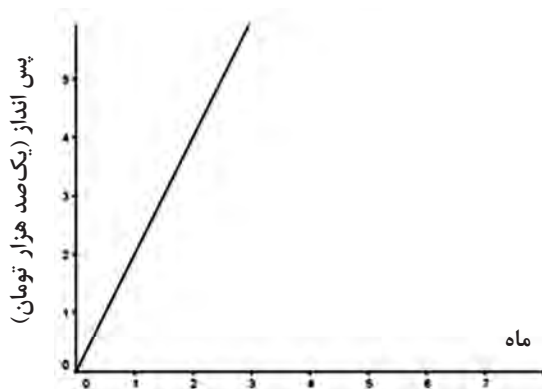
$$7 \times 200 = 1400$$

$$10 \text{ ماه: } 7 \times 250 = 1750$$

۵	۵
---	---

۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

نمودار:



جبری: پس از ۸ ماه: $۸ \times \frac{۳۵۰}{۲} = ۱۴۰۰$ و پس از ۱۰ ماه: $۱۰ \times \frac{۳۵۰}{۲} = ۱۷۵۰$

بخش دوم: نسبت‌های معکوس

اهداف بخش

- درک مفهوم رابطه معکوس بین دو کمیت متناسب
- تشخیص رابطه معکوس بین دو کمیت متناسب
- یافتن مقادیر متناظر دو کمیت که با هم رابطه معکوس دارند.
- مدل‌سازی رابطه بین دو کمیت متناسب معکوس به کمک تقسیم.

واژه‌های کلیدی:

نسبت معکوس، نسبت مستقیم.

نگاه کلی به بخش:

یکی از اشتباهات رایج که در حل مسائل مربوط به کمیت‌های متناسب اتفاق می‌افتد ناشی از عدم درک تفاوت بین نسبت‌های مستقیم و معکوس می‌باشد. این بخش با طرح یک مسئله و شرح فرایند حل آن توسط یکی از هنرجویان آغاز می‌شود. در این مسئله این اشتباه باز شده است تا با تحلیل جواب به دست آمده و پی بردن به نتیجه نادرست توسط خود هنرجو، زمینه لازم برای معرفی مفهوم نسبت معکوس فراهم شود.

در ادامه، با مقایسه تفاوت بین رابطه کمیت‌های متناسب مستقیم و کمیت‌های متناسب معکوس، روش تشخیص کمیت‌های متناسب معکوس بیان می‌شود و جهت درک بهتر این گونه رابطه‌ها، نموداری از یک رابطه معکوس بین دو کمیت ارائه می‌شود. تأکید بر ثابت بودن حاصل ضرب مقادیر متناظر از دو کمیت که دارای رابطه معکوس هستند، به عنوان یکی از ویژگی‌های اساسی این گونه رابطه‌ها به هنرجویان در درک و تشخیص بهتر این گونه رابطه‌ها کمک می‌کند. در مثال‌ها و کار در کلاس‌ها این نکته نیز ذکر می‌شود که همه کمیت‌ها لزوماً متناسب مستقیم یا معکوس نیستند.

در این بخش از هنرجویان خواسته می‌شود که مسئله‌ای در زمینه کمیت‌های متناسب با رابطه معکوس طرح کنند. با این کار، هنرجویان برای طرح موفقیت‌آمیز مسئله در موقعیت مفروض، سعی می‌کنند دانسته‌های خود را سازماندهی و منسجم کنند و در قالب مسائل خوش تعریف بیان کنند. در این صورت، حتی اگر در طرح مسئله صحیح چندان هم موفق نباشند، تلاش صورت گرفته توسط

آنها فرصت بازتاب روی محتوای مورد نظر را در اختیارشان قرار می‌دهد. این امر می‌تواند به فهم عمیق‌تر موضوع کمک کند و باعث شود هنرجویان از طرح مسئله و یادگیری ریاضی لذت ببرند. این عمل، همچنین به دبیران کمک می‌کند تا نسبت به ادراکات و دانش ریاضی هنرجویان بصیرت بهتری به دست آورند.

ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب می‌توان مثال‌هایی از کمیت‌های متناسب با رابطه معکوس را مطرح کرد و با دادن یک مقدار از این کمیت‌ها، از هنرجویان خواست مقدار متناظر آن را به دست آورند و تأثیر رفتار یک کمیت بر کمیت دیگر را بیان کنند. مثلاً با کاهش یک کمیت، کمیت دیگر چه تغییری پیدا می‌کند؟ یا می‌توان از هنرجویان خواست با مطالعه مطالب ابتدای بخش به حل فعالیت ۴ بپردازند.

