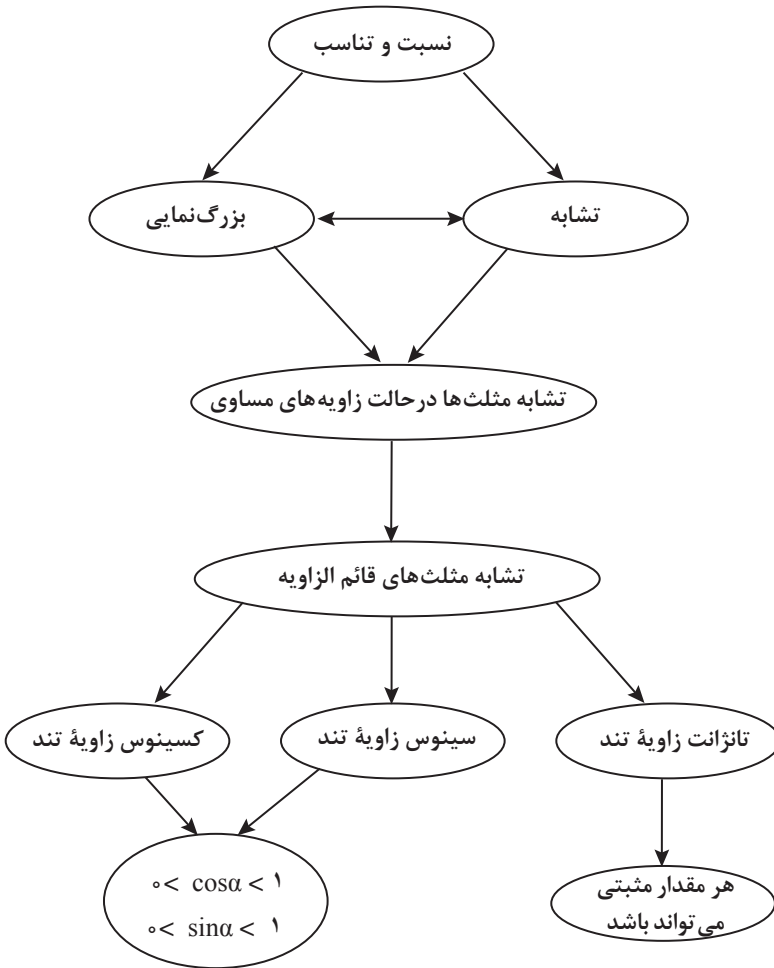


فصل ششم

نسبت‌های مثلثاتی



اهداف کلی فصل

- درک مفهوم ضریب بزرگ‌نمایی k در دو شکل متشابه برای $k > 1$ و $k < 1$.
- محاسبه مقدار k با داشتن اندازه دو شکل متشابه
- درک نسبت‌های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس یک زاویه تند به عنوان ویژگی زاویه
- شناسایی مقادیر ممکن برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه تند
- درک رابطه بین تغییرات نسبت‌های مثلثاتی با تغییرات زاویه

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

- هنرجویان باید قادر باشند:
- با داشتن اندازه دو شکل متشابه، مقدار k را تعیین کند.
- نسبت‌های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس یک زاویه تند را با رسم مثلث قائم‌الزاویه محاسبه کند.
- با داشتن نسبت مثلثاتی، زاویه متناظر با آن را از طریق رسم محاسبه کند.
- از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در حل مسائل استفاده کند.

پیش‌نیازهای فصل :

- آشنایی با دو مفهوم نسبت و تناسب
- آشنایی با مفهوم تشابه دو مثلث

ابزارهای کمک آموزشی :

خط‌کش، نقاله، گونیا، ماشین حساب و رایانه

مثال	توصیف فرایند	فرایند
ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	حل مسئله
استفاده از تشابه بین دو مثلث برای یافتن نسبت اضلاع متناظرشان و تساوی آنها استفاده از چوب و سایه چوب برای یافتن ارتفاع اهرام مصر	شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل مسائل و با انتخاب مناسب آنها	ارتباط کلامی
توضیح منوچهر به معلم خودش در مورد سؤال ایجاد شده در سینما (چگونگی بزرگی تصویر روی پرده سینما نسبت به فیلم) توضیح علی به معلم خودش در مورد یافتن طول نردبان باز شده در ماشین آتش‌نشانی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	استدلال و اثبات
برای یافتن ارتفاع کوه از مفهوم تشابه و روابط اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه استفاده کند. برای یافتن طول نردبان جرتقیل آتش‌نشانی از رابطه بین نسبت مثلثاتی استفاده کند.	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	پیوندها و اتصالات
دلیل عدم تشابه دو شکل را بیان کند دلیل تغییرات نسبت‌های مثلثاتی را با تغییرات زاویه بیان کند	به‌کارگیری استدلال	بازنمایی‌ها
دلیل درستی یا نادرستی روابط را در مسائل آخر فصل بیان کند	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	سایر مهارت‌های تفکر
طول سیم نگهدارنده دکل را به کمک مفهوم سینوس بیابد. طول ارتفاع انتهای نردبان را در سطح زمین به کمک سینوس بیابد.	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	
در همهٔ قسمت‌های فصل وجود دارد	ارائهٔ نمایش‌های مختلف یک مفهوم	
مقایسه نسبت‌های $\frac{CA}{CB}$ ، $\frac{CE}{CB}$ ، $\frac{CD}{CB}$ و ذکر مساوی بودن آنها به کمک تشابه یا با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	

بخش اول: تشابه

اهداف بخش

- درک مفهوم بزرگ‌نمایی (با ضریب $0 < k < 1$ و با ضریب $k > 1$)
- آشنایی با تشابه دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌ها
- استفاده از مفهوم بزرگ‌نمایی و تشابه در حل مسائل

واژه‌های کلیدی:

تشابه، بزرگ‌نمایی

نگاه کلی به بخش

مطالب این بخش در ارتباط با تشابه دو شکل و مفهوم بزرگ‌نمایی است. برای رسیدن به مفهوم تشابه از مفهوم کمکی بزرگ‌نمایی استفاده شده است، ولی مفهوم اصلی، تشابه و حالت تشابه دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌های دو مثلث است. تشابه کاربردهای بسیار زیاد در زندگی روزمره مانند معماری، ماکت‌سازی، نقشه‌کشی، رسم فنی، بزرگ کردن و کوچک کردن شکل‌ها در رایانه، عکاسی، نجوم، مساحی، تصویربرداری پزشکی، ... دارد. به‌علت نیاز به این مفهوم در تعریف نسبت‌های مثلثاتی و به دلیل نبود قضیه حالت‌های تشابه در کتاب‌های درسی ریاضی سال‌های گذشته، ابتدا مفهوم تشابه از طریق مفهوم بزرگ‌نمایی یادآوری می‌شود. سپس رابطهٔ تالس برای متشابه بودن دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌ها مطرح شده است.

ورود به مطلب:

بهتر است از مثال‌هایی که در اطراف خود می‌بینیم و اجسام متشابهی که دیده می‌شوند، شروع کنیم. مانند عکس منظره و خود منظره، نقشهٔ شهر و شهر، ماکت ساختمان و خود ساختمان. سپس مفهوم تشابه و نسبت تشابه یادآوری شود و کاربردهای آن در نقشه و ماکت و عکس و ... ذکر شود. بعد از این مقدمات می‌توانید به کتاب مراجعه کنید و شیوهٔ ساختن شکل‌های متشابه و ویژگی اساسی ثابت بودن نسبت طول پاره‌خط‌های متناظر را تذکر دهید. به عنوان مثال بهتر است در نقشهٔ بین دو شهر، دو نقطهٔ دلخواه را انتخاب نموده و با اندازه‌گیری مستقیم طول پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند و مقایسه با فاصلهٔ واقعی بین آن دو شهر و یافتن نسبت این دو عدد و ادامهٔ این کار حداقل برای دو

نقطه دلخواه دیگر به این نسبت برسیم. همچنین در استفاده از ضریب بزرگ نمایی متوجه ضرورت بیان این مفهوم و نحوه استفاده از آن می شویم. لطفاً به کتاب کار قسمت تشابه رجوع شود. (مثال‌های حل شده)

فعالیت آموزشی

دو شکل متشابه رو به رو را در نظر بگیرید.

۱) نسبت اضلاع متناظر را بنویسید.

۲) هر یک از اضلاع ABCD چند برابر اضلاع متناظرش در WXYZ است؟

۳) هر یک از اضلاع WXYZ چند برابر اضلاع متناظرش در ABCD است؟

۴) نسبت اضلاع ABCD به WXYZ را با نسبت اضلاع WXYZ به ABCD مقایسه کنید.

