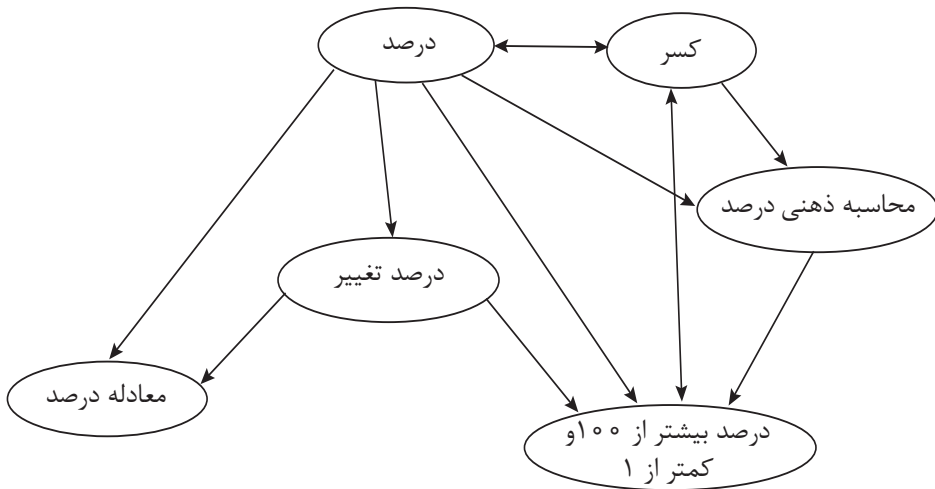


فصل دوم

درصد و کاربردهای آن

طرح کلی مفاهیم فصل دوم (نقشه مفهومی)



اهداف کلی فصل

- درک ارتباط بین کسر و درصد
- درک مفهوم درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- درک مفهوم درصد تغییر یک کمیت
- توجه به اهمیت کاربرد درصد در مسائل زندگی روزمره
- کسب مهارت محاسبه ذهنی درصد

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- درصدی از یک مقدار را به صورت ذهنی محاسبه کنند.
- درصد را با روش‌های مختلف محاسبه کنند و روش مناسب برای هر مسئله را بیابند و به کار گیرند.

- برای حل مسائل مرتبط با درصد معادله تشکیل دهند و معادله را حل کنند.
- درصدهای بیش از ۱۰۰ و کمتر از ۱ مقادیر مختلف را تفسیر و محاسبه کنند.
- درصد تغییر در مقدار کمیت‌ها را محاسبه کنند.

پیش نیازها:

- آشنایی با مفهوم درصد و محاسبات مربوط به آن.

نگاه کلی به فصل

مفهوم درصد و محاسبات با آن در زندگی بسیار به کار می‌رود. درک درست از این مفهوم، هنرجو را برای تشخیص آن در زمینه‌های گوناگون و چگونگی محاسبه با آن آماده می‌کند.

برای مثال، در علم احتمال مقدار یک احتمال یا نتایج به صورت درصد نیز بیان می‌شود. ارائه آمارهای اقتصادی از رشد یا کاهش یک مقدار یا شاخص‌های اقتصادی معمولاً با درصد بیان می‌شود. در اکثر فروشگاه‌هایی که در ایامی خاص اجناس خود را با تخفیف عرضه می‌کنند، مقدار تخفیف با درصد بیان می‌شود. این قبیل کاربردها باعث شده است که اکثر مردم درکی از مفهوم درصد داشته باشند. مثلاً در زبان محاوره‌ای وقتی اشاره به قطعیت اتفاقی داریم از اصطلاح ۱۰۰ درصد استفاده می‌کنیم و وقتی به عدم انجام یک اتفاق یقین داریم احتمال انجام آن اتفاق را با صفر درصد بیان می‌کنیم.

این فصل با بیان یک داستان درباره برخی اشتباهات رایج در محاسبات با درصد شروع شده است تا یک یادآوری غیر مستقیم از مفهوم درصد انجام شود. بخش اول این فصل، حالت یادآوری مفهوم درصد و چگونگی محاسبات با درصد و محاسبات ذهنی درصد را دارد. بخش دوم به آموزش مفهوم درصدهای بیش از ۱۰۰ و کمتر از ۱ می‌پردازد و با ارائه یک گزارش از یک نشریه درباره موضوعی که تقریباً همگی هنرجویان به نوعی با آن ارتباط دارند شروع شده است. این بخش از طریق مباحثه هنرجو با یکی از دبیران خود آموزش را ادامه می‌دهد. بخش سوم به مفهوم درصد تغییرات یک کمیت می‌پردازد و از طریق یک فعالیت محاسباتی این مفهوم را آموزش می‌دهد.

مثال	توصیف فرایند	فرایند
- ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	حل مسئله
- نوشتن معادله درصد و تبدیل به کسر کردن (کار در کلاس ۳)	شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسئله‌ها و یا انتخاب مناسب آنها	
- ارائه توضیح برای بیان درستی یا نادرستی نظر یکی از هنرجویان (قسمت «پ» فعالیت ۱) - ارائه توضیح در مورد درستی یا نادرستی تصور جعفر (سؤال ۹ از مسئله‌های بخش اول)	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	ارتباط کلامی
- توضیح دادن (مسئله ۷ از بخش اول)	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	
- ارائه دلیل برای مقایسه $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۷}$ (سؤال ۲ از مسائل بخش ۲) - ارائه دلیل برای بررسی درستی یا نادرستی نظر جعفر (سؤال ۹ از مسئله‌های بخش ۱)	به‌کارگیری استدلال	استدلال و اثبات
- ارتباط کسر و درصد (در حوزه اعداد) - به‌کارگیری درصد در بیان رشد وزن نوزاد (ارتباط با پزشکی)	تشخیص و به‌کارگیری در خارج از ریاضی	پیوندها و اتصالات
- نمایش میزان افزایش مساحت به‌صورت درصد تغییر (مثال دوم بعد از فعالیت ۳)	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	
- نمایش درصد بیان‌کننده سهم بازار فروش و سود حاصل از آن به‌صورت نمودار (نمودار میله‌ای ابتدای فصل)	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	بازنمایی‌ها
- تعمیم عبارت ضربی مربوط به محاسبه درصد یک مقدار خاص به معادله درصد (فعالیت ۲) - مقایسه $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۷}$ (سؤال ۲ از مسئله‌های بخش ۲) - مقایسه درصد‌های ارائه شده توسط دوفروشگاه (مسئله ۱۰ بخش ۱) - ارزیابی نظر جعفر (سؤال ۹ از مسئله بخش ۱)	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگوییابی و ...	سایر مهارت‌های تفکر

بخش اول: محاسبه ذهنی درصد

اهداف بخش

- شناختن روش‌های مختلف محاسبه درصد یک مقدار و کسب توانایی محاسبه درصد
- بیان کسری از یک مقدار به صورت درصد
- بیان درصدی از یک مقدار به صورت کسر
- تشخیص وضعیت‌هایی که نیاز به انجام محاسبات ذهنی درصد دارد
- محاسبه ذهنی درصد برخی از مقادیر
- حل مسائل مربوط به درصد با تشکیل معادله

واژه‌های کلیدی:

درصد، محاسبه ذهنی درصد

نگاه کلی به بخش:

در این بخش ابتدا با روایت یک اتفاق که ناشی از برداشت اشتباه در انجام محاسبات درصد است توجه هنرجویان به یکی از اشتباهات رایج در این گونه محاسبات جلب می‌شود. سپس با انجام فعالیت روش صحیح محاسبه درصدی از مقدار و درصد کل ارائه می‌شود. در زندگی روزمره بسیار اتفاق می‌افتد که نیاز به محاسبه دقیق درصد یک مقدار نداریم همچنین ابزار محاسبه (ماشین حساب) نیز در دسترس ما نیست. اما لازم است محاسبه تقریبی و سریع از درصد داشته باشیم، مثلاً گاهی برای خرید به یک فروشگاه می‌رویم و با درصدهای تخفیف اجناس مختلف روبه‌رو می‌شویم برای تصمیم‌گیری در مورد میزان خرید لازم است تقریبی از میزان قیمت کالاهای انتخابی پس از تخفیف داشته باشیم، بنابراین لازم است مهارت‌هایی در محاسبه درصد یک مقدار به‌طور ذهنی داشته باشیم. در این بخش روش‌هایی برای محاسبه برخی از درصدها به‌صورت ذهنی ارائه می‌شود.

ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب دبیر با توجه به سطح علمی هنرجویان در صورتی که نیاز است فعالیتی جهت یادآوری مفهوم درصد طراحی نماید و با بیان ارتباط بین کسر و درصد و استفاده از درصدهایی نظیر ۲۰، ۲۵، ۵۰ یا ۷۵ درصد آمادگی لازم برای ورود به مبحث را ایجاد کند. استفاده از رسم شکل برای درک بهتر مفهوم مفید است. در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند معلم می‌تواند با بیان اتفاقی نظیر آنچه در ابتدای فصل بیان شده است، سؤالاتی از این قبیل را از هنرجویان بپرسد.

- در محاسبه درصد چه اشتباهی اتفاق افتاده بود؟
 - آیا مواردی مشابه برای شما اتفاق افتاده است که دچار اشتباه برداشت بشوید و آیا به اشتباه خود پی برده‌اید؟ آیا می‌توانید روش محاسبه خود را توصیف کنید؟
- با طرح این سؤال‌ها، فضای آموزشی به سمتی هدایت می‌شود که تمامی هنرجویان در رسیدن به اهداف روایت مطرح شده، مشارکت داشته باشند. در غیر این صورت معلم می‌تواند از هنرجویان بخواهد متن ابتدای فصل را مطالعه کنند تا برای انجام فعالیت ۱ آمادگی داشته باشند.

فعالیت آموزشی

هنرجویان هنرستانی در یک کار فوق برنامه مشارکت داشته‌اند. ۱۰ درصد از کلاس اول، ۲۰ درصد از هنرجویان کلاس دوم و ۳۰ درصد از هنرجویان کلاس سوم در این کار شرکت کرده‌اند. تعداد هنرجویان کلاس اول ۳۰ نفر، کلاس دوم ۲۵ نفر و کلاس سوم ۴۰ نفر است. کلاً از هر کلاس چند نفر در کار فوق برنامه شرکت داشته‌اند؟

بیا چند درصد از مجموع هنرجویان این سه کلاس در کار فوق برنامه شرکت کرده‌اند؟

بیا آیا جمع درصد‌های هنرجویان شرکت‌کننده از این سه کلاس معنای خاصی دارد؟

بنا بر آن که هنرجویان گفتند برای محاسبه درصد شرکت‌کننده کل سه کلاس در کار فوق برنامه می‌توانیم میانگین درصد شرکت‌کننده کل این سه کلاس را حساب کنیم. آیا نظر او درست است؟ چرا؟ توضیح دهید.

اهداف موضوعی:

- کسب مهارت محاسبه درصد یک مقدار با روش‌های مختلف.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، ارتباطات کلامی، استدلال کردن، ارزیابی کردن

$$۱۰\% \times ۳۰ = \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۳۰ = ۳$$

الف) کلاس اول:

$$۲۰\% \times ۲۵ = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۲۵ = ۵$$

کلاس دوم:

$$۳۰\% \times ۴۰ = \frac{۳۰}{۱۰۰} \times ۴۰ = ۱۲$$

کلاس سوم:

$$\frac{۳ + ۵ + ۱۲}{۳۰ + ۲۵ + ۴۰} = \frac{۲۰}{۹۵} \approx ۰/۲۱۰۵ \Rightarrow ۰/۲۱۰۵ \times ۱۰۰ = ۲۱/۰۵ \approx ۲۱\% \quad \text{ب)}$$

پ) خیر، زیرا تعداد هنرجویان کلاس‌ها متفاوت است و مبنای محاسبه درصد سه کلاس یکسان نیست. برای یافتن میانگین درست باید با توجه به تعداد هنرجویان هر کلاس به درصد آن کلاس وزن داد و میانگین وزنی درصدهای شرکت کنندگان کلاس‌ها را به دست آورد. میانگین وزنی درصدها، همان جواب در قسمت (ب) است. (ت) خیر، جمع درصدها نشان دهنده هیچ مفهوم خاصی نیست.

در مورد محاسبات مربوط به میانگین، یکی از اشتباهات رایج، ناشی از عدم توجه به معنی میانگین وزنی است. اگر بخواهیم میانگین چند مقدار را به دست آوریم باید فراوانی همه آنها یکسان باشد و میانگینی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد (حاصل تقسیم مجموع همه مقادیر بر تعداد آنها) معنی دارد. اما در صورتی که فراوانی آنها متفاوت است (میزان اثر بخشی هر واحد از هر کدام از داده‌ها در نتیجه یکسان نیست) میانگین معمولی معنی خاصی ندارد و لازم است برای محاسبه میانگین به طور معنی‌دار، میانگین وزنی مقادیر را به دست آوریم. توجه به این موضوع، به ویژه مواقعی که درصدهایی از چند مقدار در اختیار داریم و می‌خواهیم درصد کل مقادیر را به دست آوریم، موجب اجتناب از اشتباه می‌شود. با توجه به وضعیت کلاس، دبیران محترم می‌توانند جهت ارتقای مهارت محاسبه درصد و درک اشتباه رایج کار در کلاس‌ها یا مسئله‌هایی منطبق با اهداف این فعالیت طرح کرده و از هنرجویان بخواهند تا آنها را حل کنند و روش حل خود را توصیف و نتایج حاصل را تفسیر کنند. در صورت وجود درک نادرست از این موضوع با ارائه توضیحات مناسب می‌توان هنرجویان را به درک صحیحی از این مفهوم رساند. یکی دیگر از اشتباهات رایج را در مسئله زیر و حل آن توسط یکی از هنرجویان می‌توان دید:

یکی از فروشندگان کالا در پایان هفته ۲۰ قلم از یک نوع کالا را فروخته است اگر قیمت هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان بوده باشد و ۲۰ درصد سود کرده باشد میزان سود او در هر قلم کالا چقدر است؟

حل هنرجو:

برای هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان دریافت کرده است که ۲۰ درصد آن سود می‌باشد. بنابراین میزان سود برابر $۳۰۰۰۰ \times ۲۰\% = ۶۰۰۰$ می‌باشد.

اشکال راه حل ارائه شده این است که درصد به عنوان جزئی از کل قیمت فروش محاسبه شده است در حالی که مجموع سود و قیمت تمام شده، قیمت فروش را می‌دهد به عبارت دیگر داریم:

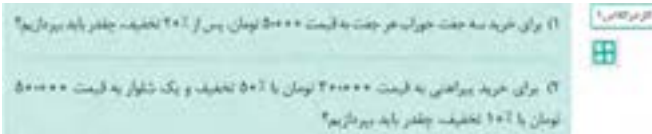
قیمت تمام شده + ۲۰٪ قیمت تمام شده = ۳۰۰۰۰ تومان که اگر به صورت

کسری نشان دهیم داریم :

$$\text{قیمت تمام شده} + 20\% \text{ قیمت تمام شده} = \text{قیمت تمام شده} + \frac{1}{5} \text{ قیمت تمام شده}$$

$$= \frac{1}{5} \text{ قیمت تمام شده}$$

بنابراین سود ۵۰۰۰ تومان و قیمت تمام شده ۲۵۰۰۰ تومان می‌باشد. بنابراین لازم است در محاسبه درصد سود روی قیمت تمام شده تأکید شود یعنی در اینجا کل، قیمت تمام شده است و قیمت فروش نیست. گفتگو در کلاس درباره این گونه وضعیت‌ها به درک بهتر مفهوم درصد کمک می‌کند.



