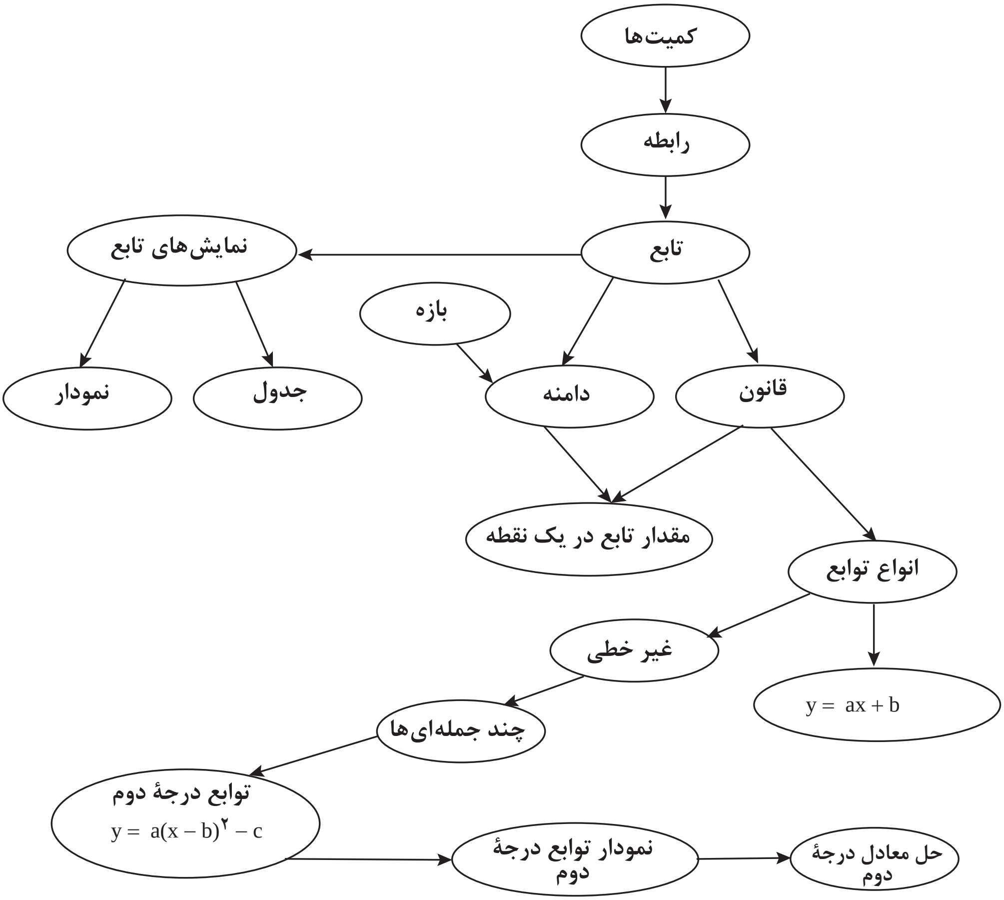
# فصل هفتم

# تابع

## طرح کلی مفاهیم فصل هفتم (نقشهٔ مفهومی)



## اهداف کلی

- درک مفهوم رابطهٔ بین کمیت‌ها
- درک مفهوم تابع در زمینهٔ پدیده‌های طبیعی
- آشنایی با نمایش‌های جدولی و نموداری تابع
- آشنایی با قانون تابع و مفهوم متغیر تابع و دامنهٔ تابع
- درک مفهوم بازه در اعداد حقیقی
- آشنایی با انواع توابع خطی و غیرخطی
- آشنایی با توابع خاص (درجهٔ دوم و ثابت)
- آشنایی با انتقال نمودار توابع درجهٔ دوم و درجهٔ اول در راستای افقی و قائم
- درک تساوی توابع
- یافتن جواب معادلهٔ درجهٔ دوم با توجه به نمودار تابع درجهٔ دوم
- آشنایی با مقدار تابع در یک نقطه

## عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- رابطهٔ بین دو کمیت را تشخیص داده و قانون آن را بنویسند.
- یک تابع را به‌صورت جدول و نمودار ارائه دهند.
- تابع بودن یا تابع نبودن رابطهٔ بین کمیت‌ها را تشخیص دهند.
- تعریف یک بازه را بیان کنند و نمایش‌های مختلف بازه را ارائه کنند و روی محور نمایش دهند.
- دامنه و قانون توابعی را که در زمینهٔ واقعی و محیط پیرامونی دیده می‌شوند، به‌دست آورند.
- بازه‌ها را به عنوان زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی بشناسند و اجتماع و اشتراک آنها را به‌دست آورند.
- مقدار تابع را در یک نقطه از دامنه محاسبه کنند یا پیدا کنند.
- نمودار توابع درجهٔ دوم را رسم کنند.
- نمودار توابع درجهٔ دوم و درجهٔ اول را در راستای قائم و افقی انتقال دهند و بتوانند قانون آنها را بنویسند.
- توابع چندجمله‌ای را با بیان چند مثال تعریف کنند.
- علامت ضرایب $a$ و $b$ و $c$ را در توابع درجهٔ دوم به کمک نمودار آن تعیین کنند.

- چگونگی تغییرات تابع را از روی نمایش جدولی تابع بیان کنند.
- دو تابع مساوی را تشخیص دهند.
- از روی نمودار توابع درجهٔ دوم، تعداد و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را تشخیص دهند و بیان کنند.
- توضیحات کلامی را خوانده و توانایی نقل و تفسیر آنها را داشته باشند.
- مسائل در زمینه‌های واقعی را بخوانند و مدل ریاضی برای آن بسازند.

### پیش نیازهای فصل :

- آشنایی با عبارات گویا وچند جمله‌ای‌ها و یافتن مقدار عددی آنها به ازای مقدار برای متغیر
- آشنایی با مختصات نقطه و نمایش آن در صفحه محورهای مختصات
- آشنایی با رسم توابع درجهٔ اول (خطی)
- آشنایی با مجموعهٔ اعداد حقیقی و زیر مجموعه‌های آن

### واژه‌های کلیدی:

رابطهٔ بین دو کمیت، تابع، دامنه، قانون تابع، بازه، جدول تابع، نمودار تابع، توابع چندجمله‌ای

### ابزار کمک آموزشی:

خط‌کش، صفحهٔ شطرنجی، رایانه

## نگاه کلی به فصل

روش آموزشی این کتاب برای معرفی تابع، با سایر کتاب‌ها فرق دارد و دبیران با توجه به این تفاوت باید شیوهٔ نوینی برای آموزش مفهوم تابع در پیش بگیرند. هدف این کتاب ارائه مفهوم ریاضی تابع با همان روند تاریخی به وجود آمدن مفهوم تابع است. به همین دلیل دراینجا از تابع به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب یاد نخواهیم کرد و بر مفهوم شهودی و اصلی تابع که عملگری است که به اعضای مجموعهٔ مبدأ، عنصری معین در مجموعهٔ مقصد نظیر می‌کند، تأکید خواهیم داشت. از لحاظ تاریخی، تابع به معنای رابطهٔ بین کمیت‌ها بوده است و ما نیز با همین روش مفهوم تابع را ارائه خواهیم کرد.

این فصل، با یک مکالمه بین معلم و هنرجو شروع می‌شود که با یکدیگر سعی می‌کنند تا یک مسئله را حل کنند. نکتهٔ اصلی این مسئله دیدن رابطهٔ بین کمیت‌هایی است که مشاهده می‌کنیم. برای متمرکز کردن هنرجو به مفهوم اصلی رابطهٔ بین کمیت‌ها، فعالیت‌هایی طراحی شده‌اندکه در زمینه‌های مختلف وجود رابطهٔ بین کمیت‌ها را نشان می‌دهند.

پس از درک وجود رابطهٔ بین کمیت‌ها، سعی در فرمول‌بندی این رابطه به زبان ریاضی می‌کنیم تا به تعریف اصلی تابع برسیم. تعریف تابع همچنان غیر رسمی انجام می‌شود ولی در طی مثال‌های متعدد دو مفهوم زیربنایی دامنه و قانون تابع ارائه می‌شوند.

**یک اشتباه رایج دربارهٔ مفهوم تابع** این است که دامنهٔ یک تابع را از طریق قانون (یا ضابطه) تابع تعیین می‌کنند، در حالی که این دو مفهوم مستقل از یکدیگرند. برای ساختن یا ارائه هر تابعی، ابتدا باید دامنهٔ آن را ارائه کرد و سپس قانونی که روی این دامنه عمل می‌کند را باید بیابیم. دامنهٔ یک تابع را قانون آن معین نمی‌کند بلکه محدودیت‌های مسئلهٔ مورد بررسی، و آن چیزی که تابع قرار است توصیف کند، مشخص‌کنندهٔ دامنهٔ تابع است. اگر در جهان ریاضی هم باشیم و هیچ محدودیت عملی هم نداشته باشیم، این فرد ارائه کنندهٔ تابع است که باید بگوید تابع مورد نظرش چه قانونی دارد و این قانون روی چه مجموعه‌ای قرار است عمل کند. برای تأکید روی این نکته، مثال‌ها و مسئله‌های متعددی در متن کتاب آورده شده است.

در ادامه به نمایش‌های تابع‌ها پرداخته شده است. این مفهوم نیز در قالب یک مکالمه بین هنرجویان و دبیر ارائه شده است.این مکالمات با طرح سؤال‌ها و شبهاتی که در این زمینه وجود داشته است شروع می‌شود و در طی مکالمه سعی می‌شود مسئله‌های پیش آمده حل شوند. در ادامه با تعریف جدول و نمودار توابع در طی مثال‌های متعدد مفید بودن این نمایش‌ها برای تشخیص رفتار توابع نشان داده می‌شود.

ادامهٔ فصل به بررسی توابع خاص و نمودار آنها می‌پردازد. از میان توابع خاص، فقط به توابع خطی و درجهٔ دوم پرداخته می‌شود تا سطح کتاب زیاد بالا نرود و مفاهیم برای هنرجویان مشکل نشود.

دراین فصل همچنین بازه‌ها و نمایش آنها نیز مطرح می‌شوند تا در بیان ریاضی دامنهٔ تابع‌ها، دچار مشکل نشویم.

از آنجا که رسم نمودار توابع کار آسانی نیست و هنرجویان هنوز مطالب کافی برای رسم نمودار توابع را فرا نگرفته‌اند، دراین فصل از نرم‌افزار جئوجبرا کمک گرفته شده است تا به عنوان یک ابزار هنرجویان را در رسم نمودار توابع یاری کند.

| | فرایند | توضیح فرایند | مثال |
|---|---|---|---|
| استانداردهای فرایندی | حل مسئله | ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله | ـ ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی |
| | | شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و با انتخاب مناسب آنها | ـ ارائه نمایش‌های جدولی و نموداری تابع در مورد رابطه بین دو کمیت<br>ـ بیان چگونگی تغییرات تابع از روی نمودار و جدول آن |
| | ارتباط کلامی | سازمان دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران | ـ ارائه رابطه بین دو کمیت توسط آرش پس از مثال‌های مختلف دبیردر موردمیزان نور چراغ و فاصله چراغ از ما |
| | | استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی | ـ با ارائه فرمول مساحت مثلث در فعالیت ۴ تابع ثابت معرفی می‌کند. |
| | استدلال واثبات | به‌کارگیری استدلال | ـ بیان دلیل تشخیص چگونگی تغییرات تابع از روی نمایش‌های نموداری و جدول آن<br>ـ بیان دلیل برای تشخیص مجموعه مقادیردامنه توابعی که در زمینه‌های واقعی ساخته می‌شوند.<br>ـ بیان دلیل تابع بودن یا تابع نبودن رابطه بین دو کمیت |
| | پیوندها و اتصالات | تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی | ـ تعیین رابطه بین طول فنر و وزن وزنه آویزان شده به آن<br>ـ تعیین رابطه بین گنجایش بنزین در باک ماشین و میزان مسافت طی شده |
| | | تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی | ـ نمایش بازه‌ها به صورت ریاضی و مجموعه‌ای و رسم نمودار آنها روی محور اعداد حقیقی |
| | بازنمایی‌ها | ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم | ـ تقریباً در بیشتر مواقع این اتفاق افتاده است (مانند ارائه نمایش‌های مختلف یک بازه...) |
| | سایر مهارت‌های تفکر | مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ... | ـ توانایی مقایسه نمودارهای توابع و در رسم به روش انتقال<br>ـ توانایی مقایسه و یافتن نوع تابع از روی قانون آن |

# بخش اول: مفهوم تابع

## اهداف بخش

- آشنایی با رابطهٔ بین دو کمیت و درک آن در زمینهٔ واقعی
- نوشتن قانون یا ضابطه برای بیان چگونگی رابطهٔ بین دو کمیت و تعیین مقادیر ممکن برای کمیت‌ها
- تشخیص تابع بودن یا نبودن رابطهٔ بین دو کمیت
- تعیین دامنهٔ تابعی که در زمینه‌های واقعی تعریف شده است از طریق محدودیت‌های واقعی

**واژه‌های کلیدی:**

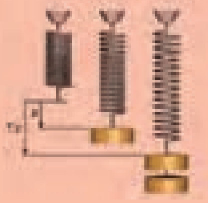
رابطهٔ بین دو کمیت، تابع، دامنه

**ورود به مطلب:**

رابطهٔ بین کمیت‌ها مفهوم اصلی در پیدایش مفهوم تابع است. دبیران می‌توانند از طریق طرح مسئله‌ای که به یکی از این رابطه‌ها اشاره دارد وارد مفهوم رابطهٔ بین کمیت‌ها شوند. در کتاب از مسئلهٔ اندازه‌گیری فاصلهٔ ستارگان استفاده شده است تا از طریق آن به رابطهٔ بین شدت نور و فاصلهٔ چشمهٔ نور توجه شود. از این نوع رابطه‌ها بسیار داریم که هم به عنوان ورودی و هم به عنوان مثال می‌توانیم از آنها استفاده کنیم. مثلاً رابطهٔ بین شدت صدا و فاصلهٔ منبع صدا، رابطهٔ بین فشار هوا و ارتفاع از سطح دریا، رابطهٔ بین فشار وارد بر سطح و مساحت سطح و ... (به مثال‌هایی که در این زمینه در کتاب کار وجود دارد رجوع کنید.)