۵) در شکل‌های زیر، نسبت اضلاع را بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟

اهداف موضوعی:

- آشنایی با مفهوم بزرگ‌نمایی و معرفی ضریب بزرگ‌نمایی
- محاسبه ضریب بزرگ‌نمایی k در دو شکل متشابه
- تشخیص رابطه بین مقدار k با بزرگ شدن یا کوچک شدن شکل

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، مقایسه کردن

$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{ZY} = \frac{AD}{WZ} = 2 \quad (1)$$

۲ برابر

$\frac{1}{2}$ برابر

۴) معکوس یکدیگرند

$$\frac{HL}{MQ} = \frac{3}{6} \neq \frac{HJ}{MN} = \frac{7}{10} \neq \frac{JK}{NP} = \frac{3}{6} \neq \frac{LK}{QP} = \frac{7}{10} \quad (۵)$$

خیر، متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان برابر نیست. کافی است نقاط دلخواه روی یکی از این عکس‌ها انتخاب کنیم و فاصله بین آنها را بیابیم و با فاصله نقاط نظیرشان در عکس دیگر مقایسه کنیم تا وجود تفاوت در نسبت‌ها را تشخیص دهیم.



اهداف:

- بررسی مفهوم تشابه از طریق مقایسه نسبت اضلاع متناظر
- ساختن شکل متشابه از طریق دستگاه مختصات (طول و عرض نقاط)
- پرورش مهارت استدلال کردن و تفکر بصری
- ۱ خیر، زیرا، نسبت طول اضلاع متناظر متفاوت است. کافی است چند نقطه متناظر را انتخاب کنیم و فاصله‌های متناظر را اندازه‌گیری کنیم و نسبت آنها را به دست آوریم.
- ۲ الف) شکل ۱، زیرا ارتفاع شکل عوض نمی‌شود ولی طول آن سه برابر می‌شود.

ب) شکل ۲

پ) شکل ۳

توصیه آموزشی:

- به دبیران توصیه می‌شود در حین تدریس به موارد زیر اشاره نمایند.
- بعد از یافتن ضریب بزرگ نمایی، زمانی که k بین صفر و ۱ است ذکر کنیم که

استفاده از لفظ بزرگ نمایی لزوماً به معنی بزرگ شدن نیست بلکه می‌تواند شکل اولیه را کوچک‌تر کند و بستگی به k دارد.

■ در شکل پروانه‌ها بهتر است نقاط دلخواهی را روی شکل انتخاب کنید و با یافتن فاصله بین این نقاط و نقاط متناظرشان و همچنین یافتن زاویه‌های نظیر در شکل‌های (الف) و (ب) و (پ) به سؤال‌ها پاسخ داد.

■ همچنین می‌توان با قرار دادن پروانه‌ها در مستطیل‌ها طول و عرض آنها را بررسی نمود.

در ادامه در زمینه تاریخی با بیان یک مسئله واقعی (محاسبه طول ارتفاع اهرام مصر) قضیه تشابه مثلث‌ها از طریق تساوی زاویه‌ها به‌طور غیرمستقیم ارائه شده است. اثبات درستی این قضیه به علت طولانی بودن و دور شدن از هدف این فصل ارائه نشده است.

توجه شود که خورشید در فاصله‌ای بسیار دور قرار دارد و شعاع‌های نوری که به یک جسم تابیده می‌شود با هم موازی محسوب می‌شوند زیرا خطای عدم توازی این شعاع‌ها با دستگاه‌های اندازه‌گیری ما قابل تشخیص نیست. با استفاده از خطوط موازی و مورب می‌توان به سؤال گفته شده در قسمت تالس جواب داد. به جای مسئله تاریخی، می‌توان زمینه‌های دیگری مانند یافتن ارتفاع تیرک پرچم و... را انتخاب نموده و برای یادگیری بیشتر در کلاس استفاده نمود.

نکته: توجه شود شرط تساوی زاویه‌ها برای برقراری تشابه بین چندضلعی‌های بیشتر از سه ضلع کافی نیست و برای تشابه بودن هر دو چندضلعی باید برابری نسبت اضلاع رأس‌های نظیر هم برقرار باشد.

به‌عنوان مثال در فعالیت ۱ با اینکه دو شکل مستطیل هستند و زاویه‌های برابر دارند ولی تشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان مساوی نیست.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در رأس C قائمه است، KN بر BC عمود است.
الف) کدام مثلث‌ها متشابه‌اند؟ چرا؟

ب) نسبت‌های اضلاع متناظر را بنویسید.

اهداف:

■ کسب مهارت تشخیص مثلث‌های متشابه

■ کسب مهارت تشخیص اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه، پرورش مهارت استدلال کردن

الف) دو مثلث ABC و KBH به دلیل داشتن زاویه‌های مساوی، متشابه‌اند و ضلع AB نظیر ضلع KB می‌باشد زیرا هر دو روبروی زاویه قائمه هستند.

$$\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{BH} = \frac{CA}{KH} \quad (\text{ب})$$

ممکن است هنرجویان در تشخیص اضلاع متناظر در شکل‌های متشابه دچار مشکل باشند. در مثلث‌های متشابه اضلاع متناظر آنهایی هستند که زاویه روبروی آنها مساوی هستند.

توجه داشته باشید که در هر تشابه‌ی که بین دو شکل برقرار می‌شود، ابتدا یک تناظر بین نقاط دو شکل برقرار می‌شود و تحت این تناظر است که مفهوم اضلاع متناظر و زاویه‌های متناظر مشخص می‌شوند. البته دو شکل دلخواه، ممکن است تحت تناظرهای متفاوتی با هم متشابه باشند.

در این بخش می‌توانید برای یادگیری عمیق‌تر و ارزیابی بیشتر هنرجویان از تمرین‌ها و مسائل بخش تشابه در کتاب کار استفاده نمایید.

مسیرهایی برای توسعه

الف) تحقیق کنید آیا برای تشابه دو مثلث قوانین دیگری وجود دارد؟ به تمرین ۱ در کتاب کار در بخش تشابه توجه شود.

ب) آیا می‌توانید قضایای دیگر تشابه دو مثلث را بیان کنید؟

پ) تحقیق کنید ضریب بزرگ‌نمایی منفی وجود دارد یا خیر؟ در صورت وجود، به چه معنا است؟

ت) آیا به کمک رایانه و فقط با کشیدن شکل از یک طرف و بزرگ نمودن آن به شکلی متشابه با آن شکل می‌رسید؟ چرا؟

بخش دوم: تانژانت یک زاویه

اهداف بخش

- درک مفهوم تانژانت یک زاویه تند
- محاسبه مقدار تقریبی تانژانت یک زاویه تند
- استفاده از مفهوم تانژانت در حل مسائل واقعی
- درک رابطه بین تغییرات زاویه با تغییرات تانژانت زاویه
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن تانژانت آن زاویه

واژه‌های کلیدی:

تانژانت زاویه تند، نسبت اضلاع

نگاه کلی به بخش:

این بخش با طرح مسئله‌ای واقعی در مورد ارتباط ابعاد تصویر تشکیل شده روی پرده سینما و فاصله پرده از چشمه نور آغاز می‌شود. سپس از طریق یک فعالیت هندسی، نسبت‌هایی یکسان تشکیل می‌شود که همگی با داشتن یک زاویه تند به دست می‌آیند. این نسبت‌های یکسان در صفحات بعدی به عنوان تانژانت معرفی خواهد شد. علت یکسان شدن این نسبت‌ها، مفهوم تشابه است که در بخش قبلی مورد بحث قرار گرفته است.

شیوه تعریف، بنا کردن یک مثلث قائم‌الزاویه روی زاویه داده شده است و تذکر این نکته ضروریست که طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ساخته شده روی زاویه، تأثیری در تانژانت ندارد. با این شیوه تعریف، مقدار تقریبی تانژانت یک زاویه تند از طریق محاسبه مستقیم و اندازه‌گیری اضلاع توسط هنرچو به دست می‌آید. در ادامه، رابطه بین تغییرات تانژانت و تغییرات زاویه از روی شکل بررسی می‌شود. همچنین مسئله یافتن زاویه‌ای که تانژانت آن داده شده است، در طی یک فعالیت به طور هندسی حل می‌شود. در پایان نحوه کار با ماشین حساب برای محاسبه تانژانت زوایای گوناگون بیان می‌شود.

ورود به مطلب:

برای معرفی نسبت‌های مثلثاتی با طرح یک مسئلهٔ مربوط به زندگی پیرامونی شروع کنید و از تعریف مستقیم نسبت‌های مثلثاتی پرهیز کنید. هر مسئله‌ای که حل آن نیازمند یک نسبت مثلثاتی است می‌تواند به عنوان ورود به مفهوم استفاده شود. ولی هر چه مسئله ساده‌تر باشد و به فهم هنرجو نزدیک‌تر باشد، و مستقیم‌تر به نسبت مثلثاتی مربوط باشد، بهتر است. رسم شکل فرضی از مسئلهٔ واقعی که در آن اطلاعات مورد نیاز برای حل مسئله موجود می‌باشد، از راهبردهای حل مسئله است و این راهبرد در مسائل مربوط به نسبت‌های مثلثاتی بسیار مناسب است. محاسبهٔ ارتفاع برج‌های مهم شهر یا ساختمان‌های مرتفع یا ارتفاع نقاط طبیعی مثل کوه‌ها و عرض رودخانه‌ها و ... می‌تواند موجب جلب توجه هنرجویان شود.