اهداف:

■ تقویت مهارت محاسبه درصد از یک مقدار در حل مسائل زندگی روزمره

$$1 \quad 0 / 20 \times 5000 = \frac{20}{100} \times 5000 = 1000 \rightarrow 6000 - 1000 = 5000 = 4000$$

پس 3×4000 تومان باید بپردازیم

۲ قیمت پیراهن پس از تخفیف:

$$0 / 50 \times 30000 = \frac{50}{100} \times 30000 = 15000 \rightarrow 30000 - 15000 = 15000$$

قیمت شلوار پس از تخفیف

$$0 / 10 \times 50000 = \frac{10}{100} \times 50000 = 5000 \rightarrow 50000 - 5000 = 45000$$

$$\text{قابل پرداخت: } 45000 + 15000 = 60000$$

دبیران محترم در این قسمت می‌توانند با ارائه سؤالاتی نظیر کار در کلاس‌ها، در مسائلی که چند درصد مختلف بیان می‌شود، مهارت محاسبه صحیح درصد یک مقدار را ارتقا دهند.



اهداف:

■ تقویت مهارت محاسبه درصد یک مقدار به‌طور ذهنی از طریق برقراری ارتباط بین

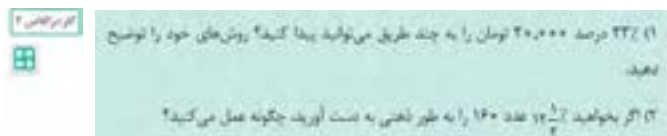
درصدهای مختلف از یک مقدار، برقراری ارتباطات کلامی، پرورش مهارت تفکر واگرا
۱ ۴ درصد یک مقدار ۲ برابر ۲ درصد آن است پس حاصل $1200 = 2 \times 600$ خواهد بود.

۲ ۱۰ درصد یک مقدار ۵ برابر ۲ درصد آن است پس حاصل $3000 = 5 \times 600$ خواهد بود.

۳ ۹۲ درصد یک مقدار ۸ درصد از ۱۰۰ درصد کمتر است و ۸ درصد ۴ برابر ۲ درصد آن است پس ۸ درصد مقدار $2400 = 4 \times 600$ و $27600 = 24000 - 30000$ ۹۲ درصد خواهد بود.

۴ روش اول چون ۵۰ درصد نصف می‌باشد، کافی است نصف 30000 را به دست آوریم (30000 را بر ۲ تقسیم کنیم)، روش دوم ۵۰ درصد ۲۵ برابر ۲ درصد است پس حاصل ضرب ۲۵ در 600 را به دست می‌آوریم. روش سوم ۱۰ درصد 30000 را به دست می‌آوریم و حاصل را در ۵ ضرب می‌کنیم، روش چهارم ضرب 30000 در ۵۰ درصد است.

لازم به ذکر است در اینجا ارائه یک قالب یا قالب‌های خاص توسط دبیر جهت انجام محاسبات ذهنی درصد هنرجویان مورد نظر نیست. بلکه ارائه مثال‌هایی از روش‌های مختلف محاسبه ذهنی درصد است. پرسیدن روش‌های محاسبه ذهنی هنرجویان و تشویق آنها برای ارائه روش‌های متنوع که توسط خود آنها ساخته شده می‌تواند مهارت‌های ذهنی آنها را ارتقا دهد. این مهارت‌ها در موارد مشابه در سایر موضوع‌ها نیز قابل به کارگیری است.



اهداف:

■ تقویت مهارت محاسبه و تخمین درصدی از یک مقدار به‌طور ذهنی از طریق برقراری ارتباط با کسر معادل.

■ محاسبه درصد یک مقدار با روش‌های مختلف.

برقراری ارتباطات کلامی، پرورش مهارت تفکر واگرا

روش اول: ۳۳ درصد را به‌طور تقریبی، کسر $\frac{1}{3}$ در نظر گرفته و آن را حل می‌کنیم.

$$30000 \times \frac{1}{3} = \frac{30000}{3} = 10000$$

روش دوم: به جای ۳۳ درصد از کسر $\frac{۳}{۱۰}$ استفاده می‌کنیم.

$$۳۰۰۰۰۰ \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۹۰۰۰۰۰}{۱۰} = ۹۰۰۰۰۰$$

روش سوم: آن را در $\frac{۳۳}{۱۰۰}$ ضرب کنیم:

$$۳۰۰۰۰۰ \times \frac{۳۳}{۱۰۰} = \frac{۹۹۰۰۰۰۰}{۱۰۰} = ۹۹۰۰۰$$

روش چهارم: ۱٪ از ۳۰۰۰۰۰ (که معادل تقسیم بر ۱۰۰ در محاسبه درصد است) را پیدا کرده و حاصل را در ۳۳ ضرب کنیم:

$$۳۰۰ \times ۳۳ = ۹۹۰۰$$

با توجه به نوع نیاز ما در محاسبه درصد (محاسبات کاملاً دقیق یا محاسبه تقریبی) روش مناسب برای محاسبه درصد را انتخاب می‌کنیم.

۲ $\frac{۱۲}{۵}$ درصد نصف ۲۵ درصد که $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد. ابتدا $\frac{۱}{۴}$ را پیدا کرده و سپس بر ۲ تقسیم می‌کنیم. یعنی

$$۱۶۰ \div ۴ = ۴۰ \rightarrow ۴۰ \div ۲ = ۲۰$$

یا می‌توان گفت: $\frac{۱۲}{۵}$ درصد همان $\frac{۱}{۸}$ است ($\frac{۱۲}{۵} = \frac{۱}{۸}$) یعنی کافی است ۱۶۰ بر عدد ۸ تقسیم شود پس حاصل $۱۶۰ \div ۸ = ۲۰$ خواهد بود.

مسئله‌ها

۱) یک دروازه‌بان در بازی اول خود ۹ توپ از ۱۰ توپی را که به طرف دروازه رده شده مهار کرد. این دروازه‌بان در بازی دوم خود ۵ توپ از ۸ توپ و در بازی سوم خود ۶ توپ از ۷ توپ فرستاده شده به طرف دروازه را مهار کرد. **الف) در هر بازی، این دروازه‌بان چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟**

ب) او در این سه بازی روی هم چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

پ) آیا جمع درصد توپ‌های مهار شده در این سه بازی معنای خاصی دارد؟



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارزیابی کردن (الف)

$$\frac{9}{10} \times 100 = 90 \rightarrow 90\%$$

$$\frac{5}{8} \times 100 = 62 \frac{5}{8} \rightarrow 62 \frac{5}{8}\%$$

$$\frac{6}{7} \times 100 = 85 \frac{6}{7} \rightarrow 85 \frac{6}{7}\%$$

$$\frac{9+5+6}{10+8+7} \times 100 = \frac{20}{25} \times 100 = 80 \rightarrow 80\% \quad (\text{ب})$$

(ج) خیر، چون تعداد پرتاب‌های هر کدام از بازی‌ها با دیگری متفاوت است، پس معنای خاصی ندارد.

۳) تعداد پاسخ‌های درست محمد به سؤال‌های سه آزمون، در جدول زیر آورده شده است. الفبا جدول را کامل کنید. بعد درصد کل پاسخ‌های درست در سه آزمون را پیدا کنید.