## فعالیت آموزشی

فرض کنید فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنیم، ۱ سانتی‌متر به طول فنر اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۴۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود، پاره می‌شود.



۱) در جای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

هر چه جرم وزنهٔ آویزان شده ......... شود، طول فنر ......... می‌شود.

۲) اگر به این فنر یک وزنهٔ ۳۰۰ گرمی آویزان کنیم، طول آن چقدر می‌شود؟

۳) اگر با آویزان کردن وزنه‌ای، طول فنر ۲۰ سانتی‌متر شود، جرم آن چقدر بوده است؟

۴) در حالت کلی، اگر یک وزنهٔ $a$ گرمی به فنر آویزان کنیم و فنر پاره نشود، طول فنر بر حسب $a$ چقدر خواهد شد؟

۵) اگر وزنه‌ای را به فنر آویزان کنیم و فنر پاره نشود و طول آن برابر $l$ شود، جرم آن وزنه بر حسب $l$ چقدر است؟

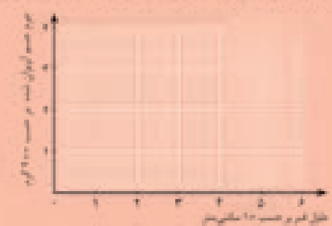
۶) از این طریق، چه ابزاری ساخته می‌شود؟

۷) حداقل و حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟

۸) جدول زیر ارتباط بین طول فنر و جرم وزنهٔ آویزان شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

| طول فنر کشیده شده | ۱۰ | ۱۵ | ۲۰ | ... | ۴۰ | ۴۵ | ۵۰ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| جرم وزنهٔ آویزان شده | ۰ | ... | ... | ۳۰۰ | ... | ... | ... | ۷۵۰ |

۹) در شکل زیر، محور افقی نشان دهندهٔ طول فنر و هر واحد آن معادل ۱۰ سانتی‌متر است. محور عمودی نشان دهندهٔ جرم جسم آویزان شده است و هر واحد آن معادل ۲۰۰ گرم است. جدول بالا، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را پیدا کنید و بگویید چه شکلی را نشان می‌دهند.




۱۰) حداقل و حداکثر طولی که این فنر پیدا می‌کند، چقدر است؟

## اهداف موضوعی:

- درک مفهوم رابطه، قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت‌ها

## مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال، بازنمایی‌ها، ارتباط کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

۱ زیادتر ـ بلندتر، یا کمتر ـ کوتاه‌تر

۲ طول فنر $=۲۰+۱۰=۳۰$ $\Rightarrow$ $۳۰۰÷۱۵=۲۰$

۳ گرم $۱۰×۱۵=۱۵۰$ $\Rightarrow$ $۲۰-۱۰=۱۰$

۴ $l=\frac{a}{۱۵}+۱۰ \quad ۰<a<۷۵۰$

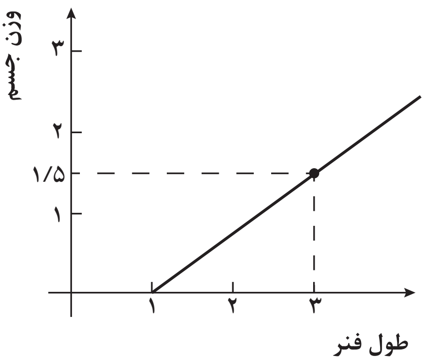
۵ $a=۱۵(l-۱۰) \quad ۱۰<l<۶۰$

۶ ترازوی دستی

۷ صفر و ۷۵۰ گرم

۸

| طول فنر کشیده شده | ۱۰ | ۱۵ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۴۵ | ۵۰ | ۶۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| جرم جسم آویزان شده | ۰ | ۷۵ | ۱۵۰ | ۳۰۰ | ۴۵۰ | ۵۲۵ | ۶۰۰ | ۷۵۰ |




۹ نمودار حاصل یک خط است.

۱۰ بین ۱۰ و ۶۰ سانتی‌متر است.

## فعالیت آموزشی

فعالیت ۱

فرض کنید خودرویی با گنجایش ۴۰ لیتر بنزین دارید. اگر این خودرو با سرعت ثابت حرکت کند، برای طی کردن هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند. باک این خودرو قبل از حرکت پر شده است. مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو با مسافت طی شده رابطه دارد. توجه داشته باشید که هیچ خودرویی تمام بنزین باک خود را مصرف نمی‌کند و لازم است حداقل ۵ لیتر بنزین در باک موجود باشد.

۱) در جای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

هر چه بنزین در باک ـــــــ شود، مسافت طی شده ـــــــ می‌شود.

۲) حجم بنزین موجود در باک چه مقادیری می‌تواند باشد؟

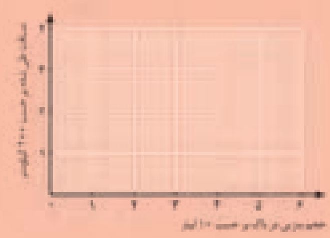
۳) اگر مقدار بنزین باقی‌مانده در باک را بر حسب لیتر با $v$ نشان دهیم و مسافت طی شده را برحسب کیلومتر با $L$ نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار $L$ را بر حسب مقدار $v$ بیان کند.

با توجه به پاسخ پرسش‌های بالا، به سؤال‌های زیر جواب دهید.

۴) جدول زیر، ارتباط بین حجم بنزین موجود در باک و مسافت طی شده را نشان می‌دهد. آن را کامل کنید.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| حجم بنزین در باک | ۴۰ | ۵۰ | ۴۵ | ۲۵ | ... | ۲۰ | ... | ۵ |
| مسافت طی شده | ۰ | ... | ... | ... | ۳۷۵ | ... | ۶۲۵ | ... |

۵) در شکل زیر، محور افقی حجم بنزین در باک را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۱۰ لیتر است. محور عمودی مسافت طی شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۱۰۰ کیلومتر است. جدول صفحهٔ قبل نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را پیدا کنید و بگویید چه شکلی را نشان می‌دهند.




۶) با در نظر گرفتن میزان بنزین موجود در باک این خودرو چه مسافت‌هایی را می‌تواند طی کند؟

۷) اگر ۲۰ لیتر بنزین در باک باقی‌مانده باشد، ماشین چند کیلومتر مسافت طی کرده است؟

۸) آیا پاسخ دادن به سؤال های (۲) و (۳) برای شناخت رابطهٔ بین بنزین باقی مانده و مسافت طی شده کافی است؟

**اهداف موضوعی:**

- درک مفهوم رابطه در زمینه‌های مختلف، درک قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت ها
- شناخت رابطهٔ بین دو کمیت در زمینه‌های واقعی و طبیعی

**مهارت‌ها و فرایندها:**

- حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال ها

۱ کمتر ـ بیشتر

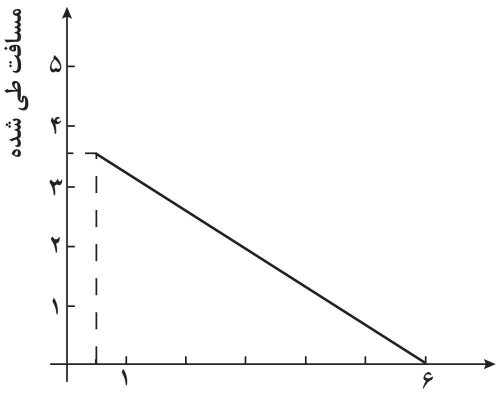
۲ حداقل ۵ لیتر و حداکثر ۶۰ لیتر

۳ $۵ \leq V \leq ۶۰$   $L=(۶۰-V)\times ۱۲/۵$ , میزان بنزین باک = V

۴

| حجم بنزین در باک | ۵ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۳۵ | ۴۵ | ۵۰ | ۶۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مسافت طی شده | ۶۸۷/۵ | ۶۲۵ | ۵۰۰ | ۳۷۵ | ۳۱۲/۵ | ۱۸۷/۵ | ۱۲۵ | ۰ |

۵




۶ بین صفر تا ۶۸۷ /۵ کیلومتر

۷ ۵۰۰ کیلومتر

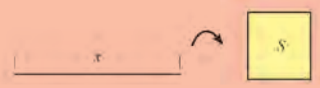
۸ بله، شناخت رابطهٔ بین این دو کمیت فقط نیازمند دانستن بندهای (۲) و (۳) است.

# فعالیت آموزشی

فعالیت ۳

مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با آن یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.

۱) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟




۲) طول قطعهٔ بریده شده از مفتول، چه مقادیری می‌تواند باشد؟

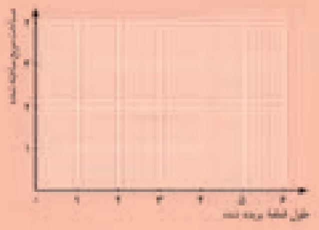
۳) اگر طول قطعهٔ بریده شده از مفتول را با $x$ نشان دهیم و مساحت مربع ساخته شده با آن را با $S$ نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار $S$ را بر حسب مقدار $x$ بیان می‌کند.

با توجه به پاسخ‌های خود، به سؤال‌های زیر جواب دهید.

۴) جدول زیر، ارتباط طول قطعهٔ بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| طول قطعهٔ بریده شده | ۴ | ۲۰ | ۴۴ | ... | ۶۰ | ۱۰۰ |
| مساحت مربع | ۱ | .... | .... | ۱۴۴ | .... | .... |

۵) در شکل زیر، محور افقی طول قطعهٔ بریده شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۴۰ سانتی‌متر است. محور عمودی مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۲۰۰ سانتی‌متر مربع است. جدول صفحهٔ قبل، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را بیابید و شکل حاصل را به طور تقریبی رسم کنید.




۶) مساحت‌های مربع‌های ساخته شده چه مقادیری می‌توانند باشند؟ مجموعهٔ مقادیر این مساحت‌ها را مشخص کنید.

۷) برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰۰ سانتی‌متر مربع، چه مقدار از مفتول را باید ببریم؟

۸) آیا پاسخ به سؤال‌های (۲) و (۳) برای شناخت رابطهٔ مساحت مربع ساخته شده و طول قطعهٔ بریده شده از مفتول کافی است؟

## اهداف موضوعی:

■ درک مفهوم رابطه در زمینه هندسی، درک قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت‌ها.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها

۱ خیر زیرا مساحت عددی مثبت است.

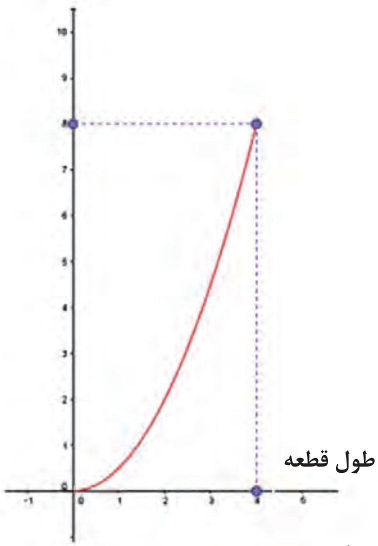
۲ اگر طول قطعه بریده شده را $x$ در نظر بگیریم $x$ عددی بین حداقل و حداکثر طول مفتول خواهد بود، یعنی بین صفر و ۱۶۰ سانتی‌متر

۳ $s=\left(\frac{x}{۴}\right)^{۲}=\frac{x^{۲}}{۱۶}, ۰<x<۱۶۰$ طول قطعهٔ بریده شده $= x$

۴

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۶۰ | ۱۲۰ | ۱۰۰ | ۶۰ | ۴۸ | ۴۴ | ۲۰ | ۴ | **طول قطعهٔ بریده شده** |
| ۱۶۰۰ | ۹۰۰ | ۶۲۵ | ۲۲۵ | ۱۴۴ | ۱۲۱ | ۲۵ | ۱ | **مساحت مربع** |

۵




۶ بین صفر و ۱۶۰۰ سانتی مترمربع.

این مجموعه به صورت $\{x\in \mathbb{R} \mid ۰ < x \leq ۱۶۰۰\}$ نوشته می‌شود.

۷ $۹۰۰=\frac{x^{۲}}{۱۶} \Rightarrow x=۱۲۰\text{cm}$

۸ بله، به کمک جواب‌های بند (۲) و (۳) جواب بقیهٔ سؤال‌ها را می‌توان داد.

پس از این فعالیت‌ها که هنرجویان با مفهوم رابطهٔ بین کمیت‌ها آشنا شده‌اند و مقداری هم به طور غیرمستقیم با مفهوم دامنه و قانون تابع کار کرده‌اند، مفهوم تابع به طور مستقیم ارائه می‌شود. برای تأکید بر یکتایی مقدار تابع با یک مثال، حالتی که یک رابطه تابع نیست نیز تذکر داده می‌شود.

کار در کلاس ۱

۱) در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده تابعی از طول فنر کشیده شده است؟ آیا طول فنر کشیده شده، تابعی از جرم جسم آویزان شده است؟

۲) مثالی از دو کمیت مرتبط (الف) و (ب) ارائه کنید که در آن کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد ولی کمیت (الف) تابعی از کمیت (ب) نباشد.

**اهداف:**

- تشخیص نوع رابطهٔ بین دو کمیت، پرورش تفکر واگرا

۱ بله هم جرم جسم تابعی از طول فنر است و هم طول فنر تابعی از جرم جسم است، زیرا با مشخص شدن هر یک، دیگری کاملاً مشخص می‌شود.

۲ مثلاً، رابطهٔ بین یک عدد و مربع آن عدد را در نظر بگیرید. با داشتن یک عدد می‌توان مربع آن عدد را تعیین نمود ولی با داشتن مربع یک عدد، دو عدد می‌توان یافت که مربع آنها همان مقدار باشد.

در ادامه، دو مفهوم اساسی دامنه و قانون تابع معرفی می‌شوند و چگونگی تساوی دو تابع بیان می‌شود. مناسب است که در اینجا مثال‌هایی زده شوند که نشان‌دهندهٔ دو تابع مساوی و غیرمساوی باشند.