توصیهٔ آموزشی:

در صورت نیاز به ارزشیابی تکوینی به فعالیت جایگزین توجه کنید. (کتاب کار فعالیت ابتدای بخش تانژانت)

فعالیت آموزشی

فعالیت ۲



در شکل روبه‌رو، یک زاویه تند به رأس A رسم شده است.

۱) روی یک ضلع این زاویه چند نقطه نامواضع مانند B و C و D در نظر بگیرید. از این نقاط، عمودهایی بر این ضلع رسم کنید که ضلع دیگر را به ترتیب در نقاط E و F و G قطع کند.

۲) با اندازه‌گیری به کمک خط‌کش، مشخص کنید که تساوی‌های زیر برقرارند:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{GD}{AD}$$

۳) نتیجه مشخصه‌ای را که در شکل دیده می‌شود، بررسی کنید و به کمک آن فرضی تساوی‌های بالا را نشان دهید.

اهداف موضوعی:

- درک تساوی نسبت اضلاع ضلع مقابل به زاویهٔ تند به ضلع مجاور با آن در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی اضلاع یک زاویهٔ تند

مهارت‌ها و فرایندها:

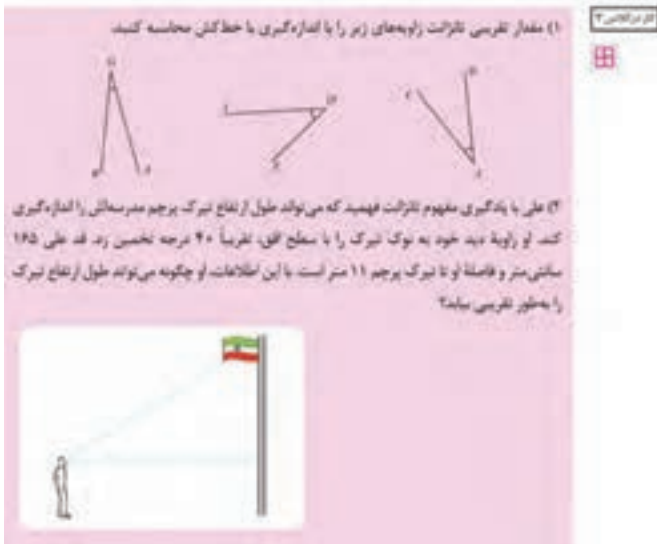
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن
 1 لازم است هنرجو در رسم خطوط عمود بر هم توانایی استفاده از خط‌کش و گونیا را داشته باشد.

۲ با اندازه‌گیری پاره‌خط‌های ذکر شده به نسبت‌های تقریباً مساوی در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در زاویه A مشترکند می‌رسیم. بهتر است هنرجویان با خط‌کش این کار را انجام داده و نتیجه‌گیری کنند. البته تساوی‌های به دست آمده تقریبی خواهند بود.

۳ با استفاده از زاویه‌های مثلث در مثلث‌های قائم‌الزاویه، دیده می‌شود که طبق نتایج بخش قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه (در شکل) متشابه‌اند (زیرا همگی دارای یک زاویه راست بوده و در زاویه تند A مشترکند). بنابراین می‌توانیم نسبت اضلاع متناظر را بنویسیم و با طرفین وسطین و نوشتن نسبت جدید، نتیجه بگیریم که:

$$\frac{EB}{AE} = \frac{FC}{AF} = \frac{GD}{AG}$$

این تساوی‌ها مبنای اصلی تعریف نسبت مثلثاتی تانژانت هستند.



اهداف:

■ کسب مهارت در محاسبه تقریبی تانژانت یک زاویه، به کارگیری تانژانت در حل مسائل، برقراری پیوند و اتصال با مسائل زندگی روزمره
 1 هدف این تمرین، یافتن مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های دلخواه داده شده

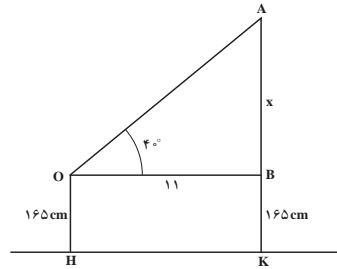
در حالت‌های مختلف است. برای این کار هنرجو باید برای هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب بسازد. کافی است از نقطه‌ای روی یکی از اضلاع زاویه‌های داده شده بر ضلع دیگر عمود کند. سپس با اندازه‌گیری اضلاع روبرو به زاویه و مجاور به زاویه و تقسیم آنها بر هم مقدار تقریبی تانژانت زاویه را محاسبه کند.

۲ در این سؤال هنرجو در یک مسئله محیط پیرامونی خود قرار می‌گیرد. برای حل به شکل زیر توجه کنید.

$$OB=HK=11\text{m}$$

$$= \tan 40^\circ = \frac{x}{11}$$

$$\Rightarrow x = 11 \tan 40^\circ \approx 9.23$$



$$\Rightarrow \text{طول ارتفاع تیرک} = x+BK = 11 \tan 40^\circ + 1.65 \approx 10.88$$

در ادامه سؤالی درباره مقادیر ممکن برای تانژانت یک زاویه مطرح می‌شود که در طی یک فعالیت جواب آن به دست می‌آید.

فعالیت آموزشی

در شکل زیر AC بر BK عمود است

۱) بی‌ی‌ک از نسبت‌های $\frac{AH}{BK}$ و $\frac{HK}{BC}$ و $\frac{AK}{AC}$ چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس B تشکیل می‌شود این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

۳) با تغییر یک زاویه، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ این زاویه چگونه ساخته می‌شود؟ جواب این سوال برای معده‌های صلب دیگر چیست؟

اهداف موضوعی:

■ درک رابطه بین تغییرات زاویه و تانژانت آن زاویه

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری، یافتن زاویه با داشتن تانژانت آن زاویه، تعمیم دادن

1 در شکل صفحه قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه در ضلع CB مشترکند ولی زاویه‌های تند آنها در رأس B تغییر می‌کند. این نسبت‌ها تانژانت زاویه‌های تندی هستند که در رأس B ساخته شده‌اند. زیرا همگی این نسبت‌ها به صورت نسبت طول ضلع مقابل به این زاویه‌ها به ضلع مجاور این زاویه‌ها هستند.

نسبت‌های $\frac{CA}{CB}$ و $\frac{CE}{CB}$ و $\frac{CD}{CB}$ به ترتیب تانژانت زاویه‌های B_1 و B_2 و B_3 می‌باشند.

$$\tan B_3 = \frac{AC}{BC}, \quad \tan B_2 = \frac{EC}{BC}, \quad \tan B_1 = \frac{DC}{BC}$$

2 چون BC ثابت و $DC < EC < AC$ پس $\frac{DC}{BC} < \frac{EC}{BC} < \frac{AC}{BC}$ یعنی با

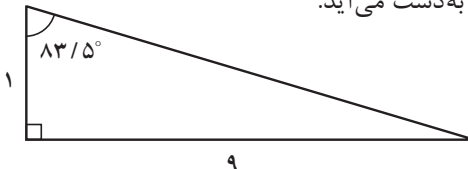
بزرگ شدن زاویه در رأس B این نسبت‌ها هم بزرگ‌تر می‌شوند.

3 از آنجا که نسبت‌های بند قبل همان تانژانت آن زاویه‌ها بودند نتیجه می‌شود: هرچه زاویه تند بزرگ‌تر شود تانژانت آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و اگر زاویه تند کوچک‌تر شود تانژانت آن کوچک‌تر می‌شود. یعنی

$$\tan B_3 > \tan B_2 > \tan B_1$$

4 بله، کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول اضلاع زاویه قائمه آن 1

و 9 باشد در این صورت زاویه روبرو به ضلع به طول 9 جواب مسئله است. زیرا در محاسبه تانژانت این زاویه نسبت $\frac{9}{1}$ حساب می‌شود که 9 نمایش طول ضلع روبرو به زاویه و 1 نمایش طول ضلع مجاور به آن زاویه است. با اندازه‌گیری این زاویه با نقاله مقدار تقریبی $83/5^\circ$ درجه به دست می‌آید.



اگر به جای عدد 9 از هر عدد مثبت دیگری هم استفاده کنیم، می‌توانیم عملیات بالا را تکرار کنیم و هر عدد مثبتی تانژانت زاویه‌ای خواهد بود.

اشباهات ممکن

- ممکن است با توجه به انتخاب ضلعی به طول واحد در حل سؤال ۴ در این فعالیت این حس در هنرجو ایجاد شود که همیشه ضلع مقابل به زاویه تند، همان تانژانت آن زاویه است. بهتر است در اینجا ضمن تذکر این مورد مثال‌های دیگری زده شود که لزوماً از ضلعی به طول واحد استفاده نشود. مثلاً از اعدادی به عنوان طول ضلع استفاده کرد که نسبت آنها ۹ شود.
- به هنرجویان توضیح داده شود که نسبت مثلثاتی یک زاویه مانند $\tan 40^\circ$ یک عدد است و منظور حاصل ضرب یک عدد در یک عبارت نیست. (به کتاب کار بخش تانژانت یک زاویه در تمرین ۲ توجه شود)

استفاده از ابزار:

برای یافتن مقدار تانژانت زاویه‌ها می‌توان از ماشین‌های حساب علمی کمک گرفت. توجه داشته باشید که در استفاده از ماشین حساب واحد اندازه‌گیری زاویه به درستی انتخاب شده باشد چون در هر ماشین حسابی می‌توان واحد اندازه‌گیری زاویه را درجه، رادیان، یا گراد انتخاب کرد. روش استفاده به صورت تصویری توضیح داده شده است.