آزمون	سؤال‌های سه آزمون	تعداد پاسخ‌های درست	درصد پاسخ‌های درست
۱	۹	۷	۷۷/۷
۲	۶	۶	۱۰۰
۳	۱۰	۷	۷۰
مجموع سه آزمون	۲۵	۲۰	۸۰

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی

شماره آزمون	تعداد سؤالات آزمون	تعداد پاسخ‌های صحیح	درصد پاسخ‌های صحیح
۱	۹	۷	۷۷/۷
۲	۶	۶	۱۰۰
۳	۱۰	۷	۷۰
مجموع سه آزمون	۲۵	۲۰	۸۰

۳) با توجه به اینکه ۳۵٪ عدد ۲۲۰۰ برابر ۷۷ است، محاسبات زیر را به صورت ذهنی انجام دهید:

الف) ۷ درصد ۲۴۰۰ (ب) ۷۰ درصد ۲۲۰۰ (پ) ۵ درصد ۲۲۰۰
 ت) ۳/۵ درصد ۲۴۰۰ (ث) ۱۴ درصد ۲۲۰۰ (ج) ۳۱ درصد ۲۴۰۰

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، مقایسه کردن

$$۷۷ \div ۵ = ۱۵۴$$

$$۷۷ \times ۲ = ۱۵۴$$

$$۷۷ \div ۷ = ۱۱$$

$$۷۷ \div ۱۰ = ۷.۷$$

$$۱۵۴ \times ۲ = ۳۰۸$$

$$۱۵۴ \times ۳ = ۴۶۲$$

الف) ۷ درصد، یک پنجم ۳۵ درصد است یعنی:

ب) ۷۰ درصد، دو برابر ۳۵ درصد است پس:

پ) ۵ درصد، یک هفتم ۳۵ درصد است یعنی:

ت) ۳/۵ درصد، یک دهم ۳۵ درصد است یعنی:

ث) ۱۴ درصد، دو برابر ۷ درصد است یعنی:

ج) ۲۱ درصد، سه برابر ۷ درصد است یعنی:

۴) هر عدد در ستون اول جدول زیر با توصیفی در ستون دوم بیان شده است. هر عدد را به توصیف آن ارتباط دهید و برای هر یک، مثالی بیاورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ بازیابی اطلاعات، تفکر واگرا

مثال	توصیف	درصد
 کسری از شکل مقابل که رنگ شده	من نصف نصف هستم!	۲۵٪
نسبت هر عدد به خودش	من با یک برابرم!	۵۰٪
نسبت شربت به آب در یک نوشنی که برای هر ۵ لیتر آب نیم لیتر شربت کافی است.	من از یک چهارم کوار و وی از یک دهم پیشتر هستم!	۴۰٪
شانس رو یا پشت آمدن در پرتاب یک سکه	من با $\frac{1}{2}$ برابرم!	۵۰٪
نسبت شربت به آب در یک نوشیدنی که برای هر ۱۰ لیتر آب، ۳ لیتر شربت استفاده شده	من از نصف کوار و از یک چهارم پیشترم!	۱۰٪
شانس پیروزی یک نفر در قرعه کشی که بین ۲۰۰ نفرم شانس انجام می‌شود.	من از $\frac{1}{200}$ کمترم!	۰.۵٪
شانس خروج یک مهره خاص از ظرف شامل ۱۰۰ مهره	من یک دهم یک دهم هستم!	۳۰۰٪
نسبت سن یک پدر ۴۰ ساله به فرزند یک ساله اش	من از یک پیشترم!	$\frac{1}{40}$ ٪

۵) سعید گفت اگر به عددی ۱۰ تا اضافه کنم و سپس ۱۰ تا از حاصل کم کنم، همان عدد قبلی به دست می‌آید. حالا اگر ۱۰٪ عددی را به آن اضافه کنم و سپس ۱۰٪ حاصل را از آن (حاصل) کم کنم، آیا همان عدد اول به دست می‌آید؟ یا یک مثال عددی، پاسخ سؤال سعید را به دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، ارزیابی کردن، استدلال کردن

عدد ۱۰۰ را در نظر می‌گیریم ۱۰ درصد آن عدد ۱۰ است که اگر اضافه شود حاصل ۱۱۰ خواهد بود و ۱۰ درصد این عدد ۱۱ است که اگر از ۱۱۰ کم کنیم حاصل ۹۹ خواهد بود. این‌گونه محاسبات در مورد درصد نیز از اشتباهات رایج می‌باشد که ناشی از مقایسه کردن آن با اضافه و کم کردن یک عدد به عدد دیگر است درحالی‌که در مرحله اول درصدی از ۱۰۰ و حال آنکه در مرحله دوم درصدی از ۱۱۰ حساب می‌شود که مقدار آنها متفاوت است بنابراین مقدار افزوده شده با مقدار کم شده مساوی نیست. می‌توان از هنرجویان خواست با عوض کردن مراحل (یعنی ابتدا درصدی را کم کرده و سپس همان درصد را اضافه کنیم) پاسخ را با قسمت قبل مقایسه کرده و در مورد آن توضیح دهند.

۶) درصدی بنویسید که از $\frac{1}{4}$ بیشتر و از $\frac{2}{3}$ کمتر باشد.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، مقایسه، پیوند و اتصال

در این سؤال دو مطلب مورد توجه است اول: سؤالی که بیش از یک پاسخ دارد دوم: سؤالی که بیش از یک راه حل درست دارد (پرورش تفکر واگرا) مثلاً یک راه حل بیان کسر به صورت درصد (که با توجه به کسرهای داده شده محاسبه درصد نیز به صورت ذهنی و بدون محاسبه قابل انجام است) و یافتن درصد مورد نظر و راه دوم یافتن کسری بین این دو کسر و تبدیل کسر به درصد. در این سؤال هر درصد بین ۵۰ درصد و ۷۵ درصد جواب است.

۷) سعید گفت: من می‌توانم مسئله‌های مربوط به درصد را به صورت ذهنی و خیلی سریع حساب کنم. سعید پرسید: مثلاً سریع بگو. ۹۰ درصد ۵۵ چقدر می‌شود؟ او به سرعت گفت: $۵۵ - ۵۵ = ۴۹/۵$. سعید پرسید: ۶ درصد ۱,۴۰۰ چقدر می‌شود؟ سعید گفت: $۸۴ = ۱۴ \times ۶$. سعید پرسید: ۲۵٪ عدد ۴۴ چقدر می‌شود؟ سعید گفت: $۱۱ = ۴ \times ۲۵$. سعید گفت: ۲۵٪ درصد حقوق من ۱۲۰,۰۰۰ تومان است. حقوق من چقدر است؟ او به سرعت جواب داد: ۴۸۰,۰۰۰ تومان. در هر حالت، روش محاسبه سعید را توضیح دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند اتصال ریاضی و خارج ریاضی، استدلال کردن، ارتباطات کلامی

● با توجه به اینکه ۹۰ درصد به اندازه ۱۰ درصد با ۱۰۰ درصد فاصله دارد ابتدا ۱۰ درصد ۵۵ را حساب کرده که ۵/۵ است و حاصل را از ۵۵ (که ۱۰۰ درصد مقدار است) کم کرده است.

● ۶ درصد همان ۶ برابر ۱٪ است که کافی است ۱٪ از ۱۴۰۰ یعنی ۱۴ را در ۶ ضرب کنیم.

● ۲۵٪ هر عددی $\frac{1}{4}$ آن است یعنی باید عدد بر ۴ تقسیم شود.

● ۲۵٪ هر عددی، $\frac{1}{4}$ آن است بنابراین خود عدد، ۴ برابر ۲۵٪ عدد است. پس

باید در ۴ ضرب شود تا کل حقوق به دست آید.

۸ الف) ۴۹/۵، چند درصد ۳۳ است؟
ب) چند درصد از ۹۰، برابر با ۸۰ است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

$$۴۹/۵ = \frac{x}{۱۰۰} \times ۳۳ \rightarrow \frac{x}{۱۰۰} = \frac{۴۹/۵}{۳۳} \rightarrow x = ۱۵۰ \rightarrow ۱۵۰\% \quad \text{الف)}$$

برای حل معادله $۴۹/۵ = \frac{x}{۱۰۰} \times ۳۳$ در صورتی که هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند $\frac{x}{۱۰۰}$ را a گرفته و معادله $۴۹/۵ = a \times ۳۳$ را بر حسب a حل کرده و سپس a را $\frac{x}{۱۰۰}$ گرفته و x را به دست آورند.