**مثال:** تابع با قانون $y_1=\sqrt{x}\sqrt{x}$ و دامنهٔ مجموعهٔ اعداد مثبت با تابع با قانون $y_2=x$ و دامنهٔ مجموعهٔ اعداد مثبت مساوی‌اند، زیرا دامنهٔ آنها یکی است و حاصل عمل قانون آنها نیز یکی است.

**مثال:** تابع با قانون $y_1=\sqrt{x}\sqrt{x}$ و دامنهٔ مجموعه اعداد مثبت با تابع با قانون $y_2=x$ و دامنهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد مساوی نیستند، زیرا دامنهٔ آنها یکی نیست.

کار در کلاس ۲

۱) در فعالیت (۲)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک، بیان می‌کند.

۲) در فعالیت (۳)، دامنه و قانون تابعی رابنویسید که مساحت مربع ساخته شده را بر حسب طول قسمت بریده شده از مفتول، بیان می‌کند.

**اهداف:**

- ارتباطات (زبان ریاضی)، شناسایی دامنه و قانون تابع

۱ دامنهٔ تابع = $\{v\in \mathbb{R} \mid ۵\le v\le ۶۰\}$

**قانون تابع:** $l=(۶۰-v)\times ۱۲/۵$

۲ دامنهٔ تابع = $\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x \leq ۱۶۰\}$

**قانون تابع:** $s = \frac{x^۲}{۱۶}$

## مسئله‌ها

۱ـ الف) آیا با مشخص بودن محیط یک دایره، مساحت آن مشخص می‌شود؟ آیا مساحت دایره، تابعی از محیط آن است؟ دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

..............................................................................................

ب) آیا با مشخص بودن مساحت یک دایره، محیط آن مشخص می‌شود؟ آیا محیط دایره، تابعی از مساحت آن است؟ دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی)

الف) بله، مساحت دایره را از روی محیط آن می‌توان به‌دست آورد و مساحت دایره تابعی از محیط آن است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد مثبت است. برای به‌دست آوردن قانون این تابع فرض کنید $P$ محیط یک دایره باشد.

$$\text{محیط دایره} = P = ۲\pi r \Rightarrow r = \frac{P}{۲\pi} \quad \text{و} \quad \text{مساحت دایره} = S = \pi r^۲$$

$$\Rightarrow \quad = \pi\left(\frac{P}{۲\pi}\right) = \frac{P}{۴\pi}$$

ب) بله، محیط دایره را از روی مساحت آن می‌توان به‌دست آورد و محیط دایره تابعی از مساحت آن است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد مثبت است. برای به‌دست آوردن قانون این تابع فرض کنید $S$ مساحت یک دایره باشد.

$$S = \pi r^۲ \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow P = ۲\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} = ۲\sqrt{\pi S}$$

۲ـ الف) دو مثلث رسم کنید که محیط آنها ۱۰ سانتی‌متر و طول اضلاع آنها متفاوت باشند. مساحت این دو مثلث را پیدا کنید. آیا این دو مساحت برابرند؟

ب) آیا با مشخص بودن محیط یک مثلث، مساحت آن مشخص می‌شود؟ آیا مساحت مثلث تابعی از محیط آن است؟

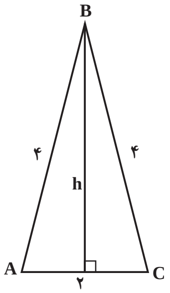
### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن

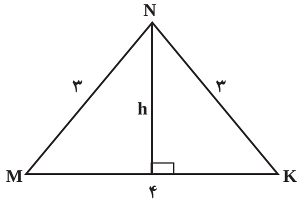
الف) خیر، دو مثلث متساوی‌الساقین زیر را در نظر بگیرید با رسم ارتفاع مرسوم از

رأس این مثلث‌ها و استفاده از رابطهٔ فیثاغورس می‌توان طول ارتفاع آنها را یافت در شکل $ABC$ ، $h=\sqrt{۱۵}$ و در شکل $MNK$ ، $h=\sqrt{۵}$، بنابراین

$$S_{۱}=\frac{\sqrt{۱۵}\times ۲}{۲}=\sqrt{۱۵} \quad و \quad S_{۲}=\frac{\sqrt{۵}\times ۴}{۲}=۲\sqrt{۵}$$




(۱)




(۲)

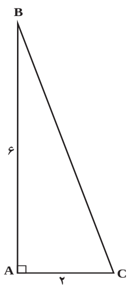
ب) خیر، قسمت (الف) نشان داد که دو مثلث با محیط مساوی ممکن است مساحت متفاوت داشته باشند، پس با دانستن محیط یک مثلث، مساحت آن مشخص نمی‌شود و مساحت مثلث تابعی از محیط آن نیست.

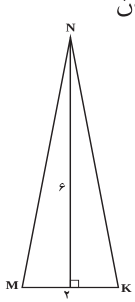
۳. الف) دو مثلث متفاوت با مساحت‌های برابر رسم کنید. محیط آنها را پیدا کنید. آیا مقدار محیط‌ها برابرند؟

ب) آیا با مشخص بودن مساحت یک مثلث، محیط آن مشخص می‌شود؟ آیا محیط مثلث تابعی از مساحت آن است؟

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن




الف) خیر، به دو مثلث بالا توجه کنید.

$$S_{MNK}=\frac{۶\times ۲}{۲}=۶ \quad و \quad S_{ABC}=\frac{۶\times ۲}{۲}=۶$$

ولی در مثلث $ABC$، $BC=\sqrt{۴۰}$ و در مثلث $MNK$، $MN=NK=\sqrt{۳۷}$ و بنابراین

$ABC$ محیط = $۶+۲+\sqrt{۴۰} \approx ۱۴/۳$

$MNK$ محیط = $\sqrt{۳۷}+\sqrt{۳۷}+۲ \approx ۱۴/۱$

که با هم مساوی نیستند

ب) خیر، قسمت (الف) نشان داد که دو مثلث با مساحت مساوی ممکن است محیط متفاوت داشته باشند، پس با دانستن مساحت یک مثلث، محیط آن مشخص نمی‌شود و محیط مثلث تابعی از مساحت آن نیست.

۴) سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. آیا ارتفاع سنگ از سطح زمین، تابعی از زمان است؟ چرا؟ اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ زمان شروع پرتاب باشد، دامنهٔ این تابع چیست؟

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، پیوند و اتصال با زندگی روزمره

بله، زیرا در هر لحظه زمان سنگ در جایی معین است و ارتفاع آن نیز معین است. از آنجا که این حرکت فقط در ۳ ثانیه انجام می‌شود، دامنه این تابع مجموعهٔ اعداد بین ۰ تا ۳ است.

۵) در یک سُرسُره که فاصلهٔ پای سُرسُره تا نردبان آن ۲ متر است، مقدار مسافتی که بچه سُر می‌خورد به ارتفاع سُرسُره وابسته است. اگر حداقل ارتفاع سُرسُره‌ها ۲ متر و حداکثر ارتفاع آنها ۴ متر باشد، تابعی را که مسافت سُر خورده شده را بر حسب ارتفاع سُرسُره بیان می‌کند با مشخص کردن دامنه و قانون آن بدست آورید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

بین طول وتر $x$ (طول سرسره) و ارتفاع پله‌های سرسره از زمین $y$ یک رابطه وجود دارد و به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم.

$$x^۲ = y^۲ + ۲^۲ \Rightarrow x = \sqrt{y^۲ + ۴}$$

دامنهٔ این تابع مقادیر ممکن برای $y$ است که مجموعهٔ اعداد بین ۲ و ۴ است.

۶) یک شیرینی فروشی به طور ثابت ماهانه ۷ میلیون تومان بابت اجارهٔ مغازه و آب و برق و دستمزد کارگران، پرداخت می‌کند. هزینهٔ مواد اولیهٔ هر کیلوگرم شیرینی ۳,۰۰۰ تومان است. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲,۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲,۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد.

الف) درآمد این مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با بدست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

ب) هزینهٔ ماهیانهٔ این مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با بدست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

پ) سود این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

الف) اگر $x$ میزان شیرینی بر حسب کیلوگرم باشد داریم:

درآمد حاصل از فروش $x$ واحد شیرینی $= R = ۱۲۰۰۰x\,, \qquad ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

ب) هزینه تولید $x$ واحد شیرینی $= C = ۳۰۰۰x + ۷۰۰۰۰۰۰\,, \quad ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

پ) سود $= P - C = ۱۲۰۰۰x - (۳۰۰۰x + ۷۰۰۰۰۰۰)\,, \qquad ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

$P =$ سود $= ۹۰۰۰x - ۷۰۰۰۰۰۰\,, \quad ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

می‌توان در اینجا توضیح داد که حداقل باید ۷۷۸ کیلو شیرینی تولید شود تا شیرینی فروش ضرر نکند. یعنی باید به جای $x$ در این رابطه عددی قرار داد که $P$ را مثبت کند.

$P =$ سود $= ۹۰۰۰x - ۷۰۰۰۰۰۰ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۷۷۸$

۷) یک مقاومت ثابت ۳۰۰ اُهمی را به طور موازی با یک مقاومت متغیر می‌بندیم. مقاومت معادل تابعی از مقاومت متغیر است. اگر مقاومت متغیر حداقل ۵ اهم و حداکثر ۱,۵۰۰ اهم باشد، دامنه و قانون تابعی را به دست آورید که مقاومت معادل را بر حسب مقاومت متغیر بیان می‌کند.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{۳۰۰} = \frac{۱}{y} \Rightarrow y = \frac{۳۰۰x}{۳۰۰ + x}\,, \quad ۵ \leq x \leq ۱۵۰۰$$

# بازه‌ها

## اهداف بخش

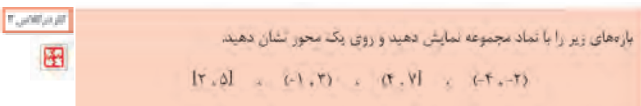
- درک مفهوم بازه (فاصله)
- استفاده از بازه‌ها در نمایش دامنهٔ توابع
- آشنایی با نمایش هندسی بازه‌ها
- آشنایی با نماد بی‌نهایت و چگونگی استفاده از آن برای نمایش یک بازه

### واژه‌های کلیدی:

بازه، بی‌نهایت

### ورود به مطلب:

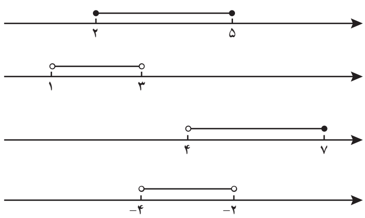
هدف این بخش فقط نمادگذاری برای نمایش برخی زیرمجموعه‌های مهم در مجموعهٔ اعداد حقیقی است. بنابراین تنها انگیزهٔ مهم این بخش نمادگذاری برای ساده‌تر صحبت کردن است و مناسب است که با مراجعه به بخش‌های قبل و دیدن برخی زیر مجموعه‌ها که به آنها برخورد کرده بودیم، انگیزهٔ لازم برای نام‌گذاری آنها را فراهم کنید. بازه‌ها دستهٔ خاصی از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ اعداد حقیقی هستند که بسیار به کار می‌آیند و به همین دلیل آنها را نام‌گذاری می‌کنیم.


بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

(-۴ , -۲) ، (۴ , ۷] ، (-۱ , ۳) ، [۲ , ۵]

### اهداف:

- پرورش نمایش یک مفهوم با ارائه‌های مختلف




$[۲\ ,\ ۵]=\{x\in \mathbb{R} \mid ۲ \leq x \leq ۵\}$

$(-۱ , ۳) =\{x\in \mathbb{R} \mid -۱ < x < ۳\}$

$(۴ , ۷] =\{x\in \mathbb{R} \mid ۴ < x \leq ۷\}$

$(-۴\ ,\ -۲) =\{x\in \mathbb{R} \mid -۴ < x < -۲\}$

در ادامهٔ این بخش، نمادهای ∞+ و ∞- برای نمایش بازه‌های بی‌کران معرفی می‌شوند.

توجه داشته باشید که ∞+ و ∞- نماد هستند و نشان‌دهندهٔ هیچ عدد حقیقی نیستند و اشاره به نقطهٔ خاصی روی محور اعداد حقیقی ندارند. استفاده از این نمادها در بازه‌ها به معنای بی‌کرانگی بازه از بالا یا پایین است. مثلاً اگر بخواهیم مجموعه همهٔ اعداد بیشتر از ۲، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۲\}$، را نشان دهیم، می‌توانیم آن را به صورت (∞ + و ۲] نمایش دهیم.

چون هر بازه، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد حقیقی است می‌توانید از اجتماع و اشتراک بازه‌ها نیز صحبت کنید و گاهی ممکن است این اعمال مجموعه‌ای مجدداً یک بازه ایجاد کند. همچنین می‌توانید از نماد (∞ + , ∞-) برای نمایش کل مجموعهٔ اعداد حقیقی برای هنرجویان قوی‌تر استفاده نمایید.

# بخش ۲: نمادگذاری تابع‌ها

## اهداف بخش

- آشنایی با نحوهٔ نام‌گذاری تابع‌ها و دامنهٔ آنها
- آشنایی با مفهوم مقدار تابع در یک نقطه و بیان جبری قانون تابع از طریق یک متغیر
- درک مفهوم دامنهٔ یک تابع به عنوان مجموعهٔ مقادیر متغیر آن تابع
- درک تمایز بین مفهوم تابع و قانون تابع
- درک تفاوت تابع‌های با قانون یکسان و دامنه‌های مختلف

**واژه‌های کلیدی:**

متغیر، دامنهٔ تابع، مقدار تابع

## نگاه کلی به بخش

پس از درک مفهوم تابع برای بررسی جزئیات این مفهوم نیازمند نام‌گذاری اجزای مفهوم تابع هستیم تا بتوانیم با سهولت در مورد آنها صحبت کنیم. به همین دلیل شیوهٔ نام‌گذاری خود تابع، دامنهٔ آن و مقادیر تابع به کمک متغیرها مطرح شده‌اند. در این بخش برای داشتن یک تصویر ذهنی بهتر از ماهیت تابع، به طور غیرمستقیم به نمایش فلشی تابع در یک مثال خاص اشاره شده است. ولی کار با چنین نمایشی از اهداف کتاب نیست. دبیران در صورت نیاز می‌توانند برای کمک به درک مفهوم تابع به عنوان یک عملگر عمل‌کننده روی بعضی مقادیر و ایجاد مقادیری دیگر، از این نمایش استفاده کنند. این نمایش برای توصیف توابع دلخواه بسیار مفید است. از آنجا که در این کتاب فقط با توابع با متغیر عددی و مقادیر عددی سر وکار خواهیم داشت از این نمایش استفاده‌ای نکردیم.