کار در کلاس ۴



۱۱ اگر زاویه تندی به صفر نزدیک شود، تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ درستی ادعای خود را با رسم شکل نشان دهید.

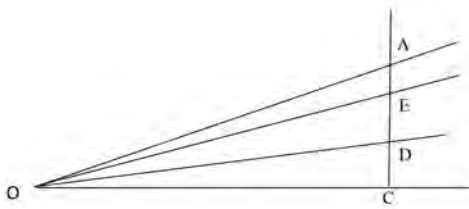
۱۲ اگر زاویه تندی به ۹۰ درجه نزدیک شود، در مورد تغییرات اندازه تانژانت آن چه می‌توان گفت؟ از اهنمایی به کمک ماشین حساب، برای مقادیر تانژانت زاویه‌های نزدیک به ۹۰ درجه جدولی بسازید.

اهداف:

- درک مفهوم تانژانت به روش هندسی
- به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی با تقریب اعشاری مناسب
- پرورش مهارت استدلال کردن، نمایش یک مفهوم با بازنمایی‌های مختلف، کار با ماشین حساب
- ۱ در شکل صفحه بعد دیده می‌شود که با نزدیک شدن اندازه زاویه به صفر تانژانت

آن نیز به صفر نزدیک می‌شود. زیرا در نسبتهی که تانژانت را می‌سازد، مخرج ثابت است ولی صورت از هر عدد مثبت دلخواهی کوچک‌تر می‌شود و این به معنای نزدیک شدن تانژانت به صفر است.

۲ هرچه زاویه بزرگ‌تر شود و به ۹۰ درجه نزدیک شود، تانژانت نیز بزرگ‌تر می‌شود و از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود. زیرا مخرج ثابت است ولی صورت از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این وضعیت اصطلاحاً می‌گویند مقدار تانژانت به بی‌نهایت می‌رود. با ماشین حساب نیز می‌توان به این مطلب رسید.



$$\tan 80^\circ \approx 5/67$$

$$\tan 81^\circ \approx 6/31$$

$$\tan 82^\circ \approx 7/11$$

$$\tan 83^\circ \approx 8/14$$

$$\tan 84^\circ \approx 9/51$$

$$\tan 85^\circ \approx 11/43$$

$$\tan 86^\circ \approx 14/3$$

$$\tan 87^\circ \approx 19/08$$

$$\tan 88^\circ \approx 28/63$$

$$\tan 89^\circ \approx 57/28$$

$$\tan 89/5^\circ \approx 114/58$$

$$\tan 89/7^\circ \approx 190/98$$

$$\tan 89/9^\circ \approx 572/95$$

$$\tan 89/95^\circ \approx 1145/91$$

مسئله‌ها

۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های ۴۰° و ۵۰° درجه را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

کافی است به کمک نقاله زاویه ۴۰ درجه رسم کنید و با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌های تند آن ۴۰ درجه است و با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع روبرو و مجاور به این زاویه، نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور این زاویه را که جواب مسئله خواهد بود، به دست آورید. همین عملیات را برای زاویه ۵۰ درجه تکرار کنید.



$$\tan 40^\circ \approx \frac{2/5}{3} \approx 0/83$$

۳) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

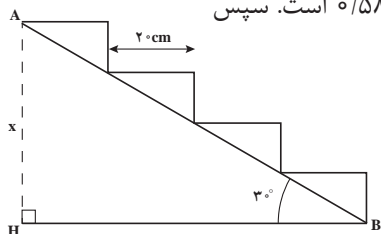
مشابه بند (۴) فعالیت ۴ یا مثال ارائه شده می‌توان عمل کرد. (این زاویه تقریباً ۸۲/۵ درجه است).

۳) با توجه به شکل روبه‌رو ارتفاع نقطه A از زمین را بیابید (فرض همه بندهای ۲ متر است).

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، تفکر بصری

ابتدا تانژانت زاویه ۳۰ درجه را می‌یابیم که تقریباً مساوی ۰/۵۸ است. سپس



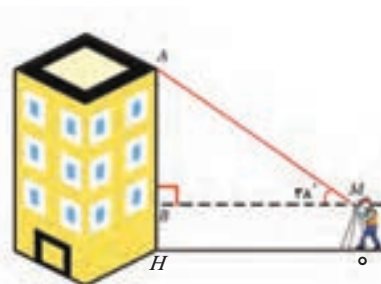
$$BH = 4 \times 2 = 8 \text{ cm}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = x = 8 \times 0.58 = 4.64$$

۴) برای محاسبه ارتفاع ساختمانی، مورین زاویه‌ای را در یک سطح افقی در نقطه M به فاصله ۱۵ متری از ساختمان (نقطه O) مستقر کرد و به نقطه بالای ساختمان نشانه مورین زاویه دید ۳۸ درجه بدست آمده است. اگر ارتفاع مورین از زمین یک متر و ۵۴ سانتی‌متر باشد، ارتفاع ساختمان را بدست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری



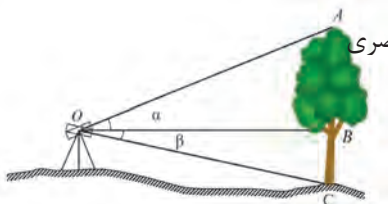
$$\left. \begin{aligned} BH &= OM = 1.54 \text{ m} \\ OH &= 1.5 \text{ m} \\ \tan \alpha &= \frac{AB}{BM} \Rightarrow AB = 1.5 \tan 38^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

متر $AH = AB + BH \approx 13.25$ = ارتفاع ساختمان

۵۵ به کمک دوربین زاویه‌های α و β را به ترتیب 23° درجه و 12° درجه بدست آمدند و فاصله افقی دستگاه تا درخت ۱۸ متر است. با توجه به شکل ارتفاع درخت را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

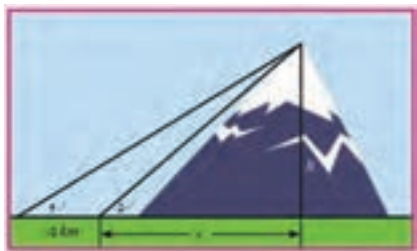


در این دو مثلث $\hat{B} = 90^\circ$ و $OB = 18m$ و $\beta = 12^\circ$ و $\alpha = 23^\circ$ بنابراین

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{AB}{OB} \rightarrow AB = OB \tan \alpha = 18 \tan 23^\circ \\ \tan \beta &= \frac{BC}{OB} \rightarrow BC = OB \tan \beta = 18 \tan 12^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

ارتفاع درخت $= AB + BC \approx 7.64 + 3.83 = 11.47$

۶۰ یک مهندس نقشه‌بردار، برای محاسبه ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه، نوک کوه با زاویه 50° درجه نسبت به افق دیده می‌شود. پس از آنکه ۱۰ کیلومتر از کوه دور می‌شود مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویه 40° درجه دیده می‌شود. ارتفاع کوه چقدر است؟



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

$$\left. \begin{aligned} \tan 40^\circ &= \frac{h}{10 + x} \\ \tan 50^\circ &= \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan 50^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan 40^\circ = \frac{h}{10 + \frac{h}{\tan 50^\circ}} \Rightarrow h \approx 1.43$$

بخش سوم: سینوس یک زاویه

اهداف بخش

- درک مفهوم سینوس یک زاویه تند
- محاسبه مقدار تقریبی سینوس یک زاویه تند
- استفاده از سینوس یک زاویه در حل مسائل پیرامونی
- درک رابطه بین تغییرات زاویه با تغییرات سینوس زاویه
- تشخیص مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویه تند
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن سینوس آن زاویه

واژه‌های کلیدی:

سینوس زاویه تند، نسبت اضلاع

نگاه کلی به بخش:

روش آموزشی این بخش طرح مسئله و انجام یک فعالیت برای حل آن مسئله است. با انجام این فعالیت، مفید بودن استفاده از نسبت مثلثاتی سینوس مطرح می‌شود و در انتها مفهوم سینوس ساخته می‌شود. ویژگی‌های سینوس یک زاویه تند و یافتن سینوس یک زاویه تند از طریق اندازه‌گیری مستقیم اضلاع به طور تقریبی و مقادیر ممکن سینوس زاویه‌های تند ارائه می‌شود.

ورود به مطلب:

دبیر با هر مسئله‌ای شبیه مسئله‌ای که در این بخش مطرح شده است می‌تواند آموزش را شروع کند و انگیزه تعریف سینوس را ایجاد کند. فعالیت ۶ نمونه‌ای از حل مسئله‌ای است که در آن مفهوم سینوس وجود دارد و می‌توان از طریق آن مفهوم سینوس را تعریف کرد.