فعالیت آموزشی

برای پر کردن مخزن آبی، ۱۰ شیر آب یکسان بر سر لوله‌ها کار گذاشته شده است. دو شیر آب وقتی به طور کامل باز هستند، این مخزن در ۸ ساعت پر می‌شود.

۱) اگر ۴ شیر آب هم‌زمان، به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟ دبیر/مختریان به من گفته: حواست باشد که شیرهای آب با هم حرف نمی‌زنند!

۲) اگر ۸ شیر آب هم‌زمان به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟

۳) رابطه بین تعداد شیرهای باز آب و زمان پر شدن مخزن را توصیف کنید.

فعالیت ۲

11

اهداف موضوعی:

■ درک رابطه بین دو کمیت متناسب معکوس.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی.
 - ۱) چون تعداد شیرها دو برابر شده است، پس زمان نصف می‌شود. یعنی ۴ ساعت
 - ۲) چون در این حالت تعداد شیرها دو برابر حالت (۱) شده است، زمان نیز نصف زمان حالت (۱) است، یعنی ۲ ساعت.
 - ۳) هرچه تعداد شیرهایی که آب از طریق آنها وارد حوض می‌شود افزایش یابد سرعت پر شدن حوض بیشتر شده و حوض در زمان کمتری پر خواهد شد. بنابراین با افزایش تعداد شیرها، زمان پر شدن حوض کاهش خواهد یافت.
- توضیحات پس از فعالیت در ایجاد درک صحیح از رابطه بین دو کمیت متناسب

که رابطه معکوس دارند نقش اساسی دارند بنابراین توصیه می‌شود این توضیح‌ها به صورت پرسش و پاسخ بین دبیر و هنرجویان مطرح شود تا همگی آنها ضمن مشارکت در فرایند درک مفهوم به اشکالات احتمالی خود در درک این مفهوم پی ببرند. در غیر این صورت دبیر از هنرجویان بخواهد که با مطالعه متن پس از فعالیت، اشکالات احتمالی خود از درک مطلب را از دبیر سؤال کنند. طی مراحل ذکر شده در پرسش و پاسخ دبیر و هنرجو، در چند مسئله مشابه به درک بیشتر این مفهوم کمک می‌کند.

توجه کنید که دو کمیت متناسب که با هم رابطه معکوس دارند، دارای ویژگی‌های زیر هستند.

✓ حاصل ضرب مقادیر متناظر از این دو کمیت مقدار ثابتی است، بنابراین با افزایش (کاهش) یکی از آنها دیگری کاهش (افزایش) می‌یابد.

✓ نمودار رابطه یک شاخه از هذلولی است.

پس از انجام این فعالیت می‌توان برای درک بهتر مفهوم و تشخیص نسبت‌های معکوس این ویژگی‌ها را برای هنرجویان توصیف کرد (مثلاً از روی نمودار مشخص کرد که تغییرات یک کمیت چه تأثیری بر تغییرات کمیت دیگر دارد. یا با دادن مقادیر بیشتری از یک کمیت مقدارهای بیشتری از کمیت دیگر را به دست آورد) و در مسائل مختلف به این ویژگی‌ها اشاره داشت.

گرفتن آسان



۱- الف) دو کمیت متناسب را نام ببرید که با هم رابطه معکوس داشته باشند.

۲) یا در نظر گرفتن ارتباط این دو کمیت، مسئله‌ای طرح کنید.

۳) شمعی به طول ۱۴ سانتی‌متر را روشن می‌کنیم، این شمع در هر ۵ دقیقه ۱ سانتی‌متر کوتاه می‌شود.

الف) اگر لحظه روشن کردن شمع را زمان صفر در نظر بگیریم، رابطه بین زمان و طول شمع را بنویسید.

ب) با افزایش زمان، طول شمع چگونه تغییر می‌کند؟ آیا زمان و طول شمع کمیت‌های متناسب معکوس یکدیگرند؟ چرا؟

اهداف:

- تقویت مهارت تشخیص کمیت‌های متناسب معکوس.
- پرورش مهارت‌های الگویابی، مدل‌سازی، استدلال کردن، طرح مسئله

۱ مثال‌های متنوعی از محیط پیرامونی را می‌توان مطرح کرد. در صورتی که لازم باشد دیر می‌تواند با ذکر ویژگی‌های کمیت‌های متناسب با نسبت معکوس (از جمله اینکه با افزایش مقادیر یکی مقدار دیگری کاهش می‌یابد) به ارائه مثال‌ها توسط هنرآموزان کمک کند، یا پاسخ‌های درست را تفسیر و پاسخ‌های نادرست را به کمک هنرجویان تحلیل و تصحیح کند.