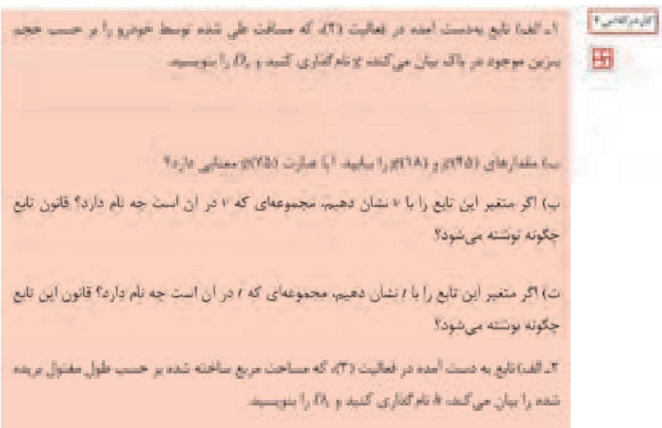
**اشتباه رایج:**

در ادامه از طریق مکالمه بین هنرجو و دبیر به اشتباهی رایج در مفهوم تابع پرداخته‌ایم. در این اشتباه، برای محاسبهٔ مقدار تابع در یک نقطه به قانون تابع نگاه می‌کنند که آیا در آن نقطه معنا دارد یا خیر در حالی که برای محاسبهٔ مقدار تابع در یک نقطه

باید به دامنهٔ تابع توجه کرد که آیا آن نقطه در دامنهٔ تابع می‌باشد یا خیر. این اشتباه ناشی از این بدفهمی است که تابع و قانون تابع یکسان گرفته می‌شوند در حالی که دامنهٔ تابع نیز بخشی از مفهوم تابع است که مستقل از قانون تابع تعیین می‌شود.
در این بخش با ارائهٔ مثال‌ها و مسئله‌ها و کار در کلاس‌های متنوع سعی شده است اهمیت دامنه و شیوه‌های تعیین آن مشخص شوند. در تعیین دامنه نکتهٔ اصلی در آن است که آن تابع قرار است چه پدیده‌ای را توصیف کند. محدودیت‌هایی که شرایط آن پدیده ایجاد می‌کند وضعیت دامنهٔ تابع را مشخص می‌کند. البته ارائهٔ تابع در جهان ریاضی هم انجام می‌شود که حتی اگر هیچ پدیدهٔ واقعی هم در کار نباشد این ارائه کنندهٔ تابع است که باید دامنهٔ تابع را مشخص کند نه اینکه خود به خود از روی قانون تابع، دامنهٔ آن مشخص باشد.

## ورود به مطلب:

هدف اصلی این بخش نام‌گذاری تابع‌ها است و شیوهٔ ورود به این گونه مباحث یادآوری ضرورت نام‌گذاری برای سخن گفتن است. مثلاً اگر در مورد چند تابع بخواهیم صحبت کنیم باید نامی داشته باشند تا به آنها اشاره کنیم و برای آنکه بتوانیم در مورد تفاوت‌های این توابع صحبت کنیم باید جزئیات عملیاتی که با توابع انجام می‌دهیم را بتوانیم بیان کنیم.
دربارهٔ اهمیت توجه به دامنهٔ تابع‌ها، می‌توانید از مثال‌های کتاب استفاده کنید یا مثال‌هایی شبیه آن را که متناسب هنرجویان کلاس باشد بیابید و مطرح کنید.


کار در کلاس ۴

۱ـ الف) تابع به‌دست آمده در فعالیت (۲) که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g نام‌گذاری کنید و $D_g$ را بنویسید.

ب) مقدارهای g(۴۵) و g(۶۸) را بیابید. آیا عبارت g(۷۵) معنایی دارد؟

پ) اگر متغیر این تابع را با v نشان دهیم، مجموعه‌ای که v در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

۲ـ الف) تابع به دست آمده در فعالیت (۳) که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتول بریده شده را بیان می‌کند، h نام‌گذاری کنید و $D_h$ را بنویسید.

ب) مقدارهای $h(5)$ و $h(12)$ را بیابید. آیا عبارت $h(200)$ معنایی دارد؟

پ) اگر متغیر این تابع را با $x$ نشان دهیم، مجموعه‌ای که $x$ در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر این تابع را با $k$ و متغیر این تابع را با $z$ نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که $z$ در آن است، مشخص کنید.

## اهداف :

■ نام‌گذاری تابع و بیان قانون تابع و دامنهٔ تابع از طریق متغیر، پرورش مهارت‌های استفاده از نمادهای ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی و بیان ایده‌ها، حل مسئله

۱ الف) $x$ را میزان مصرف بنزین بر حسب لیتر در نظر می‌گیریم.

$g(x) = (۶۰-x)\ ۱۲/۵$ $\qquad\qquad D_g = [۵\ ,\ ۶۰]$

ب) $g(۴۵) = (۶۰-۴۵)\ ۱۲/۵ = ۱۸۷/۵$

$g(۱۸) = (۶۰-۱۸)\ ۱۲/۵ = ۵۲۵$

خیر، $g(۷۵)$ معنی ندارد زیرا ۷۵ در دامنهٔ این تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود حجم بنزین موجود در باک ماشین است و ماشینی که باک آن حداکثر ۶۰ لیتر گنجایش دارد نمی‌تواند ۷۵ لیتر بنزین در خود داشته باشد.

پ) مجموعه‌ای که متغیر یک تابع در آن تغییر می‌کند همان دامنهٔ آن تابع است. اگر نام متغیر $v$ باشد قانون این تابع به صورت $g(v) = (۶۰ - v)۱۲/۵$ نوشته می‌شود.

ت) اگر نام متغیر $t$ باشد قانون این تابع به صورت $g(t) = (۶۰ - t)۱۲/۵$ نوشته می‌شود و مجموعه‌ای که $t$ در آن تغییر می‌کند دامنهٔ $g$ است.

۲ الف) $D_h = (۰\ ,۱۶۰]$ و قانون تابع با متغیر $t$ به صورت $h(t) = \frac{t^۲}{۱۶}$ است.

ب)

$$h(۵) = \frac{۵^۲}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \approx ۱/۵۷$$

$$h(۱۲) = \frac{۱۲^۲}{۱۶} = ۹$$

خیر $h(۲۰۰)$ معنی ندارد، زیرا ۲۰۰ در دامنهٔ تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود. طول مفتول بریده شده از یک مفتول ۱۶۰ سانتی‌متری است و نمی‌توان از چنین مفتولی یک مفتول ۲۰۰ سانتی‌متری برید.

پ) اگر نام متغیر تابع $x$ باشد قانون تابع به صورت $h(x) = \frac{x^۲}{۱۶}$ نوشته می‌شود و $x$ در دامنهٔ تابع $h$ تغییر می‌کند.

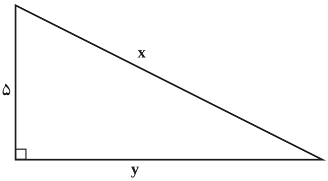
ت) در این حالت $\quad D_k = (۰\ ,۱۶۰]$ و $K(z) = \frac{z^۲}{۱۶}$ و $z \in D_k$

## مسئله‌ها

۱) طول یکی از ضلع‌های زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۵ سانتی‌متر است. مساحت این مثلث، وابسته به طول وتر آن است. دامنه و قانون تابعی را مشخص کنید که مساحت این مثلث را برحسب طول وتر آن بیان می‌کند. برای این تابع و متغیر آن نامی انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود، به زبان ریاضی بنویسید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی)




$$x^{۲} = ۲۵ + y^{۲} \Rightarrow y = \sqrt{x^{۲} - ۲۵}$$

$$S = \frac{۵y}{۲} = \frac{۵\sqrt{x^{۲} - ۲۵}}{۲}$$

چون وتر از ضلع‌های زاویهٔ قائمه باید بزرگ‌تر باشد، پس: $x > ۵$. یعنی $D_s=(۵\ ,\ +\infty)$.

حالا اگر متغیراین تابع را به جای $x$، $l$ بنامیم و قانون تابع مساحت مثلث را $f$ بنامیم، داریم:

$$f(l) = \frac{۵\sqrt{l^{۲} - ۲۵}}{۲} \qquad D_f = (۵\ ,\ +\infty)$$

و اگر متغیراین تابع را با $u$ نشان دهیم و تابع مساحت را با $h$ نشان دهیم، داریم:

$$h(u) = \frac{۵\sqrt{u^{۲} - ۲۵}}{۲} \qquad D_h = (۵\ ,\ +\infty)$$

۲) یک باغ میوه به مساحت ۱۰هکتار در نظر بگیرید. یک کارگر در یک روز می‌تواند ۱۰۰مترمربع از این باغ را میوه‌چینی کند.

الف) یک کارگر در چند روز تمام میوه‌های باغ را می‌چیند؟ دو کارگر در چند روز کار میوه‌چینی را تمام خواهند کرد؟

ب) آیا تعداد روزهای لازم برای چیدن تمام میوه‌های این باغ تابعی از تعداد کارگران است؟ چرا؟ قانون این تابع چیست؟ اگر حداکثر ۳۵ نفر کارگر همزمان قادر به کار میوه‌چینی باشند، دامنه این تابع چیست؟

پ) اگر این تابع را $g$ بنامیم، مقادیر $g(۵)$ و $g(۳۰)$ را به‌دست آورید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

ت) آیا $g(\frac{۱}{۲})$ و $g(۴۰)$ معنایی دارند؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

الف) ابتدا مساحت زمین را بر حسب مترمربع به‌دست می‌آوریم.

$۱۰ \times ۱۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰\ m^{۲}$

$۱۰۰۰۰۰ \div ۱۰۰ = ۱۰۰۰$ روز

یک کارگر در ۱۰۰۰ روز میوه‌چینی را کامل می‌کند و دو کارگر در ۵۰۰ روز میوه‌چینی را کامل می‌کنند.

ب) بله تعداد روزهای لازم برای کامل شدن میوه‌چینی تابعی از تعداد کارگران است، زیرا با مشخص شدن تعداد کارگران تعداد روزهای مورد نیاز دقیقاً مشخص خواهد شد و اگر تعداد کارگران $x$ باشد تعداد روزها به صورت $\frac{۱۰۰۰}{x}$ است.

دامنهٔ این تابع با توجه به اینکه حداکثر تعداد ممکن برای کارگران ۳۵ نفر است، مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۳۵\}$ است.

پ) $g(x)=\frac{۱۰۰۰}{x}$

تعداد روزهایی که ۵ کارگر میوه‌چینی را کامل می‌کنند: $g(۵)=۲۰۰$

تعداد روزهایی که ۳۰ کارگر میوه‌چینی را کامل می‌کنند حدود ۳۳/۳ روز $=\frac{۱۰۰۰}{۳۰}=g(۳۰)$

ت) خیر زیرا $x$ نمایش تعداد کارگر است و نصف کارگر بی‌معنی است.

$g(۴۰)$ بی‌معناست زیرا با توجه به دامنه حداکثر ۳۵ کارگر می‌توانند کار کنند.

۳) کرایهٔ تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیهٔ تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر طی شده ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را که کرایهٔ تاکسی را برحسب مسافت طی شده بیان می‌کند به دست آورید. با توجه به اینکه تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند دامنهٔ این تابع را مشخص کنید. برای این تابع و متغیر آن نامی انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نامهای انتخابی خود بیان کنید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

فرض مسئله به معنای آن است که به ازای هر ۲ متر، ۱ تومان کرایه دریافت می‌شود. مسافت طی شده را بر حسب متر و کرایه را بر حسب تومان در نظر می‌گیریم. اگر متغیر این تابع را با $k$ و خود تابع را با $x$ نشان دهیم طول مسافت طی شده برحسب متر خواهد بود و داریم:

$$k(x)=-x+۶۰۰ \qquad D_k=[۰,۵۰۰۰۰۰]$$

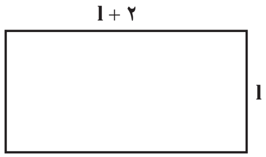
اگر متغیر را با $l$ و تابع را با $f$ نشان دهیم

$$f(l)=\frac{۱}{۲}l+۶۰۰ \qquad D_f=[۰,۵۰۰۰۰۰]$$

۴) مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۲ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را $g$ بنامید و متغیر آن را با $l$ نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا $g(-1)$ معنایی دارد؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال، ارتباطات کلامی (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)




$g(l)= l\,(l+۲)$ $\qquad$ $D_g =(۰\,,+\infty)$

خیر $g$ (۱-) معنی ندارد زیرا طول یک پاره خط (عرض) نمی‌تواند منفی باشد.

۵) سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر زمان را بر حسب ثانیه با $t$ و ارتفاع از سطح زمین را با متر اندازه‌گیری کنیم و با $h$ نشان دهیم و لحظهٔ رها کردن سنگ لحظهٔ صفر باشد، قانون این تابع به‌صورت $h(t) = -۵t^۲ + ۲۵$ است.

الف) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

ب) مقدارهای $h(۱)$ و $h(۲)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

پ) آیا $h(۳)$ و $h(-۱)$ معنایی دارند؟ چرا؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

الف) قانون این تابع تا زمانی اعتبار دارد که سنگ به زمین برسد و بعد از آن اعتبار ندارد. رسیدن سنگ به زمین در زمانی رخ می‌دهد که $h=۰$ و با حل معادلهٔ $h = -۵t^۲ + ۲۵ = ۰$ دیده می‌شود که زمان رسیدن سنگ به زمین در لحظهٔ $t = \sqrt{۵}$ است. پس $D_h = [۰, \sqrt{۵}\,]$.