فرض کنید دکل به ارتفاع 40 متر با سیمی که با سطح افق زاویه 30° درجه ساخته است. مهار می‌شود. اگر فاصله از پایه سیم در نقطه‌ای مانند A چنان می‌باشد که سیم در نقطه‌ای مانند B با سیم عمود باشد. اگر فاصله A تا B را اندازه‌گیری می‌کنند و نسبت $\frac{BM}{AM}$ را حساب می‌کنند.

۱) اگر فاصله A تا B را اندازه‌گیری می‌کنند و نسبت $\frac{BM}{AM}$ را حساب می‌کنند. این کار را تکرار می‌کنند و هر کدام مقداری را برای نسبت طول فاصله A به فاصله B به دست می‌آورند. نشان دهید همه آنها یک مقدار را به دست می‌آورند.

۲) اگر نسبت $\frac{BM}{AM}$ را حساب کنید، مقدار آن با نسبتی که تکرار به دست آورده‌اید چه رابطه‌ای دارد؟ چرا؟

۳) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه، مانند شکل زیر، که یک زاویه آن 30° درجه است، نشان دهید نسبتی که تکرار به دست آورده‌اید، برابر است با $\frac{FK}{EG}$. این نسبت را با اندازه‌گیری یا خط کش به دست آورید (واضحاً این نشان دو مثلث ABH و KFA را نشان دهد).

۴) با استفاده از این نسبت، طول سیم نگهدارنده دکل را حساب کنید.

اهداف موضوعی:

- درک تساوی نسبت ضلع مقابل به زاویه تند به وتر در مثلث‌های قائم‌الزاویه ساخته شده روی اضلاع یک زاویه تند.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن

ابزار مورد نیاز:

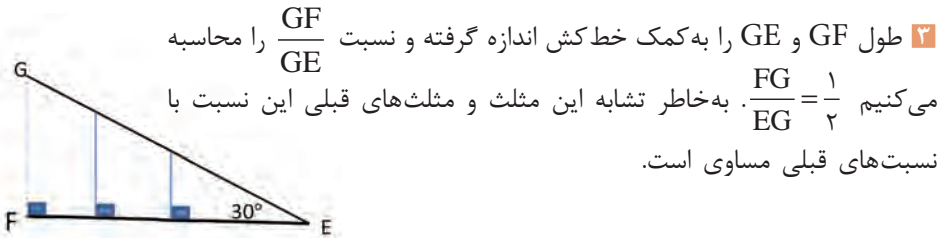
خط کش و نقاله برای اندازه‌گیری مستقیم

- به دلیل تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه EDA و KFA (به دلیل زاویه مشترک $\angle A$ و

$$\frac{KF}{FA} = \frac{ED}{DA} \quad (\angle E = \angle K = 90^\circ) \text{ خواهیم داشت}$$

- به دلیل تشابه دو مثلث ABH و ADE (به دلیل زاویه مشترک $\angle A$ و

$\frac{BH}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FK}{AF} = \frac{BH}{AB}$ داریم $(\angle H = \angle E = \angle K = 90^\circ)$ یعنی نسبت هم با نسبت‌های قبل مساوی است.



۲ طول GF و GE را به کمک خط کش اندازه گرفته و نسبت $\frac{GF}{GE}$ را محاسبه می‌کنیم $\frac{FG}{EG} = \frac{1}{2}$. به‌خاطر تشابه این مثلث و مثلث‌های قبلی این نسبت با نسبت‌های قبلی مساوی است.

۴ به کمک بندهای (۱) و (۲) و (۳) می‌توان مسئله را حل کرد.

$$\frac{BH}{AB} = \frac{\text{طول ارتفاع دکل}}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{60 \text{ m}}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \text{متر } 120 = \text{طول سیم نگهدارنده}$$

در ادامه مفهوم سینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.

۱) به کمک نقاله و یا رسم چند مثلث قائم‌الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه‌های 20° و 35° و 40° درجه را بیابید

اهداف:

■ کسب مهارت حل مسئله، یافتن مقدار تقریبی سینوس یک زاویه از طریق اندازه‌گیری مستقیم

مثلاً برای زاویه 20° درجه، ابتدا به کمک نقاله یک زاویه 20° درجه رسم می‌کنیم. سپس با رسم خطی عمود بر یکی از دو ضلع زاویه از نقطه‌ای روی ضلع دیگر زاویه، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم. طول ضلع مقابل به زاویه 20° درجه و وتر مثلث را اندازه‌گیری می‌کنیم و با محاسبه نسبت آنها، سینوس زاویه را محاسبه می‌کنیم. به همین ترتیب در مورد بقیه زاویه‌ها عمل می‌کنیم.

$$\sin 40^\circ \approx 0.64 \quad \text{و} \quad \sin 35^\circ \approx 0.57 \quad \text{و} \quad \sin 20^\circ \approx 0.34$$

فعالیت آموزشی

یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.

۱) نقطه A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را مطابق شکل رسم کنید. طول پاره‌خط AB چه رابطه‌ای با زاویه β دارد؟

۲) با کم یا زیاد شدن زاویه β ، سینوس آن چگونه تغییر می‌کند؟

۳) یا نزدیک شدن زاویه β به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۴) یا نزدیک شدن زاویه β به 90° درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۵) سینوس β چه عددهایی می‌تواند باشد؟

اهداف موضوعی:

■ درک رابطه بین تغییرات یک زاویه تند و سینوس آن زاویه، درک مقادیر ممکن

برای سینوس یک زاویه تند، درک حدی از مقادیر سینوس در نزدیکی زاویه‌های صفر و 90° درجه

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری

1 با توجه به تعریف سینوس یک زاویه تند در مثلث‌های قائم‌الزاویه چون مثلث

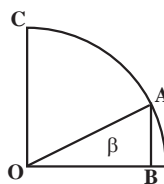
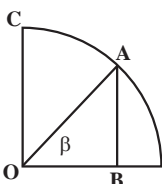
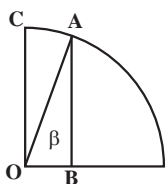
OAB در رأس B قائمه است پس سینوس زاویه β عبارت است از $\frac{BA}{AO}$ ولی

چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (1 واحد) است، پس $\sin\beta = BA$

اشتباهات ممکن:

در این قسمت انتخاب ضلع مقابل به زاویه همان سینوس زاویه می‌باشد. بهتر است مثال‌هایی زده شود تا معلوم شود این اتفاق همیشه نمی‌افتد و فقط در این مثال که طول وتر 1 است این وضعیت رخ داده است.

2 با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویه β طول پاره خط BA بزرگ می‌شود. بنابراین سینوس آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و با کم شدن زاویه، سینوس آن کمتر می‌شود. در شکل‌های زیر از چپ به راست به صورت شهودی مشاهده می‌کنید که با کوچک شدن زاویه، طول BA یعنی مقدار سینوس زاویه β نیز کم می‌شود.



3 با نزدیک شدن زاویه β به صفر طول AB یعنی سینوس زاویه β از هر عدد مثبتی کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود.

4 با نزدیک شدن زاویه β به 90° دیده می‌شود BA به CO نزدیک می‌شود. بنابراین $\sin\beta$ به عدد 1 نزدیک می‌شود.

5 چون در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قائمه از وتر کوچک‌تر است پس $BA < AO = 1$ بنابراین $\sin\beta < 1$ و چون $\sin\beta$ طول پاره خط BA است پس $0 < \sin\beta < 1$ یعنی سینوس زاویه تند β عددی بین 0 و 1 است.

ممکن است در نمادگذاری نسبت‌های مثلثاتی هنجویان عبارت $\sin \alpha$ را همانند ضرب عبارت \sin در α فرض کنند و نتیجه بگیرند $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$ در مثال‌های عددی می‌توان نادرستی این تصور را نشان داد. در این بخش سؤال‌هایی پرسیده شده است تا بدفهمی هنجویان را در این مورد کاهش دهد. هدف از این سؤال‌ها آن است که هنجو بداند در رابطه‌هایی مانند $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ ، ضریب α در صورت با عدد (۲ در مخرج) ضریب عددی قابل ساده شدن نیست. برای بررسی این وضعیت‌ها می‌توان سؤال‌هایی مانند سؤال زیر به هنجویان داد.

۱) درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را با محاسبه عددی تعیین کنید

$$\frac{\sin 6^\circ}{2 \sin 3^\circ} = \sin 3^\circ$$

$$2 \sin 2^\circ = \sin 4^\circ$$

در مسئله زیر هدف تأکید بر مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویه تند که باید بین 0 و 1 باشد است.


۲) آیا زاویه تندی وجود دارد که سینوس آن $\frac{4}{3}$ باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا $\frac{4}{3} > 1$ و همیشه سینوس یک زاویه تند بین 0 و 1 است. هنجویان ممکن است از دلایل دیگری مانند اینکه سینوس یک زاویه برابر است با اندازه ضلع مقابل به آن زاویه به اندازه وتر و اشاره به این نکته که در مثلث قائم‌الزاویه اضلاع زاویه قائم همواره از وتر کوچک‌تر هستند پس سینوس همواره کسری کوچک‌تر از واحد است نیز استفاده نمایند.

فعالیت آموزشی

ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند روبرو رسم کنید.