۲ طرح یک مسئله می‌تواند با راهنمایی دیر انجام شود.

۳

$$y = 14 - \frac{t}{5} \quad \text{(الف)}$$

(با به صورت کلامی: طول شمع بر حسب سانتی‌متر $= \frac{1}{5}$ زمان طی شده بر حسب دقیقه - ۱۴)

(ب) با افزایش و گذر زمان طول شمع کاهش می‌یابد. چون حاصل ضرب این دو کمیت عدد ثابتی نیست، بنابراین رابطه بین این دو کمیت از نوع تناسب معکوس نیست. نمودار این رابطه بخشی از خط است در حالی که نمودار رابطه‌های معکوس یک منحنی هذلولی است. این سؤال اشاره به یک اشتباه که ممکن است برای هنرجویان اتفاق بیفتد دارد، نوع رابطه بین طول شمع و مدت زمان سوختن شمع (که با افزایش زمان، طول شمع کاهش می‌یابد) ممکن است این تصور را در ذهن هنرجو ایجاد کند که کمیت‌های ذکر شده متناسب معکوس هستند. اما علاوه بر تشخیص از روی نمودار، با توجه به رابطه خطی بین این دو کمیت (و اینکه حاصل ضرب این دو کمیت یک عدد ثابتی نیست) می‌توان فهمید که متناسب معکوس نیستند.

مسئله‌ها

(۱) جاهای خالی را پر کنید.

نسبت دو کمیت متناسب که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند نامیده می‌شود.

دو کمیت A و B را در نظر بگیرید. اگر با افزایش یک واحد از A ، یک واحد از B افزایش یابد، دو کمیت رابطه دارند.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ بازیابی اطلاعات

- نسبت دو کمیت متناسب که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند نرخ نامیده می‌شود.
- دو کمیت A و B را در نظر بگیرید. اگر با افزایش هر واحد از A یک واحد از B افزایش یابد دو کمیت رابطه جمعی دارند.

۲) دو مثال از نرخ بیان کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، پرورش تفکر واگرا

قیمت میوه به وزن آن، مسافت طی شده نسبت به زمان سپری شده از شروع حرکت در یک خودرو با سرعت ثابت و

۳) اگر ضریب تبدیل واحد A به B عدد $\frac{2}{3}$ باشد، به سوال‌های زیر پاسخ دهید.
 الف) ۴ واحد از A معادل چند واحد از B است؟
 ب) ۴ واحد از B معادل چند واحد از A است؟
 پ) ضریب تبدیل واحد B به واحد A را بنویسید.
 ت) رابطه بین این دو واحد را با نمودار نشان دهید و به پرسش‌های الف و ب از روی نمودار پاسخ دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

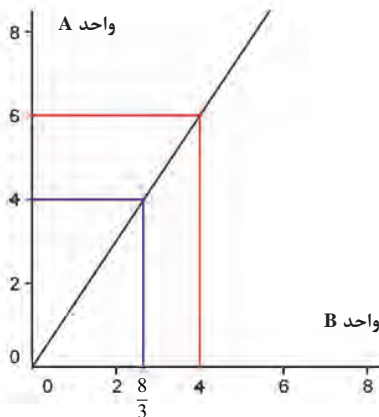
■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، تفکر بصری

$$\text{حل: الف) } x = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{ب) } x = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

$$\text{پ) } \frac{3}{2}$$

ت)



۱۶ جدول زیر نوزی کالا را نشان می‌دهد که در سه اندازه کوچک، متوسط و بزرگ بسته بندی شده است.