ب) $h(۱) = -۵(۱)^۲+۲۵=۲۰$ و $h(۲) = -۵(۲)^۲+۲۵ = ۵$. یعنی در پایان ۱ ثانیه سنگ در ارتفاع ۲۰ متری و در پایان ۲ ثانیه سنگ در ارتفاع ۵ متری از زمین قرار دارد.

پ) هیچ معنایی ندارند زیرا این اعداد در دامنهٔ تابع نیستند و اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم دیده می‌شود شروع حرکت از لحظهٔ صفر به بعد است و قبل از صفر چنین حرکتی وجود ندارد و همچنین در لحظهٔ $\sqrt{۵}$ حرکت خاتمه می‌یابد و بعد از آن، قانون تابع اعتباری ندارد.

# بخش ۳: نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

## اهداف بخش

- آشنایی با جدول تغییرات تابع
- آشنایی با نمودار تابع
- کسب مهارت در رسم جدول مقادیر تابع
- کسب مهارت در رسم نمودار تابع از روی جدول
- تشخیص رفتار تابع از روی جدول و نمودار
- درک رابطهٔ بین نمودار تابع و جدول مقادیر تابع

**نگاه کلی به بخش:**

در این بخش با طرح یک مسئلهٔ واقعی (تغییرات قیمت سکه در هفته‌های مختلف) هنرجو برای درک عمیق‌تری از تابع که ممکن است ضابطه یا فرمولی نداشته باشد آماده می‌شود. در این مسئله که در طی یک مکالمه مورد بحث قرار می‌گیرد همچنین، نمایش جدولی تابع‌ها نیز مطرح خواهند شد. در این قسمت همزمان دو هدف دنبال می‌شود که یکی درک و پذیرش تابع‌هایی که فرمول ندارند و یکی دیدن جدول تغییرات یک تابع است.

در مثال‌های این قسمت دامنهٔ برخی تابع‌ها گسسته است. (به فعالیتی که در مورد عدد پی و رقم‌های اعشاری آن در کتاب کار شده است، رجوع کنید. )

البته نمایش جدولی یک تابع، غیرمستقیم در فعالیت‌ها به عنوان جدول نمایش رابطهٔ بین دو کمیت مطرح شده است که در این بخش به عنوان جدول تغییرات تابع یا نمایش جدولی تابع رسماً معرفی می‌شوند.

**ورود به مطلب:**

برای ورود به نمایش جدولی و نموداری تابع‌ها و اهمیت آن می‌توانید تابع قابل توجهی را مطرح کنید و سؤالاتی را در مورد رفتار آن، مانند کم یا زیاد شدن مقادیر تابع مطرح کنید که از روی قانون تابع نتوان به سادگی پاسخ آنها را یافت. سپس با یافتن نقطه به نقطه مقادیر تابع و یادداشت این مقادیر در یک جدول هم به

سؤال‌های مطرح شده پاسخ دهید و هم غیر مستقیم جدول یک تابع را به‌دست آورده باشید و آن را به‌عنوان نمایش جدولی تابع معرفی کنید. نمایش نموداری نیز مستقیماً از نمایش جدولی ساخته می‌شود که یک درک بصری و کامل از مقادیر یک جدول به‌دست می‌دهد.

کار در کلاس ۵

۱) برای تابع $f(t)=\frac{1}{t}$ با دامنهٔ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ جدول مناسبی رسم کنید و با رسم نمودار آن، چگونگی تغییرات مقادیر تابع را توضیح دهید.

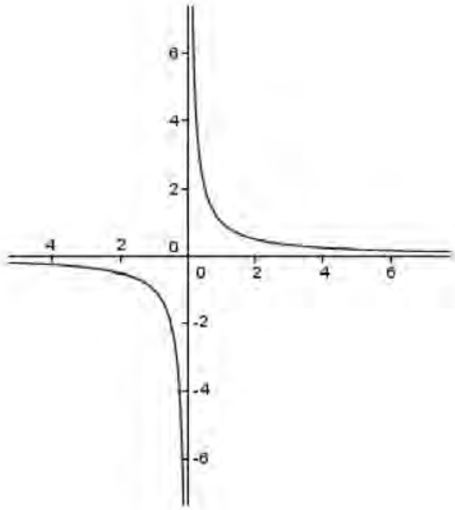
۲) برای تابع $g(t)=t-t^2$ با دامنه $[-1, 2]$ جدول مناسبی رسم کنید و با رسم نمودار آن، چگونگی تغییرات مقادیر تابع را توضیح دهید.

## اهداف :

- پرورش مهارت‌های نمایش مفاهیم با ارائه‌های مختلف، برقراری ارتباطات کلامی

۱

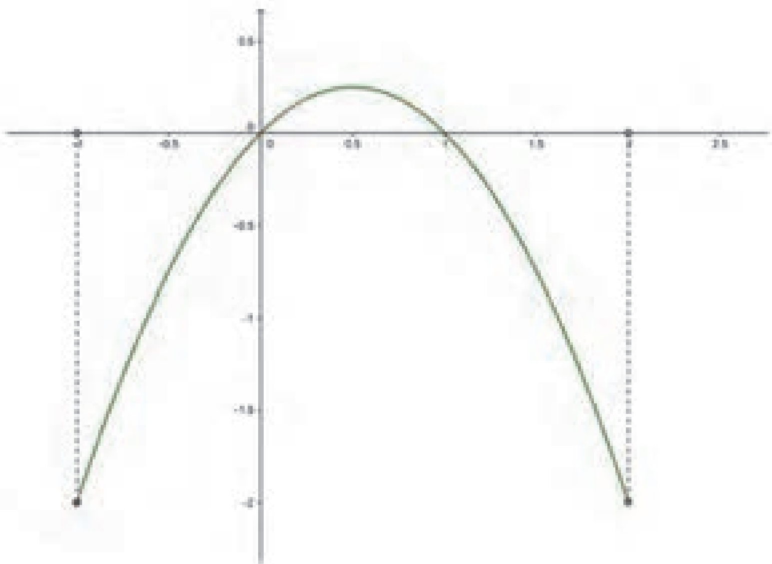
| $t$ | $-\infty$ | ← | ... | $-۱۰$ | $-۰/۱$ | $-۰/۰۱$ | → | ۰ | ← | ۰/۰۱ | ۰/۱ | ۱۰ | ... | → | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{۱}{t}$ | ۰ | ← | ... | $-۰/۱$ | $-۱۰$ | $-۱۰۰$ | → | $-\infty$ $+\infty$ | ← | ۱۰۰ | ۱۰ | ۰/۱ | ... | → | ۰ |



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که مقادیر این تابع در بازهٔ $(-\infty, ۰)$ با بزرگ شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن مقدار متغیر به صفر، مقدار تابع از هر عددی کوچک‌تر می‌شود که به اصطلاح گوییم مقدار تابع به منفی بی‌نهایت می‌رود و هر چه مقدار متغیر از هر عددی کوچک‌تر شود (در اعداد منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ شود)، مقدار تابع به صفر نزدیک‌تر می‌شود و همچنین در بازهٔ $(۰, +\infty)$ با نزدیک شدن مقادیر متغیر به صفر مقدار تابع از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این حالت گوییم مقدار تابع به بی‌نهایت می‌رود و هرچه مقدار متغیر بزرگ‌تر شود مقدار تابع به صفر نزدیک‌تر می‌شود.

۲

| $t$ | ۱- | $-\frac{۱}{۲}$ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | ۱ | $\frac{۳}{۲}$ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(t)$ | ۲- | $-\frac{۳}{۴}$ | ۰ | $\frac{۱}{۴}$ | ۰ | $\frac{-۳}{۴}$ | ۲- |



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که مقادیر تابع در بازهٔ $[-1, \frac{1}{2}]$ با بزرگ شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن مقدار متغیر به $\frac{1}{2}$، مقدار تابع بزرگ می‌شود و به $\frac{1}{4}$ نزدیک می شود و همچنین در بازهٔ $[\frac{1}{2}, 2]$ با بزرگ شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن به ۲ مقدار تابع کوچک‌تر شده و به ۲- نزدیک می‌شود.

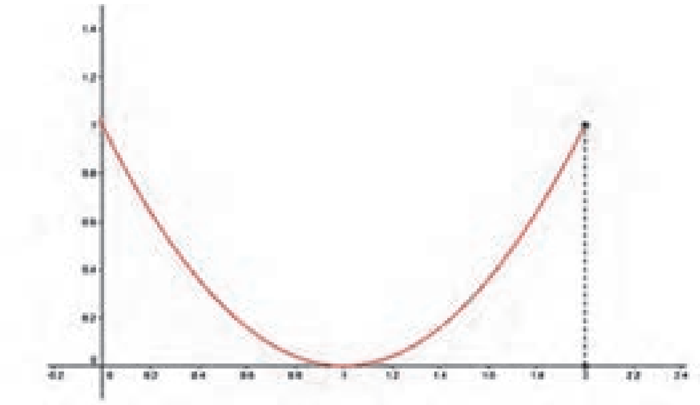
## مسئله‌ها

۱) تابع $f$ را با قانون $f(x) = (x-1)^2$ و دامنهٔ $[0, 2]$ در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

**مهارت‌ها و فرایندها:**

■ حل مسئله، باز نمایی‌های چندگانه

| $x$ | ۰ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | ۱ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{4}$ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ۱ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ | ۰ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{9}{16}$ | ۱ |



از روی نمودار دیده می‌شود که با تغییر مقدار متغیر از ۰ به ۱ مقدار تابع کم می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود و همچنین با تغییر مقدار متغیر از ۱ به ۲ مقدار تابع زیاد می‌شود و به ۱ نزدیک می‌شود.

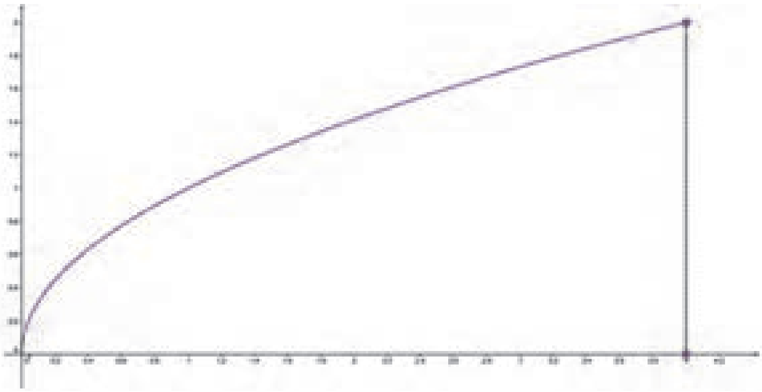
۲) تابع $g$ را با قانون $g(t)=\sqrt{t}$ و دامنهٔ $[۰ , ۴]$ در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، باز نمایی‌های چندگانه

| $t$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(t)$ | ۰ | ۱ | $\sqrt{۲}$ | $\sqrt{۳}$ | ۲ |

از روی نمودار دیده می‌شود که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه، مقدار تابع نیز بزرگ می‌شود.

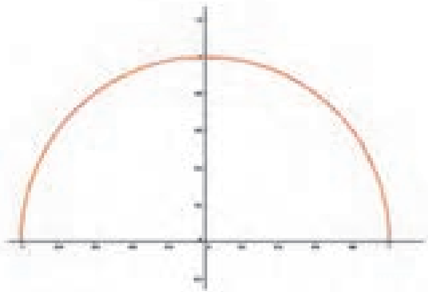


۳) تابع $f$ را با قانون $f(x)=\sqrt{۱-x^2}$ و دامنهٔ $[-۱ , ۱]$ در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه

| $X$ | $-۱$ | $\frac{-۱}{۲}$ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | ۱ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(X)$ | ۰ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ۰ |



نمودار واقعاً مربوط به یک نیم‌دایره است ولی با رسم تقریبی می‌توان شبیه نیم‌دایره بودن آن را به‌دست آورد.

۴) در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آنها ۲ واحد بیشتر از طول یکی از اضلاع آن است، مساحت آنها تابعی از طول وتر است.
الف) دامنه و قانون این تابع را به‌دست آورید.
ب) جدول مناسبی برای این تابع رسم کنید و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید و رفتار این تابع را توضیح دهید.

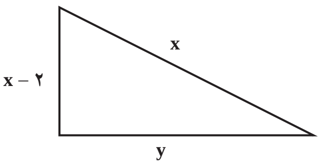
## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، باز نمایی‌های چندگانه، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

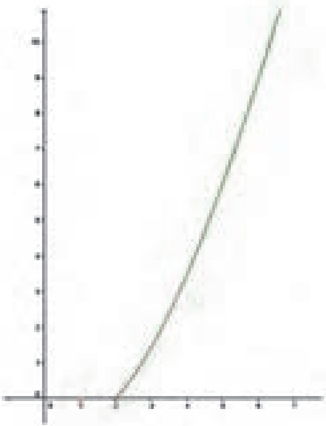
$$x^{۲} = (x-۲)^{۲} + y^{۲} \rightarrow y = \sqrt{۴x-۴} \Rightarrow f(x) = s = \frac{(x-۲)y}{۲} = \frac{(x-۲)\sqrt{۴x-۴}}{۲}$$

$$\Rightarrow S = (x-۲)\sqrt{x-۱}$$

دامنهٔ این تابع کلیه مقادیر ممکن برای طول وتر است که حداقل ۲ خواهد بود.
$D_f=(۲,+\infty)$




| $x$ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ......... | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ۰ | $\sqrt{۲}$ | $۲\sqrt{۳}$ | ۶ | ......... | $+\infty$ |



این جدول و نمودار  نشان می‌دهند که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه‌اش، مقدار تابع نیز بزرگ می‌شود تا جایی که اگر مقدار متغیر بسیار بزرگ شود مقدار تابع نیز بسیار بزرگ و از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود که به اصطلاح گوییم $f(x)$ به بی‌نهایت می‌رود. یعنی با بزرگ شدن وتر مساحت نیز بزرگ می‌شود.

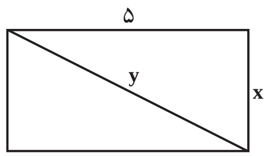
۵) در مستطیل‌هایی که طول یک ضلع آن ۵ واحد است، طول قطر مستطیل تابعی از طول ضلع دیگر مستطیل است.