(۱) اگر طول پاره خط OA برابر a باشد سینوس زاویه β چقدر است؟



(۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد a به صورت $1 < a < 2$ بتوانید زاویه‌ای پیدا کنید که سینوس آن برابر a باشد.

اهداف:

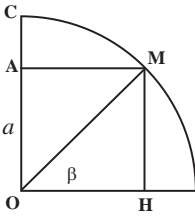
کسب مهارت محاسبه زاویه‌ای که سینوس آن معلوم است از طریق رسم.

مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تعمیم دادن

1 طبق فعالیت قبل $MH = \sin\beta$ پس $a = \sin\beta$

2 ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند زیر رسم کنید روی شعاع قائم آن به اندازه a جدا کنید، $a = AO$ از A عمودی بر AO رسم کنید تا ربع دایره را در M قطع کند. زاویه‌ای که پاره خط OM با شعاع افقی نیم‌دایره می‌سازد، جواب است.



$$OA = MH = \sin\beta$$

حال به کمک مقاله می‌توان اندازه زاویه β را اندازه گرفت.

نتیجه از دو بند (۱) و (۲) : سینوس هر زاویه عددی بین 0° و 1° است و هر عدد بین 0° و 1° می‌تواند سینوس یک زاویه تند باشد.

مسئله‌ها

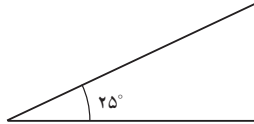
۱- الف) سینوس زاویه 25° درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویه تند آن 25° درجه باشد سپس وتر و طول ضلع روبرو به این زاویه را با خط کش اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت ضلع روبرو به این زاویه به وتر، سینوس 25° درجه می‌باشد. پس:

$$\sin 25^\circ \approx 0.42$$



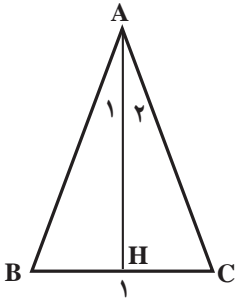
ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویه رأس آن 5° درجه باشد. اگر فاعده این مثلث 10 سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

ارتفاع این مثلث را از رأس آن رسم می‌کنیم. چون در مثلث متساوی‌الساقین

میانه و عمود منصف و ارتفاع و نیمساز رسم شده از رأس بر هم منطبق‌اند داریم:
 در مثلث قائم‌الزاویه BHA یا CHA ، $\angle A_1 = \angle A_2 = 25^\circ$ و $HB=CH = 5$ و $\angle HAB = 25^\circ$



$$\sin 25^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5}{\sin 25^\circ} \approx 11/83$$

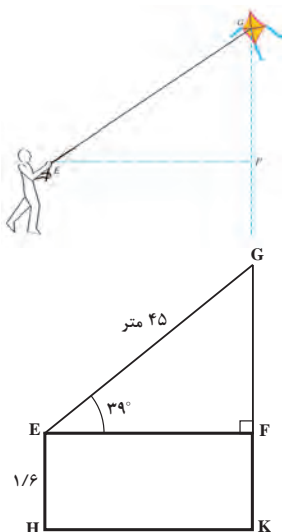
۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر $5/8$ است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که طول وتر آن 10° واحد و یکی از ضلع‌های دیگرش 8 واحد باشد. زاویه روبه‌رو به ضلع به طول 8 جواب است. این زاویه را با نقاله اندازه می‌گیریم که تقریباً 53° درجه است.

۲۳ رها بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید 45 متر نخ بادبادک او رها شده است. طبق شکل، زاویه نخ با سطح افق 39° درجه و فاصله دست رها از سطح زمین، یک متر و شصت سانتی‌متر است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصالات

$$\sin 39^\circ = \frac{GF}{45} \Rightarrow GF \approx 28/32$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع بادبادک} = GF + FK \approx 28/32 + 1/6 = 29/92$$

بخش چهارم: کسینوس یک زاویه تند

اهداف بخش

- درک مفهوم کسینوس یک زاویه تند
- استفاده از کسینوس یک زاویه در حل مسائل پیرامونی
- محاسبه مقدار تقریبی کسینوس یک زاویه تند
- درک رابطه بین تغییرات یک زاویه با تغییرات کسینوس زاویه
- تشخیص مقادیر ممکن برای کسینوس یک زاویه تند
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن سینوس آن زاویه

واژه‌های کلیدی:

کسینوس زاویه تند، نسبت اضلاع

نگاه کلی به بخش:

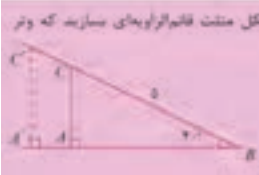
روش آموزشی این بخش طرح یک مسئله و انجام یک فعالیت برای حل آن مسئله است. با انجام این فعالیت، مفید بودن مفهوم نسبت مثلثاتی کسینوس مطرح می‌شود و در انتها مفهوم کسینوس تعریف می‌شود. ویژگی‌های کسینوس یک زاویه و یافتن کسینوس یک زاویه از طریق اندازه‌گیری مستقیم اضلاع به طور تقریبی و مقادیر ممکن تقریبی کسینوس زاویه‌های تند بیان می‌شود. در پایان با داشتن مقدار کسینوس یک زاویه، چگونگی محاسبه آن زاویه بررسی می‌شود.

ورود به مطلب:

این مفهوم شبیه مفهوم سینوس است و با همان روش قابل آموزش است. در اینجا نیز می‌توانید مسئله مناسبی بیابید که مفهوم کسینوس در آن وجود داشته باشد و با حل آن مسئله به‌طور ضمنی مفهوم کسینوس را ارائه کنید. یا طبق روند کتاب و با مسئله‌ای که در کتاب مطرح شده است آموزش را شروع کنید.

فعالیت آموزشی

۱) یک زاویه 40° درجه رسم کنید و مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد.



۲) با اندازه‌گیری اضلاع به کمک خط‌کش، نسبت $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

۳) مثلث قائم‌الزاویه دیگری مانند $A'BC'$ با همین زاویه و طول وتر متفاوت رسم کنید و نسبت $\frac{A'B}{BC'}$ را محاسبه کنید. آیا مقدار این نسبت با نسبت بند (۲) متفاوت است؟ چرا؟ (در حالت کلی استدلال کنید).

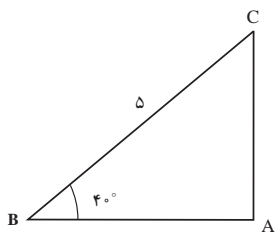
۴) به کمک نسبتی که در بالا به دست آورده‌اید، طول تردپان آنتن‌نشانی را حساب کنید.

اهداف موضوعی:

- درک تساوی نسبت ضلع مجاور به زاویه تند به وتر در مثلث‌های قائم‌الزاویه ساخته شده روی اضلاع یک زاویه تند

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن
- ۱) در این بند هنرجو باید توانایی رسم داشته باشد و به کمک خط‌کش و پرگار و مقاله مثلث خواسته شده را رسم کند.



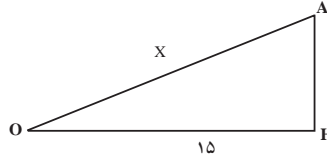
- ۲) به کمک خط‌کش AB و BC را اندازه‌گیری می‌کنیم. $AB \approx 3/8$ و $BC = 5$

$$\text{در نتیجه } \frac{AB}{BC} \approx 0/76$$

- ۲) $\frac{A'B}{BC'} \approx 0/76$ خیر، زیرا دو مثلث رسم شده، دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه تند

مساوی 40° درجه می‌باشند و چون هر کدام یک زاویه 90° درجه نیز دارند با هم متشابه‌اند و اگر نسبت اضلاع متناظر را در این مثلث‌های متشابه بنویسیم با هم مساوی‌اند.

۴ مثلثی که در مسئله آتش‌نشانی رسم کردیم با مثلثی که در بند (۲) رسم کردیم متشابه‌اند (به خاطر بند ۳). با نوشتن نسبت اضلاع متناظر داریم:



$$\frac{15 \text{ متر}}{\text{طول نردبان}} = \frac{OH}{OA} = \frac{AB}{BC} \approx 0.76 \Rightarrow \text{طول نردبان} \approx \frac{15}{0.76} = 19.7 \text{ متر}$$

در ادامه این بخش، مفهوم کسینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.

۱) یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین رسم کنید.

الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث ۴۵ درجه‌اند.

ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازه یک واحد در نظر بگیریم، طول وتر این مثلث چقدر است؟
برای استفاده از محاسبات ۷۰٪، سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

۲) مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.
کدام طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه رسم شده را حساب کنید.

۳) با استفاده از محاسبات انجام شده، سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° درجه را به‌دست آورید.

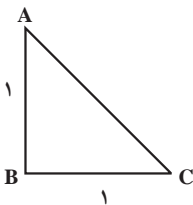
۴) به کمک دو سؤال بالا، جدول زیر را کامل کنید.