ب) چند درصد از ۹۰ برابر با ۸۰ است؟

$$۸۰ = \frac{x}{۱۰۰} \times ۹۰ \rightarrow \frac{x}{۱۰۰} = \frac{۸۰}{۹۰} \rightarrow x \approx ۸۸/۸۹ \rightarrow ۸۸/۸۹\%$$

۱۹) جعفر می‌خواهد نمره ریاضی خود را از ۱۴ به ۱۸ برساند. او فکر می‌کند اگر در امتحان بعدی ۴٪ بیشتر به سؤال‌ها پاسخ درست بدهد، به هدف خود می‌رسد. آیا او درست فکر کرده است؟ توضیح دهید چرا.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، ارزیابی کردن، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن این سؤال با پاسخ واگراست. برای همین استدلال هنرجو درستی یا نادرستی را تعیین می‌کند. برای مثال هنرجویی آزمون را ۲۰ نمره‌ای در نظر بگیرد. در این صورت

با توجه به محاسبات

$$18 - 14 = 4 \rightarrow \frac{4}{20} \times 100 = 20 \rightarrow 20\%$$

واضح است که پاسخ درست نیست و جعفر مقدار افزایش نمره را با درصد افزایش آن اشتباه گرفته است. راه حل دیگر این مسئله به صورت زیر است که ابتدا ۴ درصد ۲۰ را حساب می‌کنیم یعنی $0/8 = 20 \times 4/100 = 0/8$ که نمره او $14 + 0/8 = 14/8$ خواهد شد نه ۱۸.

در صورتی که هنرآموز استدلال بیاورد که آزمون ۱۰۰ نمره‌ای باشد، می‌توان گفت، جعفر درست فکر کرده است.



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، مقایسه کردن، ارتباطات کلامی، استدلال کردن

می‌توان با یک مقدار معین (به‌عنوان قیمت کفش) این دو تخفیف را با هم مقایسه کرد:

اگر قیمت کیف ۴۰۰۰۰۰ تومان باشد؛

$$در\ فروشگاه\ الف\ (خرید\ نرگس):\ مقدار\ تخفیف: \quad 0/25 \times 400000 = 140000$$

$$مقدار\ پول\ پرداخت\ شده\ توسط\ نرگس: \quad 400000 - 140000 = 260000$$

$$در\ فروشگاه\ ب\ (خرید\ ناهید):\ مقدار\ تخفیف\ اول: \quad 0/25 \times 400000 = 100000$$

$$قیمت\ پس\ از\ تخفیف\ اول: \quad 400000 - 100000 = 300000$$

$$مقدار\ تخفیف\ دوم: \quad 0/10 \times 300000 = 30000$$

$$مقدار\ پول\ پرداخت\ شده\ توسط\ ناهید: \quad 300000 - 30000 = 270000$$

ملاحظه می‌شود ناهید مبلغ بیشتری پرداخته است. در اینجاست می‌توان از هنرجویان خواست تا علت این تفاوت را توضیح دهند یا از آنها سؤال کرد اگر ابتدا تخفیف ۱۰ درصدی و سپس تخفیف ۲۵ درصدی اعمال شود نتیجه چگونه است؟ در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند می‌توان این مقایسه را به‌طور کلی و با استفاده از یک پارامتر نظیر a انجام داد.

بخش دوم: درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱

اهداف بخش

- درک مفهوم درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- انجام محاسبه ذهنی با درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- حل مسائل مربوط به درصد با تشکیل معادله

واژه‌های کلیدی:

درصد بیشتر از ۱۰۰، درصد کمتر از ۱، محاسبه ذهنی درصد.

نگاه کلی به بخش:

در موضوع درصد گاهی به درصدهای بیش از ۱۰۰ یا کمتر از ۱ برخورد می‌کنیم. درصدهای بیشتر از ۱۰۰ مشابه کسرهای بزرگ‌تر از واحد هستند که به جای بیان جزئی از کل، بیان‌کننده چند برابر بودن نسبت به یک مقدار مینا هستند. کسرها گاهی به منظور بیان جزئی از کل و گاهی برای بیان چند برابر یک مقدار به کار برده می‌شوند. درصد نیز گاهی برای بیان درصدی از یک کل (که به صورت درصدی از صفر تا صد بیان می‌شود) و گاهی برای اشاره به چند برابر یک مقدار مورد استفاده قرار می‌گیرد (که در این حالت با درصدی بیشتر از ۱۰۰ مشخص می‌شود) این موضوع به تفسیر درست نتایج مربوط به مسائلی که در آنها با درصدهای بیشتر از ۱۰۰ سروکار داریم، کمک می‌کند.

درمورد درصدهای کمتر از ۱ مفهوم جدیدی رخ نمی‌دهد ولی معمولاً اشتباه محاسباتی وجود دارد. مثلاً $\frac{5}{7}$ درصد اگر به صورت کسر نمایش داده شود، معادل $\frac{5}{1000}$ می‌باشد که ممکن است معادل $\frac{5}{10}$ در نظر گرفته شود. عدم آشنایی هنرجویان با این قبیل درصدها موجب ارائه تفسیر اشتباه از نتایج یک مسئله یا اشتباه در محاسبات می‌شود. بنابراین موضوع این بخش درصدهای بیش از ۱۰۰ و کمتر از ۱ در نظر گرفته شده است. این بخش با اعلام خبری که در آن درصد

بیشتر از ۱۰۰ آمده است، شروع می‌شود و زمینه لازم برای طرح این موضوع فراهم می‌شود. سپس به صورت بحثی دوجانبه این مفهوم آموزش داده می‌شود. در جهت افزایش درک درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و مفهوم درصدهای کمتر از ۱ چند مثال ارائه می‌شود. بخش با بیان راه کارهایی برای انجام محاسبات ذهنی درصد ادامه می‌یابد و نحوه تشکیل معادله‌ای که به کمک آن بتوان مسائل مرتبط با درصد را حل کرد در قالب فعالیت و مثال، توضیح داده می‌شود.

ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب با مراجعه به سایت‌های خبری، می‌توان خبری را که برای هنرجویان جذابیت خاصی داشته باشد یافت که حاوی درصدی بیش از ۱۰۰ باشد و به عنوان شروع در مورد آن صحبت کرد یا از هنرجویان خواست تا با مراجعه به سایت‌های خبری، خبرهای مشابهی را بیابند و در کلاس مطرح کنند و آن را معنی و تفسیر کنند. سپس با طرح سؤال‌هایی نظیر سؤال‌های ابتدای بخش، همه هنرجویان را در این بحث درگیر کرد. در غیر این صورت می‌توان از همان متن ابتدای فصل استفاده کرد.

شروع این بخش در قالب یک مباحثه بین هنرجو و معلم است، زیرا هنرجویان با مفهوم درصد آشنایی دارند و فقط حالتی که میزان درصد بیش از ۱۰۰ شود مطرح است. ذکر این نکته ضروری است که وقتی درصد مقداری با عدد بیشتر از ۱۰۰ بیان می‌شود به معنی جزئی از کل نیست بلکه نظیر مفهوم کسر بزرگ‌تر از ۱ است که معنی چند برابری دارد.

کار در کلاس ۳

۱) 0.12% از ۳ میلیون نفر، چند نفر می‌شود؟

۲) ۵ نفر از ۴,۰۰۰ نفر چند درصد این نفراند؟

۳) 14% از ۴۰۰ لیتر آب، چند لیتر آب است؟

۴) وزن مریخ در هنگام تولد ۳ کیلوگرم بوده و در ده سالگی ۲۱ کیلوگرم است. وزن او در ده سالگی چند درصد وزن نوزادی‌اش است؟

۵) مثالی بیان کنید که رشد 12% درصدی را نشان دهد آن را تفسیر کنید.

۶) مثالی بیان کنید که کاهش 12% را نشان دهد آن را تفسیر کنید.

اهداف:

- تقویت مهارت محاسبه درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
 - تقویت مهارت در بیان نسبت‌ها به صورت درصد.
 - پرورش مهارت‌های حل مسئله، برقراری ارتباط کلامی، تفکر واگرا
- سؤال‌های مطرح شده در این کار در کلاس بر درصدهای بیشتر از ۱۰۰ یا کمتر از ۱ تمرکز دارد. حل این سؤال‌ها موجب می‌شود تا درصدهای بیشتر از ۱۰۰ یا کمتر از یک را در یک زمینه واقعی ببینند و درک مناسبی از این گونه درصدها داشته باشند. در قسمت ۵ و ۶ این کار در کلاس توصیه می‌شود تا در مورد نحوه محاسبه اعداد موجود در صورت مثال طرح شده توسط هنرجو سؤال شود (مثلاً در نمونه مثال ذکر شده در قسمت ۵ نحوه محاسبه عدد ۵ میلیون و عدد ۱۱ میلیون و دویست هزار نفر را بیان کنند).

۱) 0.12% یعنی $\frac{0.12}{100} = \frac{2}{10000}$ در نتیجه داریم: $3000000 \times \frac{2}{10000} = 6000$

۲) $x \times 4000 = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4000} \Rightarrow x = 0.00125 \Rightarrow 0.125\%$

۳) $\frac{140}{100} \times 400 = 560$

۴) $x \times 3 = 21 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow 700\%$

۵) می‌توانیم از مثال جمعیت استفاده کنیم. مثلاً، جمعیت یک کشور ۵ میلیون و جمعیت کشوری دیگر ۶ میلیون و دویست هزار نفر است. جمعیت کشور دوم چند

درصد جمعیت کشور اول است؟

۶ مثلاً، قیمت یک نوع گوشی در فروشگاه ۵۸۰ هزار تومان و قیمت تولید آن در کارخانه ۵۷۵۳۶۰ تومان است. قیمت تولید این گوشی در کارخانه چند درصد کمتر از قیمت آن در فروشگاه است؟

فعالیت آموزشی

۱) یک نسای با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان $\frac{2}{3}$ از ۲۴ را پیدا کرد.

۲) با توجه به اینکه درصد را می‌توانیم با یک عدد کسری نمایش دهیم، یک نسای با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان 20% از ۳۶ را پیدا کرد.

۳) یک نسای با عبارت ضربی در حالت کلی بنویسید که به کمک آن بتوان درصدی از یک مقدار را پیدا کرد. در این معادله، مقدار اولیه را با a ، درصد را با b و مقدار نهایی را با k نشان دهید.

۴) سه مسئله را طوری طرح کنید که در یکی k ، و در یکی a و در یکی b مجهول باشد.

اهداف موضوعی:

■ تشکیل معادله در مسائل مربوط به درصد.

مهارت‌ها و فرایندها:

طرح مسئله، مدل‌سازی جبری مسائل مرتبط با درصد از طریق تشکیل معادله.

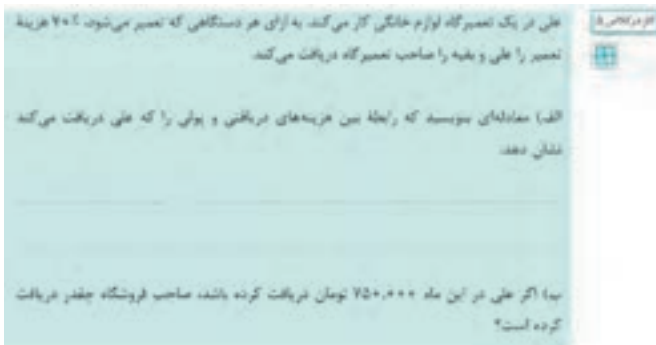
$$\frac{2}{3} \times 24 = 16 \quad 1$$

$$0/30 \times 36 = \frac{30}{100} \times 36 = 10/8 \quad 2$$

$$a \times x = y \quad 3 \text{ (در اینجا } a \text{ به صورت اعشاری یا کسری نشان داده می‌شود.)}$$

۴ مسئله ۱- در یک فروشگاه کفش کالاها با 20% تخفیف عرضه می‌شود. اگر قیمت اولیه یک کفش ۶۰۰۰۰ تومان باشد، خریدار چه مبلغی را تخفیف گرفته است؟
 مسئله ۲- در فروشگاه دیگر، قیمت اولیه یک کفش ۶۰۰۰۰ تومان است. خریدار پس از تخفیف ۴۰۰۰۰ تومان به فروشنده پرداخته است. خریدار چند درصد تخفیف گرفته است؟

مسئله ۳- در فروشگاه اول که کالاها با 20% تخفیف عرضه می‌شود. اگر قیمت کفشی پس از تخفیف ۴۰۰۰۰ تومان باشد قیمت اولیه آن چقدر بوده است؟



اهداف:

■ مدل‌سازی یک وضعیت زندگی روزانه مرتبط با درصد به کمک معادله و استفاده از آن در حل مسئله.

$$\text{الف) } y = 0.70x = \frac{7}{10}x$$

ب) راه اول: دریافتی صاحب فروشگاه از x ریال هزینه دریافتی: $x - \frac{7}{10}x = \frac{3}{10}x$
بنابراین داریم:

$$\frac{7}{10}x = 750000 \rightarrow x = \frac{750000}{7} \rightarrow \frac{3}{10}x = \frac{3}{10} \times \frac{750000}{7} = \frac{225000}{7}$$

راه دوم: می‌توان با توجه به سهم علی (که ۷۰ درصد است) و سهم صاحب مغازه (که ۳۰ درصد می‌شود) نسبت سهم صاحب مغازه به سهم علی را از ۱۰۰ که ۳۰ به ۷۰ می‌باشد را به صورت کسری نوشت: یعنی $\frac{30}{70} = \frac{3}{7}$ و از آن در محاسبه سهم

صاحب مغازه استفاده کرد یعنی:

$$\frac{3}{7} \times 750000 = \frac{225000}{7}$$

مسئله‌ها

۱- جدول زیر را کامل کنید.

۱- (در این جدول درصدها به صورت‌های مختلف عدد اعشاری، عدد صحیح و عدد کسری بیان شده است. می‌توان از هنرجویان خواست که درصد کسری را به صورت اعشاری یا برعکس نمایش دهند).

مهارت‌ها و فرایندها:

تبدیل درصد، کسر و اعشاری به هم

درصد	به صورت کسر	به صورت اعشاری
۳۷/۵٪	$\frac{۳}{۸}$	۰/۳۷۵
۱۱۰٪	$\frac{۱۱}{۱۰}$	۱/۱
۱٪	$\frac{۱}{۱۰۰}$	۰/۰۱
۰/۵٪	$\frac{۱}{۲۰۰}$	۰/۰۰۵
۱۲/۵٪	$\frac{۱}{۸}$	۰/۱۲۵
$\frac{۲}{۵}$ ٪	$\frac{۱}{۲۵۰}$	۰/۰۰۴

۲/۷ یک مقدار بیشتر است یا ۰/۷٪ همان مقدار ۲ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، ارزیابی کردن، مقایسه کردن

۰/۷ درصد یعنی $\frac{۰/۷}{۱۰۰}$ که همان $\frac{۷}{۱۰۰۰}$ است، که مقدار آن از $\frac{۷}{۱۰}$ کمتر است.

۳) یک نوع کالا در فروشگاه‌های الف و ب با تخفیف ارائه شده است:

در فروشگاه الف قیمت پس از تخفیف ۱۵۰,۰۰۰ ریال و در فروشگاه ب قیمت قبل از تخفیف ۳۰۰,۰۰۰ ریال می‌باشد. اگر درصد تخفیف فروشگاه الف برابر ۴۰٪ و فروشگاه ب برابر ۲۵٪ باشد: الف) قبل از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

ب) بعد از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، مقایسه کردن

با توجه به اینکه فروشگاه ۲۰٪ تخفیف می‌دهد پس ۸۰٪ قیمت هر کالا باید

$$0/80 \times X = 150000$$

پرداخت شود. بنابراین داریم:

فروشگاه الف) قیمت قبل از تخفیف:

$$150000 \div 0/80 = \frac{150000 \times 100}{80} = 187500$$

فروشگاه ب) قیمت پس از تخفیف:

$$200000 \times 0/25 = 50000 \rightarrow 200000 - 50000 = 150000$$

واضح است قبل از تخفیف خرید از فروشگاه الف مقرون به صرفه‌تر است و بعد از تخفیف قیمت در هر دو فروشگاه یکسان است.

بخش سوم: درصد تغییر

اهداف بخش

- درک مفهوم درصد تغییر
- یافتن درصد تغییر مقادیر یک کمیت
- محاسبه مقدار اولیه یا مقدار نهایی از طریق درصد تغییر
- درک معنی علامت درصد تغییر (+/-) در مسائل و تفسیر آن

واژه‌های کلیدی:

درصد تغییر.

نگاه کلی به بخش:

ارزیابی مناسب پدیده‌هایی نظیر تورم، تغییر قیمت سهام مختلف و... برای پیش‌بینی وضعیت آینده و برنامه‌ریزی مناسب جهت کنترل مطلوب این پدیده‌ها بسیار اساسی است. در هر کدام از این پدیده‌ها با نوعی کاهش و یا افزایش مقادیر در یک بازه زمانی مواجه هستیم. میزان افزایش یا کاهش، نسبت به مقدار اولیه سنجیده و به صورت درصد تغییر بیان می‌شود. در این بخش با طرح یک سؤال از چگونگی تصمیم‌گیری در بازار سهام، سعی در ایجاد انگیزه در هنرجویان برای ورود به موضوع درصد تغییر شده است. سپس با ارائه یک فعالیت، زمینه برای درک مفهوم درصد تغییر فراهم آمده است. در ادامه با ذکر چند مثال، علامت درصد تغییر (منفی یا مثبت) معنی شده است.

ورود به مطلب:

دبیران می‌توانند با استفاده از اخبار اقتصادی مرتبط با رشد یا کاهش تورم یا رصد کردن تحولات برخی از بورس‌ها کلاس را با طرح سؤال‌های مناسب از هنرجویان شروع کنند و انگیزه لازم جهت ورود به مبحث را به‌وجود آورند. در زمینه موضوع‌های مطرح شده در این بخش یکی از اشتباهات رایج این است که برای محاسبه درصد تغییر مقدار تغییر را بر مقدار اولیه تقسیم نمی‌کنند، بنابراین لازم است توضیح داده شود که وقتی درصد تغییری از یک مقدار را بیان می‌کنیم

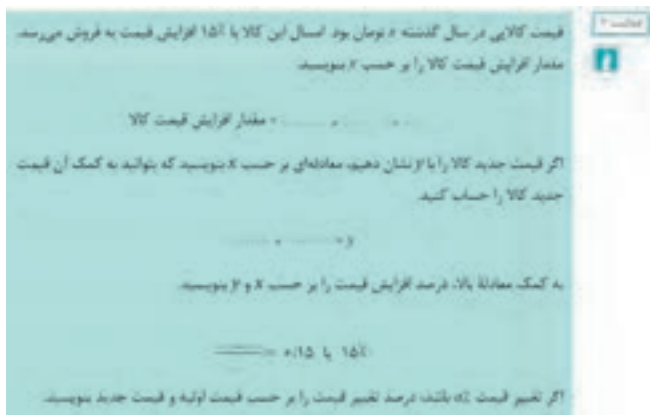
آن را به صورت نسبی از ۱۰۰ در نظر می‌گیریم که با نسبت تغییر به مقدار اولیه برابر است. بنابراین لازم است که مقدار تغییر بر مقدار اولیه تقسیم شود. یکی دیگر از موضوع‌هایی که در این بخش به آن توجه شده است اشاره به درصد‌های متوالی افزایش یا کاهش یک مقدار است، یک اشتباه رایج این است که برای محاسبه درصد کل وقتی درصد‌های مختلفی را به طور متوالی بر یک مقدار اعمال می‌کنیم، گاهی درصدها را با هم جمع می‌کنند که درست نیست. می‌توان با مثال‌هایی نظیر مثال زیر هنرجویان را از این اشتباه رایج برحذر کرد:

قیمت کالایی ۲۰۰۰۰۰ تومان است دو وضعیت زیر را در نظر بگیرید:

الف) ابتدا یک تخفیف ۱۰ درصدی و سپس یک تخفیف ۲۰ درصدی بر آن اعمال شود.

ب) از ابتدا یک تخفیف ۳۰ درصدی بر آن اعمال شود.
 با محاسبه قیمت کالا پس از تخفیف در هر کدام از حالات مشخص کنید کدام برای فروشنده و کدام برای خریدار مقرون به صرفه‌تر است؟

فعالیت آموزشی



اهداف موضوعی:

- درک مفهوم درصد تغییر

مهارت‌ها و فرایندها:

- مدل‌سازی، پیوندها و اتصال‌های ریاضی و خارج ریاضی

$$0/15 \times x = 0/15x$$

۱ مقدار افزایش کالا:

$$y = x + 0/15x = 1/15x$$

۲

$$0/15 = \frac{y - x}{x}$$

۳

$$\frac{a}{100} = \frac{\text{قیمت اولیه} - \text{قیمت جدید}}{\text{قیمت اولیه}}$$

۴

هر کدام از مثال‌های ارائه شده در این قسمت انواع مختلفی از مسائل مرتبط با درصد تغییر را در زمینه واقعی مطرح می‌کند. در اولین مثال، مفهوم درصد تغییر با علامت مثبت (که نشان‌دهنده رشد است) ارائه شده و دومین مثال مربوط به درصد تغییری با علامت منفی است (که کاهش مقدار را نشان می‌دهد). در سومین مثال با ارائه افزایش دو کمیت (طول و عرض)، درصد تغییر کمیت مرتبط با آن (مساحت) مورد نظر است. در این مسئله برای محاسبه درصد تغییر علاوه بر استفاده از رابطه درصد تغییر لازم است از معادله مساحت بر حسب طول و عرض استفاده شود. در آخرین مثال نیز با ارائه درصد تغییر (افزایش و کاهش) و داشتن مقادیر اولیه، مقدار ثانویه خواسته شده است. دبیران محترم می‌توانند در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند، مسائل مختلفی در زمینه واقعی مطرح کنند و از هنرجویان بخواهند با حل آنها و تفسیر جواب‌ها درک بهتری از موضوع درصد تغییر پیدا کنند.



۱) ابعاد یک پارک به طول x و عرض y را 10% افزایش داده‌اند. درصد تغییر مساحت این پارک را محاسبه کنید.
 ۲) قیمت بلیت یک موزه در ابتدای سال 2% افزایش داشته و پس از سه ماه، دوباره 10% افزایش یافته است. قیمت بلیت این موزه در سال گذشته $1,000$ تومان بوده است.
 الف) قیمت بلیت این موزه اکنون چقدر است؟
 ب) درصد تغییر قیمت بلیت این موزه نسبت به سال قبل چقدر است؟ (توجه: 30% نیست!)

اهداف:

■ تقویت مهارت انجام محاسبات مربوط به درصد تغییر، روش مهارت حل مسئله
 ۱ مساحت پارک قبل از افزایش: xy

مقدار افزایش طول: $x \times 0/10 = 0/1x$ مقدار افزایش عرض: $y \times 0/10 = 0/1y$

طول پس از افزایش: $0/1x + x = 1/1x$ عرض پس از افزایش: $0/1y + y = 1/1y$

مساحت پس از افزایش: $1/1x \times 1/1y = 1/21xy$

درصد تغییر: $\frac{1/21xy - xy}{xy} \times 100 = 21\%$

الف) مقدار افزایش قیمت بلیط ابتدای سال:

$$1000 \times 0/20 = 200$$

قیمت ابتدای سال:

$$1000 + 200 = 1200$$

مقدار افزایش قیمت پس از سه ماه:

$$1200 \times 0/10 = 120$$

قیمت بلیط پس از سه ماه:

$$1200 + 120 = 1320$$

ب) نسبت تغییر: $\frac{1320 - 1000}{1000} = 32$ یعنی ۳۲ درصد افزایش یافته است.

مسئله‌ها

مسئله‌ها

۱) در هر پروانه عمارت درست را مشخص کنید.

الف) اگر قیمت جدید یک کالا نسبت به قیمت اولیه افزایش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/منفی) و اگر کاهش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/منفی) می‌باشد.

ب) اگر قیمت کالایی ۵,۵۰۰ تومان باشد و قیمت آن به ۷,۰۰۰ تومان رسیده باشد، درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰، بین ۱ و ۱۰۰، کوچک‌تر از ۱) و اگر قیمت آن به ۱۲,۰۰۰ تومان رسیده باشد درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰، کوچک‌تر از ۱۰۰) می‌باشد.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ استدلال، پیوندها و اتصال‌ها، بازیابی اطلاعات
الف) قسمت اول: مثبت، قسمت دوم: منفی.

ب) قسمت اول: یعنی ۲۷ درصد ($0/27 \times 100$) افزایش داشته است که عددی بین ۱ و ۱۰۰ است.

$$\frac{7000 - 5500}{5500} = \frac{1500}{5500} = \frac{3}{11} \approx 0/27$$

قسمت دوم: که عددی بزرگ‌تر از ۱۰۰ است. یعنی ۱۱۸ درصد ($1/18 \times 100$) افزایش داشته است.

$$\frac{12000 - 5500}{5500} = \frac{6500}{5500} = \frac{13}{11} \approx 1/18$$

۲) اگر قیمت اولیه یک کالا با x و قیمت جدید آن با y مشخص شده باشد، معادله $y = \frac{3}{11}x$ رابطه بین قیمت اولیه و قیمت جدید این کالا را نشان می‌دهد.

الف) درصد تغییر را به دست آورید.

ب) کالایی که در سال گذشته ۱۰۰ هزار تومان بوده است، امسال چند تومان است؟

ب) کالایی که امسال ۱۰۰ هزار تومان است، در سال گذشته چند تومان بوده است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال با زندگی روزانه

فصل دوم: درصد و کاربردهای آن

$$\frac{y-x}{x} = \frac{\frac{1}{2}x - x}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad \text{الف)}$$

یعنی این کالا ۵۰ درصد کاهش قیمت داشته است.

$$-\frac{1}{2} = \frac{y-x}{x} = \frac{y-1000000}{1000000} \rightarrow y = 500000 \quad \text{ب)}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{y-x}{x} = \frac{1000000-x}{x} \rightarrow x = 2000000 \quad \text{پ)}$$

۳) قیمت ۴ نوع کالا الف و ب و پ و ت در سال جاری نسبت به سال گذشته طبق جدول زیر تغییر داشته است.
 الف) جدول را تکمیل کنید.
 ب) این چهار کالا را در یک سبد به نام سبد کالا در نظر بگیرید. درصد تغییر قیمت این سبد کالا چقدر است؟

نوع کالا	قیمت سال گذشته	قیمت امسال	درصد تغییر
الف	۱۰۰۰,۰۰۰	۱۱۵,۰۰۰	۱۵٪
ب	۱۲۵,۰۰۰	۱۵۰,۰۰۰	۲۰٪
پ	۱۵۰,۰۰۰	۱۶۵,۰۰۰	۱۰٪
ت	۲۰۰,۰۰۰	۱۸۰,۰۰۰	-۱۰٪

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله پیوند و اتصال با زندگی روزانه

توضیح: لازم است در این مسئله نیز بر محاسبه درست درصد تغییر کلی تأکید داشت.

نوع کالا	قیمت سال گذشته	قیمت امسال	درصد تغییر
الف	۱۰۰۰۰۰	۱۱۵۰۰۰	۱۵٪
ب	۱۲۵۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۲۰٪
پ	۱۵۰۰۰۰	۱۶۵۰۰۰	۱۰٪
ت	۲۰۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰	-۱۰٪
کل	۵۵۰۰۰۰	۵۸۰۰۰۰	۵/۴۵٪

۴) طول هر ضلع یک مکعب بر اثر گرما ۱٪ واحد افزایش یافته است. اثر طول ضلع اولیه این مکعب ۱ واحد باشد، درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

توضیح:

در این مسئله می‌خواهیم با مشخص بودن تغییرات طول ضلع مکعب، تغییرات حجم را به صورت درصد تغییر بیان کنیم.

یعنی $\frac{(1/1)^3 - 1^3}{1^3} = 0/331$ درصد $33/1$ یعنی $(0/331 \times 100)$ افزایش داشته است.

توسعه دانش

اگرچه مفهوم درصد مفهوم ساده‌ای است، ولی در کاربردهای آن ابهاماتی پیش می‌آید. در محاسبات با درصدهای پایین ممکن است این اشتباه پیش آید که درصدها را می‌توان با هم جمع کرد.

فرض کنید ۱۰ درصد افراد کلاس (الف) و ۱۵ درصد افراد کلاس (ب) امروز غایب بوده‌اند در این صورت مجموعاً از این دو کلاس چند درصد غایب بوده‌اند؟

اگر به مفهوم درصد خوب دقت نشود ممکن است از اصطلاح «مجموعاً» هنرجو به این نتیجه برسد که باید درصدها را با هم جمع کند که کاملاً اشتباه است. یک اشتباه دیگر ممکن است این باشد که میانگین این درصدها را حساب کنیم و بگوییم مجموعاً ۱۲/۵ درصد افراد دو کلاس غایب بوده‌اند. اگر تعداد افراد دو کلاس مساوی باشند میانگین‌گیری جواب درستی می‌دهد. اما، اگر تعداد افراد دو کلاس مساوی نباشند، میانگین‌گیری از درصدها جواب درستی نخواهد داد.

مثلاً فرض کنید کلاس (الف) ۳۰ نفره و کلاس (ب) ۲۰ نفره باشد. از کلاس (الف) ۳ نفر و از کلاس (ب) نیز ۳ نفر غایب بوده‌اند. پس ۶ نفر از ۵۰ نفر غایب بوده‌اند که می‌شود ۱۲ درصد نه ۱۲/۵ درصد.

دو مقدار درصد متفاوت با هم قابل قیاس نیستند چون ممکن است کل مرجع آنها متفاوت باشند. در مثال بالا ۱۰ درصد کلاس (الف) با ۱۵ درصد کلاس (ب) مساوی بودند.

نوع دیگری از میانگین‌گیری وجود دارد که میانگین وزنی نامیده می‌شود. در این نوع میانگین‌گیری از تعدادی عدد، همه آنها را یکسان در نظر نمی‌گیریم و برای هر کدام وزنی در نظر می‌گیریم. در محاسبه معدل شاگردان این وضعیت رخ می‌دهد و مثلاً می‌گویند نمره امتحان آخر را با ضریب ۲ و بقیه نمرات را با ضریب ۱ در نظر می‌گیریم. این همان میانگین‌گیری وزنی است که برای امتحان آخر وزن ۲ و برای بقیه نمرات وزن ۱ در نظر گرفته شده است.

اگر n عدد x_1, \dots, x_n را به ترتیب با وزن‌های p_1, \dots, p_n در نظر بگیریم طبق تعریف میانگین وزنی آنها عبارت است از:

$$\frac{p_1x_1 + \dots + p_nx_n}{p_1 + \dots + p_n}$$

در بیشتر کاربردهای مفهوم میانگین وزنی، وزن‌ها اعداد مثبتی هستند.

در کار با درصدها، اگر چند درصد مختلف داشته باشیم که کل مرجع آنها با هم متفاوت است می‌توان برای هر درصد به اندازه کل مرجع آن وزن در نظر گرفت و در این صورت میانگین وزنی درصدها، مقدار درست درصد مجموع را نشان می‌دهد. در مثال بالا اگر برای ۱۰ درصد وزن ۳۰ و برای ۱۵ درصد وزن ۲۰ را در نظر بگیریم میانگین وزنی آنها عبارت است از:

$$\frac{30 \times 10 + 20 \times 15}{30 + 20} = 12$$

جواب درست نیز همان ۱۲ درصد است.