الف) اگر مستطیل‌های با مساحت حداکثر ۱۰۰ واحد را در نظر بگیریم، دامنه و قانون این تابع را مشخص کنید.

ب) جدول مناسبی برای این تابع رسم کنید و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید و رفتار این تابع را توضیح دهید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، باز نمایی‌های چندگانه، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)




الف) ابتدا قانون این تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$y^۲ = x^۲ + ۲۵ \Rightarrow y = \sqrt{x^۲ + ۲۵} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^۲ + ۲۵}$$

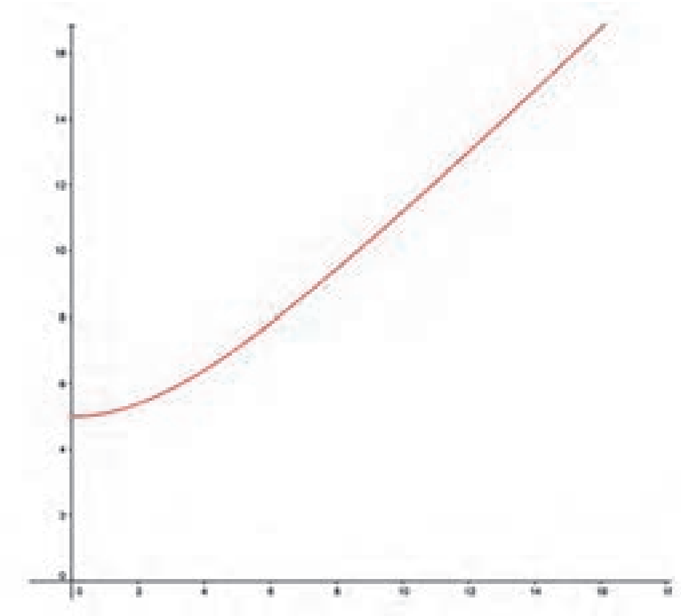
از آنجا که مستطیل‌های مورد نظر حداکثر ۱۰۰ واحد مساحت دارند باید داشته باشیم:

$$S = ۵x \le ۱۰۰ \Rightarrow x \le ۲۰ \Rightarrow ۰ < x \le ۲۰$$

پس دامنهٔ این تابع بازهٔ $(۰,۲۰]$ است.

ب)

| $x$ | ۰ | ۱ | ۴ | ۸ | ......... | ۲۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ۵ | $\sqrt{۲۶}$ | $\sqrt{۴۱}$ | $\sqrt{۸۹}$ | ....... | $\sqrt{۴۲۵}$ |



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه‌اش، مقدار تابع یعنی طول قطر نیز افزایش می‌یابد.

# بخش پنجم: نمودار برخی تابع‌های خاص

## اهداف بخش

- آشنایی با تابع‌های چندجمله‌ای و نمایش جبری و دامنهٔ آنها
- تشخیص تغییرات نمودار تابع $y=ax+b$ به ازای تغییرات $a$ و $b$ به کمک نرم‌افزار جئوجبرا
- آشنایی با نمودار تابع‌های درجهٔ دوم به کمک نرم‌افزار جئوجبرا
- حل معادلهٔ درجهٔ دوم به کمک نمودار تابع درجهٔ دوم
- تشخیص تابع‌های مساوی

**واژه‌های کلیدی:**

تابع چند جمله‌ای، تابع خطی، تابع ثابت، تابع درجهٔ دوم، نمودار تابع

## نگاه کلی به بخش

پس از شناخت مفهوم تابع و نمایش‌های آن لازم است تابع‌هایی که در عمل بسیار با آنها برخورد می‌کنیم را بشناسیم تا در به‌کارگیری تابع‌ها مهارت کافی داشته باشیم. در این بخش به‌دلیل پرکاربرد بودن تابع‌های چندجمله‌ای، خطی، درجهٔ دوم، ثابت در توصیف پدیده‌های طبیعی، چگونگی این تابع‌ها را از لحاظ نموداری و ضابطه بررسی می‌کنیم.

**ورود به مطلب:**

برای شروع این بخش می‌توانیم با این مثال شروع کنیم که پس از شناخت موجوداتی به نام حیوان لازم است برای شناخت بهتر، آنها را دسته‌بندی کنیم و انواعی از آنها را که بیشتر با آنها برخورد می‌کنیم با جزئیات بیشتری بشناسیم. در مورد تابع‌ها که مفهوم کلی آنها را شناختیم باید انواعی از آنها را که بیشتر با آنها برخورد می‌کنیم دسته‌بندی کنیم و آنها را با جزئیات بیشتری بشناسیم.

کار در کلاس ۶

دو تابع چند جمله‌ای مثال بزنید.

**اهداف:**

- پرورش تفکرواگرا

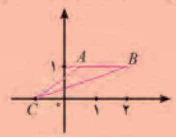
**مثال:** $y = x^۲ - ۵x$ و $y = x^۳ + ۵x - ۱$

در ادامه به دستهٔ خاصی از توابع چندجمله‌ای که توابع درجهٔ اول یا همان توابع خطی هستند پرداخته می‌شود. هنرجویان قبلاً با این توابع به عنوان رابطه‌های خطی آشنا شده‌اند و در اینجا از نقطه نظر یک تابع به آنها نگاه خواهند کرد. از میان آنها تابع ثابت ممکن است چالش‌هایی به همراه داشته باشد که دربارهٔ آن بحث مستقلی انجام شده است.

## فعالیت آموزشی

فعالیت ۲

در زیر پاره‌خط $AB$ به طول $a$ به موازات محور $x$ها رسم شده است. فاصلهٔ پاره‌خط $AB$ تا محور $x$ها برابر ۱ است. نقطه $C$ به طول $x$ را روی محور اعداد در نظر می‌گیریم. مساحت مثلث $ABC$ تابعی از طول نقطهٔ $C$ است. این تابع را $f$ بنامید.




۱) مقدارهای $f(۰)$ و $f(۵)$ و $f(-۸)$ را تعیین کنید.

۲) جدول این تابع را رسم کنید؛ قانون آن را مشخص نمایید و نمودار آن را رسم کنید.

**اهداف موضوعی:**

- درک مفهوم تابع ثابت
- آشنایی با قانون توابع ثابت
- آشنایی با نمودار توابع ثابت

**مهارت‌ها و فرایندها:**

- پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

۱) $f(-۸) = f(۵) = f(۰) = \frac{a}{۲}$

۲) اگر طول نقطهٔ $C$ را $x$ در نظر بگیریم داریم :

| $x$ | −۲ | −۱ | ۰ | ۱ | ......... | ۲۰ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f(x)$ | $\frac{a}{۲}$ | $\frac{a}{۲}$ | — | $\frac{a}{۲}$ | .......... | $\frac{a}{۲}$ |

قانون این تابع به‌صورت $f(x) = \frac{a}{۲}$ می‌باشد. نمودار این تابع خطی افقی به فاصله $\frac{a}{۲}$ از محور طول‌ها است.

از طریق این فعالیت باید برای هنرجویان توضیح داده شود که مقدار این تابع در همهٔ نقاط با هم مساوی است و این گونه توابع را تابع ثابت می‌نامند.

## فعالیت آموزشی

با استفاده از جئوجبرا، نمودار تابع‌های خطی $y = ax + b$ را به ازای مقادیر مختلفی از $a$ و $b$ رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (چگونگی استفاده از جئوجبرا در صفحهٔ بعد توضیح داده شده است.)

۱) با ثابت نگه داشتن $a$ و تغییر مقادیر $b$، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به‌دست آمده، نسبت به هم چگونه است؟

۲) با تغییر مقادیر $a$، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ (مقادیر مثبت و منفی را برای $a$ در نظر بگیرید.)

۳) علامت $a$ چه تأثیری بر نمودار تابع‌های خطی دارد؟ وضعیت زاویهٔ خط با محور طول‌ها را توصیف کنید.

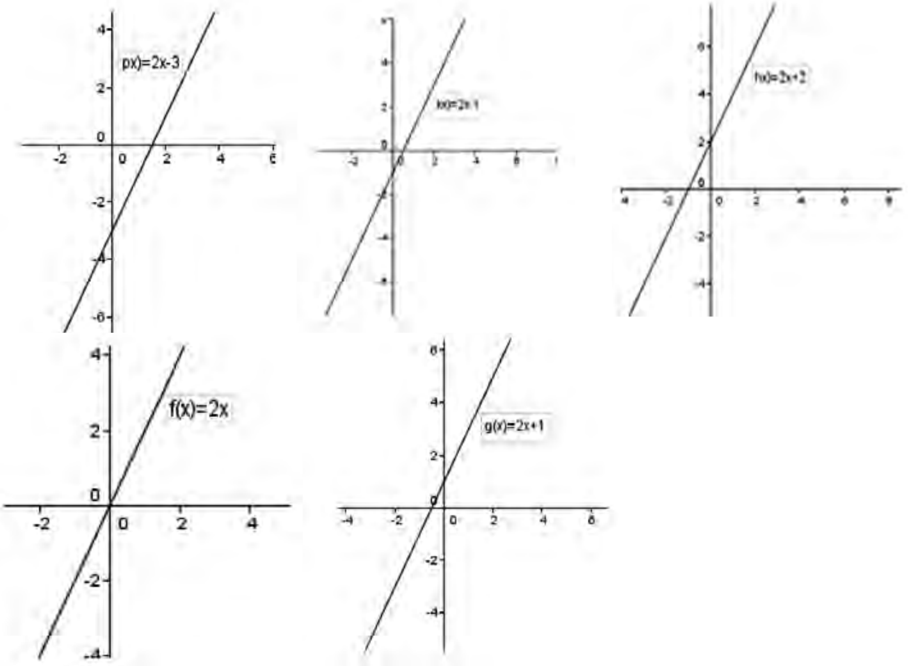
۴) آیا هر خطی در صفحه، نمودار یک تابع خطی است؟

### اهداف موضوعی:

- آشنایی با نمودار توابع خطی در حالت‌های مختلف
- درک رابطهٔ بین تغییرات $a$ و تغییرات نمودار توابع $y = ax + b$ با ثابت بودن $b$
- درک رابطهٔ بین تغییرات $b$ و تغییرات نمودار توابع $y = ax + b$ با ثابت بودن $a$
- تشخیص تفاوت خط‌های عمود بر محور طول‌ها با سایر خط‌ها

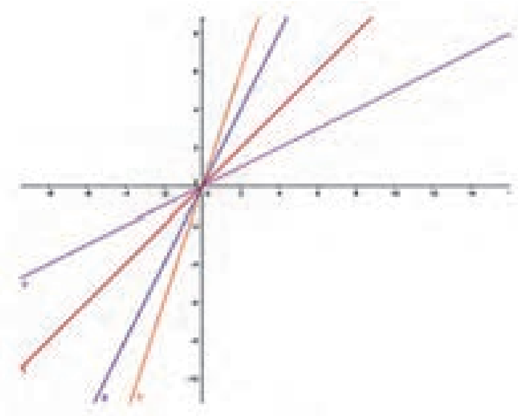
### مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، مقایسه کردن، ارتباطات کلامی، کار با نرم‌افزار

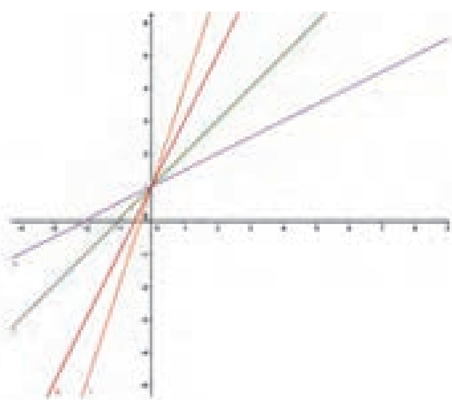


۱ نمودار توابع $f(x)=2x$ و $g(x)=2x+1$ و $h(x)=2x+2$ و $k(x)=2x-1$ و $p(x)=2x-3$ در صفحهٔ قبل رسم شده‌اند: در این توابع مقدار $a$ ثابت و مقدار $b$ تغییر می‌کند. دیده می‌شود نمودار این توابع به موازات یکدیگر رسم شده‌اند. این خط‌ها همگی با هم موازیند و فقط محل تلاقی نمودار آنها با محور عرض‌ها تغییر می‌کند.

۲ نمودار تابع $f(x) = ax$ به ازای مقادیر مختلف $a$ در زیر رسم شده‌اند. دیده می‌شود که تمام این خط‌ها از مبدأ می‌گذرند و با تغییر $a$ این خط‌ها حول مبدأ دوران می‌کنند و تقریباً کلیهٔ خط‌های گذرنده از مبدأ را می‌سازند.



به‌عنوان مثالی دیگر، نمودار تابع $f(x) = ax + 1$ به ازای مقادیر مختلف $a$ در زیر رسم شده‌اند. دیده می‌شود که تمام این خط‌ها از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌گذرند و با تغییر $a$ این خط‌ها حول این نقطه دوران می‌کنند و تقریباً کلیهٔ خط‌های گذرنده از این نقطه را می‌سازند.



۳ اگر $a$ مثبت باشد نمودار تابع با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ تند می‌سازد و اگر $a$ منفی باشد خط نمودار تابع با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ باز می‌سازد.
صفر بودن $a$ نیز باعث می‌شود خط نمودار تابع، با محور طول‌ها موازی شود.

۴ خیر، خط‌هایی که بر محور طول‌ها عمودند نمی‌توانند نمودار یک تابع باشند.
دبیران در صورت داشتن وقت و آمادگی هنرجویان می‌توانند این مسئله که نمودار توابع با چه ویژگی مهمی تشخیص داده می‌شوند را مطرح کنند. نمودار یک تابع به گونه‌ای است که هر خط عمود بر محور طول‌ها حداکثر در یک نقطه آن شکل را قطع می‌کند، زیرا به ازای هر مقدار در دامنهٔ تابع فقط یک مقدار برای تابع داریم. برعکس هر شکلی در صفحه با این ویژگی، حتماً نمودار یک تابع است که دامنهٔ آن از تصویر عمودی آن شکل روی محور طول‌ها به‌دست می‌آید و به ازای هر مقدار در دامنه برای یافتن مقدار تابع یک خط عمود بر محور طول‌ها در آن نقطه رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با شکل را می‌یابیم آن را روی محور عرض‌ها تصویر می‌کنیم تا مقدار تابع به‌دست آید.
در ادامه توابع درجهٔ دوم مطرح می‌شوند.