زاویه	سینوس	کسینوس	تانژانت
۳۰°			
۴۵°			
۶۰°			

اهداف:

■ کسب مهارت حل مسئله، محاسبه مقدار دقیق کسینوس زاویه‌های خاص ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ درجه، استدلال کردن

الف: چون دو ضلع این مثلث با هم مساوی‌اند $\angle A = \angle C$ و چون مجموع آنها ۹۰ درجه است، هر دو زاویه ۴۵ درجه هستند.



$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \angle B = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A = \angle C = 45^\circ$$

(۱) ب:

اگر یکی از ضلع‌های آن ۱ باشد ضلع دیگرش هم ۱ است و با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان طول وتر این مثلث را یافت.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$$

(۱) پ:

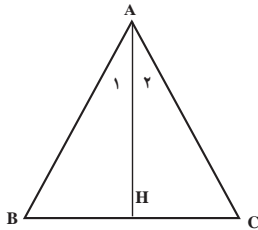
$$\sin \angle A = \sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \cos \angle A = \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$

(۲)

الف: می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع همه ضلع‌ها و زاویه‌ها مساوی‌اند. در نتیجه:

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ از طرفی ارتفاع و نیمساز و میانه و عمودمنصف رسم شده از همه رأس‌ها یکسان هستند، پس



$$HB = CH = \frac{CB}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \angle HAB = \angle HAC = 30^\circ = \frac{\angle A}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABH به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 1^2 = AH^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ب)

$$\cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$


$$\tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

این محاسبه‌ها را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

نسبت‌های مثلثاتی	۳۰ درجه	۴۵ درجه	۶۰ درجه
سینوس	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
تانژانت	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$

فعالیت آموزشی

یک ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.



نقطه A را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره‌خط OB چه رابطه‌ای با زاویه α دارد؟

(۱) یا کم یا زیاد شدن زاویه α ، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

(۲) کسینوس زاویه α چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(۳) یا نزدیک شدن زاویه α به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

(۴) یا نزدیک شدن زاویه α به 90° درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

فعالیت ۸

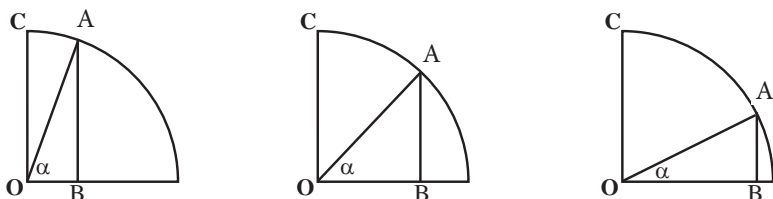


اهداف موضوعی:

■ درک رابطه بین تغییرات یک زاویه با کسینوس آن زاویه، درک مقادیر ممکن برای کسینوس یک زاویه تند، درک حدی از مقادیر کسینوس در نزدیکی زاویه‌های صفر و 90° درجه

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری
- ۱ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه تند در مثلث‌های قائم الزاویه، چون مثلث در رأس B قائمه است، کسینوس زاویه α عبارت است از $\frac{BO}{AO}$ ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است، $OB = \cos \alpha$ در کلاس توضیح دهید که فقط در این شکل که طول وتر ۱ واحد است، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد.
- ۲ با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویه α طول پاره خط BO کوچک می‌شود. بنابراین کسینوس α کوچک‌تر می‌شود و با کم شدن α کسینوس α بزرگ‌تر می‌شود. در شکل‌های زیر این مطلب را به صورت شهودی مشاهده می‌کنید.



- ۳ چون در مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویه قائمه از وتر کوچک‌تر است داریم: $BO < AO = 1$. بنابراین $\cos \alpha < 1$ و چون $\cos \alpha$ طول پاره خط BO است داریم: $0 < \cos \alpha < 1$. پس: $0 < \cos \alpha < 1$ یعنی کسینوس زاویه تند α عددی بین ۰ و ۱ است.

- ۴ با نزدیک شدن زاویه α به صفر طول OB بزرگ می‌شود و به شعاع افقی نزدیک می‌شود یعنی $\cos \alpha$ به عدد یک نزدیک می‌شود.

- ۵ با نزدیک شدن زاویه α به 90° دیده می‌شود BO کوچک می‌شود. یعنی کسینوس زاویه α از هر عدد مثبتی کوچک‌تر شده و به صفر نزدیک می‌شود. مناسب است که تذکر داده شود که فقط در این شکل که طول وتر ۱ است، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد. بهتر است مثالی زده شود که وتر در آن ۱ نباشد. (به مثال ابتدای بخش کسینوس در کتاب کار توجه شود)

ربع دایره‌ای به شعاع واحد، مانند شکل روبه‌رو رسم کنید.

(۱) اگر طول یاره‌خط BO برابر b باشد، کسینوس زاویه α چقدر است؟

(۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد b به صورت $1 < b < 2$ بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که کسینوس آن برابر b باشد.



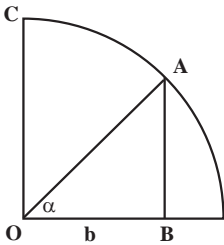
اهداف موضوعی:

■ کسب مهارت محاسبه زاویه‌ای که کسینوس آن معلوم است از طریق رسم

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات کلامی، تعمیم دادن

- ۱ با توجه به واحد بودن طول وتر در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم: $\cos \alpha = OB = b$.
- ۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنید. سپس روی شعاع افقی آن به اندازه b جدا کنید که $b = BO$. از B عمودی بر BO رسم کنید تا ربع دایره را در A قطع کند. زاویه AOB جواب مسئله است زیرا $\cos \alpha = OB = b$.



سپس به کمک نقاله می‌توان اندازه آن زاویه را محاسبه نمود.

این فعالیت نشان می‌دهد که هر عدد بین 0 و 1 می‌تواند برابر کسینوس زاویه‌ای باشد.

دقت شود در این بخش به بدفهمی و نامثال‌های

کسینوس نیز پرداخته شود تا احتمال اشتباه هنرجو به حداقل برسد. مثلاً کدام یک از رابطه‌های زیر درست یا نادرست‌اند (به کمک محاسبه)

$$1) \frac{\cos 60^\circ}{2 \cos 30^\circ} = \cos 30^\circ$$

$$2) \cos 80^\circ = 2 \cos 40^\circ$$

۲ آیا زاویه تندی وجود دارد که کسینوس آن $\frac{4}{3}$ باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا $1 > \frac{4}{3}$ درحالی که همیشه کسینوس یک زاویه

تند بین 0 و 1 است.

مسیرهایی برای توسعه:

۱ تحقیق توسط هنرجویان برای بررسی درستی رابطه‌های زیر (قرارداد $(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$) بیان شود):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (\text{پ})$$

مسئله‌ها

۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، کسینوس زاویه‌های ۱۵ و ۷۵ درجه را حساب کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله

به کمک خط کش و نقاله قبلاً توضیح کامل داده شده است.

$$\cos 15^\circ \approx 0.96, \cos 75^\circ \approx 0.26$$

۲) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به قاعده ۱۰۰ متر و با زاویه مجاور به قاعده ۵۰ درجه است.

الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش، کسینوس زاویه ۵۰ درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

ب) طول ارتفاع زمین مثلث شکل را بیابید.

پ) مساحت زمین را بیابید.

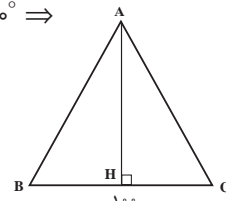
مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله

الف) همانند سؤال ۱ عمل می‌کنیم که نتیجه می‌شود $\cos 50^\circ \approx 0.64$
 ب) شکل زمین را مانند زیر رسم می‌کنیم. از A ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه HBA:

$$BH = \frac{BC}{2} = 50 \text{ m} \Rightarrow \cos \angle B = \frac{BH}{AB} \text{ و } \angle B = 50^\circ \Rightarrow$$

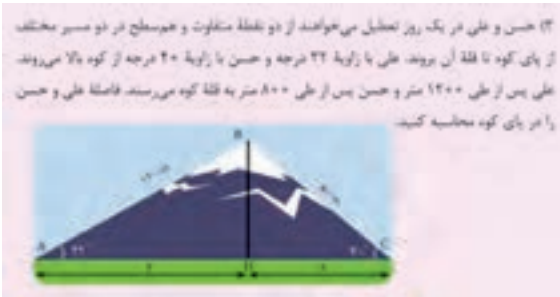
$$\Rightarrow AC = AB = \frac{50}{\cos 50^\circ} \approx \frac{50}{0.64} = 78.125$$



پ) از رابطه فیثاغورس داریم :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(78/125)^2 - 50^2} \approx 60$$

$$S = \frac{AH \times BC}{2} \approx \frac{60 \times 100}{2} = 3000$$



مهارت‌ها و فرایندها:

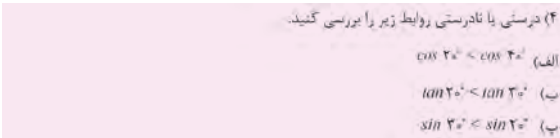
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

ابتدا به کمک مثلث قائم‌الزاویه مناسب مقدار کسینوس زوایه‌های ۳۲ و ۴۰ درجه را می‌یابیم. سپس با استفاده از تعریف کسینوس مقدار X و y را یافته و با هم جمع می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \cos 32^\circ &= \frac{y}{1200} \\ \cos 32^\circ &\approx 0.85 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 1200 \cos 32^\circ \approx 1200 \times 0.85 = 1020 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 40^\circ &= \frac{x}{800} \\ \cos 40^\circ &\approx 0.77 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 800 \cos 40^\circ \approx 800 \times 0.77 = 616 \text{ m}$$

$$x + y = 1636 \text{ m}$$



مهارت‌ها و فرایندها:

■ مقایسه کردن، استدلال کردن

هدف این سؤال استفاده از اطلاعات هنرجو پس از یادگیری نسبت‌های مثلثاتی و تعیین رابطه بین تغییرات نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با تغییرات آن زاویه است.