نوع	وزن (کیلوگرم)	قیمت (تومان)	نسبت وزن به قیمت	نسبت قیمت به وزن
کوچک	۱/۵	۱۲۰۰	۰/۰۰۱۲۵	۸۰۰
متوسط	۴	۳۰۰۰	۰/۰۰۱۳۳	۷۵۰
بزرگ	۱۵	۱۰۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۶۶۶/۶۷

الف) جدول را کامل کنید.
ب) کدام بسته با صرفه‌تر است؟

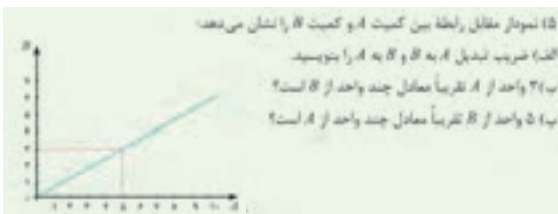
مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، مقایسه کردن

حل: الف)

نوع	وزن (کیلوگرم)	قیمت (تومان)	نسبت وزن به قیمت	نسبت قیمت به وزن
کوچک	۱/۵	۱۲۰۰	۰/۰۰۱۲۵	۸۰۰
متوسط	۴	۳۰۰۰	۰/۰۰۱۳۳	۷۵۰
بزرگ	۱۵	۱۰۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۶۶۶/۶۷

ب) بسته بزرگ زیرا قیمت آن نسبت به وزن از بقیه بسته‌ها کمتر است.



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پرورش تفکر بصری

حل:

الف) ضریب تبدیل A به B عبارت است از: $\frac{۳}{۵}$ و ضریب تبدیل B به A عبارت

است از: $\frac{۵}{۳}$.

$$\frac{۳}{۵} \times ۳ = \frac{۹}{۵} = ۱/۸ \text{ (ب)}$$

$$\frac{۵}{۳} \times ۵ = \frac{۲۵}{۳} \approx ۸/۳۳ \text{ (پ)}$$

۶) از میان کمیت‌های متناسب زیر، کدام مستقیم و کدام معکوس است؟
الف) وزن یک کالا و قیمت آن؛
ب) تعداد شهرهایی که یک جوی آب را بر می‌کشد و زمان پر شدن جوی؛
پ) زمان مکالمه با تلفن همراه و هزینه آن؛
ت) تعداد مشتریان در یک بانک به زمان انتظار آنها یا فرض برابری زمان سرویس‌دهی؛
ث) وزن بسته پستی و هزینه ارسال بدون در نظر گرفتن هزینه ثابت؛
ج) تعداد کارگران و زمان انجام کار برای تخلیه بارهای یک انبار؛
چ) درآمد حاصل از دریافت عوارضی در یک اتوبان و تعداد ماشین‌هایی که از آن عبور می‌کنند.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ مقایسه کردن، استدلال کردن

حل: هر دو کمیت متناسب که با افزایش یکی دیگری نیز افزایش یابد مستقیم و در غیر این صورت معکوس است:

الف) مستقیم (ب) معکوس (پ) مستقیم (ت) مستقیم (ث) مستقیم
ج) معکوس (چ) مستقیم

مطالب این فصل در ارتباط با چند نوع خاص از رابطه‌های بین دو کمیت بود. این رابطه‌ها از ساده‌ترین رابطه‌های ممکن بین دو کمیت بودند که همواره مورد توجه بوده و در زندگی روزانه مورد استفاده قرار می‌گیرند. توسعه این مفهوم در فصل آخر کتاب تحت عنوان تابع انجام شده است. عملاً در این فصل به‌طور غیر مستقیم با مفهوم تابع سر و کار داشته‌ایم بدون آنکه نامی از تابع بیاوریم.

در کمیت‌های متناسب مستقیم رابطه بین آنها با ضابطه $y = Kx$ بیان و در کمیت‌های متناسب معکوس رابطه آنها با ضابطه $y = \frac{k}{x}$ بیان و در کمیت‌هایی که رابطه جمعی داشتند، رابطه بین آنها با ضابطه $y = x + K$ بیان می‌شد. تمام اینها انواع خاصی از توابع هستند. در برخی از مسائل با ترکیبی از این توابع هم برخورد کرده‌اید. مثلاً در مسئله سوختن شمع که طول آن مرتبط با زمان سپری شده بود و با افزایش زمان، طول شمع کاهش می‌یافت اما این رابطه از نوع تناسب معکوس نبود و ضابطه آن به صورت $y = Kx + b$ بوده است. بنابراین رابطه بین طول شمع و زمان ترکیبی از تناسب مستقیم و رابطه جمعی است. منتها در اینجا مقدار K منفی است و به همین خاطر با افزایش زمان طول شمع کاهش می‌یابد. در کمیت‌های متناسب مستقیم معمولاً ضریب تناسب K مثبت است زیرا کمیت‌های هندسی و فیزیکی که معمولاً با آنها سر و کار داریم، مثبت هستند.