## فعالیت آموزشی

به کمک جئوجبرا، نمودار تابع $y=x^2$ را رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (در هر مرحله یک لغزنده تعریف کنید.)

۱) نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=x^2+c$ را به ازای مقادیر مختلف $c$ در لغزندهٔ $c$ رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=x^2+c$ را با نمودار تابع $y=x^2$ توصیف کنید.

۲) نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=(x-b)^2$ را به ازای مقادیر مختلف $b$ در لغزندهٔ $b$ رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=x^2$ را با نمودار تابع $y=(x-b)^2$ توصیف کنید.

۳) نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=ax^2$ را به ازای مقادیر مختلف مثبت برای $a$ رسم کنید. با تغییر $a$، وضعیت نمودار $y=ax^2$ چه تغییری نسبت به نمودار $y=x^2$ پیدا می‌کند؟

۴) با تغییر علامت $a$ از مثبت به منفی، چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

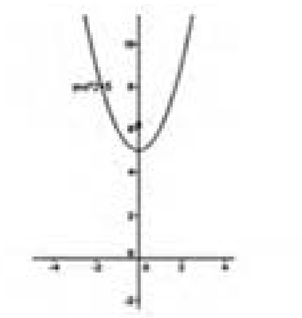
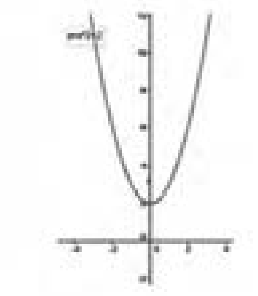
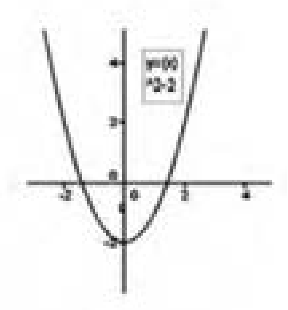
### اهداف موضوعی:

- تشخیص نمودار توابع درجهٔ دوم
- تشخیص تأثیر تغییر ضرایب بر رفتار تابع

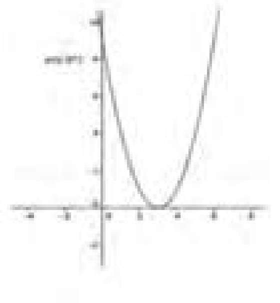
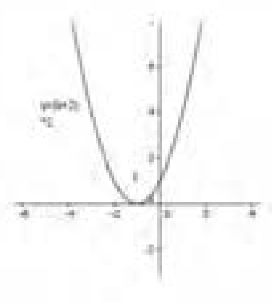
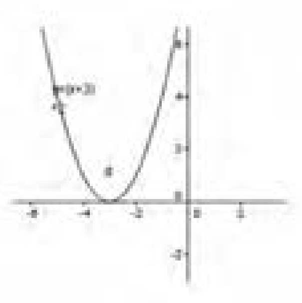
### مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، مقایسه کردن، کار با نرم‌افزار، ارتباطات کلامی

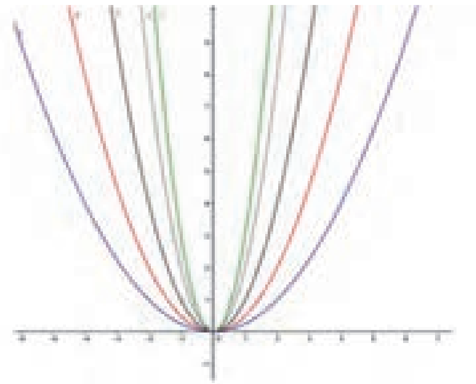
**۱** با رسم نمودار تابع $y = x^{2}+c$ به ازای مقادیر مختلف $c$ مشاهده می‌شود که نمودار تابع $y = x^{2}$ در راستای محور عرض‌ها جا به‌جا می‌شود. این جابه‌جایی در صورتی که مقدار $c$ مثبت باشد رو به‌بالا و در صورتی که $c$ منفی باشد رو به‌پایین خواهد بود.

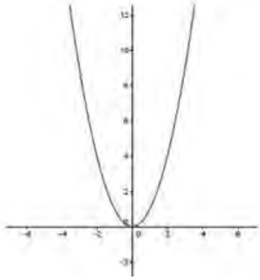
**۲** با رسم نمودار تابع $y = (x - b)^{2}$، نمودار تابع $y = x^{2}$ در راستای محور طول‌ها جابه‌جا می‌شود. این جا به‌جایی در صورتی که مقدار $b$ مثبت باشد رو به‌سمت راست و در صورتی که $b$ منفی باشد رو به‌سمت چپ خواهد بود.

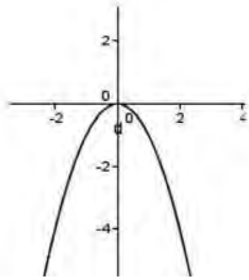




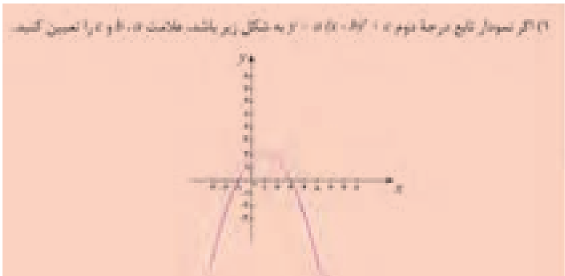
**۳** با رسم نمودار تابع $y = ax^{2}$ به ازای مقادیر مختلف $a$، دهانه نمودار تابع $y = x^{2}$ بازتر یا بسته‌تر می‌شود. هرچه مقدار $a$ بزرگ‌ترشود دهانهٔ نمودار بسته‌تر و هر چه مقدار $a$ کوچک‌تر شود، دهانه نمودار بازتر می‌شود و همهٔ نمودارها از مبدأ می‌گذرند.

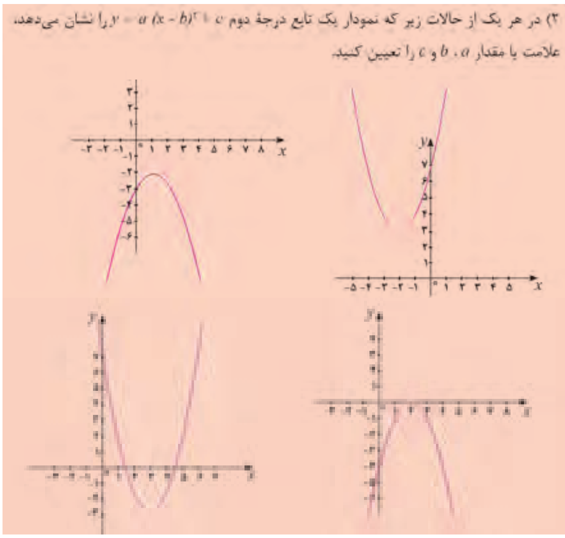


۴ دهانهٔ نمودار تابع $y = ax^2$ در صورتی که مقدار $a$ مثبت باشد رو به بالا است و اگر $a$ منفی باشد دهانهٔ نمودار رو به پایین می‌شود.






۲) اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $y = a(x-b)^2 + c$ به شکل زیر باشد، علامت $a$، $b$ و $c$ را تعیین کنید.


۳) در هر یک از حالات زیر که نمودار یک تابع درجهٔ دوم $y = a(x-b)^2 + c$ را نشان می‌دهد، علامت یا مقدار $a$، $b$ و $c$ را تعیین کنید.

## اهداف :

تشخیص شکل کلی نمودار توابع درجهٔ دوم از روی علامت و مقدار عددی $a$ و $b$ و $c$

پرورش مهارت‌های نمایش مفهوم با ارائه‌های مختلف، برقراری پیوندها و اتصال‌ها (بین نمایش جبر و نمایش هندسی)

۱ $a$ منفی است زیرا دهانهٔ نمودار رو به پایین است. $b$ مثبت است زیرا نمودار به راست منتقل شده است. $c$ مثبت است زیرا در صورت منفی بودن همهٔ مقادیر تابع باید منفی شود در حالی‌که این تابع مقادیر مثبت هم دارد. از میزان انتقال به راست معلوم است که $b$=۱ و از میزان انتقال به بالا معلوم است که $c$=۲.

۲ الف) بنا به دلایلی که در ۱ گفته شد: $a$ مثبت و $b$ منفی و $c$ مثبت است.

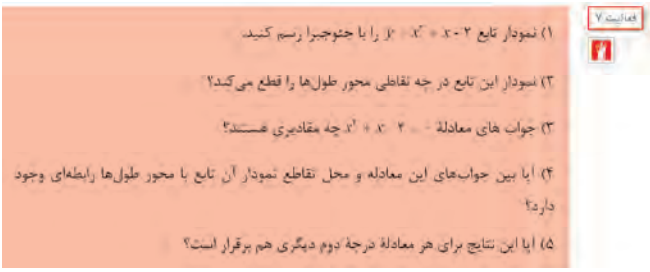
ب) $a$ منفی و $b$ مثبت و $c$ منفی است.

پ) $a$ منفی و $b$ مثبت و $c$ صفر است.

ت) $a$ مثبت و $b$ مثبت و $c$ منفی است.

در ادامه کاربردی از رسم نمودار توابع برای حل معادله‌ها مطرح شده است. این روش برای حل هر معادله‌ای به‌صورت $f(x)$ =۰ قابل به‌کار بردن است. اما در اینجا صرفاً برای حل معادله‌های درجهٔ دوم به‌کار گرفته شده است.

## فعالیت آموزشی


فعالیت ۷

۱) نمودار تابع $y = x^2 + x - 2$ را با جئوجبرا رسم کنید.

۲) نمودار این تابع در چه نقاطی محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

۳) جواب های معادلهٔ $x^2 + x - 2 = 0$ چه مقادیری هستند؟

۴) آیا بین جواب‌های این معادله و محل تقاطع نمودار آن تابع با محور طول‌ها رابطه‌ای وجود دارد؟

۵) آیا این نتایج برای هر معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری هم برقرار است؟

**اهداف موضوعی:**

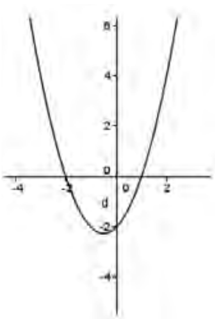
حل معادلهٔ درجهٔ دوم از طریق نمودار تابع درجهٔ دوم

- درک مفهوم جواب معادله
- درک رابطهٔ بین جواب‌های معادله و محل تقاطع نمودار تابع با محورها

**مهارت‌ها و فرایندها:**

حل مسئله، بازنمایی چندگانه، ارتباطات کلامی، استدلال کردن، تقسیم کردن

۱



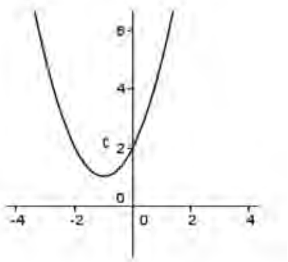
۲ نقاط برخورد به طول ۲- و ۱ هستند.

۳ $\Delta = b^{۲}-۴ac$ را به‌دست می‌آوریم $\Delta$ =۹ در نتیجه جواب‌های معادله به صورت $x=-۲$ و $x=۱$ است.

۴ بله جواب‌های این معادله دقیقاً طول همان نقاط برخورد نمودار آن تابع با محور طول‌ها است.

۵ بله، زیرا محل برخورد نمودار یک تابع $f$ با محور طول‌ها اگر در نقطهٔ $x$ صورت بگیرد این به معنای آن است که $f(x)=۰$. پس جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ همان طول محل برخورد نمودار تابع $f$ با محور طول‌ها است.

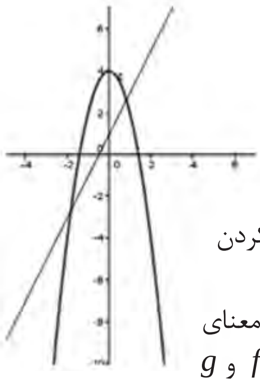
## مسئله‌ها



۱) نمودار تابع $y = x^{۲} + ۲x + ۲$ را در دامنهٔ $[-۴ ، ۴]$ رسم کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، پیوندها و اتصال‌ها



۲) نمودارهای دو تابع $y=۲x+۱$ و $y=-۲x^{۲}+۴$ را با جئوجبرا رسم کنید.

الف) این دو نمودار در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

ب) طول نقاط برخورد این دو نمودار، در چه معادله‌ای صدق می‌کنند؟

پ) محل برخورد این دو نمودار را از طریق حل یک معادله به دست آورید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه ، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن

الف) در دو نقطه نمودارها همدیگر را قطع کرده‌اند.

ب) اگر $x$ طول یک نقطهٔ برخورد نمودارهای دو تابع $f$ و $g$ باشد این به معنای آن است که $f(x)=g(x)$. پس طول نقاط برخورد نمودارهای دو تابع $f$ و $g$ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هستند. پس در اینجا معادله $-۲x^{۲}+۴=۲x+۱$ طول نقاط برخورد نمودارهای توابع $y=۲x+۱$ و $y=-۲x^{۲}+۴$ را به دست می‌دهد.

پ) معادله‌ای که جواب‌های آن طول نقاط برخورد را به‌دست می‌دهد به شکل $۲x^{۲}+۲x-۳=۰$ ساده می‌شود. پس به شکل زیر حل خواهد شد.

$$\Delta = b^{۲}-۴ac \Rightarrow \Delta = ۲۸ \Rightarrow x=\frac{-۲\pm\sqrt{\Delta}}{۴}=\frac{-۲\pm\sqrt{۲۸}}{۴} \Rightarrow x=\frac{-۲+\sqrt{۲۸}}{۴} \quad , \quad x=\frac{-۲-\sqrt{۲۸}}{۴}$$

۳) اگر توپی را به هوا پرتاب کنیم، ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با $h$ و زمان را با $t$ نشان دهیم، برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت $h = -5t^2 + 20t$ است.