(الف) نادرست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود، کسینوس آن کوچک می‌شود.
 (ب) درست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود تانژانت آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.
 (پ) نادرست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود سینوس آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.

(۵) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید

$$A = \frac{\sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \cos 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} \quad \text{و} \quad B = \frac{\tan 60^\circ + \cos 30^\circ - 2\sqrt{3}}{1 + \sin 60^\circ}$$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات

$$B = \frac{\sqrt{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad \text{و} \quad A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$



مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، حل مسئله، تفکر بصری

$$\cos 35^\circ = \frac{m}{x} \Rightarrow m = x \cos 35^\circ, \quad \cos 72^\circ = \frac{n}{y} \Rightarrow n = y \cos 72^\circ$$

$$\begin{cases} x \cos 35^\circ + y \cos 72^\circ = m + n = 33 \\ x \sin 35^\circ = h = y \sin 72^\circ \Rightarrow x = \frac{y \sin 72^\circ}{\sin 35^\circ} \Rightarrow y \approx 19/7, \quad x \approx 32/7 \end{cases}$$

(۷) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید:

(الف) $\cos 60^\circ = 2 \cos 30^\circ$ (ب) $\sin 60^\circ < 2 \sin 30^\circ$
 (پ) $\cos 60^\circ < 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$ (ت) $\tan 60^\circ + \tan 30^\circ = \frac{2}{\sin 60^\circ}$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات، استدلال کردن، مقایسه کردن

با جایگذاری مقادیر نسبت‌های مثلثاتی می‌توان درستی یا نادرستی آنها را تعیین کرد.

$$\frac{1}{2} \neq 2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(الف) نادرست زیرا

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

ب) درست

$$\frac{1}{2} < 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

پ) درست زیرا

$$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ت) درست زیرا

۸) سمت راست تساوی‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $A = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$

ب) $B = \frac{2\cos 30^\circ - 2\sin 30^\circ}{2\sin 45^\circ + 2\cos 45^\circ}$

ج) $C = 1 - 2 \sin 30^\circ$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات

$$A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$B = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)}{2(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{3}$$

$$C = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

تاریخچه و توسعه مثلثات

مثلثات از درون هندسه بیرون آمد و بیش از همه، ریاضیدانان ایرانی روی آن کار کردند. بررسی‌های اخترشناسی در بابل قدیم و یونان، ریاضیدانان را به سمت موضوع‌هایی کشانید که می‌توان آنها را پیش درآمد مثلثات دانست. نخستین تابع‌های مثلثاتی را باید جدول وترها برحسب کمان آنها دانست که برای محاسبه‌های اخترشناسی لازم بود و در دو سده پیش از میلاد به‌وجود آمد.

برای نخستین بار دانشمندان هندی در فاصله زمانی از سده پنجم تا دوازدهم میلادی از «نیم‌وتر» به‌جای وتر استفاده کردند که متناظر با مفهوم سینوس امروزی است. آنها نیم‌وتر را «اردهاجیا» (یا «جیاردها») می‌گفتند که از لحاظ لغوی به معنای نصف وتر است. به تدریج اردهاجیا را کوتاه کردند و «جیا» نامیدند. به جز این، هندی‌ها از یک منهای کسینوس X هم استفاده می‌کردند و آن را «کوماجیا» می‌نامیدند و مقدار $\cos X$ را «کوتی جیا» می‌گفتند.

«ابوالوفای بوزجانی» (۹۴۰ تا ۹۸۸ میلادی) ریاضیدان ایرانی (ویرانه‌های بوزجان نزدیک تربت‌جام است)، تانژانت را به نام «ظل» وارد مثلثات کرد و جدولی را تنظیم کرد که نیم درجه، نیم درجه مقدار سینوس‌ها را تعیین می‌کرد. دستورهای $\sin(a+b)$ و $\sin(a-b)$ را کشف کرد و برخی از مسئله‌های مثلثات کروی را حل نمود.

اما گام اصلی را نصیرالدین طوسی برداشت. تألیف او به نام «کشف القناع فی اسرار شکل القطاع» در واقع نخستین کتاب درباره مثلثات است. نقش طوسی را در مثلثات، باید شبیه نقش اقلیدس در هندسه دانست. زیرا او توانست مجموعه آنچه را که پیش از او وجود داشت، به صورت دانشی مستقل و منظم درآورد. ترجمه‌های از کتاب طوسی در سال ۱۹۸۱ به زبان فرانسوی انجام گرفت و تا مدت‌ها به‌عنوان کتاب درسی، مورد استفاده دانش‌پژوهان در اروپای غربی بود.

از نام‌گذاری «مثلثات» می‌توان حدس زد که این شاخه از ریاضیات دست کم در آغاز پیدایش خود به‌نحوی با مثلث و مسئله‌های مربوط به مثلث بستگی داشته است. در واقع پیدایش و پیشرفت مثلثات را باید نتیجه‌ای از تلاش‌های ریاضیدانان برای رفع دشواری‌های مربوط به محاسبه‌هایی دانست که در هندسه روبروی دانشمندان بوده است.

بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی زمان تیموریان با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادله درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی برای محاسبه سینوس کمان یک درجه با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات

از سده پنزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت. یک نمونه از مواردی که ایرانی بودن این دانش را تا حدودی نشان می‌دهد از این قرار است: ریاضیدانان ایرانی از واژه «جیب» (واژه عربی به معنی «گریبان») برای سینوس و از واژه «جیب تمام» برای کسینوس استفاده می‌کردند. وقتی نوشته‌های ریاضیدانان ایرانی به ویژه خوارزمی به زبان لاتین و زبان‌های اروپایی ترجمه شد، معنای واژه «جیب» را در زبان خود به جای آن گذاشتند: سینوس. این واژه در زبان فرانسوی همان معنای جیب عربی را دارد. نخستین ترجمه از نوشته‌های ریاضیدانان ایرانی که در آن صحبت از نسبت‌های مثلثاتی شده است، ترجمه‌ای بود که در سده دوازدهم میلادی به وسیله گرادوس کره مونه سیس ایتالیایی از عربی به لاتینی انجام گرفت و در آن واژه سینوس را به کار برد. اما درباره ریشه واژه «جیب» دو دیدگاه وجود دارد: «جیا» در زبان سانسکریت به معنای وتر و گاهی نیم وتر است. نخستین کتابی که به وسیله فزازی (یک ریاضیدان ایرانی) به دستور منصور خلیفه عباسی به زبان عربی ترجمه شد، کتابی از نوشته‌های دانشمندان هندی درباره اخترشناسی بود. مترجم برای حرمت گذاشتن به نویسندگان کتاب، «جیا» را تغییر نمی‌دهد و تنها برای اینکه در عربی بی معنا نباشد، آن را به صورت «جیب» در می‌آورد. دیدگاه دوم که منطقی‌تر به نظر می‌آید این است که در ترجمه از واژه فارسی «جیب» - بر وزن سبب - استفاده شد که به معنی «تکه چوب عمود» یا «دیرک» است. نسخه‌نویسان بعدی که فارسی را فراموش کرده بودند و معنای «جیب» را نمی‌دانستند، آن را جیب خواندند که در عربی معنایی داشته باشد. در کتاب، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند به صورت نسبت اضلاع در یک مثلث قائم‌الزاویه تعریف شده‌اند، ولی با رسم یک نیم‌دایره، اگر از واحد گرادیان برای اندازه زاویه استفاده کنیم، خواهیم دید نسبت‌های مثلثاتی در ارتباط با طول کمان‌های دایره و طول وتر این کمان‌ها است. مثلاً سینوس یک زاویه برابر نصف طول وتر کمان آن زاویه بر حسب رادیان است. با این نگاه، که نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه را با ارتباط بخشیدن به طول کمان و طول وتر کمان ببینیم می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه را هم تعریف کرد.

مثلاً، با رسم یک ربع دایره به شعاع واحد در صفحه تحلیلی مشاهده می‌شود که سینوس و کسینوس هر زاویه تندی متناظر مختصات نقطه‌ای روی این نیم‌دایره است که آن زاویه را نشان می‌دهد. می‌توانیم این مطلب را برای بقیه زاویه‌ها نیز تعمیم دهیم و مختصات هر نقطه‌ای روی دایره را به صورت سینوس و کسینوس زاویه متناظر با آن نقطه تعریف کرد.