الف) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

ب) با رسم نمودار این تابع، تعیین کنید که این توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

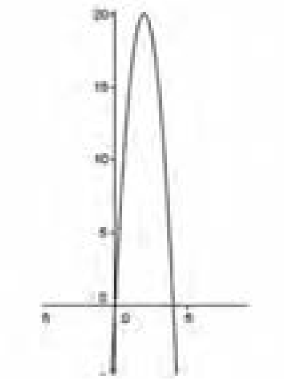
پ) در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ از لحاظ فیزیکی وضعیت تعداد جواب‌ها را تفسیر کنید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن

الف) این توپ از زمین به هوا می‌رود و دو باره به زمین برمی‌گردد. قانون این تابع فقط در این بازهٔ زمانی که توپ از سطح زمین به هوا می‌رود و به سطح زمین بازمی‌گردد اعتبار دارد. لحظاتی که توپ در سطح زمین است همان جواب‌های معادله $h = -5t^2 + 20t = 0$ است که ۰ و ۴ است. پس دامنهٔ این تابع بازهٔ $[0,4]$ است.

ب) با جئوجبرا نمودار تابع $h = -5t^2 + 20t$ را رسم می‌کنیم و دیده می‌شود که بیشترین مقدار ارتفاع توپ ۲۰ متر است.




پ) باید معادلهٔ $-5t^2 + 20t = 2$ را حل کنیم. با حل جبری این معادله داریم :

$t = \dfrac{-20 \pm \sqrt{360}}{-10} = \dfrac{10 \pm 3\sqrt{10}}{5}$. این معادله دو جواب در بازهٔ $[0,4]$ دارد.

یعنی توپ در دو لحظهٔ مختلف در ارتفاع ۲ متری قرار می‌گیرد، یکی هنگام بالا رفتن و یکی هنگام پایین آمدن.

مناسب است که این جواب‌ها را به طور نموداری با تقاطع نمودار بالا با خط افقی $y = 2$ نیز به‌دست آوریم و تفسیر کنیم.

## تاریخ مفهوم تابع

تابع از اواخر قرن شانزدهم به دنیای ریاضی وارد شد. مفهوم تابع در تشخیص ارتباط بین مقادیر چند کمیت با هم است. تا زمانی که مسئله‌ای برای انسان پیش نیامده باشد که حل آن، نیازمند شناخت ارتباط بین کمیت‌ها باشد، نیازی به مفهوم تابع نبوده است. اولین مسائلی که نیازمند مفهوم تابع بود توسط گالیله پیش آورده شد که به مطالعه حرکت اجسام و سقوط آزاد اجسام پرداخت. در این مسئله یافتن ارتباط بین زمان و مکان اجسام مطرح بود که امروزه تابع حرکت جسم نام دارد. همچنین دکارت در اوایل قرن هفدهم با ساختن هندسه تحلیلی، برای توصیف خطاها و خم‌ها به ارتباط بین مؤلفه‌های طول و عرض نقاط این شکل‌ها رسید که بیان صریح آنها نیازمند مفهوم تابع بود.

ریاضی در طول تاریخ خود، همواره با فیزیک و مسائل مربوط به محیط پیرامونی همراه و عجین بوده است و تا شروع قرن بیستم هر ریاضیدانی مفاهیم ریاضی را در قالب مفاهیم فیزیکی یا هندسی دنیای پیرامون خود می‌دیده است. اولین جاهایی که مفهوم تابع رخ می‌دهند، ارتباط بین کمیت‌های متغیر فیزیکی است، به همین خاطر، نگاه اولیه به تابع به صورت ارتباط بین دو کمیت در حال تغییر است که متغیر اصلی را متغیر مستقل و کمیت وابسته به آن را متغیر تابع می‌نامند. در این نگاه، مفهوم تابع بسیار فیزیکی است و کمیتی در کار است که در حال تغییر کردن است و اصطلاح «متغیر» نیز از همین جا به وجود می‌آید.

رسیدن به مفهوم تابع به عنوان یک شیئی مستقل و نام و نشان‌دار که هیچ پیشینه‌ای در ذهن کسی ندارد، کار آسانی نیست و ریاضیدان‌ها باید بسیار کار کنند تا به تعریفی درخور دست پیدا کنند. عملاً این فعالیت ریاضیدان‌ها از دورهٔ لایب‌نیتس و نیوتون تا اوائل قرن بیستم که تعریف امروزهٔ تابع به‌وجود آمد حدوداً سه و نیم قرن ادامه یافت. در این مدت هر کس برای خود تعریفی و برداشتی از تابع داشت و پس از پالایش‌های بسیار، ما امروز تعریف شسته رُفته‌ای از تابع در اختیار داریم.

در زمان گالیله و دکارت، تنها اشیای شناخته شده در ریاضی، اعداد، نقاط، خط، صفحهٔ هندسی و اشیای ساخته شده از طریق آنها بوده‌اند. حتی چیزی به نام مجموعهٔ اعداد به عنوان یک شیئ ریاضی مورد قبول نبود. روابط و اعمال بین اعداد، در بیان خواصِ و گزاره‌ها به کار می‌رفت ولی به عنوان شیئ مستقل دیده نمی‌شدند. مثلاً ما اشیای فیزیکی اطراف خود را به عنوان شیئ به رسمیت

می‌شناسیم ولی رابطهٔ بالا یا پایین بودن دو شیئی نسبت به یکدیگر را به عنوان یک شیئ نمی‌شناسیم. تابع نیز از جنس رابطه است ولی نه رابطه‌ای بین دو عدد خاص بلکه رابطه‌ای بین دسته‌ای از اعداد با دسته‌ای از اعداد دیگر. چنین موجودی در آن زمان وجود نداشت و باید به طریقی به وجود می‌آمد.

در مورد برخی توابع خاص که در عمل با آنها برخورد می‌شد، قانونی که ارتباط بین دو کمیت را برقرار می‌ساخت وجود داشت و در تعریف اولیه از تابع، ریاضیدان‌ها می‌توانستند برای شناسایی تابع به همین قانون که با یک عبارت جبری و تحلیلی بیان می‌شد، اشاره کنند. چنین برداشتی از تابع را اولر در سال ۱۷۴۸ میلادی در یکی از کتاب‌هایش به شکل زیر ارائه کرد.

« یک تابع از یک متغیر، فرمولی جبری و تحلیلی است که از طریق اَعمال محاسباتی دلخواه روی متغیر و اعداد، تشکیل شده است. »

توابعی که به این شکل به وجود می‌آیند را می‌توانیم توابع اولری بنامیم. اگرچه توابع اولری، همهٔ توابعی را که ما می‌شناسیم در بر نمی‌گیرند ولی برای رفع نیازهای مرتبط با تابع در آن زمان کافی بوده‌اند. با کار روی توابع، این مفهوم توانست به عنوان یک شییء مستقل و با نام و نشان ریاضی، هویت بیابد و پذیرفته شد که در مورد توابع، همانند اعداد می‌توان صحبت کرد و خواص آنها را مورد مطالعه قرار داد، به ویژه مفاهیم پیوستگی و مشتق‌پذیری در مورد آنها قابل طرح است.

در برخورد با مسائل دیگری که در آنها خود تابع به عنوان مجهول مطرح می‌شود، نیاز به توابعی احساس شد که ممکن بود تابع اولری نباشند. مثلاً دالامبر در ۱۷۴۶ شکل یک تار مرتعش که نمودار یک تابع است را مورد مطالعه قرار داد و نتیجه گرفت شکل تار مرتعش وابسته به شکل اولیهٔ آن است. آیا شکل اولیهٔ یک تار حتماً به صورت نمودار یک تابع اولری است؟ دالامبر خودش معتقد بود که شکل اولیهٔ تار باید به صورت نمودار یک تابع با عبارت تحلیلی باشد، ولی اولر با این نظر مخالفت کرد و نهایتاً در ۱۷۵۵ تعریف خود از تابع را کلّیت داد و در کتاب دیگر خود تابع را به صورت زیر تعریف کرد.

« اگر کمیتی به‌گونه‌ای وابسته به یک کمیت دیگر باشد، که تغییر کمیت دوم موجب تغییری در کمیت اول شود، کمیت اول را تابعی از کمیت دوم نامیم. این تعریف در کلی‌ترین حالت قابل به‌کار بردن است و شامل هر طریقی که مقدارهای کمیت دوم بر حسب مقدارهای کمیت اول مشخص شوند، می‌شود. بنابراین، اگر $x$ مقدار کمیت متغیر را نشان دهد، هر کمیت دیگری که به هر شکلی توسط آن تعیین شود تابعی از $x$ نامیده می‌شود.»

در این زمان تابع هویت مستقل خود را در افکار اکثر ریاضیدان‌ها یافته بود و نیازی نبود تا برای اشاره به آن حتماً عبارتی تحلیلی در کار باشد تا به وجود تابع اطمینان پیدا کنند و وجود رابطه‌ای تعیین کننده با هر نوع ماهیتی، برای قبول وجود یک تابع کافی بود. البته توافق همگانی نسبت به مفهوم تابع به سادگی قابل حصول نبود و هر ریاضیدانی نظرگاه خاص خود را داشت، زیرا توابع به شکل‌های گوناگونی در مسائل ظاهر می‌شدند و رویه واحدی برای برخورد با توابع وجود نداشت و هنوز معلوم نبود چه نگاهی به تابع ارزشمند و مناسب است.

یکی از تغییرات که در مفهوم تابع رخ داد، آزاد شدن آن از ارتباط بین تغییرات کمیت‌های فیزیکی است. تعریف فوریه از تابع به گونه‌ای است که به تغییرات یک متغیر به عنوان مقادیر عددی معمولی نگاه می‌کند که متغیر می‌تواند اختیار کند و مقدارهای تابع نیز مقادیر عددی هستند که به ازای مقدارهای در نظر گفته شده برای متغیر با روشی معین که لزوماً تحت قانون ثابتی هم نیستند، به‌دست می‌آیند. در این نگاه لزومی ندارد که برای درک تابع، به مفاهیم فیزیکی و تغییراتی که در زمان رخ می‌دهند متوسل شویم و همان روش برای تعیین یک عدد از طریق یک عدد دیگر، تابع را مشخص می‌کند. دیریکله با کامل کردن کارهای فوریه در یافتن شرایط همگرایی سری‌های فوریه با تبعیت از فوریه تعریف تابع را در سال ۱۸۳۷ به شکل زیر ارائه می‌کند.

«y تابعی از x است، هر گاه طبق قانونی به ازای هر مقدار x مقدار منحصر بفردی برای y نظیر شود.»

در آن زمان این تعریف بسیار کلی به‌نظر می‌آمد و ضرورت چنین تعریفی روشن نبود. این سؤال مطرح بود که آیا آنالیز و حسابان نیازی به این‌گونه توابع که معلوم نیست قانون آنها چگونه ساخته شده است، دارد؟ با رشد ریاضی و ایجاد شاخهٔ آنالیز و پیدایش نظریهٔ مجموعه‌ها و وارد شدن مسائل پیچیده‌تر، نیاز به تعمیم مفاهیم، موجب پیدایش فضاهای کلی‌تر مانند فضاهای متریک و توپولوژیک شد. بحث توابع روی این فضاها نشان داد، دامنه و بُرد توابع نقشی اساسی در خواص توابع بازی می‌کنند. در تعمیم تعریف تابع، کاراتئودری در ۱۹۱۷ ، مجموعه‌های غیر عددی را نیز به عنوان دامنهٔ تابع معرفی کرد و نهایتاً بورباکی در ۱۹۳۹ تعریف تابع را به‌عنوان قانون نظیرسازی از اعضای یک مجموعه به مجموعهٔ دیگر عرضه کرد که نهایتاً زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ حاصلضرب را می‌سازد. این، تعریف رسمی تابع در ریاضیات امروزه است.

تعریف امروزهٔ تابع در ریاضیات دانشگاهی بسیار مختصر و مفید و منطقی است و بر اساس مجموعه‌ها انجام می‌شود. ولی این تعریف مختصر و منطقی برای شروع

آموزش تابع مفید نیست، زیرا بر اساس دانش قبلی هنرجو بنا نمی‌شود و مفهوم واقعی تابع را که ارتباط بین دو کمیت است به‌خوبی نشان نمی‌دهد. آموزش صحیح یک مفهوم معمولاً از طریق تعریف منطقی صورت نمی‌گیرد و روش‌های مفهوم‌سازی باید به کار گرفته شوند. به‌همین علت در این کتاب هیچ‌گونه بحثی از تعریف منطقی تابع به‌صورت مجموعهٔ زوج مرتبی دیده نمی‌شود.
پس از تبحر روی مفهوم تابع‌های با متغیر عددیٍ و مقادیر عددی می‌توان از تابع‌های با دامنه‌های دیگر هم صحبت کرد. مثلاً تابع‌های با دامنهٔ گسسته از انسان‌ها یا سیارات یا چیزهایی دیگر که در ارتباط با زندگی روزمره هم باشد و فایده‌ای در تعریف آنها دیده شود. گسترش مفهوم تابع بستگی به نیاز هنرجویان دارد که نهایتاً در کجاها با چه نوع تابع‌هایی روبرو شوند.

## منابع و مراجع


۱ STANDARDS & PRINUPIES FOR SCHOOL MATHE MATICS, NCTM

۲ ASSESSMENT & EVAIUATION, NCTM

۳ تدریس ریاضی در دورهٔ ابتدایی، گیل باتل، ترجمهٔ شهرناز بخشعلی زاده، انتشارات سمت ۱۳۸۹.

۴ رویکرد اسلامی به برنامه‌ریزی درسی، دکتر ناصر بروجردیان (گروه ریاضی ۱۳۸۶).

۵ بررسی اثر آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه: زینب قربانی سخت، فرزانه نوروزی، شهرناز بخشعلی‌زاده.

۶ بررسی آموزش مبتنی بر برقراری ارتباطات و اتصالات: حمید دافعی، حمید صفدری، شهرناز بخشعلی‌زاده.

۷ بررسی تغییرات کتاب‌های درسی و روش تدریس معلمان: معینی، ابراهیم ریحانی، شهرناز بخشعلی‌زاده.

۱۲، ۱۳، ۱۴: پایان نامه‌های دوره کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهیدرجایی.