بسم الله الرحمن الرحیم

راهنمای هنرآموز
ریاضی (۱)

کلیهٔ رشته‌ها

شاخهٔ فنی و حرفه‌ای و کاردانش

پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه

۱۳۹۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: راهنمای هنرآموز ریاضی(۱) ـ ۲۱۰۷۶۰
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: شهرناز بخشعلی زاده، ناصر بروجردیان، سوسن پناهنده، زین العابدین دهقانی ابیانه و زیبا فانی (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) ـ ایمان اوجیان (طراح یونیفورم) ـ غزاله کشمیری (صفحه‌آرا)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهیدموسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وب‌گاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (دارو پخش) تلفن: ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۵

شابک ۲- ۲۶۴۲ - ۰۵ - ۹۶۴ - ۹۷۸
ISBN 978 – 964 – 05 – 2642–2

دست توانای معلم است که چشم‌انداز آینده ما را ترسیم می‌کند.

امام خمینی (قدِّسَ سِرّه الشّریف)

فهرست

مقدمه

مقدمه

رویکرد حاکم بر برنامهٔ درسی ریاضی دهم فنی و حرفه‌ای

هدف کلی برنامه‌های درسی تربیت یکپارچهٔ عقلی، ایمانی، علمی، عملی و اخلاقی هنرآموزان است به‌گونه‌ای که بتوانند موقعیت خود را نسبت به خود، خدا، دیگر انسان‌ها و نظام خلقت به درستی درک کرده و توانایی اصلاح مستمر موقعیت فردی و اجتماعی خویش را کسب نمایند(سند برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران). در برنامهٔ درسی ملی یازده حوزهٔ تربیت و یادگیری مشخص شده‌اند که حدود محتوایی، روش‌ها، فرایندها، و عناصر کلیدی یادگیری را روشن می‌سازند. در برنامهٔ درسی ملی، ریاضیات به عنوان علم مطالعهٔ الگوها و ارتباطات دارای نظم و برخوردار از سازگاری درونی، زبانی دقیق برای تعریف دقیق اصطلاحات و نمادها و ابزارکار در بسیاری از علوم و حرفه‌ها در جهت توانمندسازی انسان برای توصیف و کنترل موقعیت‌های پیچیده یکی از حوزه‌های تربیت و یادگیری قلمداد شده است. درگذشته برنامهٔ درسی ریاضی به عنوان مجموعه‌ای از دانش و رویه ها فرض می‌شد و نقش آموزشگران ریاضی در واقع انتخاب مجموعه‌ای از عناوین بود که فرض می‌شد هنرجویان را برای زندگی آینده‌شان آماده می‌سازد. هنرجویان رویه‌ها را در قالب انجام و تکرار تمرینات ریاضی یاد می‌گرفتند و سپس مسائل کلامی به آنها معرفی می‌شد. این گونه مسائل معمولاً به گونه‌ای بودند که فقط یک مفهوم ریاضی در آنها مشاهده می‌شد. در دوره‌های بعدی مهارت‌های حل‌کردن مسئله ارزش بسیاری پیدا کردند و حل مسائل مرتبط با زندگی و مسائل کاربردی مورد توجه برنامه‌های درسی قرار گرفت. لکن هنوز به حل مسئله و تحقیق اغلب به عنوان فعالیت‌های جانبی نگاه می‌شد و نه جزیی تفکیک ناپذیر از فرایند یاددهی ـ یادگیری. نگاه دیگری به ریاضی، ریاضی را مجموعه‌ای از فرایندها می‌داند.

دراین نگاه وظیفهٔ آموزشگران ریاضی کمک به هنرجویان است تا بفهمند چگونه ریاضی‌سازی کنند. در این وضعیت به جای تصمیم‌گیری در مورد «کدام عناوین ریاضی» به تصمیم‌گیری در مورد «کدام فرایندها» پرداخته می‌شود. لذا تجاربی که به هنرجویان کمک می‌کنند تا این فرایندها پرورش داده شوند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. در چنین وضعیتی، ریاضیات به عنوان یک موضوع مجرد و منفک از زندگی دیده نمی‌شود بلکه با تجربیات مخاطب، با دیگر موضوعات درسی و حوزه‌های یاددادنی و زندگی روزانهٔ وی

پیوند داده می‌شود. به هنرجویان فرصت مدل‌سازی وضعیت‌های واقعی داده می‌شود تا با درک ریاضی بتوانند تجارب زندگی خود را تفسیر کنند. لذا ریاضیات شامل منطق، تحلیل و بررسی، تبادل ایده‌هاست و درک ایده‌های مجرد ریاضی متکی بر تجربیات و تفکر و بازتاب نسبت به آنهاست. هنرجویان در حین مواجهه با وضعیت‌های جدید، تجربه‌کردن آنها و تعمق و بازتاب نسبت به آنها دنیای واقعی خود را به گونه‌ای بازسازی می‌کنند که شامل درک آنها از ریاضیات باشد. سطح درک مخاطب از ایده‌های ریاضی و توانایی او در به کارگیری مفاهیم و مهارت‌ها بسته به وضعیت اجتماعی که فرد در آن رشد پیدا کرده است متفاوت است. برای مثال فرزندی که در خانه فرصت کمک‌کردن به پدرش در ساختن یک قفسه چوبی و اندازه‌گیری قطعات الوار را دارد، نسبت به فردی که اندازه‌گیری را فقط در مدرسه تجربه می‌کند، احتمالاً درک بهتری از اندازه‌گیری و اهمیت دقت در اندازه‌گیری و انتخاب ابزار خواهد داشت.

ولی هدف از آموزش و پرورش چیست؟ هدف، پرورش متخصص ریاضی نیست. بلکه هدف پرورش قدرت تفکر و تعقل است. لذا هدف اصلی برنامه ریاضی پرورش مهارت‌های تفکر و تعقل است. بنابراین محتوا و فرایندهای ریاضی در خدمت و بستری برای پرورش مهارت‌های تفکر هستند. در چنین وضعیتی مبنای انتخاب و مدیریت فرایندها و محتوای ریاضی اهداف ذیل می‌باشند:

۱ آموزش موضوعاتی که مبنای پایه درک علمی از جهان پیرامون است.

۲ آموزش روش‌های تولید علم و رسیدن به حقایق و شناخت در علوم

۳ رشد توانایی‌های عقلانی در درک و تجزیه و تحلیل مسائل

۴ پرورش روحیۀ حقیقت‌جویی و درک آن

۵ تقویت ارزش‌های الهی به منظور رشد شخصیتی

۶ پرورش صداقت علمی و روحیۀ نقادی در پذیرش مطالب

۷ پرورش باور مثبت نسبت به توانمندی‌های خود برای کشف مطالب جدید

۸ آموزش روابط اجتماعی و برخوردهای صحیح اجتماعی

همان‌گونه که در زندگی، فرد با ابتلا و مواجهه با مسائل، در جهت حل این مسائل ـ و با سعی و تلاش در ایجاد نظم منطقی بین تجربیات گذشته خود و با به کارگیری تفکر وتعقل و انتخاب راهبرد صحیح، توانمندی‌های خود را رشد می‌دهد، یادگیری نیز

در برخورد ساخت شناختی ذهن انسان با وضعیت مسئله‌ای جدید و با سعی در حل آن شکل می‌گیرد. در این مسیر داشتن صبر و استقامت در حل مسئله و روحیهٔ حقیقت‌جویی و نقادی است که او را همراهی می‌کند پس فرصت‌های آموزشی باید به‌گونه‌ای باشند که با ایجاد موقعیت مسئله‌ای و درگیری هنرجو با مسئله، وی را مجبور کند تا با یک فعالیت علمی/ ذهنی وضعیت جدید را تحلیل کند و راه‌حل مناسب را بیابد و ساخت شناختی ذهن خود را توسعه داده و یا اصلاح کند. وضعیت‌های مسئله‌ای می‌توانند ساخت شناخت علمی یا ارزش را به چالش کشیده و لذا موجب رشد علمی یا ارزشی مخاطب شوند. با توجه به اینکه یادگیری در خلأ صورت نمی‌گیرد. محیط‌های آموزشی باید به گونه‌ای باشند تا فرصت‌هایی برای رشد توانمندی‌های مخاطب فراهم کنند. در چنین محیط‌هایی هنرجو باید برای بیان نظرات و افکار خود احساس امنیت نموده و برای افکار دیگران احترام قائل شود. پذیرش یا عدم پذیرش نظرات پس از طی فرایند گفتمان و نقد و بررسی و تحلیل و با هدایت فردی آگاه (دبیر) شکل می‌گیرد.

لذا دبیر باید نسبت به توانمندی‌ها، نیازهای مخاطبش، نسبت به موضوع مورد گفتگو و اهداف آن آگاهی داشته و با ایجاد فضای مناسب گفتمان یا طرح مسئله در وضعیت‌های مناسب و زیر نظر داشتن فعالیت‌های هنرجو و راهنمایی او هدایت و مداخلهٔ صحیح و به موقع فرصت تحلیل و تصمیم‌گیری را برای هنرجو فراهم کند.

اصول و استانداردهای حاکم بر برنامه درسی ریاضی

زمانی، در دیرباز، فرض بر این بود که ریاضیات برای گروه خاصی از افراد جامعه است یا ریاضیات را همه نمی‌توانند «یاد بگیرند». این گفتارها مربوط به زمانی بوده است که ریاضیات به عنوان مجموعه‌ای از اصول و رویه‌ها در نظر گرفته می‌شد و یادگیری آن را فقط برای گروهی که قصد تحصیل در رشته‌های مرتبط با ریاضی و رشته‌های فنی داشتند، ضروری و لازم می‌دانستند. با تغییر هدف آموزش ریاضی و تغییر نگاه نسبت به آنچه محتوا و کار ریاضی خوانده می‌شود، ضرورت آموزش ریاضی برای همگان درک می‌شود. لذا «ریاضیات برای همه» معنا پیدا می‌کند. برای برقراری عدالت آموزشی نباید سطح آموزش ریاضی را پایین بیاوریم بلکه باید فرصت‌های برابر برای رشد مهارت‌ها و توان ریاضی برای همگان فراهم کنیم و با توجه به نیازهای فردی مخاطب، وی را در رسیدن به اهداف آموزشی/ تربیتی یاری دهیم.

یادگیری ریاضیات

فرد در مواجهه با مسائل و تجربه و بازسازی ساخت شناختی ذهن خود یاد می‌گیرد، درک عمیق، توانایی به‌کارگیری و به‌کار بستن فرایندها، مفاهیم رویه‌ها و روش‌ها لازمهٔ یادگیری ریاضی است. کسب دانش فقط بخش کوچکی از یادگرفته‌هاست و دانستن اینکه چه زمان، چگونه و چرا از آنچه می‌دانند باید استفاده کنند است که یادگیری را ارزشمند می‌نماید.

زمانی که هنرجو از طریق فعالیت‌ها به چالش کشیده می‌شود، در توانایی برخورد با مسائل باور مثبت بیشتری نسبت به توانمندی خود پیدا می‌کند و در مکاشفه مطالب جدید انعطاف بیشتری برای یافتن راه‌حل‌های جایگزین از خود نشان می‌دهد. یادگیری زمانی ارزشمند است که درک معنادار یا درک مفهومی در تعامل با درک رویه‌ای باشد. یعنی دانستن در کنار دانستن چگونگی، درک در کنار عملکرد الگوریتمی، دانش مفهومی در کنار دانش رویه‌ای و یا دانش معنادار در کنار دانش مکانیکی رشد کرده و در تعامل با یکدیگر ـ همدیگر را تقویت کنند. دانش یا فهم رویه‌ای (ابزاری) به معنای دانستن قوانین بدون دلیل و به‌کارگیری آنها بدون دانستن چرایی آن است. در مقابل دانش مفهومی (رابطه‌ای) به این معنا است که هنرجو از چرایی آنچه انجام می‌دهد آگاه باشد. در این وضعیت او خود می‌تواند قانون‌ساز باشد و برای موقعیت‌های مسئله‌ای خود قاعده و قانونی کشف کرده یا بسازد. در واقع تمرکز درک و فهم ابزاری بر چگونگی انجام دادن و تمرکز درک و فهم رابطه‌ای بر چرایی انجام دادن است. مفاهیم، طرح واره یا تصویرهای ذهنی، در ساخت شناختی ذهن وجود دارند. یادگیری معنادار زمانی شکل می‌گیرد که بین این طرح واره‌ها رابطه و اتصال برقرار شود. هرچه ارتباطات پیچیده‌تر باشند، یادگیری عمق بیشتری دارد.

یاددهی ریاضیات

یاددهی مؤثر ریاضی نیازمند شناخت و ارزیابی ساخت شناختی مخاطبان است. یعنی باید آنچه مخاطبان می‌دانند را شناسایی کرده و برای رسیدن به آنچه مخاطبان باید انجام دهند، آنها را به چالش کشیده و در این مسیر مخاطب را هدایت و حمایت کرد. وظیفه یاددهنده فراهم کردن محیط و وضعیت‌های مسئله‌ای است تا مخاطبان از طریق

درگیر شدن با مسئله و تجربه کردن یاد بگیرند. دبیران باید با چالش‌هایی که ممکن است هنرجویان به هنگام یادگیری مفهوم با آنها روبرو شوند، آشنایی داشته باشند تا بتوانند برای مقابله با آنها از قبل برنامه‌ریزی و طراحی کنند. دبیران باید از شیوه‌ها و ابزار ارزیابی آگاهی داشته باشند تا بتوانند درک و شناخت مخاطبان را به منظور طراحی بهتر آموزشی و هدایت مؤثر تر منطبق با نیازهای فردی آنها مورد ارزیابی قرار دهند.
دبیران باید در کنار دانش موضوعی از دانش پداگوژیکی و دانش پداگوژیکی محتوا نیز آگاهی داشته باشند تا بدانند چگونه و چه سؤال‌هایی را چه زمان مطرح کرده و باید با پاسخ‌ها چگونه روبرو شوند.

فناوری

اکثر آموزشگران بر تأثیر مثبت فناوری آموزشی بر یادگیری توافق دارند. امّا استفادهٔ مؤثر از فناوری بستگی به دبیر و انتخاب مناسب فناوری دارد. فناوری باید در راستای رسیدن به اهداف آموزشی/ تربیتی باشد. توانایی گرافیکی و امکان دسترسی به مدل‌های دیداری و امکان برقراری تعامل و پویایی برخی محیط‌های پویا (مانند GEOGEBRA) فرصت‌هایی غنی برای رشد مهارت‌های تفکر فراهم می‌آورند.

اثبات و استدلال، ارتباطات و حل مسئله

استدلال ریاضی روش مؤثری برای رشد بصیرت نسبت به پدیده‌های مختلف در اختیار قرار می‌دهد. افرادی که استدلال می‌کنند به شکل تحلیلی فکر می‌کنند، به الگوها، ساختار یا نظم و ترتیب موجود در وضعیت‌های دنیای واقعی توجه می‌کنند. آنها سؤال می‌کنند، حدس می‌زنند و اثبات می‌کنند. لذا مهم است که به هنرجویان کمک کنیم تا با توجه به تجربیات اولیه خود با ریاضیات، به دنبال دلیل باشند. سؤالاتی از قبیل «فکر می‌کنید چرا این درست است؟»، «کسی فکر می‌کند که جواب می‌تواند چیز دیگری باشد؟ اگر بله، چرا؟» به یادگیرندگان کمک می‌کنند درک کنند تا هر آنچه را بیان می‌کنند، باید با شواهد برای پشتیبانی یا رد همراه باشد.
انجام دادن کار ریاضی شامل کشف است. کشف کردن با فرضیه سازی (حدس آگاهانه) همراه است. دبیران می‌توانند فرضیه‌های قبلی مخاطبان را به چالش کشیده تا آنها را اصلاح کنند.

هنرجویان از طریق گفتگو در کلاس می‌توانند استدلال کردن و روش‌های مختلف آن را بهتر یاد بگیرند. ایده‌های خود را با ایده‌های دیگران مقایسه کرده و شیوه‌های استدلال خود را تقویت کنند. هنگامی که فرد، تفکر و استدلال خود را برای دیگران به طور شفاهی یا کتبی بیان می‌کند، یاد می‌گیرد تا دیگران را متقاعد کنند و بیان خود را شفاف کنند. برای این منظور باید تفکرات خود را منسجم کرده و بین مفاهیم ارتباط برقرار کنند. برقراری ارتباط با توضیحات کلامی با نمادین رسم شکل، استفاده از اشیا و غیره همراه است که به رشد درک معنادار آنها کمک می‌کند. حل مسئله یعنی درگیر شدن با وضعیت‌هایی که راه‌حل آن از قبل در دسترس نیست و یادگیرنده در مسیر حل آنها درک و فهم خود از ریاضی را رشد می‌دهد. مسئله حل‌کن‌های خوب از آنچه انجام می‌دهند به خوبی آگاهی داشته و بر آن نظارت و کنترل دارند و همواره در طی حل مسئله فرایندها، عملیات خود را ارزیابی و اصلاح می‌کنند. مهارتی که فراشناخت نام دارد. نقش دبیران، پرورش این مهارت از طریق فراهم کردن فرصت‌های حل مسئله است. این کار را می‌توان با طرح پرسش‌های مداخله‌گر چون «پیش از اینکه ادامه دهید، آیا مطمئن هستید؟»، «راه دیگری نیز تا اینجا داشتید؟» «چرا کاری که تا اینجا کردید درست است؟ » انجام داد. این گونه پرسش‌ها به یادگیرنده کمک می‌کنند تا عادت کنند تفکر خود را کنترل کرده و درک و فهمشان را ارتقا بدهند.

پیوندها و اتصلات

برقراری پیوند و ارتباط از لازمه‌های یادگیری معنادار است. ارتباطات و پیوندها در ریاضی به چند دسته تقسیم می شوند:

۱ ارتباط بین مفاهیم: ساخت شناختی ذهن شبکه‌ای از مفاهیم است که ارتباط بین مفاهیم، عمق و پیچیدگی‌های آن را تعیین می‌کند. هرچه بین مفاهیم ریاضی ارتباط برقرار شود، درک آن مفاهیم عمیق‌تر است.

۲ ارتباط بین شاخه‌های ریاضی: برقراری ارتباط بین شاخه‌های ریاضی این امکان را فراهم می‌سازند تا ابعاد مختلف از یک مفهوم، یک مسئله مورد بررسی قرار گیرند. ارتباط بین شاخه‌های ریاضی به درک ریاضی به عنوان یک کل منسجم کمک می‌کند.

۳ ارتباط و اتصال بین روش‌های حل یک مسئله: این گونه برقراری ارتباط مستقیماً به رشد تفکر واگرا کمک می‌کند و تحلیل روش‌های مختلف موجب پرورش مهارت ساخت رویه‌های جدید

می‌شود که به پرورش تفکر خلاق نیز کمک می‌کند.

۴ ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های چندگانه مفاهیم: این نوع ارتباط به معرفی یک ایده یا مفهوم به شکل‌های مختلف اشاره دارد. توانایی ترجمه بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم به هم و حرکت از یکی به دیگری از نشانه‌های یادگیری عمیق و معنادار است و کمک می‌کند تا از طریق تشخیص ارتباطات بین بازنمایی‌های معادل و تشخیص خواص مشترک آنها مفاهیم مجرد و فرایندها شکل بگیرند. با استفاده از مدل‌های ریاضی یا بازنمایی‌های کلامی، نموداری(تصویری)، عددی (جدولی)، جبری و فیزیکی و.... هنرجویان می‌توانند مسائل و مفاهیم و رویه‌ها را بررسی کرده و به تحلیل بهتر وضعیت‌ها بپردازند. توانایی ایجاد ارتباط بین بازنمایی‌ها و کسب اطلاعات از هریک از نمایش‌ها و ترجمهٔ آن به نمایشی دیگر موجب می‌شود تا درک عمیق‌تری از مفهوم شکل بگیرد.

۵ ارتباط و اتصال بین روش‌های ریاضی به منظور تعمیم دادن در ریاضیات می‌توان از طریق برقراری ارتباط بین رویه‌ها و مفاهیم، کاربرد یک رویه را در بافت‌های مختلف تعمیم داد.

۶ برقراری ارتباط بین ریاضی با حوزه‌های آموزشی دیگر و با زندگی روزمره که کمک می‌کند تا هنرجویان ریاضی را در بافت‌های مختلف و مورد علاقه تجربه کنند.

آموزش ریاضی از طریق حل مسئله

رویکردهای آموزش ریاضی در گذشته بر آموزش برای حل مسئله و بر شیوه‌هایی از تدریس ریاضی که بتوان از آن برای مسئله حل کردن استفاده کرد تأکید داشتند. در چنین وضعیتی مسئله به گونه‌ای طراحی می‌شد تا بتوان از آخرین آموخته‌های ریاضی برای حل آنها استفاده کرد. امروزه آموزش ریاضیات به این امر اشاره دارد که از مفاهیم و رویه‌ها نباید فقط به عنوان ابزاری برای حل مسائل ساختار یافته استفاده کرد بلکه به آنها به عنوان وضعیت‌ها و راه‌هایی برای تفکر و چگونگی سازمان‌دهی تجربیات نگریست.

همچنین نباید به حل مسئله به عنوان فعالیتی نگاه کرد که هنرجو را ملزم به استفاده از آنچه آموخته می‌کند. بلکه این فرایند را به عنوان ابزاری برای کسب دانش ریاضی جدید و فرایندی برای به‌کارگیری آنچه که قبلاً آموخته شده، در نظر گرفت. امروزه آموزش ریاضیات برای حل مسئله به آموزش ریاضیات از طریق حل مسئله تغییر یافته است. آموزش مفاهیم و موضوعات ریاضی در بسترهای حل مسئله و محیط‌های آمیخته با پرسشگری به فراگیران کمک می‌کند به درک عمیقی از مفاهیم، موضوعات و ایده‌های مختلف ریاضی دست پیدا

کنند. در آموزش ریاضی از طریق حل مسئله تأکید بر درگیری فرد در فعالیت‌هایی است که به تولید فردی و شخصی دانش منجر می‌شوند. رویکرد یادگیری ریاضی از طریق حل مسئله چنین تبیین می‌شود:

- در تمام وضعیت‌های آموزشی هنرجویان درگیر حل مسئله هستند.
- حل مسئله کمک می‌کند تا هنرجویان مهارت‌های تجزیه و تحلیل و استدلال را در خود رشد دهند.
- حل مسئله هنرجویان را مجبور می‌کند تا از طریق مواجهه با مسائل جدید، فرایند تفکر خود را ارزیابی کرده و با کسب اطلاعات جدید آن را اصلاح کنند.
- حل مسئله فرصتی فراهم می‌آورد تا هنرجویان روشی برای حل آن طراحی کنند.
- حل مسئله درک و یادگیری را افزایش می‌دهد.
- در رویکرد آموزش از طریق حل مسئله، هنرجویان با درگیر شدن در انجام فعالیت‌های ریاضی، ابتکار و خلاقیت، حدس زدن، الگویابی، نقد و بررسی راه‌حل‌ها، و جواب‌ها بین مفاهیم و موضوعات ریاضی اتصال و ارتباط برقرار می‌کنند.

درچنین وضعیتی انتخاب و طرح وضعیت مسئله‌ای برای شروع از اهمیت بسیاری برخوردار است. امکان دارد فعالیت‌های حل مسئله با حل یک مسئله از دنیای واقعی با انجام پروژه‌های کوچک و تحقیقات انجام شده توسط هنرجویان شروع شود. از هنرجویان انتظار می‌رود که صرفاً راه‌حل خود را بیان نکنند بلکه فرایندها و رویکردهایی را که برای رسیدن به پاسخ به کار گرفته‌اند را نیز گزارش دهند.

اهمیت گفتمان‌ها و بحث‌های کلاسی

یکی از ویژگی‌های بحث‌ها و گفتمان‌های کلاسی، هدایت هنرجویان، نظارت، کنترل، طرح پرسش‌هایی هدفمند به منظور ایجاد ارتباط و اتصال بین مفاهیم و ایده‌های ریاضی است. ارتباطات وسیله‌ای برای در میان گذاشتن عقیده‌ها و ایده‌ها و مورد نقد واقع شدن آنها و در نهایت اصلاح و توسعه آنهاست. تدریس ریاضی باید بر پایه گفتگو بین یاددهنده با یادگیرنده یا یادگیرندگان با هم به منظور بررسی و کاوش ایده‌ها و درک یکدیگر شکل گیرد. فراهم کردن فضایی که در آن بحث‌ها و گفتگوها و مقابله‌های مرتبط با ریاضی، به شکلی که زنده و در جریان باشند، بسیار ایده آل است. در چنین فضایی یادگیرنده‌ها ایده‌ها و تفکرات خود را با شهامت بیان کرده و به نقد ایده‌ها و تفکرات دیگران پرداخته و خود

نیز مورد نقد قرار می‌گیرند. هنرجویان یاد می‌گیرند که در صورت اشتباه کردن می‌توانند به اصلاح اشتباهات خود بپردازند. در چنین فضایی نگاه دبیر به ریاضی می‌تواند بر نگرش هنرجو نسبت به ریاضی تأثیر مثبت یا منفی بگذارد.

یاددهنده باید هنرجویان را به اتخاذ تصمیم دعوت کرده و آنها را تشویق کند تا روش خود برای حل‌کردن (مدل ریاضی خود) را به‌کار ببرند. تعامل و گفتمان بین اعضای گروه را تشویق کرده و در صورت لزوم با پرسش‌های مداخله‌گر نقش میانجی را ایفا کند.

درتمام این مراحل باید بر ادامه و ابرام در حل مسئله تأکید شود. نه بر سرعت انجام آن.

در حین انجام کارِ گروهی، هنرجویان باید تشویق شوند تا با یکدیگر در تعامل بوده و با هم همکاری کنند. اندیشه‌های خود را به اشتراک بگذارند و همگام با تکمیل و بهبود اندیشه‌ها در گروه، تفکرات و راهبردهای خود را ارزیابی کنند.

دبیر به عنوان هماهنگ کننده، تسهیل کننده و مداخله‌گر می‌تواند همواره سؤالاتی برای شروع کار، ادامه کار، تکمیل کار مطرح کند. سؤالاتی مانند: اگر............ چه می‌شد؟ چرا؟............... چه کار دیگری می‌توان کرد؟ و غیره و بدین ترتیب هنرجویان را به تحقیقات بیشتر ترغیب کرده تا مدل خود را توسعه دهند.

درچنین شرایطی اگر به هنرجویان فرصت داده شود تا خود به طرح مسئله بپردازند و سؤال کنند، مفاهیم را بهتر و عمیق‌تر درک کرده و یادگیری معنادارتر می‌شود.

پرسش‌های مؤثر مداخله‌گر

پرسش‌ها می‌تواند خلأ بین آنچه که هنرجو یاد گرفته و آنچه باید یاد بگیرد را پر کنند. پرسش‌های مؤثر می‌تواند فرصت‌هایی از قبیل فرصت‌های زیر را فراهم آورد:

- رویارویی با چالش‌های متناسب با نیازهای فردی هنرجو
- ارزیابی
- ارتقای مهارت‌های تفکر در سطوح بالاتر
- ایجاد فرصت تأمل و تعامل بین هنرجو با ایده‌های آموزش داده شده
- فراهم کردن فرصت تفحص و بررسی پیدا کردن توضیحات
- بحث و گفتگو با دبیر
- کنترل خود یادگیری

به کار گیری ICT

بسیاری از دبیران با تأثیر مثبت ICT در یادگیری موافق هستند امّا باید توجه داشت هدف اصلی یادگیری است و نه فناوری. ابزار باید متناسب با هدف یادگیری باشد. برای مثال برای بررسی الگوهای عددی می‌توان از Excel و استفاده آن و الگوهای عددی را در صفحه گسترده‌ها بررسی کرد. آشنایی با امکانات ICT به هنرجو امکان می‌دهد تا به فرضیه‌سازی و پیش‌بینی کردن پرداخته و مهارت‌های استدلال کردن خود را توسعه دهند.

به‌کارگیری رایانه می‌تواند به هنرجویانی که سبک یادگیری آنها دیداری است کمک بسیاری کند. برخی اوقات از ICT به عنوان یک منبع یاددهی استفاده می‌شود. این عمل به دو روش انجام می‌شود:

۱ نمایش، ارائه و مدل‌سازی یکی از ابعاد ریاضی

۲ تمرکز بر گفتمان‌ها و بحث‌های ریاضی، تفسیر کردن، پیش‌بینی‌کردن یا تعمیم دادن

در هر دو حالت دبیر می‌تواند با گروهی از هنرجویان و یا با کل کلاس کار کند. به طور مثال می‌توان با اجرای فایل یا برنامه‌ای در یک رایانه با صفحه نمایش بزرگ یا یک برنامه تلویزیونی به عنوان برانگیزاننده بحث و گفتگو استفاده کرد. معلم می‌تواند سؤالاتی در سطوح مختلف پیچیدگی و دشواری در زمینه آنچه نمایش داده شده، طرح کند. یا با استفاده از نرم‌افزارهای پویا و تعاملی چون GEOGEBRA وضعیت‌هایی را نمایش داده تا هنرجویان به پیش‌بینی‌کردن و حدس‌زدن بپردازند و آنها را مورد آزمایش قرار دهند.

نقش مثال

به هنگام ارائه مثال‌ها باید توجه داشت تا نمونه‌هایی از نامثال‌ها نیز ارائه شوند. با این کار تا حدی ارتباط دادن ویژگی‌های نامربوط توسط هنرجو جلوگیری می‌شود. ارائهٔ مثال‌های مختلف این امکان را فراهم می‌سازد تا هنرجو به تصویرسازی ذهنی بپردازد. لذا بسیار مهم است مثال‌هایی انتخاب شوند تا ابعاد مختلف یک مفهوم را نمایش داده و در عین حال مخاطب را دچار بدفهمی نکند.

ارزیابی و ارزشیابی

ارزیابی و ارزشیابی جزئی تفکیک ناپذیر از چرخهٔ فرایند یاددهی ـ یادگیری است و باید

به گونه‌ای طراحی شود تا شواهدی معتبر در ارتباط با توانایی‌های مخاطبان در رسیدن و دستیابی به اهداف آموزشی و همچنین در ارتباط با طراحی‌های آموزشی دبیران در اختیار قرار دهد تا بتوان برای رشد و ارتقای توانایی‌های مخاطبان و بهبود و اصلاح طرح‌های آموزشی اقدام مناسب انجام داد. ارزیابی در کوتاه مدت و به شکل غیر رسمی جزئی طبیعی از فعالیت‌های کلاس درس است و می‌تواند در قالب مشاهده‌کردن، گوش دادن به هنرجویان، سؤال‌کردن و شرکت در بحث و گفتگوها و تصحیح نوشته‌های هنرجویان در حضور او یا بدون حضور او انجام شود. از این نوع ارزیابی‌ها می‌توان خیلی سریع در جمع‌بندی‌ها، رفع بدفهمی‌ها و یا بیان نکات آموزشی استفاده کرد. ارائه بازخوردها به شکل مثبت و همراه با راهکارهای رفع اشکالات در رشد هنرجویان مفید است. خود ارزیابی یکی از شیوه‌هایی است که موجب می‌شود تا هنرجو نسبت به دانسته‌ها و تفکر خود مدیریت پیدا کرده و آنها را رشد دهد. در میان گذاشتن معیارهای ارزشیابی با هنرجویان کمک می‌کند تا عملکرد خود را ارزیابی کنند و لذا یادگیری خود را استحکام بخشند.

ارزشیابی عملکردی

ارزشیابی عملکردی مشاهده مستقیم و نظام دار و ارزشیابی از عملکرد هنرجویان است. در این شیوه از هنرجویان خواسته می‌شود تا با عملکرد خاص یا تولید چیزی مهارت و تبحر خود را نمایش دهند. از این شیوه می‌توان برای ارزشیابی مهارت‌های زیر استفاده نمود:

- طراحی و اجرای یک طرح
- نوشتن مقالات و مطالبی که نیاز به تلفیق و به‌کارگیری اطلاعات دارد.
- نشان دادن تبحر لازم در به‌کارگیری ابزار یا تکنیک
- مدل‌سازی
- تهیه و تفسیر نمودار
- جمع‌آوری اطلاعات و غیره

طراحی آزمون‌های عملکردی

برای طراحی آزمون‌های عملکردی (کتبی یا عملی) باید مراحل زیر طی شود:

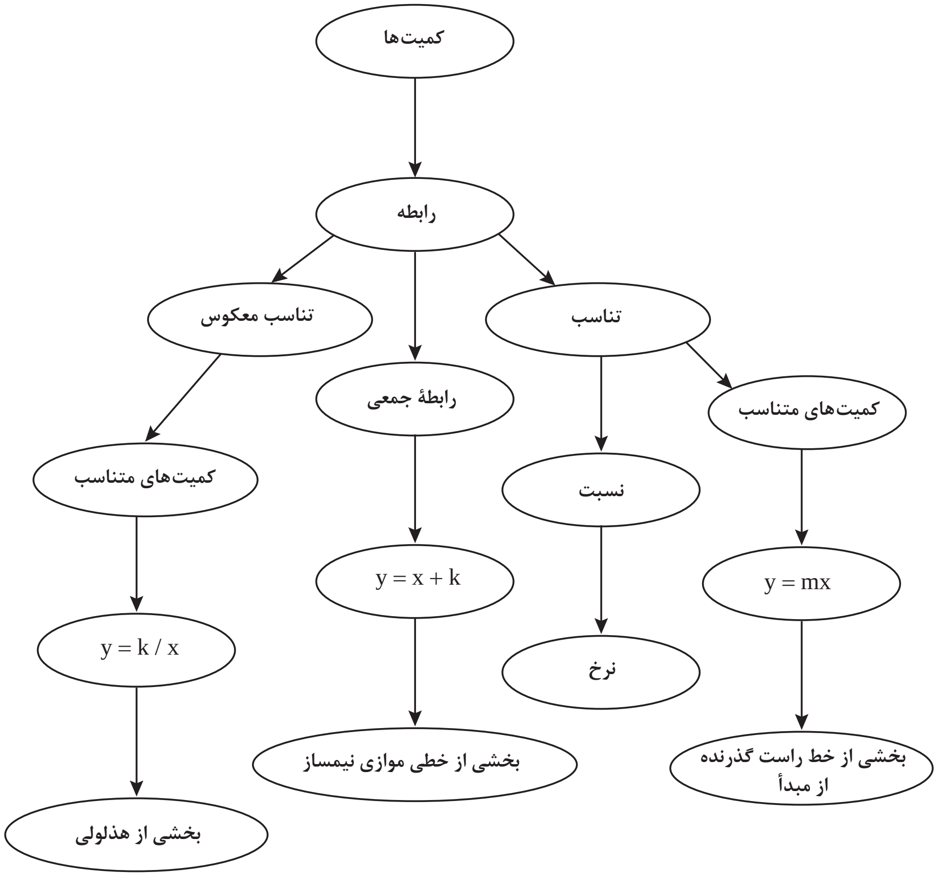
- فهرست‌کردن مهارت‌ها و دانستنی‌ها و نگرش‌های مورد انتظار

- کدام مهارت‌های شناختی را هنرجویان باید کسب کنند؟
- کدام مهارت‌های اجتماعی را هنرجویان باید کسب کنند؟
- چه مهارت های اجتماعی را هنرجویان باید کسب کنند؟
- چه مهارت های فراشناختی را هنرجویان باید کسب کنند؟
- چه نوع مسائلی را هنرجویان باید حل کنند؟
- چه اصول و مفاهیمی را هنرجویان باید به کار ببرند؟
- طراحی تکالیف و آزمون‌هایی که امکان بروز عملکرد مورد نظر را فراهم کند
- در طراحی انجام شده، مهارت مورد نظر چقدر با مهارت‌های شناختی، اجتماعی دیگر مربوط است و تا چه حد روی آنها اثر می‌گذارد؟
- در طراحی انجام شده، مهارت‌های مورد نظر تا چه حد با اهداف برنامه‌ها مربوط هستند؟
- ماهیت و اهمیت مهارت‌ها چگونه و تا چه اندازه است؟ آیا قابل آموزش هستند یا توسط هنرجویان باید کسب شوند؟
- چقدر زمان برای انجام فعالیت / تکلیف لازم است؟
- تعیین معیارهای ارزشیابی (معیارهای قابل وضوح و قابل اندازه‌گیری): توصیه می‌شود تا برای هنرجویان مثال‌هایی آورده شود تا انتظاراتی که از آنها است را درک کنند.

فصل اول

نسبت و تناسب

طرح کلی فصل اول



اهداف کلی فصل

- درک مفهوم کمیت‌های متناسب مستقیم
- درک مفهوم کمیت‌های متناسب معکوس
- درک مفهوم نرخ

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- با استفاده از مقادیر متناظر دو کمیت، وجود رابطهٔ بین دو کمیت متناسب را تشخیص دهند و نوع رابطه (مستقیم یا معکوس) را مشخص کنند.
- رابطهٔ بین دو کمیت متناسب را به روش‌های مختلف (روش هندسی، روش جبری و ...) نمایش دهند.
- با داشتن رابطهٔ بین دو کمیت، مقادیر متناظر کمیت‌ها را به‌دست آورند.
- مسائل مرتبط با نسبت در کمیت‌های متناسب را با روش‌های جبری و هندسی و ... حل کنند.

پیش نیازها:

- آشنایی با مفهوم نسبت

نگاه کلی به فصل:

مفهوم نسبت به‌دلیل کاربردهای آن از گذشته تا امروز در علوم مختلف و زندگی روزمره از اهمیت خاصی برخوردار است یکی از نسبت‌های معروف نسبت طلایی است:

معبد پارنتون (معبد دختر) در سال‌های ۳۴۷ تا ۳۳۸ قبل از میلاد مسیح در آکروپلیس واقع در آتن ساخته شده است و عظیم‌ترین یادگار هنر معماری یونان باستان است، نسبت ارتفاع به طول تیر بزرگ این معبد نسبت طلایی است.

شکل ۱- معبد پارنتون

پرگار جالبی که در پمپی (یکی از شهرهای ایتالیا) در کارگاه مجسمه‌سازی پیدا شده است دال بر آن است که یونانی‌ها و رومی‌ها نه تنها از نسبت طلایی آگاهی داشته‌اند بلکه از آن استفاده هم می‌کرده‌اند. این پرگار هم‌اکنون در موزۀ ناپل نگه‌داری می‌شود که نسبت بین اجزای آن به نسبت طلایی نزدیک است.
در خطاطی استاد میرعماد توانست با نزدیک کردن اجزای حروف و کلمات به نسبت طلایی آنها را به درجه اعلای زیبایی برساند.

شکل ۲ - نمونه ای از خط استاد میر عماد

در پدیده‌های طبیعی اجزای موجودات زنده تحت‌تأثیر شرایط محیطی با نسبت‌های خاصی رشد می‌کنند مثلاً نسبت نوک انگشتان تا آرنج به فاصله مچ تا آرنج یا نسبت فاصله شانه تا بالای سر به اندازه سر در هر فرد عدد ثابتی است (که نزدیک نسبت طلایی است).
در مسائل مالی، نسبت‌های مالی (Financial Ratios) را می‌توان از جمله ابزار سودمند در تعیین موقعیت مالی شرکت‌ها به حساب آورد. محاسبۀ نسبت برخی از اقلام مهم مالی درک درستی از واقعیت‌های مهم دربارۀ نتایج عملیات و وضعیت مالی یک شرکت را به‌دست می‌دهد. با بررسی و تحلیل این نسبت‌ها می‌توان به آسیب‌شناسی فعالیت مالی یک شرکت نیز دست یافت.
در زندگی روزمره برای تهیۀ غذا معمولاً مواد اولیه را با نسبت‌های خاصی مخلوط می‌کنند، در عکاسی موسیقی و ... نیز کاربرد نسبت دیده می‌شود.
در این فصل با تمرکز بر مفهوم کمیت‌های متناسب، نسبت بین مقدارهای دو کمیت مطرح می‌شود و مسئله‌های مربوط به آنها بررسی می‌شوند. سپس مفهوم رابطۀ بین دو کمیت متناسب معکوس مطرح می‌شود و تفاوت آن با رابطۀ بین دو کمیت متناسب مستقیم برجسته می‌شود.

	فرایند	توصیف فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ـ ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ـ ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل‌کردن مسئله‌ها و یا انتخاب مناسب آنها	ـ استفاده از رسم شکل، نمودار و روش جبری برای حل مثال ۳
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	ـ تشریح چگونگی استفاده از یک طول مشخص برحسب گیره بزرگ برای بیان طول برحسب گیره کوچک (قسمت ۴ از فعالیت۱)
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ استفاده از زبان ریاضی برای بیان رابطهٔ معکوس بین دو کمیت (نتیجه صفحه ۲۷ کتاب درسی)
	استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	ـ ارائهٔ دلیل برای رد نظر مینا در مورد تعیین درصد روغن به سس (مسئله ۲ صفحه ۲۲)
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	ـ استفاده از روش جبری و رسم نمودار برای حل مسئله مربوط به پس‌انداز ماهانه علی (سؤال ۴ صفحه ۲۲). ـ رسم نمودار رابطه بین سیب‌زمینی و قیمت آن با توجه به رابطه وزن سیب‌زمینی و قیمت آن (سؤال ۶ کار در کلاس ۶)
		تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	ـ استفاده از نسبت برای بیان نرخ یک کالا
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	ـ استفاده از روش رسم شکل برای حل مسائل مربوط به نسبت (سؤال ۴ از مسائل صفحه ۲۲). ـ نمایش‌های جبری و رسم نمودار برای حل مسائل مربوط به نسبت. (صفحه ۲۲ سؤال ۴)
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه‌کردن ارزیابی‌کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ مقایسه نرخ‌های متفاوت یک کالا (مسئله ۴ صفحه ۳۰)

بخش اول: نسبت‌های مستقیم

اهداف بخش

- درک مفهوم نسبت به‌عنوان رابطۀ بین مقدارهای دو کمیت
- استفاده از روش‌های مختلف (رسم شکل، روش هندسی، روش جبری) برای حل مسائل مربوط به کمیت‌های متناسب مستقیم
- مدل‌سازی رابطۀ بین دو کمیت متناسب مستقیم به کمک عبارت ضربی
- یافتن مقادیر متناظر دو کمیت متناسب مستقیم
- درک مفهوم نرخ و استفاده از آن برای محاسبۀ مقادیر کمیت‌های متناسب
- استفاده از مفهوم نرخ برای مقایسۀ رابطۀ بین کمیت‌های متناسب
- محاسبۀ ضریب تبدیل برای واحدهای مختلف یک کمیت یا دو کمیت مختلف

واژه های کلیدی:

نسبت، تناسب، ضریب تبدیل، نرخ، رابطۀ جمعی، رابطۀ ضربی.

نگاه کلی به بخش:

این بخش با طرح مسئله‌ای مربوط به اندازه‌گیری طول با یک واحد مشخص آغاز می‌شود تا زمینۀ انجام یک فعالیت برای درک کمیت‌های متناسب فراهم شود. هنرجویان با انجام این فعالیت ضمن حل مسئلۀ طرح شده رابطۀ بین دو مقدار از یک کمیت را در قالب جدول و نمودار نشان می‌دهند. این رابطه با نسبت بین مقادیر این کمیت‌ها مشخص می‌شود که به‌عنوان ضریب تبدیل نام‌گذاری می‌شود. مثال‌هایی که در ادامه می‌آیند، ضمن اشاره به نقش ضریب تبدیل واحدها روش‌های رسم شکل، هندسی و جبری برای حل مسائل مرتبط با نسبت را ارائه می‌کنند. در ادامه نسبت بین کمیت‌های متناسبی که از یک جنس نیستند یا واحدهای اندازه‌گیری آنها یکسان نیست به‌عنوان نرخ معرفی می‌شوند و زمینۀ لازم برای مقایسۀ نرخ‌های دو کمیت فراهم می‌شود. در قسمت آخر بخش به نوع دیگری از رابطۀ بین دو کمیت اشاره می‌شود که به جای ثابت بودن تقسیم دو مقدار کمیت، تفاضل مقدار دو کمیت ثابت هستند. این گونه رابطه‌ها را رابطۀ جمعی می‌نامند. رابطۀ بین کمیت‌های متناسب در واقع رابطه‌ای ضربی است.

ورود به مطلب:

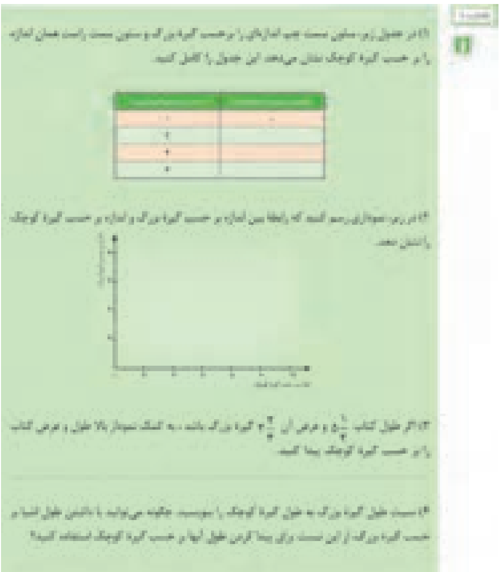
برای ورود به مطلب می‌توان ضمن اشاره به تاریخچه و اهمیت استفاده از نسبت، از هنرجویان خواست که نمونه‌هایی از کاربرد نسبت در زندگی روزمره یا دروس دیگر خود را مطرح کنند، درصورتی‌که مطالب ارائه شده توسط آنها قابلیت تبدیل به فعالیت را داشته باشد، فعالیتی بر پایهٔ آن مطرح کنید. در غیر این صورت با بیان شفاهی مسئلهٔ مطرح شده در کتاب یا با مطالعهٔ متن ابتدای فصل انگیزهٔ لازم برای انجام فعالیت توسط هنرجویان را فراهم کنید.

فعالیت آموزشی

نمایش رابطهٔ بین دو کمیت متناسب معمولاً با روش‌های زیر انجام می‌شود:

- جدول
- رسم نمودار
- یک عبارت به زبان فارسی
- معادله (عبارت جبری)

هر کدام از این روش‌ها ویژگی‌های خاص خود را دارند که برخی از آنها عبارت‌اند از: در نمایش جدولی با ارائهٔ چند مقدار متناظر از مقادیر متناسب، یکسان بودن نسبت این مقادیر(تناسب) به خوبی مشخص می‌شود.



در رسم نمودار، دید کلی‌تری از رابطهٔ بین مقادیر متناسب به نمایش در می‌آید.

بیان رابطه بین دو کمیت متناسب به صورت یک عبارت به زبان فارسی امکان درک بهتر مفهوم نسبت را افزایش می‌دهد.

در نمایش جبری، ارتباط بین مقادیر در قالب یک فرمول (معادله) ارائه می‌شود استفاده از این معادله برای یافتن مقادیر متناظر به‌سادگی قابل انجام است.

در هر کدام از قسمت‌ها توصیه می‌شود از هنرجویان خواسته شود تا نمایش‌های مختلف رابطهٔ بین دو نسبت را به یکدیگر تبدیل کنند.

اهداف موضوعی:

■ درک رابطهٔ بین دو واحد اندازه‌گیری از یک کمیت از طریق مقایسهٔ نسبت مقادیر متناظر.

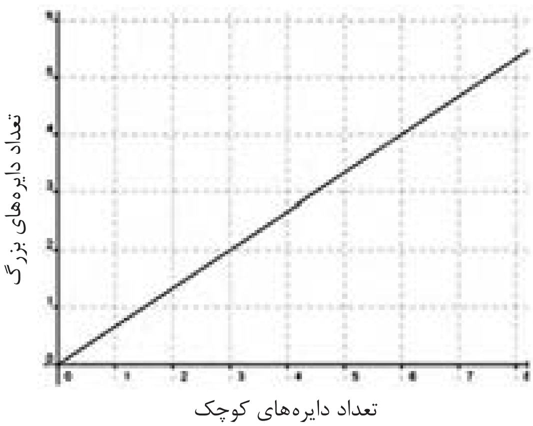
مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت استفاده از جدول، مهارت استفاده از نمودار، الگویابی، تفکر بصری

۱ جدول تکمیل شده:

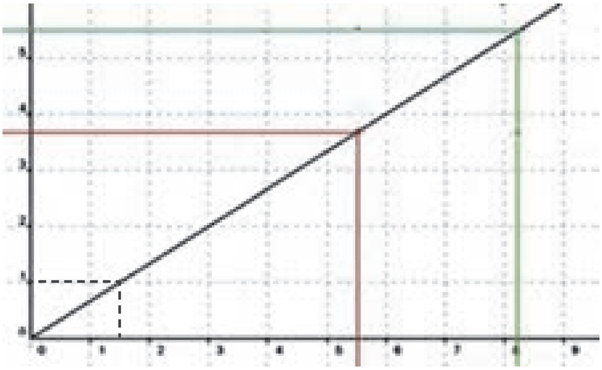
اندازه برحسب گیره‌های کوچک	اندازه برحسب گیره‌های بزرگ
٠	٠
۳	۲
۶	۴
۹	۶

۲ نمودار رسم شده:



۳ با استفاده از نمودار ملاحظه می‌شود طول و عرض برحسب گیرهٔ کوچک عبارت است از:

طول بر حسب گیرهٔ کوچک تقریباً برابر $۸\frac{۱}{۵}$ و عرض برحسب گیرهٔ کوچک برابر $۵\frac{۶}{۱۰}$ است.



۴ توجه داشته باشید که اگر از نقطه ۱ روی محور yها موازی محورها x رسم کنیم و سپس از محل برخورد آن با نمودار موازی محور yها رسم کنیم، مشاهده می‌شود که ۱/۵ گیره کوچک داریم یعنی نسبت طول گیرهٔ بزرگ به طول گیرهٔ کوچک عبارت است از $\frac{۳}{۲}$ (توجه کنید نسبت تعداد گیره‌های بزرگ به تعداد گیره‌های کوچک $\frac{۲}{۳}$ است). برای به‌دست آوردن طول برحسب گیرهٔ کوچک کافی است طول برحسب گیرهٔ بزرگ را در $\frac{۳}{۲}$ ضرب کنیم.

(طول برحسب گیره کوچک = $\frac{۳}{۲}$ × طول برحسب گیره بزرگ)

مثلاً در این مسئله داریم: طول کتاب $۵\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۱۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=۸\frac{۱}{۴}$

عرض کتاب بر حسب گیرهٔ کوچک: $۳\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۱۱}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۵\frac{۱}{۲}$

هر گاه دو کمیت متناسب رابطهٔ مستقیم داشته باشند دارای ویژگی‌های مهم زیر هستند:

✓ با افزایش یکی از آنها دیگری نیز افزایش می‌یابد.

✓ نمودار رابطهٔ آنها یک خط راست است که از مبدأ می‌گذرد و شیب این خط همان نسبت بین دو کمیت (ضریب تبدیل) می‌باشد.

پس از حل فعالیت توسط هنرجویان می‌توان سؤالات زیر را از آنها پرسید:

- آیا با افزایش یک کمیت (یا واحد)، کمیت (یا واحد) دیگر افزایش می‌یابد یا کاهش می‌یابد.
- آیا نمودار این رابطه، یک خط راست است؟

■ آیا می‌توانید معادلهٔ این خط را بنویسید؟

■ شیب (ضریب زاویه) این خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

■ نمودار دو کمیت متناسب مستقیم از کدام نقطه همیشه می‌گذرد؟ (جواب: (۰و۰))

۱) آیا دو نسبت ۴۲ به ۸۸ و ۶ به ۱۱ دو نسبت مساوی‌اند؟

بله: K برابر است با

خیر: نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با نسبت ۴۲ به ...... و K برابر است با ......

۲) آیا دو نسبت ۲ به ۵ و ۱۰ به ۲۵ دو نسبت مساوی‌اند؟

بله: K برابر است با

خیر: نسبت ۲ به ۵ برابر است با نسبت ...... به ......

۳) در یک روزنامه عکس‌ها با ابعاد ۶×۵ چاپ می‌شوند. در مرحلهٔ صفحه‌آرایی تصمیم گرفته شد عکس‌ها با طول ۱۲ چاپ شوند. عرض عکس‌ها چقدر باید باشد؟

اهداف:

■ حل مسئله مرتبط با نسبت

۱ خیر، نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با ۴۲ به ۷۷ و K برابر است با : $\frac{۶}{۱۱}$

۲ بله، برابر است با: $\frac{۲}{۵}$

۳ $\frac{۵}{۶} = \frac{x}{۱۲} = k \Rightarrow x = ۱۲k = ۱۲ \times \frac{۵}{۶} = ۱۰$

فعالیت آموزشی

در میدان تره‌بار، هر ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی ۲۰۰۰ تومان است.

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم نرخ

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی، بازنمایی‌های چندگانه

۱ نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن، برابر است با: ۳۰۰۰ تومان به ۳ کیلو گرم سیب زمینی

۲ نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن برابر است با ۱۰۰۰ تومان به ۱کیلوگرم سیب‌زمینی.

۳ این نسبت نشان می‌دهد که با ۱۰۰۰ تومان می‌توان ۱ کیلو گرم سیب‌زمینی خرید.

۴ نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن، برابر است با: ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی به ۳۰۰۰ تومان

۵ نسبت وزن سیب‌زمینی به قیمت آن برابر است با $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کیلوگرم سیب‌زمینی به ۱ تومان.

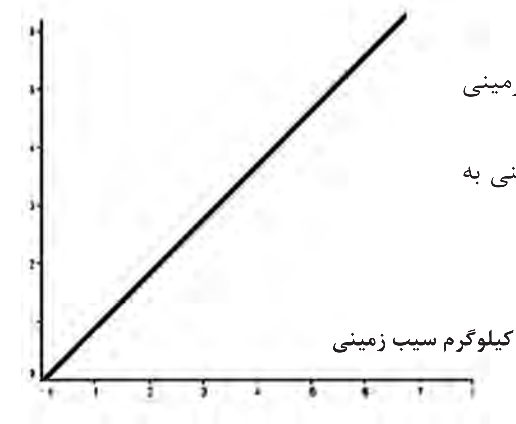
۶ این نسبت نشان می‌دهد که با ۱ تومان می‌توان $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کیلوگرم (۱ گرم) سیب‌زمینی خرید.

۷ برای پیداکردن قیمت ۵ کیلوگرم سیب‌زمینی رابطهٔ زیر را کامل کنید.

$$\frac{\text{۵ کیلوگرم سیب‌زمینی}}{\text{۵۰۰۰ تومان}} = \frac{\text{۳ کیلوگرم سیب‌زمینی}}{\text{۳۰۰۰ تومان}}$$

۸ نمودار رابطهٔ بین مقدار سیب زمینی و قیمت آنها را رسم کنید.

۹ شیب، نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن را نشان می‌دهد.



در مثال‌های این قسمت نسبت دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف (نرخ) در بافت‌های مختلف عنوان شده است تا هنرجو درک بهتری از مفهوم نرخ داشته باشد و زمینهٔ مقایسهٔ نرخ‌های مختلف از دو کمیت در بافت‌های عنوان شده فراهم شود. در این قسمت همچنین روش‌های مختلف حل مسائل مربوط به نرخ مطرح شده است.

کار در کلاس ۴

۱) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده در دو ماشین مختلف به ترتیب $\frac{\text{۳۰ لیتر}}{\text{۳۲۰ کیلومتر}}$ و $\frac{\text{۲۷ لیتر}}{\text{۳۰۰ کیلومتر}}$ است. کدام ماشین باصرفه‌تر است؟

۲) بلیت‌های یک سینما در یک ساعت مانده به شروع فیلم، در هر دقیقه به میزان ثابتی به فروش می‌رسد. اگر این سینما ۲۴۰ بلیت را در ۱۶ دقیقه بفروشد، ابتدا نرخ فروش بلیت در دقیقه را پیدا کنید. سپس به کمک آن، تعداد بلیت‌های فروخته شده در هر ساعت را به‌دست آورید.

اهداف:

- کسب مهارت در محاسبهٔ نرخ دو کمیت متناسب .
- کسب مهارت در استفاده از نرخ در حل مسائل.

۱ نرخ مصرف در ماشین اول $\frac{۳۰}{۳۲۰} = ۰/۰۹۳$ و در ماشین دوم $\frac{۲۷}{۳۰۰} = ۰/۰۹$ است یعنی ماشین اول در یک کیلومتر ۰/۰۹۳ لیتر و ماشین دوم در یک کیلومتر ۰/۰۹ لیتر مصرف می‌کند، پس مصرف ماشین دوم کمتر و مقرون به صرفه‌تر است.

۲ نرخ فروش بلیت در دقیقه $\frac{۲۴۰}{۱۶} = ۲۴۰ \div ۱۶ = ۱۵$

تعداد بلیت‌های فروخته شده در ساعت: $۱۵ \times ۶۰ = ۹۰۰$

فعالیت آموزشی

فعالیت ۳

علی و احمد **با سرعت برابر** در یک مسیر دایره‌ای دوچرخه سواری می‌کردند. علی زودتر از احمد دوچرخه‌سواری را شروع کرده بود؛ به طوری که وقتی او ۹ دور زده بود، احمد ۳ دور زده بود.

اهداف موضوعی:

- آشنایی با رابطهٔ جمعی بین دو کمیت
- مقایسهٔ رابطهٔ جمعی و ضربی بین دو کمیت.
- تشخیص نوع رابطه (جمعی یا ضربی) بین دو کمیت با استفاده از مقادیر مختلف دو کمیت.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، الگویابی، مقایسه‌کردن

۱ تکمیل‌شدهٔ جدول:

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۶
۳	۹
۶	۱۲
۹	۱۵

۲ کافی است از اعداد ستون اول (از سمت چپ) ۶ واحد کم کنیم تا اعداد ستون دوم به‌دست آیند. این فعالیت تمرینی است برای الگویابی در دو مرحله. ابتدا در مرحله اول، اعداد ستون سمت چپ کامل می‌شوند و سپس با کشف رابطه بین دو ستون اعداد ستون دوم کامل می‌شوند.

۳ سرعت علی ۳ برابر سرعت احمد است.

۴ تکمیل شده جدول:

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۰
۳	۹
۴	۱۲
۵	۱۵

۵ کافی است اعداد ستون اول را بر ۳ تقسیم کنیم تا اعداد ستون دوم به‌دست آیند.

در مثال بعد از این فعالیت، سؤالی در مورد رابطهٔ بین سن دو نفر مطرح شده است. با توجه

به اینکه در هر زمان با افزودن عددی ثابت به سن یکی ، سن دیگری به دست می‌آید، این رابطه جمعی است. معادلهٔ جبری این رابطه به صورت $y = x + k$ است و می‌توان از هنرجویان خواست تفاوت آن را با معادلهٔ مربوط به نسبت مستقیم بررسی کنند.

مسئله‌ها

۱) در نقشهٔ زیر، هر ۳ سانتی‌متر نشان‌دهندهٔ ۵ کیلومتر است. دو نقطه را در روی نقشه انتخاب کنید. فاصلهٔ آنها روی نقشه چقدر است؟ فاصلهٔ واقعی آنها از هم چقدر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال

از هنرجویان بخواهید با استفاده از یک نقشه فاصلهٔ بین دو نقطهٔ مهم (مثلاً دو شهر مهم در نقشهٔ شهرهای ایران) را روی نقشه اندازه‌گیری کنند و به کمک مقیاس آن (که در کنار نقشهٔ درج شده است) فاصلهٔ واقعی این دو شهر را پیدا کنند و آن را با فاصلهٔ رسمی اعلام شدهٔ بین دو شهر مقایسه کنند. درصورت وجود تفاوت دلیل این تفاوت را بیابند.

۲) مینا برای تهیهٔ نوعی سس سالاد ، به کتاب آشپزی مراجعه کرد. نسبت روغن به سرکه در آن سس، ۳ به ۴ بود. مینا گفت: یعنی ۷۵٪ سس روغن است. آیا مینا درست متوجه شده بود؟ توضیح دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، استدلال کردن

جواب: خیر، اگر نسبت روغن به کل سس ۳ به ۴ باشد ۷۵ درصد سس روغن است اما در اینجا نسبت روغن به سرکه گفته شده است.

۳) عکاسی می‌خواهد عکسی را در ابعاد ۲۵ × ۳۵ بزرگ کند و سپس آن را روی مقوایی به طول شصت‌سانتی‌متر چاپ کند. عرض عکس بزرگ شده چقدر خواهد بود؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی، پیوند اتصال ریاضی و خارج ریاضی

طول مقوا را متناظر طول عکس در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۳۵}{۲۵}=\frac{۵۵}{x}=k \rightarrow x=۵۵\times\frac{۲۵}{۳۵}=\frac{۲۷۵}{۷}$$

۴) علی هر ماه مقداری ثابت پول را پس‌انداز می‌کند. جدول زیر مقدار پس‌انداز او را در چند ماه نشان می‌دهد.

[illegible]	[illegible]
۲	۳۵۰
۴	۷۰۰
۶	۱,۰۵۰
۸	—
۱۰	—

این جدول به سه روش رسم شکل، رسم نمودار و جبری کامل کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، پیوندها و اتصال‌ها، الگویابی

رسم شکل:

۱	۱

۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰

هشت ماه:

۴	۴

۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰

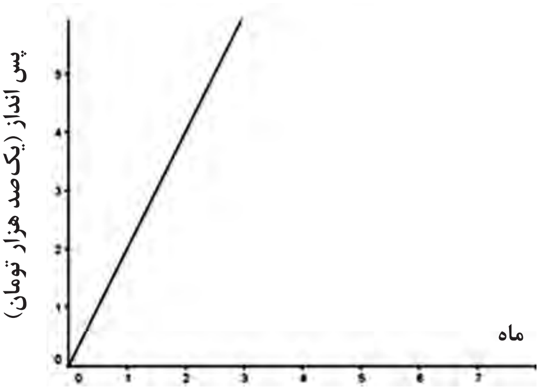
$۷\times۲۰۰=۱۴۰۰$

۱۰ ماه: $۷\times۲۵۰=۱۷۵۰$

۵	۵

۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰

نمودار:



جبری: پس از ۸ ماه: $۱۴۰۰ = ۸ \times \frac{۳۵۰}{۲}$ و پس از ۱۰ ماه: $۱۷۵۰ = ۱۰ \times \frac{۳۵۰}{۲}$

بخش دوم: نسبت‌های معکوس

اهداف بخش

- درک مفهوم رابطهٔ معکوس بین دو کمیت متناسب
- تشخیص رابطهٔ معکوس بین دو کمیت متناسب
- یافتن مقادیر متناظر دو کمیت که با هم رابطهٔ معکوس دارند.
- مدل‌سازی رابطهٔ بین دو کمیت متناسب معکوس به کمک تقسیم.

واژه‌های کلیدی:

نسبت معکوس، نسبت مستقیم.

نگاه کلی به بخش:

یکی از اشتباهات رایج که در حل مسائل مربوط به کمیت‌های متناسب اتفاق می‌افتد ناشی از عدم درک تفاوت بین نسبت‌های مستقیم و معکوس می‌باشد. این بخش با طرح یک مسئله و شرح فرایند حل آن توسط یکی از هنرجویان آغاز می‌شود. در این مسئله این اشتباه باز شده است تا با تحلیل جواب به‌دست آمده و پی بردن به نتیجهٔ نادرست توسط خود هنرجو، زمینهٔ لازم برای معرفی مفهوم نسبت معکوس فراهم شود.

در ادامه، با مقایسهٔ تفاوت بین رابطهٔ کمیت‌های متناسب مستقیم و کمیت‌های متناسب معکوس، روش تشخیص کمیت‌های متناسب معکوس بیان می‌شود و جهت درک بهتر این‌گونه رابطه‌ها، نموداری از یک رابطهٔ معکوس بین دو کمیت ارائه می‌شود. تأکید بر ثابت بودن حاصل ضرب مقادیر متناظر از دوکمیت که دارای رابطهٔ معکوس هستند، به‌عنوان یکی از ویژگی‌های اساسی این‌گونه رابطه‌ها به هنرجویان در درک و تشخیص بهتر این‌گونه رابطه‌ها کمک می‌کند. در مثال‌ها و کار در کلاس‌ها این نکته نیز ذکر می‌شود که همهٔ کمیت‌ها لزوماً متناسب مستقیم یا معکوس نیستند.

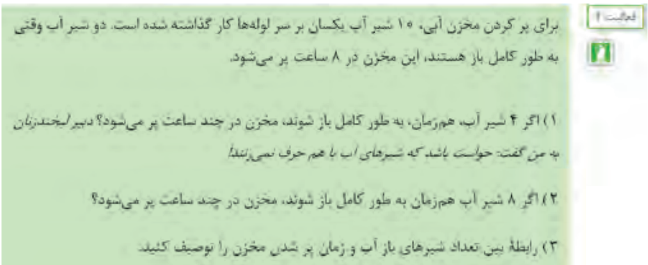
در این بخش از هنرجویان خواسته می‌شود که مسئله‌ای در زمینهٔ کمیت‌های متناسب با رابطهٔ معکوس طرح کنند. با این کار، هنرجویان برای طرح موفقیت‌آمیز مسئله در موقعیت مفروض، سعی می‌کنند دانسته‌های خود را سازماندهی و منسجم کنند و در قالب مسائل خوش تعریف بیان کنند. در این صورت، حتی اگر در طرح مسئلهٔ صحیح چندان هم موفق نباشند، تلاش صورت گرفته توسط

آنها فرصت بازتاب روی محتوای مورد نظر را در اختیارشان قرار می‌دهد. این امر می‌تواند به فهم عمیق‌تر موضوع کمک کند و باعث شود هنرجویان از طرح مسئله و یادگیری ریاضی لذت ببرند. این عمل، همچنین به دبیران کمک می‌کند تا نسبت به ادراکات و دانش ریاضی هنرجویان بصیرت بهتری به دست آورند.

ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب می‌توان مثال‌هایی از کمیت‌های متناسب با رابطهٔ معکوس را مطرح کرد و با دادن یک مقدار از این کمیت‌ها، از هنرجویان خواست مقدار متناظر آن را به‌دست آورند و تأثیر رفتار یک کمیت بر کمیت دیگر را بیان کنند. مثلاً با کاهش یک کمیت، کمیت دیگر چه تغییری پیدا می‌کند؟ یا می‌توان از هنرجویان خواست با مطالعهٔ مطالب ابتدای بخش به حل فعالیت ۴ بپردازند.

فعالیت آموزشی


فعالیت ۴

برای پر کردن مخزن آبی، ۱۰ شیر آب یکسان بر سر لوله‌ها کار گذاشته شده است. دو شیر آب وقتی به طور کامل باز هستند، این مخزن در ۸ ساعت پر می‌شود.

۱) اگر ۴ شیر آب، هم‌زمان، به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟ *دبیر لبخندزنان به من گفت: حواست باشد که شیرهای آب با هم حرف نمی‌زنند!*

۲) اگر ۸ شیر آب هم‌زمان به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟

۳) رابطهٔ بین تعداد شیرهای باز آب و زمان پر شدن مخزن را توصیف کنید.

اهداف موضوعی:

- درک رابطهٔ بین دو کمیت متناسب معکوس.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی.

۱ چون تعداد شیرها دو برابر شده است، پس زمان نصف می‌شود. یعنی ۴ ساعت

۲ چون در این حالت تعداد شیرها دو برابر حالت (۱) شده است، زمان نیز نصف زمان حالت (۱) است، یعنی ۲ ساعت.

۳ هرچه تعداد شیرهایی که آب از طریق آنها وارد حوض می‌شود افزایش یابد سرعت پرشدن حوض بیشتر شده و حوض در زمان کمتری پر خواهد شد. بنابراین با افزایش تعداد شیرها، زمان پر شدن حوض کاهش خواهد یافت.

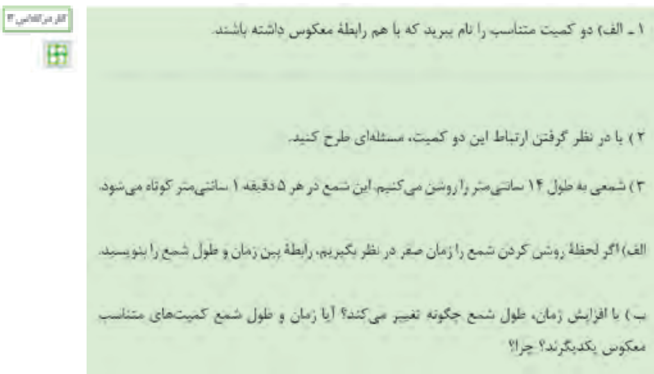
توضیحات پس از فعالیت در ایجاد درک صحیح از رابطهٔ بین دو کمیت متناسب

که رابطهٔ معکوس دارند نقش اساسی دارند بنابراین توصیه می‌شود این توضیح‌ها به‌صورت پرسش و پاسخ بین دبیر و هنرجویان مطرح شود تا همگی آنها ضمن مشارکت در فرایندِ درک مفهوم به اشکالات احتمالی خود در درک این مفهوم پی ببرند. در غیر این صورت دبیر از هنرجویان بخواهد که با مطالعهٔ متنِ پس از فعالیت، اشکالات احتمالی خود از درک مطلب را از دبیر سؤال کنند. طی مراحل ذکر شده در پرسش و پاسخ دبیر و هنرجو، در چند مسئلهٔ مشابه به درک بیشتر این مفهوم کمک می‌کند.

توجه کنید که دو کمیت متناسب که با هم رابطهٔ معکوس دارند، دارای ویژگی‌های زیر هستند.

- ✓ حاصل ضرب مقادیر متناظر از این دو کمیت مقدار ثابتی است، بنابراین با افزایش (کاهش) یکی از آنها دیگری کاهش (افزایش) می‌یابد.
- ✓ نمودار رابطه یک شاخه از هذلولی است.

پس از انجام این فعالیت می‌توان برای درک بهتر مفهوم و تشخیص نسبت‌های معکوس این ویژگی‌ها را برای هنرجویان توصیف کرد (مثلاً از روی نمودار مشخص کرد که تغییرات یک کمیت چه تأثیری بر تغییرات کمیت دیگر دارد. یا با دادن مقادیر بیشتری از یک کمیت مقدارهای بیشتری از کمیت دیگر را به‌دست آورد) و در مسائل مختلف به این ویژگی‌ها اشاره داشت.


۱ ـ الف) دو کمیت متناسب را نام ببرید که با هم رابطهٔ معکوس داشته باشند.

۲) با در نظر گرفتن ارتباط این دو کمیت، مسئله‌ای طرح کنید.

۳) شمعی به طول ۱۴ سانتی‌متر را روشن می‌کنیم. این شمع در هر ۵ دقیقه ۱ سانتی‌متر کوتاه می‌شود.

الف) اگر لحظهٔ روشن کردن شمع را زمان صفر در نظر بگیریم، رابطهٔ بین زمان و طول شمع را بنویسید.

ب) با افزایش زمان، طول شمع چگونه تغییر می‌کند؟ آیا زمان و طول شمع کمیت‌های متناسب معکوس یکدیگرند؟ چرا؟

اهداف:

- ■ تقویت مهارت تشخیص کمیت‌های متناسب معکوس.
- ■ پرورش مهارت‌های الگویابی، مدل‌سازی، استدلال کردن، طرح مسئله

۱ مثال‌های متنوعی از محیط پیرامونی را می‌توان مطرح کرد. درصورتی‌که لازم باشد دبیر می‌تواند با ذکر ویژگی‌های کمیت‌های متناسب با نسبت معکوس (از جمله اینکه با افزایش مقادیر یکی مقدار دیگری کاهش می‌یابد) به ارائهٔ مثال‌ها توسط هنرآموزان کمک کند، یا پاسخ‌های درست را تفسیر و پاسخ‌های نادرست را به کمک هنرجویان تحلیل و تصحیح کند.

۲ طرح یک مسئله می‌تواند با راهنمایی دبیر انجام شود.

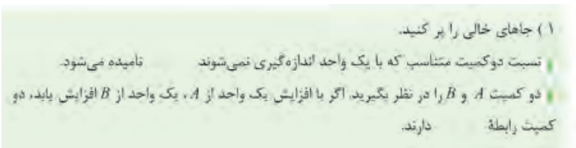
۳

الف) $y = ۱۴ - \frac{t}{۵}$

(یا به صورت کلامی: طول شمع برحسب سانتی‌متر = $\frac{۱}{۵}$زمان طی شده برحسب دقیقه - ۱۴)

ب) با افزایش و گذر زمان طول شمع کاهش می‌یابد. چون حاصل ضرب این دو کمیت عدد ثابتی نیست، بنابراین رابطهٔ بین این دو کمیت از نوع تناسب معکوس نیست. نمودار این رابطه بخشی از خط است درحالی که نمودار رابطه‌های معکوس یک منحنی هذلولی است. این سؤال اشاره به یک اشتباه که ممکن است برای هنرجویان اتفاق بیفتد دارد، نوع رابطهٔ بین طول شمع و مدت زمان سوختن شمع (که با افزایش زمان، طول شمع کاهش می یابد) ممکن است این تصور را در ذهن هنرجو ایجاد کند که کمیت های ذکر شده متناسب معکوس هستند. اما علاوه بر تشخیص از روی نمودار ، با توجه به رابطه خطی بین این دو کمیت (و اینکه حاصل ضرب این دو کمیت یک عدد ثابتی نیست) می توان فهمید که متناسب معکوس نیستند.

مسئله‌ها


۱) جاهای خالی را پر کنید.
- نسبت دوکمیت متناسب که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند .... نامیده می‌شود.
- دو کمیت A و B را در نظر بگیرید. اگر با افزایش یک واحد از A، یک واحد از B افزایش یابد، دو کمیت رابطهٔ .... دارند.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ بازیابی اطلاعات

- نسبت دو کمیت متناسب که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند نرخ نامیده می‌شود.
- دو کمیت A و B را در نظر بگیرید اگر با افزایش هر واحد از A یک واحد از B افزایش یابد دو کمیت رابطهٔ جمعی دارند.

۲) دو مثال از نرخ بیان کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، پرورش تفکر واگرا

قیمت میوه به وزن آن، مسافت طی شده نسبت به زمان سپری شده از شروع حرکت در یک خودرو با سرعت ثابت و ....

۳) اگر ضریب تبدیل واحد A به B عدد $\frac{۲}{۳}$ باشد، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) ۴ واحد از A معادل چند واحد از B است؟

ب) ۴ واحد از B معادل چند واحد از A است؟

پ) ضریب تبدیل واحد B به واحد A را بنویسید.

ت) رابطهٔ بین این دو واحد را با نمودار نشان دهید و به پرسش‌های الف و ب از روی نمودار پاسخ دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

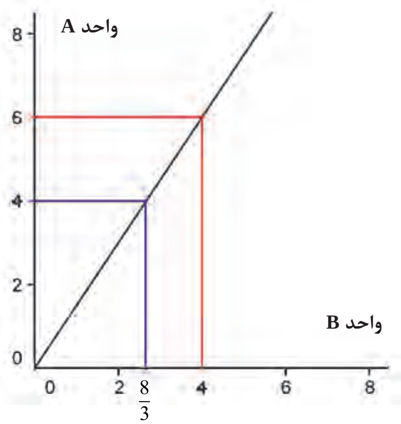
■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، تفکر بصری

حل: الف) $x = ۴ \times \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$

ب) $x = ۴ \times \frac{۳}{۲} = ۶$

پ) $\frac{۳}{۲}$

ت)



۴) جدول زیر نوعی کالا را نشان می‌دهد که در سه اندازهٔ کوچک، متوسط و بزرگ بسته بندی شده است.

کوچک	۱/۵	۱,۲۰۰		
متوسط	۴	۳,۰۰۰		
بزرگ	۱۵	۱۰,۰۰۰		

الف) جدول را کامل کنید.

ب) کدام بسته با صرفه‌تر است؟

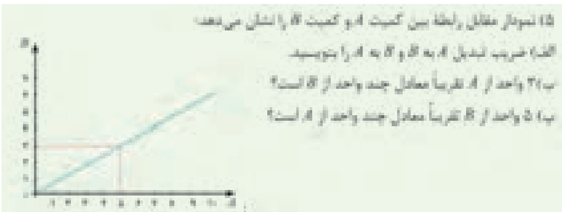
مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، مقایسه‌کردن

حل: الف)

نوع	وزن (کیلوگرم)	قیمت (تومان)	نسبت وزن به قیمت	نسبت قیمت به وزن
کوچک	۱/۵	۱۲۰۰	۰/۰۰۱۲۵	۸۰۰
متوسط	۴	۳۰۰۰	۰/۰۰۱۳۳	۷۵۰
بزرگ	۱۵	۱۰۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۶۶۶/۶۷

ب) بسته بزرگ زیرا قیمت آن نسبت به وزن از بقیه بسته ها کمتر است.



۵) نمودار مقابل رابطهٔ بین کمیت A و کمیت B را نشان می‌دهد.

الف) ضریب تبدیل A به B و B به A را بنویسید.

ب) ۳ واحد از A تقریباً معادل چند واحد از B است؟

پ) ۵ واحد از B تقریباً معادل چند واحد از A است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پرورش تفکر بصری

حل:

الف) ضریب تبدیل A به B عبارت است از: $\frac{۳}{۵}$ و ضریب تبدیل B به A عبارت است از: $\frac{۵}{۳}$.

ب) $\frac{۳}{۵}\times ۳=\frac{۹}{۵}=۱/۸$

پ) $\frac{۵}{۳}\times ۵=\frac{۲۵}{۳}\approx ۸/۳۳$

۶) از میان کمیت‌های متناسب زیر، کدام مستقیم و کدام معکوس است؟

الف) وزن یک کالا و قیمت آن؛

ب) تعداد شیرهایی که یک حوض آب را پر می‌کنند و زمان پر شدن حوض؛

پ) زمان مکالمه با تلفن همراه و هزینهٔ آن؛

ت) تعداد مشتریان در یک بانک به زمان انتظار آنها با فرض برابری زمان سرویس‌دهی؛

ث) وزن بستهٔ پستی و هزینهٔ ارسال بدون در نظر گرفتن هزینهٔ ثابت؛

ج) تعداد کارگران و زمان انجام کار برای تخلیهٔ بارهای یک انبار؛

چ) درامد حاصل از دریافت عوارضی در یک اتوبان و تعداد ماشین‌هایی که از آن عبور می‌کنند.

مهارت‌ها و فرایندها:

- مقایسه کردن، استدلال کردن

حل: هر دو کمیت متناسب که با افزایش یکی دیگری نیز افزایش یابد مستقیم و در غیر این‌صورت معکوس است:

الف) مستقیم　ب) معکوس　پ) مستقیم　ت) مستقیم　ث) مستقیم

ج) معکوس　چ) مستقیم

توسعه دانش

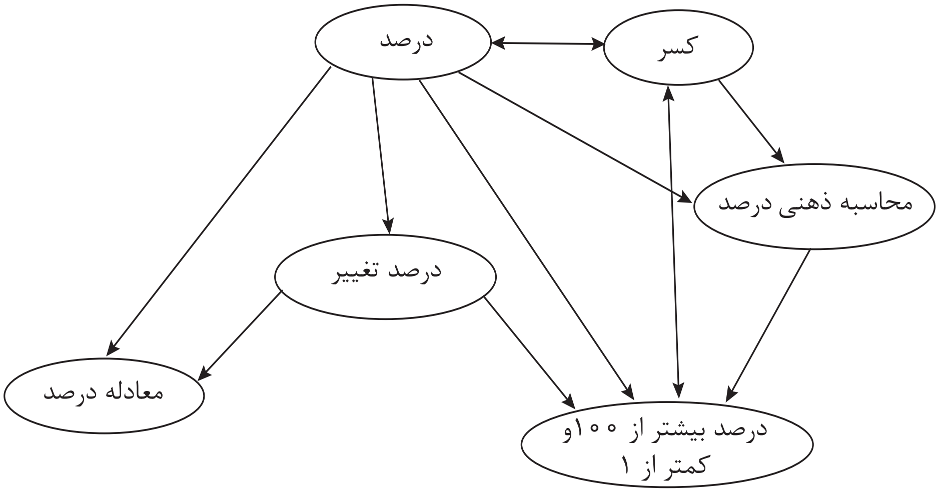
مطالب این فصل در ارتباط با چند نوع خاص از رابطه‌های بین دو کمیت بود. این رابطه‌ها از ساده‌ترین رابطه‌های ممکن بین دو کمیت بودند که همواره مورد توجه بوده و در زندگی روزانه مورد استفاده قرار می‌گیرند. توسعهٔ این مفهوم در فصل آخر کتاب تحت عنوان تابع انجام شده است. عملاً در این فصل به‌طور غیر مستقیم با مفهوم تابع سر و کار داشته‌ایم بدون آنکه نامی از تابع بیاوریم.

درکمیت‌های متناسب مستقیم رابطهٔ بین آنها با ضابطهٔ $y = Kx$ بیان و درکمیت‌های متناسب معکوس رابطهٔ آنها با ضابطهٔ $y = \frac{k}{x}$ بیان و در کمیت‌هایی که رابطه جمعی داشتند، رابطه بین آنها با ضابطهٔ $y = x+K$ بیان می‌شد. تمام اینها انواع خاصی از توابع هستند. در برخی از مسائل با ترکیبی از این توابع هم برخورد کرده‌اید. مثلاً در مسئلهٔ سوختن شمع که طول آن مرتبط با زمان سپری شده بود و با افزایش زمان، طول شمع کاهش می‌یافت اما این رابطه از نوع تناسب معکوس نبود و ضابطهٔ آن به‌صورت $y = Kx+b$ بوده است. بنابراین رابطهٔ بین طول شمع و زمان ترکیبی از تناسب مستقیم و رابطهٔ جمعی است. منتها در اینجا مقدار K منفی است و به همین خاطر با افزایش زمان طول شمع کاهش می‌یابد. در کمیت‌های متناسب مستقیم معمولاً ضریب تناسب K مثبت است زیرا کمیت‌های هندسی و فیزیکی که معمولاً با آنها سر و کار داریم، مثبت هستند.

فصل دوم

درصد و کاربردهای آن

طرح کلی مفاهیم فصل دوم (نقشه مفهومی)



اهداف کلی فصل

- درک ارتباط بین کسر و درصد
- درک مفهوم درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- درک مفهوم درصد تغییر یک کمیت
- توجه به اهمیت کاربرد درصد در مسائل زندگی روزمره
- کسب مهارت محاسبهٔ ذهنی درصد

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- درصدی از یک مقدار را به‌صورت ذهنی محاسبه کنند.
- درصد را با روش‌های مختلف محاسبه کنند و روش مناسب برای هر مسئله را بیابند و به‌کار گیرند.

- برای حل مسائل مرتبط با درصد معادله تشکیل دهند و معادله را حل کنند.
- درصدهای بیش از ۱۰۰ و کمتر از ۱ مقادیر مختلف را تفسیر و محاسبه کنند.
- درصد تغییر در مقدار کمیت‌ها را محاسبه کنند.

پیش نیازها:

- آشنایی با مفهوم درصد و محاسبات مربوط به آن.

نگاه کلی به فصل

مفهوم درصد و محاسبات با آن در زندگی بسیار به‌کار می‌رود. درک درست از این مفهوم، هنرجو را برای تشخیص آن در زمینه‌های گوناگون و چگونگی محاسبه با آن آماده می‌کند.
برای مثال، در علم احتمال مقدار یک احتمال یا نتایج به‌صورت درصد نیز بیان می‌شود. ارائه آمارهای اقتصادی از رشد یا کاهش یک مقدار یا شاخص‌های اقتصادی معمولاً با درصد بیان می‌شود. در اکثر فروشگاه‌هایی که در ایامی خاص اجناس خود را با تخفیف عرضه می‌کنند، مقدار تخفیف با درصد بیان می‌شود. این قبیلِ کاربردها باعث شده است که اکثر مردم درکی از مفهوم درصد داشته باشند. مثلاً در زبان محاوره‌ای وقتی اشاره به قطعیت اتفاقی داریم از اصطلاح ۱۰۰ درصد استفاده می‌کنیم و وقتی به عدم انجام یک اتفاق یقین داریم احتمالِ انجام آن اتفاق را با صفر درصد بیان می‌کنیم.
این فصل با بیان یک داستان دربارهٔ برخی اشتباهات رایج در محاسبات با درصد شروع شده است تا یک یادآوری غیر مستقیم از مفهوم درصد انجام شود. بخش اول این فصل، حالت یادآوری مفهوم درصد و چگونگی محاسبات با درصد و محاسبات ذهنی درصد را دارد. بخش دوم به آموزش مفهوم درصدهای بیش از ۱۰۰ و کمتر از ۱ می‌پردازد و با ارائهٔ یک گزارش از یک نشریه دربارهٔ موضوعی که تقریباً همگی هنرجویان به نوعی با آن ارتباط دارند شروع شده است. این بخش از طریق مباحثهٔ هنرجو با یکی از دبیران خود آموزش را ادامه می‌دهد. بخش سوم به مفهوم درصد تغییرات یک کمیت می‌پردازد و از طریق یک فعالیت محاسباتی این مفهوم را آموزش می‌دهد.

	فرایند	توصیف فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	**حل مسئله**	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	- ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسئله‌ها و یا انتخاب مناسب آنها	- نوشتن معادله درصد و تبدیل به کسر کردن (کار در کلاس ۳)
	ارتباط کلامی	سازمان دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	- ارائهٔ توضیح برای بیان درستی یا نادرستی نظر یکی از هنرجویان (قسمت «پ» فعالیت ۱) - ارائهٔ توضیح در مورد درستی یا نادرستی تصور جعفر (سؤال ۹ از مسئله‌های بخش اول)
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	- توضیح دادن (مسئله ۷ از بخش اول)
	استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	- ارائهٔ دلیل برای مقایسه ۰/۷ و ۰/۷٪ (سؤال ۲ از مسائل بخش ۲) - ارائهٔ دلیل برای بررسی درستی یا نادرستی نظر جعفر (سؤال ۹ از مسئله‌های بخش ۱)
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کار گیری در خارج از ریاضی	- ارتباط کسر و درصد (در حوزه اعداد) - به‌کارگیری درصد در بیان رشد وزن نوزاد (ارتباط با پزشکی)
		تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	- نمایش میزان افزایش مساحت به‌صورت درصد تغییر (مثال دوم بعد از فعالیت ۳)
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	- نمایش درصد بیان‌کننده سهم بازار فروش و سود حاصل از آن به‌صورت نمودار (نمودار میله‌ای ابتدای فصل)
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	- تعمیم عبارت ضربی مربوط به محاسبهٔ درصد یک مقدار خاص به معادله درصد (فعالیت ۲) - مقایسهٔ ۰/۷ و٪ ۰/۷ (سؤال ۲ از مسئله‌های بخش ۲) - مقایسهٔ درصدهای ارائه شده توسط دوفروشگاه (مسئله ۱۰ بخش ۱) - ارزیابی نظر جعفر (سؤال ۹ از مسئله بخش ۱)

بخش اول: محاسبه ذهنی درصد

اهداف بخش

- شناختن روش‌های مختلف محاسبهٔ درصد یک مقدار و کسب توانایی محاسبهٔ درصد
- بیان کسری از یک مقدار به‌صورت درصد
- بیان درصدی از یک مقدار به‌صورت کسر
- تشخیص وضعیت‌هایی که نیاز به انجام محاسبات ذهنی درصد دارد
- محاسبهٔ ذهنی درصد برخی از مقادیر
- حل مسائل مربوط به درصد با تشکیل معادله

واژه‌های کلیدی:

درصد، محاسبهٔ ذهنی درصد

نگاه کلی به بخش:

در این بخش ابتدا با روایت یک اتفاق که ناشی از برداشت اشتباه در انجام محاسبات درصد است توجه هنرجویان به یکی از اشتباهات رایج در این گونه محاسبات جلب می‌شود. سپس با انجام فعالیت روش صحیح محاسبه درصدی از مقدار و درصد کل ارائه می‌شود. در زندگی روزمره بسیار اتفاق می‌افتد که نیاز به محاسبهٔ دقیق درصد یک مقدار نداریم همچنین ابزار محاسبه (ماشینِ حساب) نیز در دسترس ما نیست. اما لازم است محاسبهٔ تقریبی و سریع از درصد داشته باشیم، مثلاً گاهی برای خرید به یک فروشگاه می‌رویم و با درصدهای تخفیف اجناس مختلف روبه‌رو می‌شویم برای تصمیم‌گیری در مورد میزان خرید لازم است تقریبی از میزان قیمت کالاهای انتخابی پس از تخفیف داشته باشیم، بنابراین لازم است مهارت‌هایی در محاسبهٔ درصد یک مقدار به‌طور ذهنی داشته باشیم. در این بخش روش‌هایی برای محاسبهٔ برخی از درصدها به‌صورت ذهنی ارائه می‌شود.

ورود به مطلب:

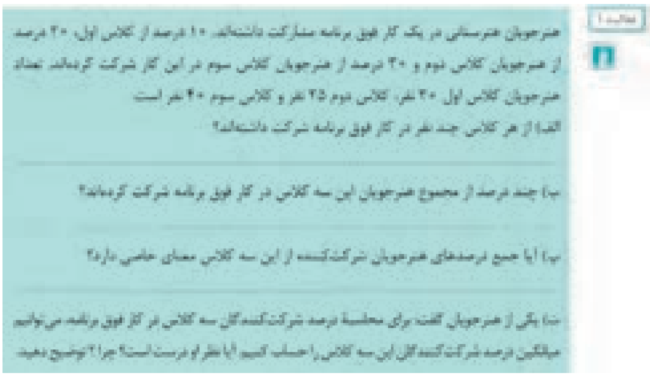
برای ورود به مطلب دبیر با توجه به سطح علمی هنرجویان در صورتی‌که نیاز است فعالیتی جهت یادآوری مفهوم درصد طراحی نماید و با بیان ارتباط بین کسر و درصد و استفاده از درصدهایی نظیر ۲۰، ۲۵، ۵۰ یا ۷۵ درصد آمادگی لازم برای ورود به مبحث را ایجاد کند. استفاده از رسم شکل برای درک بهتر مفهوم مفید است. در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند معلم می‌تواند با بیان اتفاقی نظیر آنچه در ابتدای فصل بیان شده است، سؤالاتی از این قبیل را از هنرجویان بپرسد.

■ در محاسبه درصد چه اشتباهی اتفاق افتاده بود؟

■ آیا مواردی مشابه برای شما اتفاق افتاده است که دچار اشتباه برداشت بشوید و آیا به اشتباه خود پی برده‌اید؟ آیا می‌توانید روش محاسبه خود را توصیف کنید؟

با طرح این سؤال‌ها، فضای آموزشی به سمتی هدایت می‌شود که تمامی هنرجویان در رسیدن به اهداف روایت مطرح شده، مشارکت داشته باشند. در غیر این صورت معلم می‌تواند از هنرجویان بخواهد متن ابتدای فصل را مطالعه کنند تا برای انجام فعالیت ۱ آمادگی داشته باشند.

فعالیت آموزشی


فعالیت ۱

هنرجویان هنرستانی در یک کار فوق برنامه مشارکت داشته‌اند. ۱۰ درصد از کلاس اول، ۲۰ درصد از هنرجویان کلاس دوم و ۳۰ درصد از هنرجویان کلاس سوم در این کار شرکت کرده‌اند. تعداد هنرجویان کلاس اول ۳۰ نفر، کلاس دوم ۲۵ نفر و کلاس سوم ۴۰ نفر است.

الف) از هر کلاس چند نفر در کار فوق برنامه شرکت داشته‌اند؟

ب) چند درصد از مجموع هنرجویان این سه کلاس در کار فوق برنامه شرکت کرده‌اند؟

پ) آیا جمع درصدهای هنرجویان شرکت‌کننده از این سه کلاس معنای خاصی دارد؟

ت) یکی از هنرجویان گفت برای محاسبهٔ درصد شرکت‌کنندگان کل سه کلاس در کار فوق برنامه می‌توانیم میانگین درصد شرکت‌کنندگان کل این سه کلاس را حساب کنیم. آیا نظر او درست است؟ چرا؟ توضیح دهید.

اهداف موضوعی:

■ کسب مهارتِ محاسبه درصد یک مقدار با روش‌های مختلف.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، ارتباطات کلامی، استدلال کردن، ارزیابی کردن

الف) کلاس اول: $۱۰\% \times ۳۰ = \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۳۰ = ۳$

کلاس دوم: $۲۰\% \times ۲۵ = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۲۵ = ۵$

کلاس سوم: $۳۰\% \times ۴۰ = \frac{۳۰}{۱۰۰} \times ۴۰ = ۱۲$

ب) $\frac{۳+۵+۱۲}{۳۰+۲۵+۴۰} = \frac{۲۰}{۹۵} \approx ۰/۲۱۰۵ \Rightarrow ۰/۲۱۰۵ \times ۱۰۰ = ۲۱/۰۵ \approx ۲۱\%$

پ) خیر، زیرا تعداد هنرجویان کلاس‌ها متفاوت است و مبنای محاسبه درصد سه کلاس یکسان نیست. برای یافتن میانگین درست باید با توجه به تعداد هنرجویان هر کلاس به درصد آن کلاس وزن داد و میانگین وزنی درصدهای شرکت کنندگان کلاس‌ها را به‌دست آورد. میانگین وزنی درصدها، همان جواب در قسمت (ب) است.
ت) خیر، جمع درصدها نشان دهنده هیچ مفهوم خاصی نیست.
در مورد محاسبات مربوط به میانگین، یکی ازاشتباهات رایج، ناشی از عدم توجه به معنی میانگین وزنی است. اگر بخواهیم میانگین چند مقدار را به‌دست آوریم باید فراوانی همهٔ آنها یکسان باشد و میانگینی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد (حاصل تقسیم مجموع همهٔ مقادیر بر تعداد آنها) معنی دارد. اما درصورتی‌که فراوانی آنها متفاوت است (میزان اثر بخشی هر واحد از هرکدام از داده‌ها در نتیجه یکسان نیست) میانگین معمولی معنی خاصی ندارد و لازم است برای محاسبهٔ میانگین به‌طور معنی‌دار، میانگین وزنی مقادیر را به‌دست آوریم. توجه به این موضوع، به‌ویژه مواقعی که درصدهایی از چند مقدار در اختیار داریم و می‌خواهیم درصد کل مقادیر را به‌دست آوریم، موجب اجتناب از اشتباه می‌شود. با توجه به وضعیت کلاس، دبیران محترم می‌توانند جهت ارتقای مهارت محاسبهٔ درصد و درک اشتباه رایج کار در کلاس‌ها یا مسئله‌هایی منطبق با اهداف این فعالیت طرح کرده و از هنرجویان بخواهند تا آنها را حل کنند و روش حل خود را توصیف و نتایج حاصل را تفسیر کنند. در صورت وجود درک نادرست از این موضوع با ارائهٔ توضیحات مناسب می‌توان هنرجویان را به درک صحیحی از این مفهوم رساند.
یکی دیگر از اشتباهات رایج را در مسئلهٔ زیر و حل آن توسط یکی از هنرجویان می توان دید :
یکی از فروشندگان کالا در پایان هفته ۲۰ قلم از یک نوع کالا را فروخته است اگر قیمت هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان بوده باشد و ۲۰ درصد سود کرده باشد میزان سود او در هر قلم کالا چقدر است؟

حل هنرجو:
برای هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان دریافت کرده است که ۲۰ درصد آن سود می‌باشد.
بنابراین میزان سود برابر ۶۰۰۰=٪۲۰×۳۰۰۰۰ می‌باشد.
اشکال راه حل ارائه شده این است که درصد به عنوان جزئی از کلِ قیمت فروش محاسبه شده است درحالی‌که مجموع سود و قیمت تمام شده، قیمت فروش را می دهد به عبارت دیگر داریم :
قیمت تمام شده + ٪۲۰ قیمت تمام شده = ۳۰۰۰۰ تومان که اگر به‌صورت

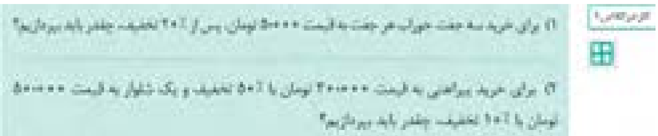
کسری نشان دهیم داریم :

قیمت تمام شده $\frac{۱}{۵}$ + قیمت تمام شده = قیمت تمام شده ٪۲۰ + قیمت تمام شده

= $۱\frac{۱}{۵}$ قیمت تمام شده

بنابراین سود ۵۰۰۰ تومان و قیمت تمام شده ۲۵۰۰۰ تومان می‌باشد. بنابراین لازم است در محاسبه درصد سود روی قیمت تمام شده تأکید شود یعنی در اینجا کل، قیمت تمام شده است و قیمت فروش نیست.

گفتگو در کلاس دربارهٔ این‌گونه وضعیت‌ها به درک بهتر مفهوم درصد کمک می‌کند.



۱) برای خرید سه جفت جوراب هر جفت به قیمت ۵۰۰۰ تومان پس از ٪۲۰ تخفیف، چقدر باید بپردازیم؟

۲) برای خرید پیراهنی به قیمت ۳۰۰۰۰ تومان با ٪۵۰ تخفیف و یک شلوار به قیمت ۵۰۰۰۰ تومان با ٪۱۰ تخفیف، چقدر باید بپردازیم؟

اهداف:

■ تقویت مهارت محاسبهٔ درصد از یک مقدار در حل مسائل زندگی روزمره

۱ $۰/۲۰ \times ۵۰۰۰ = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۵۰۰۰ = ۱۰۰۰ \rightarrow ۵۰۰۰ - ۱۰۰۰ = ۴۰۰۰$

پس ۴۰۰۰ × ۳ تومان باید بپردازیم

۲ قیمت پیراهن پس از تخفیف:

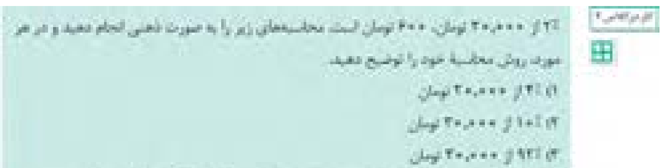
$$۰/۵۰ \times ۳۰۰۰۰ = \frac{۵۰}{۱۰۰} \times ۳۰۰۰۰ = ۱۵۰۰۰ \rightarrow ۳۰۰۰۰ - ۱۵۰۰۰ = ۱۵۰۰۰$$

قیمت شلوار پس از تخفیف

$$۰/۱۰ \times ۵۰۰۰۰ = \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۵۰۰۰۰ = ۵۰۰۰ \rightarrow ۵۰۰۰۰ - ۵۰۰۰ = ۴۵۰۰۰$$

قابل پرداخت: ۴۵۰۰۰ + ۱۵۰۰۰ = ۶۰۰۰۰

دبیران محترم در این قسمت می‌توانند با ارائه سؤالاتی نظیر کار در کلاس‌ها، در مسائلی که چند درصد مختلف بیان می‌شود، مهارت محاسبهٔ صحیح درصد یک مقدار را ارتقا دهند.



٪۲ از ۲۰,۰۰۰ تومان، ۴۰۰ تومان است. محاسبه‌های زیر را به صورت ذهنی انجام دهید و در هر مورد روش محاسبهٔ خود را توضیح دهید.

۱) ٪۴ از ۲۰,۰۰۰ تومان

۲) ٪۱۰ از ۲۰,۰۰۰ تومان

۳) ٪۹۲ از ۲۰,۰۰۰ تومان

اهداف:

■ تقویت مهارت محاسبهٔ درصد یک مقدار به‌طور ذهنی از طریق برقراری ارتباط بین

درصدهای مختلف از یک مقدار، برقراری ارتباطات کلامی، پرورش مهارت تفکر واگرا

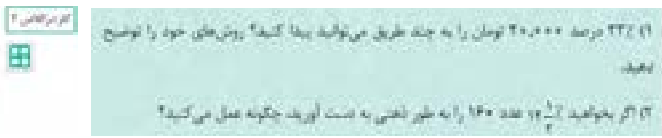
۱ ۴درصد یک مقدار ۲ برابر ۲درصد آن است پس حاصل ۱۲۰۰=۶۰۰×۲ خواهد بود.

۲ ۱۰درصد یک مقدار ۵ برابر ۲درصد آن است پس حاصل ۳۰۰۰=۶۰۰×۵ خواهد بود.

۳ ۹۲درصد یک مقدار ۸ درصد از ۱۰۰ درصد کمتر است و ۸ درصد ۴ برابر ۲درصد آن است پس ۸ درصد مقدار ۲۴۰۰=۶۰۰×۴ و ۲۷۶۰۰=۲۴۰۰−۳۰۰۰۰ ۹۲ درصد خواهد بود.

۴ روش اول چون ۵۰ درصد نصف می‌باشد، کافی است نصف ۳۰۰۰۰ را به‌دست آوریم (۳۰۰۰۰ را بر ۲ تقسیم کنیم)، روش دوم ۵۰ درصد ۲۵ برابر ۲ درصد است پس حاصل ضرب ۲۵ در ۶۰۰ را به‌دست می‌آوریم. روش سوم ۱۰ درصد ۳۰۰۰۰ را به‌دست می‌آوریم و حاصل را در ۵ ضرب می‌کنیم، روش چهارم ضرب ۳۰۰۰۰ در ۵۰ درصد است.

لازم به ذکر است در اینجا ارائه یک قالب یا قالب‌های خاص توسط دبیر جهت انجام محاسبات ذهنی درصد هنرجویان مورد نظر نیست. بلکه ارائه مثال‌هایی از روش‌های مختلف محاسبه ذهنی درصد است. پرسیدن روش‌های محاسبه ذهنی هنرجویان و تشویق آنها برای ارائه روش‌های متنوع که توسط خود آنها ساخته شده می‌تواند مهارت‌های ذهنی آنها را ارتقا دهد. این مهارت‌ها در موارد مشابه در سایر موضوع‌ها نیز قابل به‌کارگیری است.



اهداف:

- تقویت مهارت محاسبه و تخمین درصدی از یک مقدار به‌طور ذهنی از طریق برقراری ارتباط با کسر معادل.
- محاسبه درصد یک مقدار با روش‌های مختلف.

برقراری ارتباطات کلامی، پرورش مهارت تفکر واگرا

روش اول: ۳۳ درصد را به‌طورتقریبی، کسرِ $\frac{۱}{۳}$ در نظر گرفته و آن را حل می‌کنیم.

$$۳۰۰۰۰\times\frac{۱}{۳}=\frac{۳۰۰۰۰}{۳}=۱۰۰۰۰$$

روش دوم: به‌جای ۳۳ درصد از کسر $\frac{۳}{۱۰}$ استفاده می‌کنیم.

$$۳۰۰۰۰ \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۹۰۰۰۰}{۱۰} = ۹۰۰۰$$

روش سوم: آن را در $\frac{۳۳}{۱۰۰}$ ضرب کنیم:

$$۳۰۰۰۰ \times \frac{۳۳}{۱۰۰} = \frac{۹۹۰۰۰۰}{۱۰۰} = ۹۹۰۰$$

روش چهارم: ٪۱ از ۳۰۰۰۰ (که معادل تقسیم بر ۱۰۰ در محاسبه درصد است) را پیدا کرده و حاصل را در ۳۳ ضرب کنیم:

$$۳۰۰ \times ۳۳ = ۹۹۰۰$$

با توجه به نوع نیاز ما در محاسبه درصد (محاسبات کاملاً دقیق یا محاسبه تقریبی) روش مناسب برای محاسبه درصد را انتخاب می‌کنیم.

۲ ۱۲/۵درصد نصف ۲۵ درصد که $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد. ابتدا $\frac{۱}{۴}$ را پیدا کرده و سپس بر ۲ تقسیم می‌کنیم. یعنی

$$۱۶۰ \div ۴ = ۴۰ \longrightarrow ۴۰ \div ۲ = ۲۰$$

یا می‌توان گفت: ۱۲/۵ درصد همان $\frac{۱}{۸}$ است ($\frac{۱}{۸} = \frac{۱۲/۵}{۱۰۰}$) یعنی کافی است ۱۶۰ بر عدد ۸ تقسیم شود پس حاصل ۲۰=۸÷۱۶۰ خواهد بود.

مسئله‌ها


۱) یک دروازه‌بان در بازی اول خود ۹ توپ از ۱۰ توپی را که به طرف دروازه زده شده بود، مهار کرد. این دروازه‌بان در بازی دوم خود ۵ توپ از ۸ توپ و در بازی سوم خود ۶ توپ از ۷ توپ فرستاده شده به طرف دروازه را مهار کرد.

الف) در هر بازی، این دروازه‌بان چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

ب) او در این سه بازی روی هم چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

پ) آیا جمع درصد توپ‌های مهار شده در این سه بازی معنای خاصی دارد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارزیابی کردن

الف)

$$\frac{۹}{۱۰}\times ۱۰۰ = ۹۰ \to ۹۰٪$$

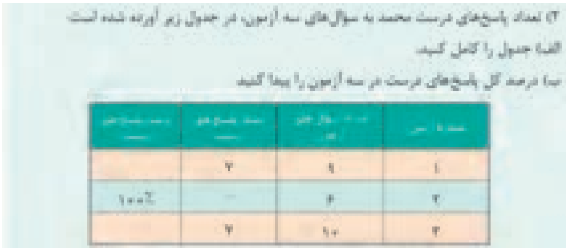
$$\frac{۵}{۸}\times ۱۰۰ = ۶۲/۵ \to ۶۲/۵٪$$

$$\frac{۶}{۷}\times ۱۰۰ = ۸۵/۶ \to ۸۵/۶٪$$

ب)

$$\frac{۹+۵+۶}{۱۰+۸+۷}\times ۱۰۰ = \frac{۲۰}{۲۵}\times ۱۰۰ = ۸۰ \to ۸۰٪$$

ج) خیر، چون تعداد پرتاب‌های هرکدام از بازی‌ها با دیگری متفاوت است، پس معنای خاصی ندارد.



۳) تعداد پاسخ‌های درست محمد به سؤال‌های سه آزمون در جدول زیر آورده شده است.
الف) جدول را کامل کنید.
ب) درصد کل پاسخ‌های درست در سه آزمون را پیدا کنید.

۱	۹	۷	
۲	۶	-	۱۰۰٪
۳	۱۰	۷	

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی

شماره آزمون	تعداد سؤالات آزمون	تعداد پاسخ‌های صحیح	درصد پاسخ‌های صحیح
۱	۹	۷	۷۷/۷
۲	۶	۶	۱۰۰
۳	۱۰	۷	۷۰
مجموع سه آزمون	۲۵	۲۰	۸۰

۳) با توجه به اینکه ٪۳۵ عدد ۲۲۰۰ برابر ۷۷۰ است، محاسبات زیر را به صورت ذهنی انجام دهید:

الف) ۷ درصد ۲۲۰۰ ب) ۷۰ درصد ۲۲۰۰ پ) ۵ درصد ۲۲۰۰

ت) ۳/۵ درصد ۲۲۰۰ ث) ۱۴ درصد ۲۲۰۰ ج) ۲۱ درصد ۲۲۰۰

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، مقایسه کردن

الف) ۷ درصد، یک پنجم ۳۵ درصد است یعنی: ۷۷۰ ÷ ۵ = ۱۵۴

ب) ۷۰ درصد، دو برابرِ ۳۵ درصد است پس: ۷۷۰ × ۲ = ۱۵۴۰

پ) ۵ درصد، یک هفتمِ ۳۵ درصد است یعنی: ۷۷۰ ÷ ۷ = ۱۱۰

ت) ۳/۵ درصد، یک دهمِ ۳۵ درصد است یعنی: ۷۷۰ ÷ ۱۰ = ۷۷

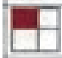
ث) ۱۴ درصد، دوبرابرِ ۷ درصد است یعنی: ۱۵۴ × ۲ = ۳۰۸

ج) ۲۱ درصد، سه برابرِ ۷ درصد است یعنی: ۱۵۴ × ۳ = ۴۶۲

۴) هر عدد در ستون اول جدول زیر با توصیفی در ستون دوم بیان شده است. هر عدد را به توصیف آن ارتباط دهید و برای هر یک، مثالی بیاورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ بازیابی اطلاعات، تفکر واگرا

درصد		توصیف	مثال
۲۵٪		من نصفِ نصف هستم	کسری از شکل مقابل که رنگ شده 
۵۰٪		من با یک برابرم	نسبت هر عدد به خودش
۳۰٪		من از یک‌چهارم کمتر، ولی از یک‌دهم بیشتر هستم	نسبت شربت به آب در یک نوشیدنی که برای هر ۵ لیتر آب نیم لیتر شربت کافی است.
۱٪		من با $\frac{1}{2}$ برابرم	شانس رو یا پشت آمدن در پرتاب یک سکه
۱۰٪		من از نصف کمتر و از یک‌چهارم بیشترم	نسبت شربت به آب در یک نوشیدنی که برای هر ۱۰ لیتر آب، از ۳ لیتر شربت استفاده شده
۱۰۰٪		من از $\frac{1}{100}$ کمترم	شانس پیروزی یک نفر در قرعه کشی که بین ۲۰۰ نفر هم‌شانس انجام می‌شود.
۲۰۰٪		من یک‌دهم یک‌دهم هستم	شانس خروج یک مهره خاص از ظرف شامل ۱۰۰ مهره
[illegible]		من از یک بیشترم	نسبت سن یک پدر ۳۰ ساله به فرزند یک‌ساله اش

۵) سعید گفت اگر به عددی ۱۰ تا اضافه کنم و سپس، ۱۰ تا از حاصل کم کنم، همان عدد قبلی به دست می‌آید. حالا اگر ٪۱۰ عددی را به آن اضافه کنم و سپس ٪۱۰ حاصل را از آن (حاصل) کم کنم، آیا همان عدد اول به دست می‌آید؟ با یک مثال عددی، پاسخ سؤال سعید را به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، ارزیابی کردن، استدلال کردن

عدد ۱۰۰ را در نظر می‌گیریم ۱۰ درصد آن عدد ۱۰ است که اگر اضافه شود حاصل ۱۱۰ خواهد بود و ۱۰ درصد این عدد ۱۱ است که اگر از ۱۱۰ کم کنیم حاصل ۹۹ خواهد بود. این‌گونه محاسبات در مورد درصد نیز از اشتباهات رایج می‌باشد که ناشی از مقایسه کردن آن با اضافه و کم کردن یک عدد به عدد دیگر است درحالی‌که در مرحله اول درصدی از ۱۰۰ و حال آنکه در مرحله دوم درصدی از ۱۱۰ حساب می‌شود که مقدار آنها متفاوت است بنابراین مقدار افزوده شده با مقدار کم شده مساوی نیست. می‌توان از هنرجویان خواست با عوض کردن مراحل (یعنی ابتدا درصدی را کم کرده و سپس همان درصد را اضافه کنیم) پاسخ را با قسمت قبل مقایسه کرده و درمورد آن توضیح دهند.

۶) درصدی بنویسید که از $\frac{1}{2}$ بیشتر و از $\frac{3}{4}$ کمتر باشد. ....

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، مقایسه، پیوند و اتصال

در این سؤال دو مطلب مورد توجه است اول: سؤالی که بیش از یک پاسخ دارد دوم: سؤالی که بیش از یک راه حل درست دارد (پرورش تفکر واگرا) مثلاً یک راه حل بیان کسر به‌صورت درصد (که با توجه به کسرهای داده شده محاسبه درصد نیز به‌صورت ذهنی و بدون محاسبه قابل انجام است) و یافتن درصد مورد نظر و راه دوم یافتن کسری بین این دو کسر و تبدیل کسر به درصد. در این سؤال هر درصد بین ۵۰ درصد و ۷۵ درصد جواب است.

۷) مسعود گفت: من می‌توانم مسئله‌های مربوط به درصد را به صورت ذهنی و خیلی سریع حساب کنم.
سعید پرسید: مثلاً سریع بگو ۹۰ درصد ۵۵ چقدر می‌شود؟ او به سرعت گفت: ۴۹/۵ = ۵/۵ − ۵۵ .
سعید پرسید: ۶ درصد ۱,۴۰۰ چقدر می‌شود؟ مسعود گفت: ۸۴ = ۱۴ × ۶ .
سعید پرسید: ٪۲۵ عدد ۴۴ چقدر می‌شود؟ مسعود گفت: ۱۱ = ۴ ÷ ۴۴.
سعید گفت: ٪۲۵ درصد حقوق من ۱۲۰,۰۰۰ تومان است. حقوق من چقدر است؟ او به سرعت جواب داد: ۴۸۰,۰۰۰ تومان.
در هر حالت، روش محاسبهٔ مسعود را توضیح دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوند اتصال ریاضی و خارج ریاضی، استدلال کردن، ارتباطات کلامی

- با توجه به اینکه ۹۰ درصد به اندازهٔ ۱۰ درصد با ۱۰۰ درصد فاصله دارد ابتدا ۱۰ درصد ۵۵ را حساب کرده که ۵/۵ است و حاصل را از ۵۵ (که ۱۰۰ درصد مقدار است) کم کرده است.
- ۶ درصد همان ۶ برابر ۱٪ است که کافی است ۱٪ از ۱۴۰۰ یعنی ۱۴ را در ۶ ضرب کنیم.
- ۲۵٪ هر عددی $\frac{۱}{۴}$ آن است یعنی باید عدد بر ۴ تقسیم شود.
- ۲۵٪ هر عددی، $\frac{۱}{۴}$ آن است بنابراین خود عدد، ۴ برابر ۲۵٪ عدد است. پس باید در ۴ ضرب شود تا کل حقوق به‌دست آید.

۸) الف) ۴۹/۵، چند درصد ۳۳ است؟
ب) چند درصد از ۹۰ ، برابر با ۸۰ است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

الف) $۴۹/۵=\frac{x}{۱۰۰}\times ۳۳\rightarrow \frac{x}{۱۰۰}=\frac{۴۹/۵}{۳۳}\rightarrow x=۱۵۰\rightarrow ۱۵۰\ \%$

برای حلّ معادلهٔ $۴۹/۵=\frac{x}{۱۰۰}\times ۳۳$ درصورتی که هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند $\frac{x}{۱۰۰}$ را a گرفته و معادله $۴۹/۵ = a۳۳$ را برحسب a حل کرده و سپس a را $\frac{x}{۱۰۰}$ گرفته و x را به‌دست آورند.

ب) چند درصد از ۹۰ برابر با ۸۰ است؟

$$۸۰=\frac{x}{۱۰۰}\times ۹۰\rightarrow \frac{x}{۱۰۰}=\frac{۸۰}{۹۰}\rightarrow x\approx ۸۸/۸۹\rightarrow ۸۸/۸۹\%$$

۹) جعفر می‌خواهد نمرهٔ ریاضی خود را از ۱۴ به ۱۸ برساند. او فکر می‌کند اگر در امتحان بعدی ۴٪ بیشتر به سؤال‌ها پاسخ درست بدهد، به هدف خود می‌رسد. آیا او درست فکر کرده است؟ توضیح دهید چرا.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، ارزیابی کردن، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن

این سؤال با پاسخ واگراست. برای همین استدلال هنرجو درستی یا نادرستی را تعیین می‌کند. برای مثال هنرجویی آزمون را ۲۰ نمره‌ای درنظر بگیرد. در این‌صورت

با توجه به محاسبات

$$۱۸-۱۴=۴ \rightarrow \frac{۴}{۲۰}\times ۱۰۰=۲۰ \rightarrow ۲۰\%$$

واضح است که پاسخ درست نیست و جعفر مقدار افزایش نمره را با درصد افزایش آن اشتباه گرفته است. راه حل دیگر این مسئله به‌صورت زیر است که ابتدا ۴ درصد ۲۰ را حساب می‌کنیم یعنی ۰/۸=۲۰×۰/۰۴ که نمره او ۱۴/۸= ۱۴+۰/۸ خواهد شد نه ۱۸.

در صورتی که هنرآموز استدلال بیاورد که آزمون ۱۰۰ نمره‌ای باشد، می‌توان گفت، جعفر درست فکر کرده است.


۱۰) نرگس از فروشگاه (الف) و ناهید از فروشگاه (ب) دو کیف کاملاً یکسان خریدند. قیمت اولیهٔ کیف در هر دو فروشگاه برابر بود. در زیر، تبلیغ فروش دو فروشگاه را می‌بینید.

فروشگاه (الف)
همهٔ اجناس فروشگاه با ۳۵ درصد تخفیف به فروش می‌رسد

فروشگاه (ب)
۲۵ درصد تخفیف + ۱۰ درصد تخفیف هدیه به مناسبت بازگشایی مدارس

کدام‌یک مبلغ بیشتری پرداخته است؟ نرگس یا ناهید؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، مقایسه کردن، ارتباطات کلامی، استدلال کردن

می‌توان با یک مقدار معین (به‌عنوان قیمت کفش) این دو تخفیف را با هم مقایسه کرد:

اگر قیمت کیف ۴۰۰۰۰ تومان باشد؛

درفروشگاه الف (خرید نرگس): مقدار تخفیف:	۰/۳۵×۴۰۰۰۰=۱۴۰۰۰
مقدار پول پرداخت شده توسط نرگس:	۴۰۰۰۰-۱۴۰۰۰=۲۶۰۰۰
در فروشگاه ب (خرید ناهید): مقدار تخفیف اول:	۰/۲۵×۴۰۰۰۰=۱۰۰۰۰
قیمت پس از تخفیف اول:	۴۰۰۰۰-۱۰۰۰۰=۳۰۰۰۰
مقدار تخفیف دوم:	۰/۱۰×۳۰۰۰۰=۳۰۰۰
مقدار پول پرداخت شده توسط ناهید:	۳۰۰۰۰-۳۰۰۰=۲۷۰۰۰

ملاحظه می‌شود ناهید مبلغ بیشتری پرداخته است. در اینجا می‌توان از هنرجویان خواست تا علت این تفاوت را توضیح دهند یا از آنها سؤال کرد اگر ابتدا تخفیف ۱۰ درصدی و سپس تخفیف ۲۵ درصدی اعمال شود نتیجه چگونه است؟ درصورتی‌که هنرجویان آمادگی داشته باشند می‌توان این مقایسه را به‌طور کلی و با استفاده از یک پارامتر نظیر a انجام داد.

بخش دوم: درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱

اهداف بخش

- درک مفهوم درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- انجام محاسبه ذهنی با درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- حل مسائل مربوط به درصد با تشکیل معادله

واژه‌های کلیدی:

درصد بیشتر از ۱۰۰، درصد کمتر از ۱، محاسبۀ ذهنی درصد.

نگاه کلی به بخش:

در موضوع درصد گاهی به درصدهای بیش از ۱۰۰ یا کمتر از ۱ برخورد می‌کنیم. درصدهای بیشتر از ۱۰۰ مشابه کسرهای بزرگ‌تر از واحد هستند که به‌جای بیان جزئی از کل، بیان کننده چند برابر بودن نسبت به یک مقدار مبنا هستند. کسرها گاهی به منظور بیان جزئی از کل و گاهی برای بیان چند برابر یک مقدار به کار برده می‌شوند. درصد نیز گاهی برای بیان درصدی از یک کل (که به‌صورت درصدی از صفر تا صد بیان می‌شود) و گاهی برای اشاره به چند برابر یک مقدار مورد استفاده قرار می‌گیرد (که در این حالت با درصدی بیشتر از ۱۰۰ مشخص می‌شود) این موضوع به تفسیر درست نتایج مربوط به مسائلی که در آنها با درصدهای بیشتر از ۱۰۰ سروکار داریم، کمک می‌کند.

درمورد درصدهای کمتر از ۱ مفهوم جدیدی رخ نمی‌دهد ولی معمولاً اشتباه محاسباتی وجود دارد. مثلاً ۰/۷ درصد اگر به‌صورت کسر نمایش داده شود، معادل $\frac{۷}{۱۰۰۰}$ می‌باشد که ممکن است معادل $\frac{۷}{۱۰}$ در نظر گرفته شود. عدم آشنایی هنرجویان با این قبیل درصدها موجب ارائه تفسیر اشتباه از نتایج یک مسئله یا اشتباه در محاسبات می‌شود. بنابراین موضوع این بخش درصدهای بیش از ۱۰۰ و کمتر از ۱ درنظر گرفته شده است. این بخش با اعلام خبری که در آن درصد

بیشتر از ۱۰۰ آمده است، شروع می‌شود و زمینهٔ لازم برای طرح این موضوع فراهم می‌شود. سپس به‌صورت بحثی دوجانبه این مفهوم آموزش داده می‌شود. در جهت افزایش درک درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و مفهوم درصدهای کمتر از ۱ چند مثال ارائه می‌شود. بخش با بیان راه‌کارهایی برای انجام محاسبات ذهنی درصد ادامه می‌یابد و نحوه تشکیل معادله‌ای که به کمک آن بتوان مسائل مرتبط با درصد را حل کرد در قالب فعالیت و مثال، توضیح داده می‌شود.

ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب با مراجعه به سایت‌های خبری، می‌توان خبری را که برای هنرجویان جذابیت خاصی داشته باشد یافت که حاوی درصدی بیش از ۱۰۰ باشد و به‌عنوان شروع در مورد آن صحبت کرد یا از هنرجویان خواست تا با مراجعه به سایت‌های خبری، خبرهای مشابهی را بیابند و در کلاس مطرح کنند و آن را معنی و تفسیر کنند. سپس با طرح سؤال‌هایی نظیر سؤال‌های ابتدای بخش، همه هنرجویان را در این بحث درگیر کرد. در غیر این صورت می‌توان از همان متن ابتدای فصل استفاده کرد.

شروع این بخش در قالب یک مباحثه بین هنرجو و معلم است، زیرا هنرجویان با مفهوم درصد آشنایی دارند و فقط حالتی که میزان درصد بیش از ۱۰۰ شود مطرح است. ذکر این نکته ضروری است که وقتی درصد مقداری با عدد بیشتر از ۱۰۰ بیان می‌شود به معنی جزئی از کل نیست بلکه نظیر مفهوم کسر بزرگ‌تر از ۱ است که معنی چند برابری دارد.

فعالیت آموزشی

کار در کلاس ۴

۱) ۰/۲٪ از ۳ میلیون نفر، چند نفر می‌شود؟

۲) ۵ نفر از ۴۰۰۰ نفر چند درصد این افرادند؟

۳) ۱۴۰٪ از ۴۰۰ لیتر آب، چند لیتر آب است؟

۴) وزن مریم در هنگام تولد ۳ کیلوگرم بوده و در ده سالگی ۲۱ کیلوگرم است. وزن او در ده سالگی چند درصد وزن نوزادی‌اش است؟

۵) مثالی بیان کنید که رشد ۱۲۴ درصدی را نشان دهد. آن را تفسیر کنید.

۶) مثالی بیان کنید که کاهش ۰/۸٪ را نشان دهد. آن را تفسیر کنید.

اهداف:

- تقویت مهارت محاسبهٔ درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- تقویت مهارت در بیان نسبت‌ها به‌صورت درصد.
- پرورش مهارت‌های حل مسئله، برقراری ارتباط کلامی، تفکر واگرا

سؤال‌های مطرح شده در این کار در کلاس بر درصدهای بیشتر از ۱۰۰ یا کمتر از ۱ تمرکز دارد. حل این سؤال‌ها موجب می‌شود تا درصدهای بیشتر از ۱۰۰ یا کمتر از یک را در یک زمینه واقعی ببینند و درک مناسبی از این‌گونه درصدها داشته باشند. در قسمت ۵ و ۶ این کار در کلاس توصیه می‌شود تا در مورد نحوهٔ محاسبه اعداد موجود در صورت مثال طرح شده توسط هنرجو سؤال شود (مثلاً در نمونه مثال ذکر شده در قسمت ۵ نحوه محاسبه عدد ۵ میلیون و عدد ۱۱ میلیون و دویست هزار نفر را بیان کنند).

۱ ۰/۲٪ یعنی $\frac{۰/۲}{۱۰۰}=\frac{۲}{۱۰۰۰}$ در نتیجه داریم: $۳۰۰۰۰۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰۰}=۶۰۰۰$

۲ $x\times۴۰۰۰=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۴۰۰۰}\Rightarrow x=۰/۰۰۱۲۵\Rightarrow ۰/۱۲۵\%$

۳ $\frac{۱۴۰}{۱۰۰}\times۴۰۰=۵۶۰$

۴ $x\times۳=۲۱\Rightarrow x=۷\Rightarrow ۷۰۰\%$

۵ می‌توانیم از مثال جمعیت استفاده کنیم. مثلاً، جمعیت یک کشور ۵ میلیون و جمعیت کشوری دیگر ۶ میلیون و دویست هزار نفر است. جمعیت کشور دوم چند

درصد جمعیت کشور اول است؟

۶ مثلاً، قیمت یک نوع گوشی در فروشگاه ۵۸۰ هزار تومان و قیمت تولید آن در کارخانه ۵۷۵۳۶۰ تومان است.

قیمت تولید این گوشی در کارخانه چند درصد کمتر از قیمت آن در فروشگاه است؟

فعالیت آموزشی

۱) یک تساوی با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان $\frac{۲}{۳}$ از ۲۴ را پیدا کرد.

۲) با توجه به اینکه درصد را می‌توانیم با یک عدد کسری نمایش دهیم، یک تساوی با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان ٪۳۰ از ۳۶ را پیدا کرد.

۳) یک تساوی با عبارت ضربی در حالت کلی بنویسید که به کمک آن بتوان درصدی از یک مقدار را پیدا کرد. در این معادله، مقدار اولیه را با x، درصد را با a و مقدار نهایی را با y نشان دهید.

۴) سه مسئله را طوری طرح کنید که در یکی x، و در یکی a و در یکی y مجهول باشد.

اهداف موضوعی:

- تشکیل معادله در مسائل مربوط به درصد.

مهارت‌ها و فرایندها:

طرح مسئله، مدل‌سازی جبری مسائل مرتبط با درصد از طریق تشکیل معادله.

۱ $\frac{۲}{۳}\times ۲۴=۱۶$

۲ $۰/۳۰\times ۳۶=\frac{۳۰}{۱۰۰}\times ۳۶=۱۰/۸$

۳ $a \times x = y$ (در اینجا a به‌صورت اعشاری یا کسری نشان داده می‌شود.)

۴ مسئله ۱ـ در یک فروشگاه کفش کالاها با ٪۲۰ تخفیف عرضه می‌شود. اگر قیمت اولیهٔ یک کفش ۶۰۰۰۰ تومان باشد، خریدار چه مبلغی را تخفیف گرفته است؟

مسئله ۲ـ در فروشگاه دیگر، قیمت اولیهٔ یک کفش ۶۰۰۰۰ تومان است. خریدار پس از تخفیف ۴۰۰۰۰ تومان به فروشنده پرداخته است. خریدار چند درصد تخفیف گرفته است؟

مسئله ۳ـ در فروشگاه اول که کالاها با ٪۲۰ تخفیف عرضه می‌شود. اگر قیمت کفشی پس از تخفیف ۴۰۰۰۰ تومان باشد قیمت اولیه آن چقدر بوده است؟

علی در یک تعمیرگاه لوازم خانگی کار می‌کند. به ازای هر دستگاهی که تعمیر می‌شود ۷۰٪ هزینهٔ تعمیر را علی و بقیه را صاحب تعمیرگاه دریافت می‌کند.

الف) معادله‌ای بنویسید که رابطهٔ بین هزینه‌های دریافتی و پولی را که علی دریافت می‌کند نشان دهد.

ب) اگر علی در این ماه ۷۵۰،۰۰۰ تومان دریافت کرده باشد، صاحب فروشگاه چقدر دریافت کرده است؟

اهداف:

■ مدل‌سازی یک وضعیت زندگی روزانه مرتبط با درصد به کمک معادله و استفاده از آن در حل مسئله.

الف) $y = ۰/۷۰\,x = \frac{۷}{۱۰}x$

ب) راه اول: دریافتی صاحب فروشگاه از x ریال هزینه دریافتی: $x - \frac{۷}{۱۰}x = \frac{۳}{۱۰}x$

بنابراین داریم:

$$\frac{۷}{۱۰}x = ۷۵۰۰۰ \rightarrow x = \frac{۷۵۰۰۰۰}{۷} \rightarrow \frac{۳}{۱۰}x = \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۷۵۰۰۰۰}{۷} = \frac{۲۲۵۰۰۰}{۷}$$

راه دوم: می‌توان با توجه به سهم علی (که ۷۰ درصد است) و سهم صاحب مغازه (که ۳۰ درصد می‌شود) نسبت سهم صاحب مغازه به سهم علی را از ۱۰۰ که ۳۰ به ۷۰ می‌باشد را به‌صورت کسری نوشت: یعنی $\frac{۳}{۷} = \frac{۳۰}{۷۰}$ و از آن در محاسبه سهم صاحب مغازه استفاده کرد یعنی:

$$\frac{۳}{۷} \times ۷۵۰۰۰۰ = \frac{۲۲۵۰۰۰}{۷}$$

مسئله‌ها

۱- جدول زیر را کامل کنید.

۱ـ (در این جدول درصدها به‌صورت‌های مختلف عدد اعشاری، عدد صحیح و عدد کسری بیان شده است. می‌توان از هنرجویان خواست که درصد کسری را به‌صورت اعشاری یا برعکس نمایش دهند).

مهارت‌ها و فرایندها:

■ تبدیل درصد، کسر و اعشاری به هم

درصد	به‌صورت کسر	به‌صورت اعشاری
۳۷/۵٪	$\frac{۳}{۸}$	۰/۳۷۵
۱۱۰٪	$\frac{۱۱}{۱۰}$	۱/۱
۱٪	$\frac{۱}{۱۰۰}$	۰/۰۱
۰/۵٪	$\frac{۱}{۲۰۰}$	۰/۰۰۵
۱۲/۵٪	$\frac{۱}{۸}$	۰/۱۲۵
$\frac{۲}{۵}$٪	$\frac{۱}{۲۵۰}$	۰/۰۰۴

۲) ۰/۷ یک مقدار بیشتر است یا ۰/۷٪ همان مقدار ؟ چرا ؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ استدلال کردن، ارزیابی کردن، مقایسه کردن

۰/۷ درصد یعنی $\frac{۰/۷}{۱۰۰}$ که همان $\frac{۷}{۱۰۰۰}$ است، که مقدار آن از $\frac{۷}{۱۰}$ کمتر است.

۳) یک نوع کالا در فروشگاه‌های الف و ب با تخفیف ارائه شده است:
در فروشگاه الف قیمت پس از تخفیف ۱۵۰,۰۰۰ ریال و در فروشگاه ب قیمت قبل از تخفیف ۲۰۰,۰۰۰ ریال می‌باشد. اگر درصد تخفیف فروشگاه الف برابر ۲۰٪ و فروشگاه ب برابر ۲۵٪ باشد:

الف) قبل از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

ب) بعد از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، مقایسه کردن

با توجه به اینکه فروشگاه ٪۲۰ تخفیف می‌دهد پس ٪۸۰ قیمت هر کالا باید پرداخت شود. بنابراین داریم:

$$۰/۸۰ \times X = ۱۵۰۰۰۰$$

فروشگاه الف) قیمت قبل از تخفیف:

$$۱۵۰۰۰۰ \div ۰/۸۰ = \frac{۱۵۰۰۰۰ \times ۱۰۰}{۸۰} = ۱۸۷۵۰۰$$

فروشگاه ب) قیمت پس از تخفیف:

$$۲۰۰۰۰۰ \times ۰/۲۵ = ۵۰۰۰۰ \longrightarrow ۲۰۰۰۰۰ - ۵۰۰۰۰ = ۱۵۰۰۰۰$$

واضح است قبل از تخفیف خرید از فروشگاه الف مقرون به صرفه‌تر است و بعد از تخفیف قیمت در هردو فروشگاه یکسان است.

بخش سوم: درصد تغییر

اهداف بخش

- درک مفهوم درصد تغییر
- یافتن درصد تغییر مقادیر یک کمیت
- محاسبه مقدار اولیه یا مقدار نهایی از طریق درصد تغییر
- درک معنی علامتِ درصد تغییر (+/−) در مسائل و تفسیر آن

واژه‌های کلیدی:

درصد تغییر.

نگاه کلی به بخش:

ارزیابی مناسب پدیده‌هایی نظیر تورم، تغییر قیمت سهام مختلف و... برای پیش‌بینی وضعیت آینده و برنامه‌ریزی مناسب جهت کنترل مطلوب این پدیده‌ها بسیار اساسی است. در هرکدام از این پدیده‌ها با نوعی کاهش و یا افزایش مقادیر در یک بازه زمانی مواجه هستیم. میزان افزایش یا کاهش، نسبت به مقدار اولیه سنجیده و به‌صورت درصد تغییر بیان می‌شود. دراین بخش با طرح یک سؤال از چگونگی تصمیم‌گیری در بازار سهام، سعی در ایجاد انگیزه در هنرجویان برای ورود به موضوع درصدِ تغییر شده است. سپس با ارائهٔ یک فعالیت، زمینه برای درک مفهوم درصد تغییر فراهم آمده است. در ادامه با ذکر چند مثال، علامت درصد تغییر (منفی یا مثبت) معنی شده است.

ورود به مطلب:

دبیران می‌توانند با استفاده از اخبار اقتصادی مرتبط با رشد یا کاهش تورم یا رصد کردن تحولات برخی از بورس‌ها کلاس را با طرح سؤال‌های مناسب از هنرجویان شروع کنند و انگیزه لازم جهت ورود به مبحث را به‌وجود آورند.

در زمینهٔ موضوع‌های مطرح شده در این بخش یکی از اشتباهات رایج این است که برای محاسبهٔ درصد تغییر مقدار تغییر را بر مقدار اولیه تقسیم نمی‌کنند، بنابراین لازم است توضیح داده شود که وقتی درصد تغییری از یک مقدار را بیان می‌کنیم

آن را به‌صورت نسبتی از ۱۰۰ در نظر می‌گیریم که با نسبت تغییر به مقدار اولیه برابر است. بنابراین لازم است که مقدار تغییر بر مقدار اولیه تقسیم شود. یکی دیگر از موضوع‌هایی که در این بخش به آن توجه شده است اشاره به درصدهای متوالی افزایش یا کاهش یک مقدار است، یک اشتباه رایج این است که برای محاسبهٔ درصد کل وقتی درصدهای مختلفی را به‌طور متوالی بر یک مقدار اعمال می‌کنیم، گاهی درصدها را با هم جمع می‌کنند که درست نیست. می‌توان با مثال‌هایی نظیر مثال زیر هنرجویان را از این اشتباه رایج برحذر کرد:

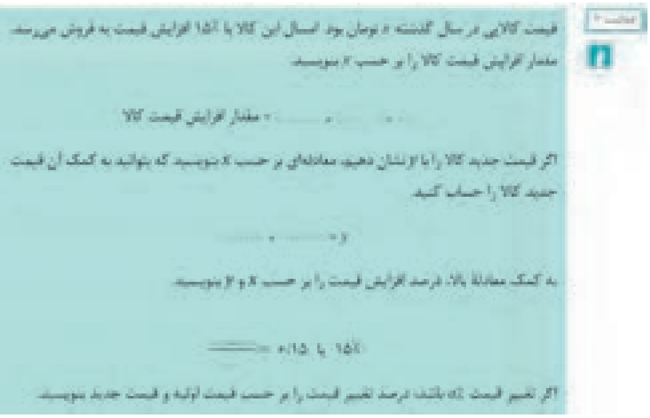
قیمت کالایی ۲۰۰۰۰۰ تومان است دو وضعیت زیر را در نظر بگیرید:

الف) ابتدا یک تخفیف ۱۰ درصدی و سپس یک تخفیف ۲۰ درصدی بر آن اعمال شود.

ب) از ابتدا یک تخفیف ۳۰ درصدی برآن اعمال شود.

با محاسبهٔ قیمت کالا پس از تخفیف در هر کدام از حالات مشخص کنید کدام برای فروشنده و کدام برای خریدار مقرون به‌صرفه‌تر است؟

فعالیت آموزشی


قیمت کالایی در سال گذشته x تومان بود. امسال این کالا با ۱۵٪ افزایش قیمت به فروش می‌رسد. مقدار افزایش قیمت کالا را بر حسب x بنویسید.

مقدار افزایش قیمت کالا = ... × ......

اگر قیمت جدید کالا را با y نشان دهید معادله‌ای بر حسب x بنویسید که بتوانید به کمک آن قیمت جدید کالا را حساب کنید.

y = ... + ...

به کمک معادلهٔ بالا، درصد افزایش قیمت را بر حسب x و y بنویسید.

۱۵٪ یا ۰/۱۵ = ——

اگر تغییر قیمت ... باشد درصد تغییر قیمت را بر حسب قیمت اولیه و قیمت جدید بنویسید.

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم درصد تغییر

مهارت‌ها و فرایندها:

- مدل‌سازی، پیوندها و اتصال‌های ریاضی و خارج ریاضی

۱ مقدار افزایش کالا: $\circ/۱۵ \times x = \circ/۱۵\, x$

۲ $y = x + \circ/۱۵x = ۱/۱۵x$

۳ $\circ/۱۵ = \frac{y - x}{x}$

۴ $\frac{a}{۱\circ\circ} = \frac{\text{قیمت اولیه – قیمت جدید}}{\text{قیمت اولیه}}$

هرکدام از مثال‌های ارائه شده در این قسمت انواع مختلفی از مسائل مرتبط با درصد تغییر را در زمینه واقعی مطرح می‌کند. در اولین مثال، مفهوم درصد تغییر با علامت مثبت (که نشان‌دهنده رشد است) ارائه شده و دومین مثال مربوط به درصد تغییری با علامت منفی است (که کاهش مقدار را نشان می‌دهد). در سومین مثال با ارائه افزایش دو کمیت (طول و عرض)، درصد تغییر کمیت مرتبط با آن (مساحت) مورد نظر است. در این مسئله برای محاسبهٔ درصد تغییر علاوه بر استفاده از رابطهٔ درصد تغییر لازم است از معادلهٔ مساحت بر حسب طول و عرض استفاده شود. در آخرین مثال نیز با ارائه درصد تغییر (افزایش و کاهش) و داشتن مقادیر اولیه، مقدار ثانویه خواسته شده است. دبیران محترم می‌توانند درصورتی‌که هنرجویان آمادگی داشته باشند، مسائل مختلفی در زمینهٔ واقعی مطرح کنند و از هنرجویان بخواهند با حل آنها و تفسیر جواب‌ها درک بهتری از موضوع درصد تغییر پیدا کنند.

۱) ابعاد یک پارک به طول x و عرض y را ٪۱۰ افزایش داده‌اند. درصد تغییر مساحت این پارک را محاسبه کنید.

۲) قیمت بلیت یک موزه در ابتدای سال ٪۲۰ افزایش داشته و پس از سه ماه، دوباره ٪۱۰ افزایش یافته است. قیمت بلیت این موزه در سال گذشته ۱,۰۰۰ تومان بوده است.

الف) قیمت بلیت این موزه اکنون چقدر است؟

ب) درصد تغییر قیمت بلیت این موزه نسبت به سال قبل چقدر است؟ (توجه: ٪۳۰ نیست!)

اهداف:

- تقویت مهارت انجام محاسبات مربوط به درصد تغییر، روش مهارت حل مسئله

۱ مساحت پارک قبل از افزایش: xy

مقدار افزایش طول: $x \times \circ/۱\circ = \circ/۱x$ — مقدار افزایش عرض: $y \times \circ/۱\circ = \circ/۱y$

طول پس از افزایش: $\circ/۱x + x = ۱/۱x$ — عرض پس از افزایش: $\circ/۱y + y = ۱/۱y$

مساحت پس از افزایش: $۱/۱x \times ۱/۱y = ۱/۲۱xy$

درصد تغییر: $\frac{۱/۲۱\,xy - xy}{xy} \times ۱\circ\circ = ۲۱٪$

الف) مقدار افزایش قیمت بلیط ابتدای سال: $۱۰۰۰ \times ۰/۲۰ = ۲۰۰$

قیمت ابتدای سال: $۱۰۰۰ + ۲۰۰ = ۱۲۰۰$

مقدار افزایش قیمت پس از سه ماه: $۱۲۰۰ \times ۰/۱۰ = ۱۲۰$

قیمت بلیط پس از سه ماه: $۱۲۰۰ + ۱۲۰ = ۱۳۲۰$

ب) نسبت تغییر: $۳۲ = \frac{۱۳۲۰ - ۱۰۰۰}{۱۰۰۰}$ یعنی ۳۲ درصد افزایش یافته است.

مسئله‌ها

مسئله‌ها

۱) در هر پرانتز عبارت درست را مشخص کنید؛

الف) اگر قیمت جدید یک کالا نسبت به قیمت اولیه افزایش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/ منفی) و اگر کاهش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/ منفی) می‌باشد.

ب) اگر قیمت کالایی ۵,۵۰۰ تومان باشد و قیمت آن به ۷,۰۰۰ تومان رسیده باشد، درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰ ؛ بین ۱ و ۱۰۰ ؛ کوچک‌تر از ۱) و اگر قیمت آن به ۱۲,۰۰۰ تومان رسیده باشد درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰ ؛ کوچک‌تر از ۱۰۰) می‌باشد.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ استدلال، پیوندها و اتصال‌ها، بازیابی اطلاعات

الف) قسمت اول: مثبت، قسمت دوم: منفی.

ب) قسمت اول: یعنی ۲۷ درصد ($۱۰۰ \times ۰/۲۷$) افزایش داشته است که عددی بین ۱ و ۱۰۰ است.

$$\frac{۷۰۰۰ - ۵۵۰۰}{۵۵۰۰} = \frac{۱۵۰۰}{۵۵۰۰} = \frac{۳}{۱۱} \approx ۰/۲۷$$

قسمت دوم: که عددی بزرگ‌تر از ۱۰۰ است. یعنی ۱۱۸ درصد ($۱/۱۸ \times ۱۰۰$) افزایش داشته است.

$$\frac{۱۲۰۰۰ - ۵۵۰۰}{۵۵۰۰} = \frac{۶۵۰۰}{۵۵۰۰} = \frac{۱۳}{۱۱} \approx ۱/۱۸$$

۲) اگر قیمت اولیهٔ یک کالا با x و قیمت جدید آن با y مشخص شده باشد معادلهٔ $y =$ [illegible] x رابطهٔ بین قیمت اولیه و قیمت جدید این کالا را نشان می‌دهد.

الف) درصد تغییر را به‌دست آورید.

ب) کالایی که در سال گذشته ۱۰۰ هزار تومان بوده است امسال چند تومان است؟

پ) کالایی که امسال ۱۰۰ هزار تومان است، در سال گذشته چند تومان بوده است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

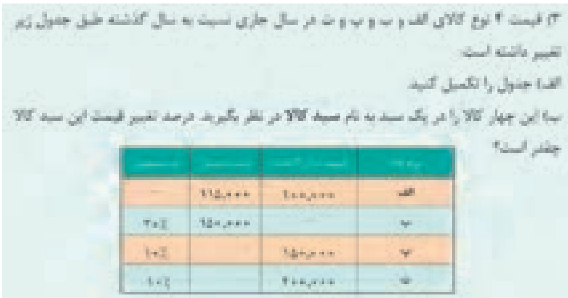
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال با زندگی روزانه

الف) $\frac{y-x}{x}=\frac{\frac{۱}{۲}x-x}{x}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow$

یعنی این کالا ۵۰ درصد کاهش قیمت داشته است.

ب) $-\frac{۱}{۲}=\frac{y-x}{x}=\frac{y-۱۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰}\rightarrow y=۵۰۰۰۰$

پ) $-\frac{۱}{۲}=\frac{y-x}{x}=\frac{۱۰۰۰۰۰-x}{x}\rightarrow x=۲۰۰۰۰۰$


۳) قیمت ۴ نوع کالای الف و ب و پ و ت در سال جاری نسبت به سال گذشته طبق جدول زیر تغییر داشته است.
الف) جدول را تکمیل کنید.
ب) این چهار کالا را در یک سبد به نام «سبد W» در نظر بگیرید. درصد تغییر قیمت این سبد کالا چقدر است؟

الف	۱۰۰۰۰۰	۱۱۵۰۰۰	-
ب	-	۱۵۰۰۰۰	۲۰٪
پ	۱۵۰۰۰۰		۱۰٪
ت	۲۰۰۰۰۰		-۱۰٪

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله پیوند و اتصال با زندگی روزانه

توضیح: لازم است در این مسئله نیز بر محاسبه درست درصد تغییر کلی تأکید داشت.

نوع کالا	قیمت سال گذشته	قیمت امسال	درصد تغییر
الف	۱۰۰۰۰۰	۱۱۵۰۰۰	۱۵٪
ب	۱۲۵۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۲۰٪
پ	۱۵۰۰۰۰	۱۶۵۰۰۰	۱۰٪
ت	۲۰۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰	-۱۰ ٪
کل	۵۵۰۰۰۰	۵۸۰۰۰۰	۵/۴۵٪

۴) طول هر ضلع یک مکعب بر اثر گرما ۰/۱ واحد افزایش یافته است. اگر طول ضلع اولیهٔ این مکعب ۱ واحد باشد، درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

توضیح:

در این مسئله می‌خواهیم با مشخص بودن تغییرات طول ضلع مکعب، تغییرات حجم را به‌صورت درصد تغییر بیان کنیم.

$\frac{(۱/۱)^۳ - ۱^۳}{۱^۳} = ۰/۳۳۱$ یعنی ۳۳/۱ درصد (۱۰۰ × ۰/۳۳۱) افزایش داشته است.

توسعهٔ دانش

اگرچه مفهوم درصد مفهوم ساده‌ای است، ولی در کاربردهای آن ابهاماتی پیش می‌آید. در محاسبات با درصدهای پایین ممکن است این اشتباه پیش آید که درصدها را می‌توان با هم جمع کرد.
فرض کنید ۱۰ درصد افراد کلاس (الف) و ۱۵ درصد افراد کلاس (ب) امروز غایب بوده‌اند در این صورت مجموعاً از این دو کلاس چند درصد غایب بوده‌اند؟
اگر به مفهوم درصد خوب دقت نشود ممکن است از اصطلاح «مجموعاً» هنرجو به این نتیجه برسد که باید درصدها را با هم جمع کند که کاملاً اشتباه است. یک اشتباه دیگر ممکن است این باشد که میانگین این درصدها را حساب کنیم و بگوییم مجموعاً ۱۲/۵ درصد افراد دو کلاس غایب بوده‌اند. اگر تعداد افراد دو کلاس مساوی باشند میانگین‌گیری جواب درستی می‌دهد. اما، اگر تعداد افراد دو کلاس مساوی نباشند، میانگین‌گیری از درصدها جواب درستی نخواهد داد.
مثلاً فرض کنید کلاس (الف) ۳۰ نفره و کلاس (ب) ۲۰ نفره باشد. از کلاس (الف) ۳ نفر و از کلاس (ب) نیز ۳ نفر غایب بوده‌اند. پس ۶ نفر از ۵۰ نفر غایب بوده‌اند که می‌شود ۱۲ درصد نه ۱۲/۵ درصد.
دو مقدار درصد متفاوت با هم قابل قیاس نیستند چون ممکن است کل مرجع آنها متفاوت باشند. در مثال بالا ۱۰ درصد کلاس (الف) با ۱۵ درصد کلاس (ب) مساوی بودند.
نوع دیگری از میانگین‌گیری وجود دارد که میانگین وزنی نامیده می‌شود. در این نوع میانگین‌گیری از تعدادی عدد، همهٔ آنها را یکسان در نظر نمی‌گیریم و برای هر کدام وزنی در نظر می‌گیریم. در محاسبه معدل شاگردان این وضعیت رخ می‌دهد و مثلاً می‌گویند نمره امتحان آخر را با ضریب ۲ و بقیه نمرات را با ضریب ۱ در نظر می‌گیریم. این همان میانگین‌گیری وزنی است که برای امتحان آخر وزن ۲ و برای بقیه نمرات وزن ۱ در نظر گرفته شده است.
اگر n عدد $x_1,\dots,x_n$ را به ترتیب با وزن‌های $p_1,\dots,p_n$ در نظر بگیریم طبق تعریف میانگین وزنی آنها عبارت است از:

$$\frac{p_1x_1 +\dots + p_nx_n}{p_1 +\dots+ p_n}$$

در بیشتر کاربردهای مفهوم میانگین وزنی، وزن‌ها اعداد مثبتی هستند.

در کار با درصدها، اگر چند درصد مختلف داشته باشیم که کل مرجع آنها با هم متفاوت است می‌توان برای هر درصد به اندازه کل مرجع آن وزن در نظر گرفت و در این صورت میانگین وزنی درصدها، مقدار درست درصد مجموع را نشان می‌دهد. در مثال بالا اگر برای ۱۰ درصد وزن ۳۰ و برای ۱۵ درصد وزن ۲۰ را درنظر بگیریم میانگین وزنی آنها عبارت است از:

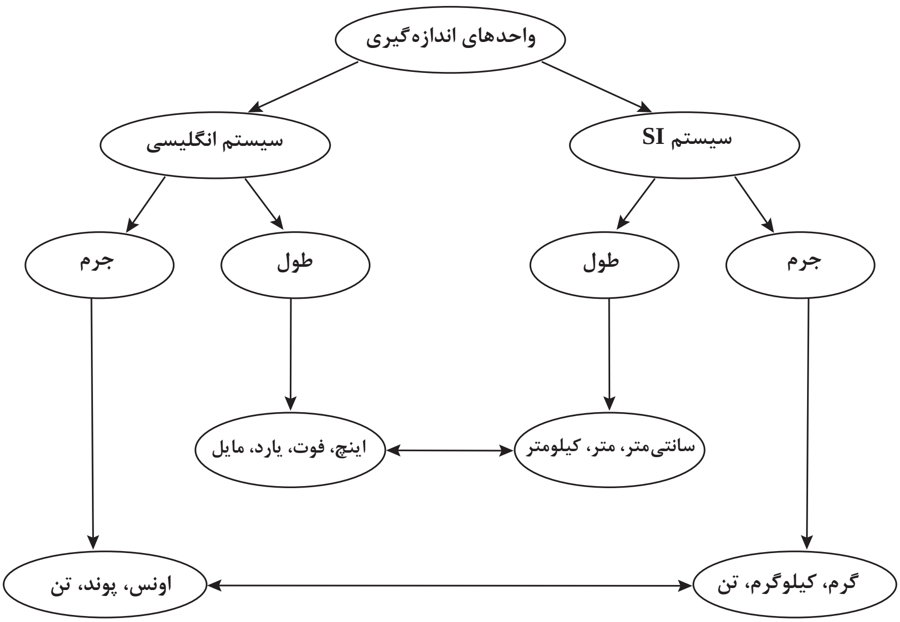
$$\frac{۳۰ \times ۱۰ + ۲۰ \times ۱۵}{۳۰ + ۲۰} = ۱۲$$

جواب درست نیز همان ۱۲ درصد است.

فصل سوم

واحدهای اندازه‌گیری

طرح کلی مفاهیم فصل سوم (نقشه مفهومی)



اهداف کلی فصل

- آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری طول و جرم در سیستم‌های انگلیسی.
- درک ارتباط بین واحدهای اندازه‌گیری در یک سیستم.
- درک ارتباط بین واحدهای اندازه‌گیری در دو سیستم متفاوت.

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- مقدار کمیت‌های طول و جرم که با یک واحد دریک سیستم مشخص شده‌اند را به واحدهای دیگر در همان سیستم تبدیل کنند.
- مقدار کمیت‌های طول و جرم که با یک واحد دریک سیستم مشخص شده را به واحدهای سیستم دیگر تبدیل کنند.
- از واحدهای اندازه‌گیری، در اندازه‌گیری کمیت‌های مختلف استفاده کنند.
- با استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری مقدارکمیت‌های معین را به‌دست آورند.

■ بدون استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری، مقدار کمیت‌های مشخص شده را به‌طور تقریبی تخمین بزنند.

پیش نیازها:

■ آشنایی با سیستم SI، مهارت استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری.

نگاه کلی به فصل

در زندگی روزمره هرجا با کمّیتی سروکار داریم از واحدی برای اندازه‌گیری آن استفاده می‌کنیم. وجود واحد استاندارد و همگانی برای داشتن درک مشترک از اندازهٔ اشیا ضروری است. نحوهٔ شکل‌گیری اولیهٔ این واحدها به‌صورت طبیعی با استفاده از اشیا در دسترس مانند دست و پا بوده است که به‌صورت خواندنی در کتاب آمده است. تفاوت اندازهٔ دست و پای افراد ضرورت و اهمیت استانداردسازی واحدها یا اندازه‌گیری را از مدت‌ها قبل نشان داده است. معاملات و تبادلات و محاسبات و ... که جزء جدانشدنی از تعاملات اجتماعی است، فقط با داشتن واحدهای مشترک برای کمیت‌های مختلف ممکن می‌شود. امروزه ضرورت آشنایی و درک واحدهای مختلف و مهارت استفاده از آنها در هرجا که با یک کمیت سرو کار داریم مشهود است. مقدار استفاده از یک دارو، مقدار مواد اولیه در دستور تهیه یک غذا، طول پارچه لازم برای دوخت یک لباس و ... همگی با واحدهای اندازه‌گیری در یک سیستم اندازه‌گیری بیان می‌شود. با توجه به اینکه برای بیان مقدار کمیت‌ها معمولاً از واحدهای دو سیستم اندازه‌گیری انگلیسی و متریک (SI) استفاده می‌شود، در این کتاب تمرکز بر معرفی و استفاده از واحدهای این دو سیستم است. همچنین، در کمیت‌های طول و جرم، واحدهایی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، مطرح خواهند شد. به دلیل تفاوت‌هایی که در شکل‌گیری واحدها وجود داشته است مقدار آنها یکسان نبوده است و بعضی واحدهای انگلیسی در کشورهای مختلف اندازه متفاوت دارند. به همین دلیل، مقدار واحدها برحسب یکدیگر به صورت تقریبی بیان شده است. مثلاً یک یارد تقریباً معادل ۹۰ سانتی‌متر، و یک فوت تقریباً معادل ۳۰ سانتی‌متر، و یک اونس تقریباً معادل ۲۸ گرم و یک پوند تقریباً معادل ۴۵۰ گرم در نظر گرفته می‌شود. این رابطه تقریبی باعث می‌شود، برخی تبدیل واحدها تقریبی شوند. مثلاً، مواقعی که هنرجویان برای استخراج رابطهٔ بین واحدها از اینترنت استفاده می‌کنند یا وقتی که مثلاً با دو خط‌کش مختلف که واحد یکی اینچ و واحد دیگری سانتی‌متر است یک طول مشخص را اندازه‌گیری می‌کنند، اگر ضریب تبدیل استفاده شده دقیق نباشد، بین مقدار به دست آمده با ضریب تبدیل و مقدار اندازه‌گیری شده با ابزار ممکن است اختلاف وجود داشته باشد.

	فرایند	توصیف فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ـ ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و درنتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسئله‌ها و با انتخاب مناسب آنها	ـ استفاده از راهبردهای الگویابی در حل مسئله‌ها (فعالیت ۲)
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	ـ توضیح در خصوص رابطه بین دو ستون از جدول (سؤال ۲ از فعالیت۲) ـ توضیح رابطه بین اونس و پوند (سؤال۲ کار در کلاسِ بعد از فعالیت ۳)
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ بیان رابطه بین فارنهایت و سانتی‌گراد به‌صورت یک گزاره ریاضی
	استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	ـ دلیل ساده‌تر بودن کار با واحدهای متریک در طول (کاردرکلاس ۲)
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	ـ استفاده از اعداد برای نمایش کمیت‌ها برحسب یک واحد (ارتباط ریاضی و فیزیک)
		تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	ـ پیوند واحدهای اندازه‌گیری SI و واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	ـ ارائه جدولی و جبری بین دو واحد اینچ و فوت (کار در کلاس ۲)
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و...	ـ به‌دست آوردن رابطه اونس و گرم با استفاده از یک مثال خاص (فعالیت ۳) ـ مقایسه واحدهای اینچ و سانتی‌متر برای طول (فعالیت ۱)

بخش اول: واحد اندازه‌گیری انگلیسی (طول)

اهداف بخش

- اندازه‌گیری طول مشخص شده با استفاده از وسیله اندازه‌گیری
- ارائهٔ تخمین مناسبی از طول مشخص شده بدون استفاده از وسیله اندازه‌گیری
- تبدیل طول مشخص شده برحسب یک واحد به واحدهای دیگر در همان سیستم یا سیستم دیگر
- یافتنِ ضریب تبدیل یک واحد به واحد دیگر در یک سیستم اندازه‌گیری

واژه‌های کلیدی:

سیستم اندازه‌گیری انگلیسی، سیستم اندازه‌گیری SI، ضریب تبدیل، تخمین طول

نگاه کلی به بخش:

بخش ابتدایی فصل به معرفی واحدهای کمیت طول پرداخته شده است. آشنایی با این واحدها امکان استفاده از دستورالعمل‌ها و جدول‌های مرتبط با طول که نمونه‌هایی از آن در بخش آمده است را فراهم می‌کند. همچنین مهارت در تخمین یک طول موجب می‌شود که انجام محاسبات و تصمیم‌گیری در زمان‌هایی که بیان مقدار واحدها به‌صورت دقیق مورد نظر نیست، امکان‌پذیر باشد. مثلاً در نظر بگیرید که می‌خواهیم برآورد تقریبی از هزینه رنگ‌آمیزی یا سنگ کردن دیوارهای یک یا چند اتاق را داشته باشیم، می‌توانیم با تخمین طول و عرض، مساحت مورد نظر را به‌طور تقریبی حساب کرده و برآوردی از هزینه داشته باشیم. در این بخش با روایت یک ماجرا به‌طور ضمنی، یک واحد اندازه‌گیری طول در سیستم انگلیسی معرفی می‌شود. سپس با ارائه یک فعالیت این واحد با واحدی که برای هنرجویان آشنا می‌باشد (سانتی‌متر) مقایسه می‌شود. همچنین، در این بخش با ارائه جدول‌های حاوی طول‌های مورد نیاز برحسب واحدهای سیستم انگلیسی به لزوم آشنایی با واحدهای مختلف و نحوه تبدیل آنها به یکدیگر اشاره می‌شود.

ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب می‌توان سؤال‌های زیر را مطرح کرد:

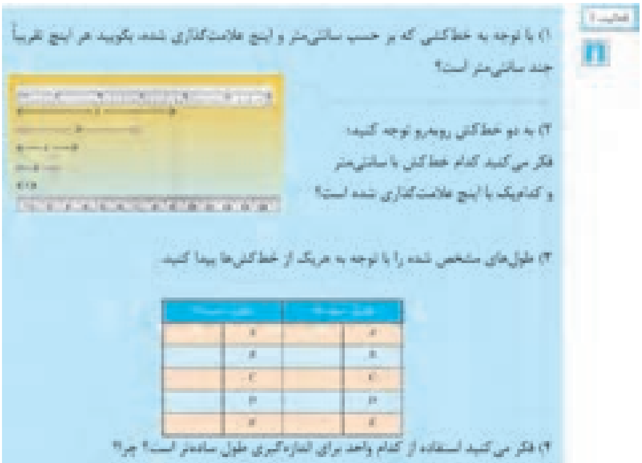
آیا می‌دانید واحدهای اندازه‌گیری چگونه شکل گرفته‌اند؟

لزوم استفاده از واحدهای اندازه‌گیری چیست؟

و با استفاده از مطالب مربوط به قسمت خواندنی‌های این فصل اهمیت و تاریخچه‌ای از نحوه و ضرورت شکل‌گیری این واحدها را متذکر شوید، یا می‌توان جدول‌های حاوی اندازه طول‌های مورد استفاده

هنرجویان هر رشته (نظیر جدول زیر) را استخراج کرده و تبدیل اندازه‌ها از یک واحد به واحد دیگر را از آنها خواست. یا از هنرجویان خواست برخی طول‌ها (نظیر طول و عرض کتاب درسی) را با استفاده از خط‌کش در سیستم SI اندازه‌گیری کنند و به واحدهای دیگر در همان سیستم تبدیل کنند. یا مثال‌هایی از زندگی روزمره که استفاده از واحدهای انگلیسی در آنها مصطلح است (نظیر سایز لباس و...) را بیان کرد تا با دیدن لزوم آشنایی با این واحدها انگیزه لازم برای شروع یادگیری در آنها به‌وجود آید.

فعالیت آموزشی



اهداف موضوعی:

- درک رابطهٔ بین واحدهای سانتی‌متر و اینچ.
- کسب مهارت تبدیل واحدها به یکدیگر در دو سیستم

- کسب مهارت اندازه‌گیری بر حسب واحدهای انگلیسی طول.
- اندازه‌گیری با واحدهای انگلیسی.
- درک دشواری استفاده از سیستم انگلیسی نسبت به سیستم SI .

مهارت‌هاو فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن، ارزیابی و مقایسه کردن

۱ هر اینچ تقریباً ۲/۵ سانتی‌متر است.

۲ خط‌کش صفحهٔ قبل که واحدهای آن به هشت قسمت تقسیم شده است با اینچ و خط‌کش پایین که واحدهای آن به ۱۰ قسمت تقسیم شده است با سانتی‌متر علامت‌گذاری شده است. یا می‌توان گفت خط‌کش بالا که واحدهایش بزرگ‌تر است اینچ و خط‌کش پایین که واحدهایش کوچک‌تر است با سانتی‌متر علامت زده شده است.

۳ تکمیل شده جدول به‌صورت زیر است.

برحسب cm		برحسب in	
A	۱/۱	A	$\frac{۴}{۸}$
B	۲/۳	B	$\frac{۱۵}{۱۶}$
C	۳/۵	C	$۱\frac{۳}{۱۸}$
D	۷	D	$۲\frac{۱۳}{۱۶}$
E	۹	E	$۳\frac{۹}{۱۶}$

۴ استفاده از واحد سانتی‌متر برای اندازه‌گیری طول ساده‌تر است به دلیل اینکه مبنای عددنویسی ما اعشاری (ده‌دهی) است و تقسیم کردن یا ضرب کردن در عدد ۱۰ برای ما ساده‌تر است.

لازم به ذکر است که با توجه به میزان دقت تصویر خط‌کش‌ها و اندازه‌گیری به کمک آنها، اعداد جدول قسمت ۳ تقریبی است.

توصیه آموزشی:

باید ذکر شود که هر واحد اینچ به هشت قسمت و هر واحد سانتی‌متر به ۱۰ قسمت تقسیم می‌شود. این نکته به هنرجویان در استفاده از خط‌کش‌هایی که بر حسب اینچ مدرج شده‌اند، کمک می‌کند. همچنین، می‌توان گفت: یکی از دلایل گستردگی استفاده از سیستم واحد متریک به‌عنوان واحد رسمی در کشورهای مختلف این است

که در این سیستم هر واحد با تقسیم بر ۱۰ به واحد کوچکتر تبدیل می‌شود که با مبنای ده‌دهی اعداد که مورد استفاده عموم است همخوانی دارد. همچنین هنرجویان گاهی برای نمایش طولی که بر حسب اینچ و با استفاده از خط‌کش به دست آمده است، اشتباهاتی نظیر نمایش ۲/۷ به جای $۲\frac{۷}{۸}$ انجام می‌دهند که ناشی از عدم توجه به تقسیم‌بندی ۸ قسمتی یک واحد اینچ در خط‌کش است .

توضیحات بعد از فعالیت اشاره به این مطلب دارد که اندازه‌های مصطلح در مورد وسایل گوناگون (مثل تلویزیون ۲۳ اینچی یا ...) حاوی اطلاعات ضمنی است که آشنایی با آنها در تصمیم‌گیری برای انتخاب وسیله مناسب مؤثر است. در این قسمت به اندازه اتاق پذیرایی در انتخاب اندازه تلویزیون مناسب (که هم از نظر هماهنگی با مساحت اتاق و هم رعایت فاصله مناسب جهت رؤیت بهتر تصویر) توجه شده است.


کار در کلاس

۱) با توجه به جدول صفحهٔ قبل، حداقل فاصلهٔ مناسب با تلویزیون ۴۶ اینچی چقدر است؟

۲) تصویر زیر یک اتاق نشیمن را نشان می‌دهد. با توجه به جدول صفحهٔ قبل، تلویزیون با چه اندازه‌ای را توصیه می‌کنید؟

اهداف:

- کاربرد واحدهای اندازه‌گیری سیستم انگلیسی طول در زندگی روزمره.
- پرورش مهارت استدلال‌کردن

۱ حداقل فاصله ۱/۸ متر

۲ طبق جدول تلویزیون از ۲۸ اینچی به بالا می‌تواند باشد در مورد اینکه کدام بهتر است در کلاس بحث شود.

۱) اندازه‌های داده شده در ستون دوم (از سمت چپ) جدول زیر را که بر حسب اینچ هستند، به متر تبدیل کنید.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
۳۲	۱۹		۴۸	۴
۴۶	۲۶		۷۲	۶
۶۳	۳۲		۹۶	۸
۸۰	۴۰		۱۲۰	۱۰
۹۶	۴۶		۱۴۴	۱۲
۱۱۲	۵۲		۱۶۸	۱۴

۲) بین اعداد در ستون اول و اعداد در ستون دوم چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۳) بین اعداد در ستون اول و اعداد در ستون سوم چه رابطه ای وجود دارد؟

۴) جاهای خالی را پر کنید:

...... متر = ۱ اینچ   ...... متر = ... اینچ = ۱ فوت

۵) اگر برای پخش فیلم‌های آموزشی بخواهیم تلویزیونی در کلاس شما بگذاریم، فکر می‌کنید چه اندازه‌ای مناسب است؟

اهداف موضوعی:

- کسب مهارت تبدیل واحدهای انگلیسی طول
- درک رابطه بین واحد فوت و اینچ.

اهداف فرایندی:

- حل مسئله، استدلال کردن، ارزیابی کردن.

Max Size	Min Size	برحسب متر	برحسب inch	برحسب feet
۳۲	۱۹	۱/۲۴	۴۸	۴
۴۶	۲۶	۱/۸۶	۷۲	۶
۶۳	۳۲	۲/۴۸	۹۶	۸
۸۰	۴۰	۳/۱	۱۲۰	۱۰
۹۶	۴۶	۳/۷۲	۱۴۴	۱۲
۱۱۲	۵۲	۴/۳۴	۱۶۸	۱۴

۱ تبدیل واحدها به متر (جدول روبه‌رو)

۲ اعداد ستون دوم ۱۲ برابر اعداد ستون اول هستند.

۳ اعداد ستون مربوط به واحد متر تقریباً ۰/۳۱ برابر اعداد ستون اول هستند.

۴ الف) ۰/۰۲۵۴ متر = ۱ اینچ

ب) ۰/۳۱ متر = ۱۲ اینچ = ۱ فوت

۵ با توجه به فاصله نزدیک‌ترین نفر و دورترین نفر به محل نصب تلویزیون در کلاس خود، تلویزیون مناسب را انتخاب می‌کنیم.

سیستم اندازه‌گیری انگلیسی که در کنار سیستم SI مطرح شده است، در کشورهای آمریکا و میانمار و لیبریا (کشوری در غرب آفریقا) مورد استفاده است. برخی از واحدهای این سیستم هنوز هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بخش مربوط به خواندنی‌های این قسمت نیز اشاره به تاریخ استفاده از واحدهای مشترک و نحوه شکل‌گیری آنها دارد که لزوم و اهمیت استفاده از این واحدها را در تعاملات بین افراد نشان می‌دهد.


۱- جدول زیر را کامل کنید.

۲- از نظر شما کار با کدام سیستم اندازه‌گیری راحت‌تر است؟ چرا؟

اهداف:

- تقویت مهارت تخمین زدن طول
- تقویت مهارت تبدیل واحدها به یکدیگر
- تقویت مهارت استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری
- پرورش مهارت‌های ارزیابی کردن، استدلال کردن

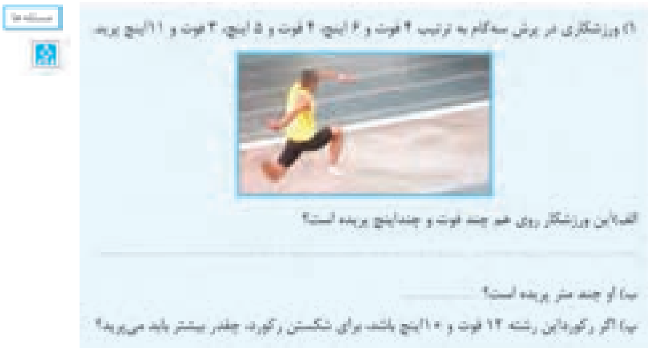
۱ تکمیل جدول

	طول حدس‌زده‌شده بر حسب واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی	طول حدس‌زده‌شده بر حسب واحدهای اندازه‌گیری SI	طول اندازه‌گرفته‌شده بر حسب واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی	طول اندازه‌گرفته‌شده بر حسب واحدهای اندازه‌گیری SI
عرض کتاب ریاضی	in ----------	cm ----------	$7\frac{15}{16}$ اینچ	۲۰/۲ سانتی‌متر
طول کتاب ریاضی	ft ----------	m----------	۰/۸۷ فوت	۲۶/۸ سانتی‌متر
طول پنجرهٔ اتاق	yd ----------	m ----------	----------	----------
طول خودکاری که از آن استفاده می‌کنید	in ----------	mm ----------	----------	----------
طول اتاق	ft ----------	m ----------	----------	----------
دور کمر خودتان	in ----------	cm ----------	----------	----------

۲ با واحد SI راحت‌تر است. دلیل آن نیز مبنای سیستم عدد نویسی رایج است که ۱۰ می‌باشد. کار با واحدهای سیستم انگلیسی به مهارت کار با کسرها و اعداد مخلوط و اعداد مرکب وابسته است که مشکل‌تر ازکار با سیستم دهدهی است.

در این کار در کلاس، با تخمین برخی از طول‌ها و اندازه‌گیری آنها با ابزارهای اندازه‌گیری، مهارت تخمین زدن بالاتر می‌رود. می‌توان به هنرجویان توصیه کرد که طول‌های مختلف را تخمین بزنند و سپس با ابزارهای اندازه‌گیری، دقت تقریب خود را بررسی کنند. با انجام این عمل، مهارت تخمین بهتر افزایش می‌یابد.

مسئله‌ها



مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

الف) ۱۲ فوت و ۱۰ اینچ $4\frac{6}{12}+4\frac{5}{12}+3\frac{11}{12}=11\frac{22}{12}=12\frac{10}{12}\rightarrow$

این قسمت را می‌توان با نماد اعداد مرکب به‌صورت زیر حل کرد:

$$\begin{array}{ll} 4' & 6''+ \\ 4' & 5'' \\ 3' & 11'' \\ \hline 11' & 22'' \longrightarrow \quad 12' \quad 10'' \end{array}$$

ب) متر ۱۲×۰/۳۱+۱۰×۰/۰۲۵=۳/۹۷

پ) حداقل ۱ اینچ بیشتر یعنی باید حداقل ۱۲ فوت و ۱۱ اینچ می پرید.

توصیه:

در این مسئله می‌توان به هنرجویان گفت این مسئله را با راه‌های متفاوتی حل کرده و سپس نتایج را با هم مقایسه کنند تا خطای تقریب را متوجه شوند. (مثلاً یکی از راه‌ها تبدیل فوت به اینچ و سپس تبدیل به متر و...)

۲) قد شما چند سانتی‌متر است؟
الف) چند متر است؟ ....
ب) چنداینچ است؟ ....
پ) چند فوت است؟ ....
ت) چند یارد است؟ ....

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها
- فرض کنیم قد برحسب سانتی‌متر ۱۶۸ باشد

برحسب متر: ۱/۶۸ متر، برحسب اینچ : ۶۵/۵۲

برحسب فوت: ۵/۵۱۰ ، برحسب یارد : ۱/۸۳۱

۳) یک گردشگر از کشوری که از سیستم اندازه‌گیری انگلیسی استفاده می‌کند به ایران آمده است. او در راه اصفهان، تابلوی مقابل را می‌بیند. فرض کنید شما به عنوان مسئول سازمان جهانگردی می‌خواهید پیشنهاد بدهید فاصلهٔ شهرها را بر حسب مایل نیز روی تابلوهای راهنمایی بنویسند. حساب کنید تا اصفهان چند مایل باقی مانده است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

۰/۶۲× ۳۴۲= ۲۱۲/۰۴

۴) در یک مسابقهٔ دو امدادی، هر تیم باید ۲۰ مایل بدود. اگر هر بازیکن مجاز باشد فقط ۳ کیلومتر بدود، هر تیم چند دونده باید داشته باشد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

۲۰×۱/۶۱=۳۲/۲

۳۲/۲÷۳=۱۰/۷ ⇒ ۱۱نفر

۵) یک دبیر هنر، یک بسته نوار تزیینی به طول ۵۰ یارد خرید. هر دانش‌آموز برای تکمیل پروژه به ۰/۸ متر نوار نیاز دارد. ۳۰ دانش‌آموز دراین پروژه شرکت دارند. چند یارد نوار باقی می‌ماند؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

۰/۸×۱/۰۹=۰/۸۷۲

۰/۸۷۲×۳۰=۲۶/۱۶ ⇒ ۵۰−۲۶/۱۶=۲۳/۸۴

۶) سه وسیله نام ببرید که به طور رایج، اندازه‌شان با واحدهای انگلیسی بیان می‌شود.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، تفکر واگرا

تلویزیون (اینچ) ، یخچال (فوت)، قطر لوله آب، پیچ‌ها و....

۷) تحقیق کنید سایز کفش (برای مثال ۳۸، ۴۰ و غیره) چگونه تعیین شده است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ جمع‌آوری اطلاعات، ارتباطات کلامی، ارزیابی کردن

با اندازه‌گیری مناسب فاصله پاشنه تا انگشت شست (شکل روبه‌رو) و مراجعه به سایت‌های اینترنتی می‌توان سایز را پیدا کرد (البته معمولاً سایز کفش کارخانه‌های مختلف با هم یکسان نیستند) رابطه‌ای که در بسیاری از سایت‌ها به آن اشاره شده است به‌صورت:

سایز کفش = (طول پا (برحسب سانتی‌متر) + ۲) × ۱/۵.

۸) حسین هنرجوی رشتهٔ صنایع چوب است. او برای انجام پروژهٔ خود که ساخت صندلی است به الگوی زیر دست پیدا کرد. ابعاد و اندازه‌های روی شکل بر حسب فوت و اینچ است. این اندازه‌ها را بر حسب سانتی‌متر به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، حل مسئله

ارتفاع پشت صندلی (که از ۲ فوت و ۸ اینچ تا ۳ فوت و ۶ اینچ می‌باشد) برحسب سانتی‌متر عبارت است از:

$$۲'\ ۸'' = ۲\times۳۱ + ۸\times۲/۵۴ = ۸۲/۳۲$$

$$۳'\ ۶'' = ۳\times۳۱ + ۶\times۲/۵۴ = ۱۰۸/۲۴$$

همچنین ارتفاع قسمت جلوی صندلی برحسب سانتی‌متر:

$$۱'\ ۶'' = ۱\times۳۱ + ۶\times۲/۵۴ = ۴۶/۲۴$$

و فاصله ابتدای صندلی از محل تکیه‌دادن برحسب سانتی‌متر:

$$۱'\ ۴'' = ۱\times۳۱ + ۴\times۲/۵۴ = ۴۱/۱۶$$

۹) در دریانوردی از واحدی به نام گره برای اندازه‌گیری سرعت شناورها در دریا استفاده می‌شود. سرعت یک گره برابر است با یک مایل دریایی بر ساعت. مایل دریایی با واحد مایل که از آن برای اندازه‌گیری طول در خشکی استفاده می‌شود فرق دارد. تحقیق کنید یک مایل دریایی با مایل (اندازه‌گیری در خشکی) چه رابطه‌ای دارد.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ جمع‌آوری اطلاعات، ارزیابی کردن ارتباطات کلامی

مایل دریایی تقریباً ۱/۱۵ مایل (اندازه‌گیری در خشکی) است.

۱۰) فاصلهٔ دو بندر خارک و بوشهر در دریا برابر با ۳۰ مایل دریایی است. فاصلهٔ این دو بندر از هم چند کیلومتر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

مایل دریایی معادل ۱۸۵۲ متر یعنی : ۱/۸۵۲ کیلومتر است. پس فاصله مورد نظر:
۵۵/۵۶=۱/۸۵۲×۳۰ کیلومتر است.

بخش دوم: واحد اندازه‌گیری انگلیسی (جرم)

اهداف بخش

- آشنایی با برخی واحدهای اندازه‌گیری جرم در سیستم اندازه‌گیری انگلیسی
- اندازه‌گیری جرم مشخص شده با استفاده از وسیله اندازه‌گیری
- ارائهٔ تخمین وزن اجسام مشخص شده بدون استفاده از ترازو
- تبدیل جرم مشخص شده برحسب یک واحد به واحدهای دیگر در همان سیستم یا سیستم دیگر

واژه‌های کلیدی:

- سیستم اندازه‌گیری انگلیسی، سیستم اندازه‌گیری SI، تبدیل واحدهای اندازه‌گیری، تخمین جرم

نگاه کلی به بخش:

اگر به اخبار اقتصادی توجه کرده باشیم، ملاحظه خواهیم کرد که برخی از واحدهای جرمی مورد استفاده قرار می‌گیرند در سیستم SI نیستند. این مطلب در کتاب‌های آشپزی یا الگوهای خیاطی و .. نیز دیده می‌شود. آشنایی با این واحدها و نحوه تبدیل آنها به واحدهای سیستم متریک در درک صحیح از مقدار آنها و ارائه تخمین مناسب از مقدار این واحدها مؤثر است. این بخش با بیان یک وضعیت مسئله‌گونه یکی از این واحدها معرفی می‌شود و انگیزه برای انجام فعالیت توسط هنرجویان ایجاد می‌شود. لازم به ذکر است که در مسائل فصل، کمیت دما نیز مطرح شده است. دلایل طرح این کمیت در کتاب این است که: اولاً هنرجویان اطلاع داشته باشند که در این سیستم واحد دیگری برای اندازه‌گیری دما وجود دارد و ثانیاً با تبدیل واحدهای دما به یکدیگر نیز آشنا شوند. ولی تمرکز بر این کمیت و تدریس آن از اهداف کتاب نیست.

ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب می‌توان با اعلام خبری اقتصادی مرتبط با جرم (وزن) یا با ارائه جدولی نظیر جدول تهیه کیک که برای هنرجویان جذاب باشد و با طرح سؤالاتی از میزان آشنایی آنها با این واحدها انگیزه لازم جهت توجه هنرجویان را فراهم کرد.

فعالیت آموزشی


۱) وزن یک سکهٔ ۵۰۰۰ ریالی تقریباً ۰/۳۶ اونس است. یک سکهٔ ۵۰۰۰ ریالی را در دست بگیرید و وزن آن را بر حسب گرم تخمین بزنید.

۲) بر حسب تخمین خود بگویید ۱ اونس تقریباً چند گرم است.

۳) با مراجعه به اینترنت وزن یک سکهٔ ۵۰۰۰ ریالی را بر حسب گرم پیدا کنید.

۴) با در نظر گرفتن وزن یک سکهٔ ۵۰۰۰ ریالی، هر اونس تقریباً چند گرم است؟

اهداف موضوعی:

- آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری وزن در واحد انگلیسی (اونس)
- تقویت مهارت تخمین وزن (جرم).
- درک رابطه بین انس و گرم از طریق مقایسه اندازه وزن (جرم) یک جسم مشخص برحسب واحدهای مختلف.
- تقویت مهارت تبدیل واحدهای وزن (جرم) به یکدیگر.

مهارت‌ها و فرایندها:

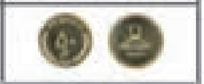
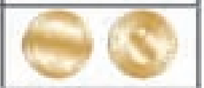
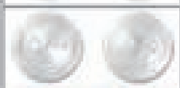
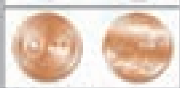
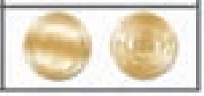
- حل مسئله، تخمین زدن، جمع‌آوری اطلاعات

۱ و ۲ با توجه به مهارت تخمین پاسخ هنرجویان ارائه می‌شود.

۳ وزن یک سکه ۵۰۰۰ ریالی براساس اعلام بانک مرکزی ۱۰/۱ گرم است.

۴ هر اونس تقریباً ۲۸ گرم است.

جدول زیر وزن سکه‌های رایج بر اساس اعلام بانک مرکزی بر حسب گرم است، وزن بر حسب واحد اونس نیز با تبدیل در کنار آن آمده است. هنرجویان می‌توانند از هر کدام نوع سکه برای انجام فعالیت استفاده کنند (ترجیحاً سکه‌های سنگین‌تر برای تخمین جرم انتخاب شود).

تصویر	ارزش (ریال)	وزن (گرم)	وزن (اونس)	تصویر	ارزش (ریال)	وزن (گرم)	وزن (اونس)
	۵۰	۳/۵	۰/۱۲		۱۰۰۰	۴/۶	۰/۱۶
	۱۰۰	۴/۶	۰/۱۶		۱۰۰۰	۴/۶	۰/۱۶
	۲۵۰	۲/۸	۰/۱		۱۰۰۰	۴/۶	۰/۱۶
	۵۰۰	۳/۹	۰/۱۴		۲۰۰۰	۶/۸	۰/۲۴
	۵۰۰	۳/۵	۰/۱۲		۲۰۰۰	۶/۸	۰/۲۴
	۱۰۰۰	۵/۸	۰/۲		۵۰۰۰	۱۰/۱	۰/۳۶
	۱۰۰۰	۵/۸	۰/۲		۵۰۰۰	۱۲	۰/۴۲
	۱۰۰۰	۴/۶	۰/۱۶		۵۰۰۰	۱۰/۱	۰/۳۶

با توجه به اهداف این فعالیت می‌توان با انتخاب اجسام مختلف دیگر که در دسترس هستند و طی مراحل فعالیت فوق نیز برای تقویت مهارت تخمین جرم استفاده کرد. ذکر این نکته ضروری است که افزایش فرصت‌های تخمین و بررسی میزان دقت درک بهتری از مفهوم جرم می‌دهد و مهارت تخمین دقیق‌تر را بالا می‌برد.

کار در کلاس

۱) فرض کنید می‌خواهید دستور پخت یک غذای اصیل ایرانی را برای دوستان بفرستید و دوست شما اهل کشوری است که در آنجا از سیستم انگلیسی استفاده می‌شود. مقادیر مواد مورد نیاز را برحسب چه واحدهایی می‌نویسید؟

۲) ضریب تبدیل اونس به گرم را پیدا کنید.

۳) توضیح دهید برای تبدیل اونس به پوند یا برعکس، از چه عملیاتی استفاده می‌کنید؟

۴) برای تبدیل اونس به کیلوگرم از چه عملیاتی استفاده می‌کنید؟

۵) برای تبدیل واحدها، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

... اونس	۱ گرم
... گرم	۱ پوند
... اونس	۱ کیلوگرم
... کیلوگرم	۱ پوند

اهداف:

- پرورش مهارت‌های برقراری ارتباطات کلامی، استدلال کردن
- تقویت مهارت تبدیل واحدها به یکدیگر.
- پرورش مهارت‌های برقراری ارتباطات کلامی، استدلال کردن

۱ واحد انگلیسی

۲ هر اونس ۲۸ گرم است .

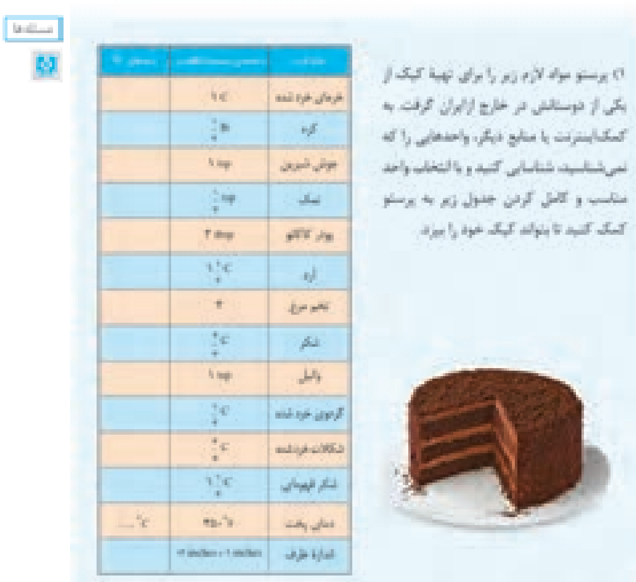
۳ تبدیل اونس به پوند: مقدار بر حسب اونس را بر عدد ۱۶ تقسیم می‌کنیم تا مقدار برحسب پوند به دست آید.

تبدیل پوند به اونس: مقدار بر حسب پوند را در عدد ۱۶ ضرب می‌کنیم تا مقدار بر حسب اونس به‌دست آید.

۴ مقدار برحسب اونس را در عدد ۰/۰۲۸ ضرب می‌کنیم.

۰/۰۳۵ اونس	۱ گرم
۴۵۰ گرم	۱ پوند
۳۵/۲۷ اونس	۱ کیلوگرم
۰/۴۵ کیلوگرم	۱ پوند

مسئله‌ها



مهارت‌ها و فرایندها :

حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی

مواد لازم	واحدهای انگلیسی	واحدهای سیستم SI
خرمای خرد شده	۱ C	۲۴۰ml
کره	$\frac{۱}{۲}$ lb	۲۲۵g
جوش شیرین	۱ tsp	۵ml
نمک	$\frac{۱}{۲}$ tsp	۲/۵ml
پودر کاکائو	۳ tbsp	۴۵ml

مواد لازم	واحدهای انگلیسی	واحدهای سیستم SI
آرد	$۱\frac{۱}{۲}$ C	۳۶۰ml
تخم مرغ	۲	۲
شکر	$\frac{۲}{۳}$ C	۱۶۰ml
وانیل	۱ tsp	۵ml
گردوی خرد شده	$\frac{۱}{۲}$ C	۱۲۰ml
شکلات خرد شده	$\frac{۳}{۴}$ C	۱۸۰ml
شکر قهوه‌ای	$۱\frac{۱}{۴}$ C	۳۰۰ml
دمای پخت	**۳۵۰ ˚F**	**۱۷۶/۶۶˚C**
اندازهٔ ظرف	**۱۳ inches × ۹ inches**	**۳۳/۰۲cm×۲۲/۸۶cm**

مهارت‌ها و فرایندها :

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

تذکر: اندازه‌های تبدیل شده به واحد انگلیسی تقریبی است.

مواد لازم	واحدهای سیستم SI	واحدهای انگلیسی
توت فرنگی خرد شده	۷۵۰ g	۱/۶۵ lb
شکر	۵۰ g	۱/۷۵ oz
آرد	۲۵۰ g	۰/۵۵ lb
بیکینگ پودر	۶۰ ml	$\frac{۱}{۴}$ c
نمک	۲ ml	$\frac{۱}{۲}$ tsp
کره	۱۲۰ g	۴/۲ oz
تخم مرغ	۱	۱
شیر	۱۶۰ ml	$\frac{۲}{۳}$ C
خامه	۲۵۰ ml	۱ C
دمای پخت	۳۵۰ °C	۶۶۲°F
اندازهٔ ظرف	ظرف گرد به قطر: ۲۵cm	ظرف گرد به قطر: ۱۰inch

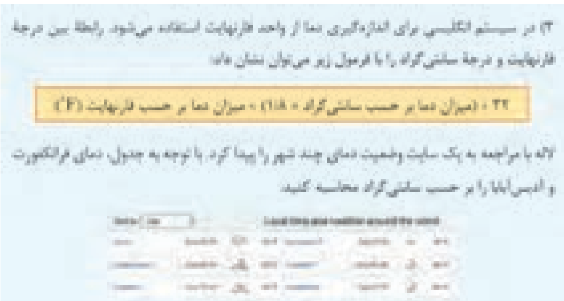
معنی برخی از علائم که در واحد انگلیسی استفاده می‌شود به‌صورت زیر است:

معنی به زبان فارسی	معنی به زبان انگلیسی	علامت
فنجان	Cup	C
قاشق چایخوری	teaspoon	tsp
قاشق غذاخوری	Table spoon	tbsp
پوند	pound	lb
اونس	ounce	oz

ضمناً برابری زیر بین این واحدها برقرار است.

۱ فنجان	۱۶ قاشق سوپ خوری
۱ pint	۲ فنجان
۱ quart	۴ فنجان
۱ گالن	۱۶ فنجان
۱ quart	۲ pint
۱ گالن	۴ quart
۱ فنجان	۲۴۰ میلی لیتر

۱ pint	۴۷۳ میلی لیتر
۱ quart	۰/۹۵ لیتر
۱ pint	$\frac{۱}{۸}$ قاشق چایخوری
۱ قاشق چایخوری	۵ میلی لیتر
۱ قاشق غذا خوری	۳ قاشق چایخوری
۱ قاشق غذا خوری	۱ اونس
۱ گالن	۱۲۸ اونس


۴) در سیستم انگلیسی برای اندازه‌گیری دما از واحد فارنهایت استفاده می‌شود. رابطهٔ بین درجهٔ فارنهایت و درجهٔ سانتی‌گراد را با فرمول زیر می‌توان نشان داد:

۳۲ + (میزان دما بر حسب سانتی‌گراد × ۱/۸) = میزان دما بر حسب فارنهایت (°F)

لاله با مراجعه به یک سایت وضعیت دمای چند شهر را پیدا کرد. با توجه به جدول دمای فرانکفورت و ادیس‌آبابا را بر حسب سانتی‌گراد محاسبه کنید.

مهارت‌ها و فرایندها :

- حل مسئله، تقویت مهارت استفاده از فرمول

نام شهر	فارنهایت	سانتی گراد	نام شهر	فارنهایت	سانتی گراد
Accra	۷۵	۲۳/۸۸	Edmonton	۳۶	۲/۲۲
Addis Ababa	۶۳	۱۷/۲۲	Frankfort	۴۶	۷/۷۷
Adelaide	۶۸	۲۰	Guatmala	۶۸	۲۰

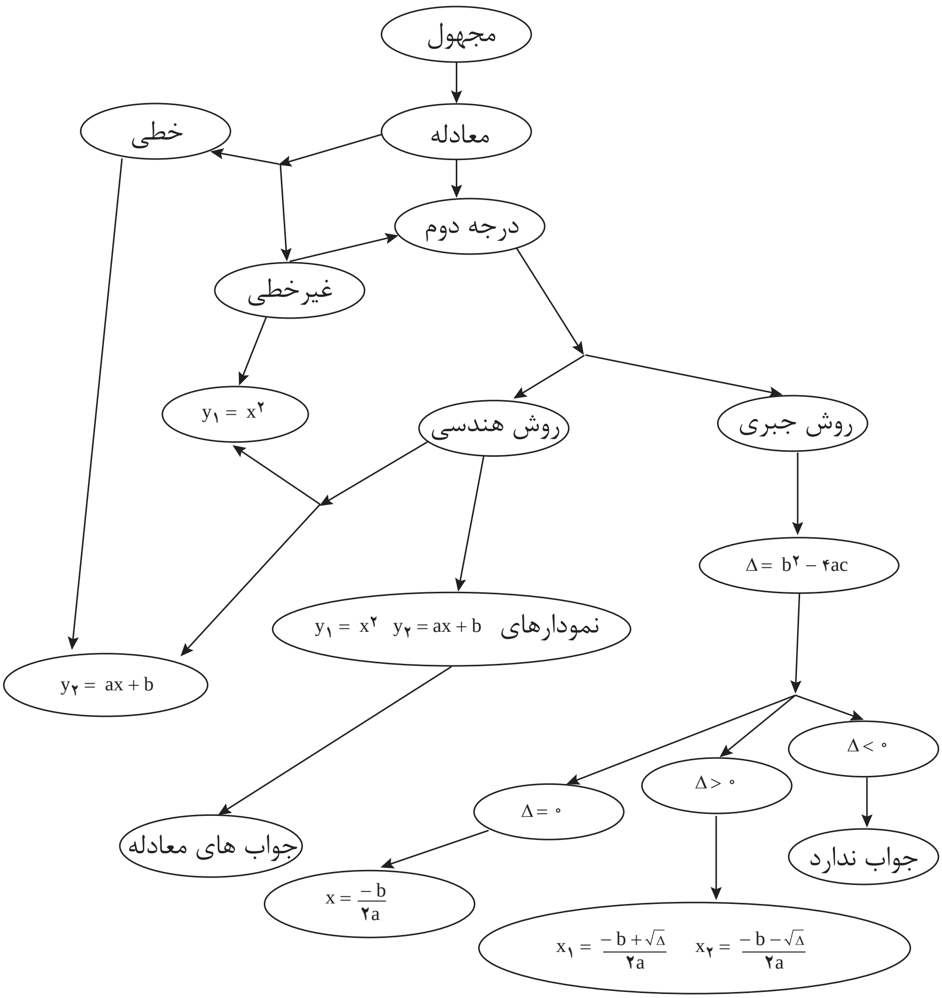
توسعه دانش

اندازه‌گیری به معنای نسبت‌دادن یک عدد به یک کمیت در وضعیت‌های مختلف است. این عمل همیشه هم سر راست و آسان نیست و در برخی موارد به صورت تعریف شده و قراردادی در می‌آید. مثلاً وضعیت رفاهی کشورها با هم فرق می‌کند و برخی کشورها در رفاه بیشتری هستند، آیا می‌توانید وضعیت رفاهی کشورها را به صورت عددی بیان کنید؟ این سؤالی است که اقتصاددان‌ها با آن روبه‌رو هستند.
برای داشتن نظریه‌های مناسب در هر شاخه علمی، لازم است کمیت‌هایی که در آن شاخه با آن روبه‌رو هستیم به نوعی قابل اندازه‌گیری باشند تا بتوان روابطی دقیق بین آنها به دست آورد.
ساده‌ترین حالت برای اندازه‌گیری یک کمیت، موقعی است که کمیت ویژگی جمع‌پذیری دارد. یعنی، می‌توان با روشی مانند در کنار هم گذاردن دو مقدار از آن کمیت عمل جمع بین دو مقدار از آن کمیت را تعریف کرد. مثلاً طول پاره‌خط‌ها جمع‌پذیر است زیرا جمع طول دو پاره‌خط با در کنارهم قراردادن آنها تعریف می‌شود. این وضعیت برای مساحت و حجم اشکال هندسی هم برقرار است. هر نوع عملیاتی روی یک کمیت را می‌توان جمع کردن حساب کرد به شرط آنکه خاصیت‌های اساسی جمع کردن (جابه‌جایی، شرکت‌پذیری، قاعده حذف از طرفین) برای آن برقرار باشند.
معمولاً در هر شاخه علمی چند کمیت اصلی وجود دارند که باید روش عملیاتی اندازه‌گیری آنها مشخص باشد و بقیه کمیت‌ها طبق فرمول‌هایی بر حسب کمیت‌های اصلی تعریف می‌شوند.
یک نکته اساسی در اندازه‌گیری، خطای اندازه‌گیری است. معمولاً روش‌های عملیاتی که برای محاسبه اندازه یک کمیت تعریف می‌شوند در عمل وابسته به میزان دقت ما و دقت وسایلی است که به‌کار می‌بریم و هیچ‌کدام از این موارد دقت کامل ندارند. مثلاً در یک محاسبه ساده طول یک پاره‌خط با خط‌کش، توانایی بصری ما در انطباق دقیق خط‌کش بر پاره‌خط و خواندن اعدادی که دیده می‌شوند مطرح است و خطایی در حدود میلی‌متر یا دهم میلی‌متر را ایجاد می‌کند. در محاسباتی که حساسیت بالایی دارند باید به میزان دقت اندازه‌گیری توجه شود تا نتیجه نهایی کار خراب نشود. مثلاً در فرستادن یک موشک در فضا اگر خطای اندازه‌گیری از یک حدی بیشتر شود، ممکن است باعث سرنگونی موشک شود.

فصل چهارم

معادلهٔ درجهٔ دوم

طرح کلی مفاهیم فصل چهارم (نقشهٔ مفهومی)



	فرایند	توضیح فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و یا انتخاب مناسب آنها	ـ روش حل هندسی و یافتن نقطهٔ تلاقی تقریبی ـ روش حل جبری (Δ) و یافتن جواب‌های معادله در صورت وجود
	ارتباط کلامی	سازماندهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ـ بحث بین مادر زهرا و مشاور مالی او در رسیدن به معادلهٔ درجهٔ دوم
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ برای یافتن نقطهٔ برخورد دو منحنی مسائل فعالیت ۳ و کار در کلاس بعد از آن را به زبان ریاضی بنویسد و مفهوم نقطهٔ تلاقی را بیان کند.
	استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	ـ بیان دلیل برای تشخیص معادلهٔ درجهٔ دوم ـ بیان دلیل برای تشخیص و شناسایی بین رابطه‌های خطی و غیرخطی ـ دلیل درستی یا نادرستی رابطه‌ها را در مسائل آخر فصل بیان کند. ـ بیان دلیل برای تشخیص جواب معادله از طریق هندسی ـ بیان دلیل برای تشخیص تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	ـ مسئلهٔ کارگاه میز تحریر و مدل‌سازی ریاضی آن، و حل مسئله ـ مسئلهٔ کارگاه صنایع دستی و مدل‌سازی ریاضی آن، و حل مسئله
		تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	ـ روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم به دو صورت هندسی وجبری ـ نقطه تلاقی دو منحنی و ارتباط آن با جواب معادلهٔ برخورد دو منحنی
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش هندسی (مثال ۳)
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ توانایی مقایسهٔ جواب معادله $x^2 = ax + b$ و نقطهٔ تلاقی نمودارهای $y = ax + b$ و $y = x^2$ ـ یافتن اختلاف بین دو رابطهٔ خطی و غیرخطی

اهداف کلی فصل

- آشنایی با معادلهٔ درجهٔ دوم
- استفاده از معادلهٔ درجهٔ دوم برای مدل‌سازی پدیده‌ها
- آشنایی با رابطهٔ غیر خطی و تفاوت آن با رابطهٔ خطی
- درک مفهوم جواب یک معادله
- آشنایی با روش هندسی حل معادلهٔ درجهٔ دوم و یافتن ریشه‌ها به‌صورت تقریبی در صورت وجود
- آشنایی با روش جبری حل معادلهٔ درجهٔ دوم

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان:

هنرجویان باید قادر باشند:

- از معادله‌های درجهٔ دوم در حل مسائل زندگی روزمره استفاده کنند.
- توانایی رسم نمودار معادله‌های $y = x^2$ و $y = ax+b$ را داشته باشند.
- معادله‌های درجهٔ دوم را با روش‌های جبری و هندسی حل کنند.

پیش نیازها:

- آشنایی با معادلهٔ درجهٔ اول و عملیات جبری ساده روی آنها و حل آنها
- آشنایی با چندجمله‌ای‌ها و یافتن مقدار آنها به‌ازای مقدار عددی برای متغیر
- تعیین مختصات نقطهٔ مشخص شده در صفحهٔ مختصات و برعکس
- آشنایی با رسم رابطه‌های خطی

نگاه کلی به فصل :

معادله‌ها و حل آنها بخش مهمی از ریاضی را تشکیل می‌دهند. در مدل‌سازی پدیده‌های واقعی، همواره به معادله‌هایی برخورد می‌کنیم که معادله‌های درجهٔ دوم یکی از انواع سادهٔ آن است.

این فصل با طرح یک مسئله آغاز می‌شود تا معادله‌های درجهٔ دوم در یک زمینهٔ واقعی ساخته شوند. هدف بعدی، آشنایی با شیوه‌های حل معادله‌های درجه دوم است. برای بیان روش هندسی در حل معادله‌های درجهٔ دوم لازم است رابطه‌های غیرخطی را بشناسیم. به همین دلیل بخش بعدی دربارهٔ رابطه‌های غیرخطی است. شناخت رابطه‌های خطی و معادلهٔ درجهٔ اول در سال‌های قبل انجام شده است و

در این فصل با چند رابطه غیرخطی آشنا می‌شویم که نوع خاصی از آن، رابطه‌های درجهٔ دوم است.

روش هندسی حل معادله‌های درجهٔ دوم نیازمند درک مفهوم نقطهٔ تلاقی نمودار رابطه‌ها است. به همین دلیل، ابتدا نقاط تلاقی دو خط در یک مسئله واقعی بررسی شده و نقطهٔ تلاقی و مفهوم آن معرفی شده است. سپس روش‌های حل معادله‌های درجهٔ دوم و یافتن جواب‌های آن در صورت وجود مطرح می‌شود. در این فصل دو روش هندسی و جبری حل معادله‌های درجهٔ دوم ارائه می‌شوند.

بخش اول: معادله‌های درجهٔ دوم

اهداف بخش

- آشنایی بامعادله‌های درجهٔ دوم و تشخیص آن از بین چند معادله
- درک مفهوم جواب معادله‌های درجهٔ دوم
- استفاده از معادله‌های درجهٔ دوم در مدل‌سازی پدیده‌ها

واژه های کلیدی:

معادلهٔ درجهٔ دوم، جواب معادله

نگاه کلی به بخش :

در این بخش با طرح یک وضعیت مسئله‌گونه در زندگی روزمره و سعی در حل آن به یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم. مهم‌ترین فعالیت آموزشی این بخش مدل‌سازی ریاضی برای رسیدن به معادلهٔ درجهٔ دوم می‌باشد تا این معادله‌ها به طور طبیعی مطرح شوند. همچنین مفهوم جواب این معادله‌ها طرح می‌شوند زیرا جواب اصلی موقعیت‌های مسئله‌گونه در بین جواب‌های این معادله‌ها است.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۱

۱) با استفاده از رابطهٔ $x = ۶۰,۰۰۰ - ۳۰۰p$، مقدار p را بر حسب x به دست آورید.

۲) درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادلهٔ درآمد را تشکیل دهید.

۳) معادلهٔ درآمد را بر حسب x، بنویسید.

۴) چند جمله‌ای درآمد بر حسب x از درجهٔ چند است؟

۵) اگر درآمد حاصل از فروش، ماهیانه سه میلیون تومان باشد، چه معادله‌ای برای x به‌دست می‌آید؟

اهداف موضوعی:

- آشنایی با معادله‌های درجهٔ دوم

مهارت‌ها و فرایندها:

- مدل‌سازی وضعیت‌های واقعی با معادله، استدلال، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت تفکر، پیوندها و اتصال‌ها

۱ $p=\frac{۶۰۰۰۰-x}{۳۰۰}$

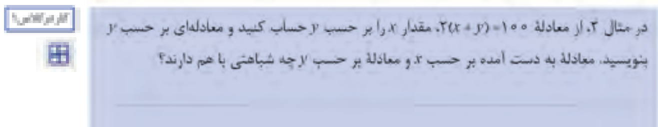
۲ $R= p.x$

۳ $R=(\frac{۶۰۰۰۰-x}{۳۰۰})x=\frac{۶۰۰۰۰x-x^{۲}}{۳۰۰}$

۴ از درجهٔ ۲ است.

۵ $\frac{۶۰۰۰۰x-x^{۲}}{۳۰۰}=۳۰۰۰۰۰۰\Rightarrow x^{۲}-۶۰۰۰۰x+۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰=۰$

در ادامه تعریف معادله‌های درجهٔ دوم ارائه شده است و مثال‌هایی از آن در زمینهٔ ریاضی و زمینهٔ واقعی آمده است.


در مثال ۳، از معادلهٔ ۱۰۰=(x+y)۲، مقدار x را بر حسب y حساب کنید و معادله‌ای بر حسب y بنویسید. معادلهٔ به دست آمده بر حسب x و معادلهٔ بر حسب y چه شباهتی با هم دارند؟

اهداف:

- تقویت مهارت تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم، پرورش مهارت مقایسه کردن و مدل‌سازی قبل از انجام محاسبه، مناسب است کنجکاوی هنرجو دربارهٔ مثال قبل برانگیخته‌شود که اگر معادله را بر حسب متغیر دیگر می‌نوشتیم چه اتفاقی می‌افتاد. سپس محاسبه را انجام دهیم.

$$۲(x+y)=۱۰۰\Rightarrow x+y=۵۰\Rightarrow x=۵۰-y$$
$$xy=۶۰۰\Rightarrow (۵۰-y)y=۶۰۰\Rightarrow y^{۲}-۵۰y+۶۰۰=۰$$

متوجه می‌شویم که ضرایب عددی معادلهٔ درجهٔ دوم پدید آمده در مثال ۲ با کار در کلاس یکسان است و فقط نام متغیر عوض می‌شود. آیا می‌توانید دلیل این یکسانی دو معادله را توضیح دهید؟

بخش دوم: رابطه‌های غیرخطی

اهداف بخش

- آشنایی با رابطهٔ غیرخطی
- شناخت تفاوت بین رابطه‌های خطی و غیرخطی
- درک مفهوم نقطهٔ برخورد دو خط
- آشنایی با روش رسم نمودار رابطهٔ $y = x^۲$ از طریق جایگذاری عدد به جای متغیر آن (نقطه یابی)

واژه‌های کلیدی:

رابطهٔ غیرخطی، نقطهٔ برخورد دو خط

نگاه کلی به بخش :

ابتدا ویژگی اساسی رابطه‌های خطی مطرح می‌شود. سپس رابطه‌هایی آشنا در زمینهٔ زندگی روزمره مطرح می‌شوند که این ویژگی را ندارند و از این طریق رابطه‌های غیرخطی مطرح می‌شوند. سپس با انجام فعالیت‌هایی که طرح شده‌اند هنرجویان با رابطه‌های غیر خطی آشنایی بیشتری می‌یابند و نمودار این رابطه‌ها را نیز به دست می‌آورند. به طور خاص نمودار رابطه $y = x^۲$ به‌طور دقیق‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین در یک فعالیت مفهوم نقاط برخورد نمودار رابطه‌ها در این بخش آموزش داده می‌شود.

ورود به مطلب:

در فصل‌های قبل با رابطه‌های خطی برای مدل‌سازی کمیت‌های متناسب بسیار کار شده‌است. با داشتن چنین زمینه‌ای می‌توانید این سؤال را مطرح کنید که آیا همهٔ کمیت‌های مرتبط متناسب هستند؟ می‌توانید از رابطه‌هایی که برای هنرجویان آشنا هستند استفاده کنید. البته لازم است در ضمن طرح این سؤال یا پیشاپیش ویژگی اساسی رابطه‌های خطی را به دست آورید و این ویژگی را در مورد رابطه‌های آشنا بررسی کنید.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۲

رابطهٔ طول ضلع یک مربع با محیط آن و رابطهٔ طول ضلع یک مربع با مساحت آن را در نظر بگیرید.
طول ضلع مربع را با x، محیط آن را با P و مساحت آن را با S نشان دهید.

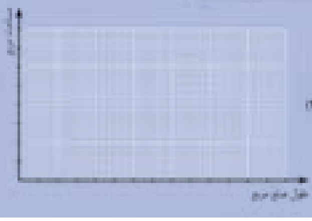
۱) رابطهٔ P و x و همچنین رابطهٔ S و x را با دو معادله بنویسید.

۲) جدول زیر را کامل کنید.

x (طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
P (محیط مربع)	....	....	....	....	....
S (مساحت مربع)	....	....	....	....	....

۳) نقاط به دست آمده در جدول را در دو دستگاه محورهای مختصات زیر نشان دهید.

شکل (۱)



شکل (۲)

۴) جدولی رسم کنید که میزان افزایش محیط و مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به ۲، از ۲ به ۳ و از ۴ به ۵ افزایش می‌یابد، نشان دهد.

۵) آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

۶) آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

۷) می‌خواهیم نقاط شکل (۱) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

۸) می‌خواهیم نقاط شکل (۲) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

اهداف موضوعی:

- آشنایی با رابطه‌های غیرخطی، مقایسهٔ رابطهٔ خطی و غیرخطی

مهارت‌ها و فرایندها:

- مدل‌سازی جبری رابطه‌ها، بازنمایی‌های چندگانه (مقایسه کردن، تفکر بصری)

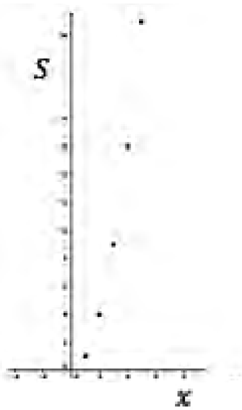
دراین فعالیت رابطهٔ بین محیط و مساحت مربع با طول ضلع مربع به صورت معادله، جدول و نمودار خواسته شده تا تفاوت بین رابطهٔ خطی و غیرخطی در این سه قالب دیده شود.

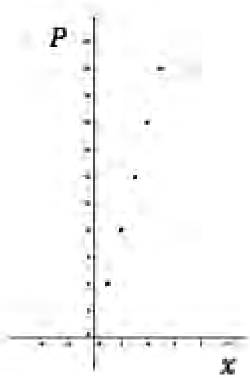
۱ محیط $P = 4x$ و مساحت $S = x^2$

۲

x(طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
P (محیط مربع)	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
S (مساحت مربع)	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

۳





۴

x(طول ضلع مربع)	از ۱ به ۲	از ۲ به ۳	از ۳ به ۴	از ۴ به ۵
میزان افزایش محیط	۴	۴	۴	۴
میزان افزایش مساحت	۳	۵	۷	۹

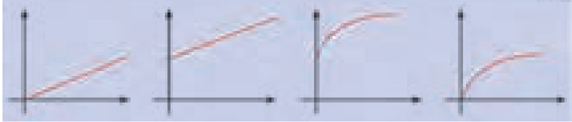
۵ بله، به ازای هر ۱ واحد افزایش طول ضلع ۴ واحد محیط اضافه می‌شود.

۶ خیر، به ازای ۱ واحد افزایش طول ضلع افزایش مساحت ثابت نیست و بستگی به مقدار طول ضلع دارد.

۷ بله، زیرا میزان افزایش محیط یکسان است.

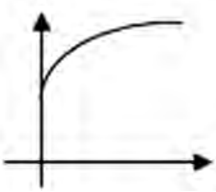
۸ خیر، زیرا میزان افزایش مساحت یکسان نیست.

در شکل زیر، محور افقی نشان‌دهندهٔ زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان‌دهندهٔ وزن یک انسان بر حسب کیلوگرم است. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار وزن یک انسان در طول زمان باشد؟



اهداف:

- آشنایی با رابطه‌های غیرخطی مختلف
- پرورش مهارت‌های حل مسئله و استدلال کردن، ارائهٔ بازنمایی‌های مختلف برای یک مفهوم، برقراری پیوندها و اتصال با زندگی روزمره تقویت، مهارت مقایسه کردن



رابطهٔ وزن انسان و زمان خطی نیست، پس دو نمودار سمت چپ جواب نیست. در هنگام تولد وزن انسان صفر نیست، پس نمودار سمت راست هم جواب نیست. نمودار روبه رو جواب مسئله است زیرا میزان تغییرات وزن انسان نسبت به تغییرات زمان ثابت نیست و در ابتدای تولد نیز انسان مقداری وزن دارد.

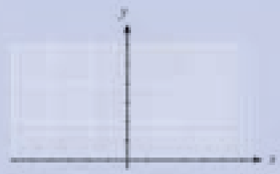
یک عدد حقیقی و مجذور آن را در نظر بگیرید. عدد حقیقی دلخواه را با x و مجذور آن (x^2) را با y نشان دهید.

۱) رابطهٔ بین x و y را با یک معادله نشان دهید.

۲) جدول زیر را کامل کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

x	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y									۱/۴۴				

۳) نقاط جدول صفحهٔ قبل را روی محورهای مختصات زیر نشان دهید و نمودار رابطهٔ $y = x^2$ را رسم کنید.



اهداف:

- آشنایی با رابطهٔ غیرخطی خاص
- پرورش مهارت‌های حل مسئله و استدلال کردن، ارائه بازنمایی‌های مختلف برای یک مفهوم، برقراری پیوند و اتصال با زندگی روزمره، تقویت مهارت مقایسه

تعمیق درک روابط غیرخطی، تقویت مهارت رسم نمودار $y = x^2$، تقویت مهارت کار با ماشین‌حساب

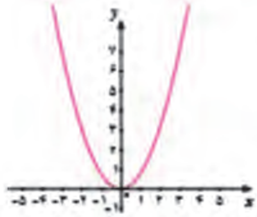
$y = x^2$

۱

۲

x	−۲	−۱/۸	−۱/۶	−۱/۴	−۱/۲	−۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y	۴	۳/۲۴	۲/۵۶	۱/۹۶	۱/۴۴	۱	۰	۱	۱/۴۴	۱/۹۶	۲/۵۶	۳/۲۴	۴

۳ این نقاط را در محورهای مشخص شده نمایش دهید و آنها را به هم وصل کنید و شکل دقیق‌تر را با استفاده از جئوجبرا رسم کنید.



فعالیت آموزشی

هزینهٔ ثابت ماهیانهٔ یک کارگاه تولید سیم برق، ۱۲۰٫۰۰۰ تومان است. هزینهٔ تهیهٔ مواد اولیه برای هر متر سیم ۶۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۴۰۰ تومان است.

۱) با توجه به این اطلاعات، جدول را کامل کنید.

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینهٔ تولید (تومان)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
درآمد حاصل از فروش (تومان)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

۲) اگر x طول سیم‌های فروخته شده، C هزینهٔ تولید و R درآمد حاصل از فروش سیم در یک ماه باشند، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و هزینه و همچنین، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و درآمد حاصل از فروش را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر، اگر محور افقی، طول سیم‌های فروخته شده بر حسب متر و محور عمودی هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب تومان در یک ماه در نظر گرفته شود، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید. (هر واحد محور افقی را ۱۰۰ متر و هر واحد محور عمودی را ۱۰۰ هزار تومان در نظر بگیرید.)

۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را بیابید.

۵) نقطهٔ تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۶) اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه در کجا قرار دارد؟

اهداف موضوعی:

■ حل معادله، درک ویژگی نقطه برخورد دو منحنی در بافت مسئله

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، فرضیه‌سازی

۱

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینهٔ تولید (تومان)	۱۷۰۰۰۰	۱۷۶۰۰۰	۱۸۲۰۰۰	۱۸۸۰۰۰	۱۹۴۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۲۰۶۰۰۰
درآمد حاصل از فروش (تومان)	۰	۴۰۰۰۰	۸۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۶۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۲۴۰۰۰۰

۲ هزینهٔ تولید x کالا برای فروش $= C = y_۱ = ۱۷۰۰۰۰ + ۶۰x$

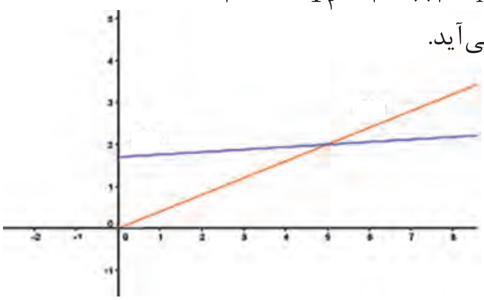
درآمد حاصل از فروش x کالا $= R = y_۲ = ۴۰۰x$

۳ برای آنکه محورهای مختصات را با واحدهای جدید در نظر بگیریم، از آنجا که y بر حسب تومان است و می‌خواهیم Y جدید بر حسب ۱۰۰۰۰۰ تومان باشد، داریم: $y = ۱۰۰۰۰۰Y$ و چون x بر حسب متر است و می‌خواهیم x جدید برحسب ۱۰۰ متر باشد داریم $x = ۱۰۰X$. با جایگذاری در رابطه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود:

$$۱۰۰۰۰۰Y_۱ = ۱۷۰۰۰۰ + ۶۰ \times ۱۰۰X \Rightarrow Y_۱ = ۱/۷ + ۰/۰۶X$$

$$۱۰۰۰۰۰Y_۲ = ۴۰۰ \times ۱۰۰X \Rightarrow Y_۲ = ۰/۴X$$

با رسم نمودار این دو خط، شکل زیر به دست می‌آید.



۴ با استفاده از شکل می‌توان دید، مختصات نقطهٔ برخورد $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$ است. در واحدهای اصلی، این مختصات به معنای ۵۰۰ کالا و قیمت ۲۰۰۰۰۰ تومان است.

۵ یعنی با تولید تعداد ۵۰۰ کالا هزینهٔ تولید و درآمد حاصل از فروش یکسان می‌شود ولی

بعد از آن چون نمودار درآمد بالای نمودار هزینه قرار می‌گیرد کارگاه شروع به سوددهی می‌کند یعنی حداقل ۵۰۰ کالا باید تولید شود تا ضرر نکند.

۶ چنین نقطه‌ای روی نمودار هر دو خط‌است، یعنی نقطهٔ برخورد این دو خط است.

با این فعالیت مفهوم نقطهٔ برخورد و اهمیت آن ذکر می‌شود.

نکته: دبیران محترم بیان کنند که نتیجهٔ این فعالیت دو طرفه است یعنی اگر مختصات نقطه‌ای در معادلهٔ هر دو خط صدق کند آن نقطه همان نقطهٔ برخورد یا نقطهٔ تلاقی نمودارهای دو خط است و بر عکس مختصات نقطهٔ برخورد دو خط، در معادلهٔ دو خط صدق می‌کند.

با قرارگرفتن هنرجو در یک وضعیت مسئله‌گونهٔ دیگر از زندگی روزمره، آنها را در درک مفهوم نقطهٔ برخورد ارزیابی می‌کنیم:

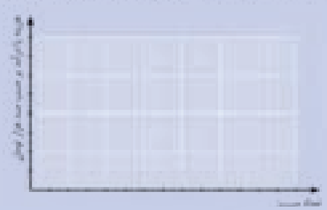
یک کارگاه تولید میز تحریر در هر ماه برای پرداخت مخارج دستگاه‌هایش، سیصدو بیست هزار تومان هزینه می‌کند. هزینهٔ مواد اولیه برای هر میز ۲۰،۰۰۰ تومان و قیمت فروش هر میز ۳۰،۰۰۰ تومان است.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
هزینهٔ تولید (بر حسب هزار تومان)					
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان)					

۲) اگر در یک ماه، تعداد میزهای تولید شده x، هزینهٔ تولید C و درآمد حاصل از فروش R در نظر گرفته شود، رابطهٔ بین تعداد میزها و هزینهٔ تولید و همچنین رابطهٔ بین تعداد میزها و درآمد حاصل از فروش در یک ماه را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر اگر محور افقی، تعداد میزهای تولید شده و محور عمودی، هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب صد هزار تومان در یک ماه باشد، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید.



۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط بالا را بیابید.

۵) نقطهٔ تقاطع دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

اهداف:

- کسب مهارت حل معادله، پرورش مهارت‌های
- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت‌های تفکر

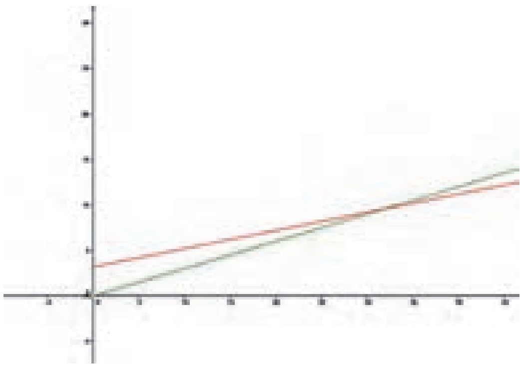
۱ قیمت‌ها و هزینه‌ها را بر حسب هزار تومان می‌نویسیم.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
هزینهٔ تولید (بر حسب هزار تومان)	۳۲۰	۵۲۰	۷۲۰	۹۲۰	۱۱۲۰
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان)	۰	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰

۲ $R=۳۰۰۰۰x \quad , \quad C=۳۲۰۰۰۰+۲۰۰۰۰x$

۳ با تغییر واحد قیمت بر حسب صدهزارتومان رابطه‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند.

$R=۰/۳x \quad , \quad C=۳/۲+۰/۲x$



البته در نمودار واقعی نقطه‌ها جدا از هم هستند.

۴ از روی شکل نقطه برخورد با تبدیل واحدها به ازای $\begin{bmatrix} ۳۲ \\ ۹۶۰۰۰۰ \end{bmatrix}$ می‌دهد که به معنی ۳۲ میز و ۹۶۰ هزار تومان است که با حل معادلهٔ زیر نیز همین جواب به‌دست می‌آید.

$$۳۲۰+۲۰x=۳۰x \Rightarrow ۱۰x=۳۲۰$$

$$x=۳۲ \Rightarrow R=۳۰\times۳۲=۹۶۰$$

۵ یعنی با تولید ۳۲ میز هزینهٔ کارگاه و درآمد حاصل از فروش این تعداد میز یکسان است و بعد از آن سوددهی شروع می‌شود.

بخش سوم: روش های حل معادلهٔ درجهٔ دوم

اهداف بخش

- آشنایی با روش هندسی حل معادلهٔ درجهٔ دوم
- آشنایی با روش جبری حل معادلهٔ درجهٔ دوم
- کسب مهارت در تعیین جواب‌های تقریبی معادله به روش هندسی
- کسب مهارت در تعیین تعداد و جواب های معادله به روش جبری
- تشخیص وجود یا عدم وجود جواب‌ها به روش هندسی
- توانایی به کارگیری فرمول‌های کلی برای تشخیص وجود و یافتن جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

واژه‌های کلیدی:

روش هندسی، روش جبری، عبارتΔ، جواب معادلهٔ درجهٔ دوم

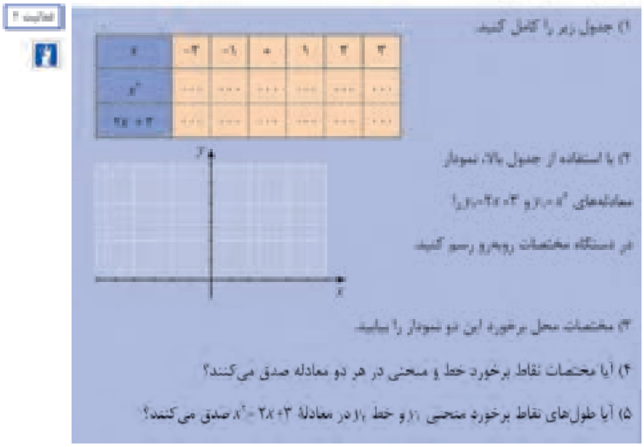
نگاه کلی به بخش:

در قسمت‌های قبل با معادله‌های درجهٔ دوم و نمودار رابطه‌های خطی و غیرخطی خاص آشنا شدیم. هدف اصلی این فصل حل این معادله‌ها و یافتن جواب‌های آنها است. به همین دلیل با هدایت هنرجویان در انجام فعالیت‌های ۴ و ۵ و ۶، روش‌های مختلف حل معادله درجه ۲ و یافتن جواب‌های آنها (در صورت وجود) آموزش داده می‌شوند. در روش هندسی حل معادله‌های درجهٔ دوم، مفهوم تلاقی نمودار رابطه‌ها نقش اصلی را بازی می‌کند. البته، روش هندسی برای حل معادله‌های پیچیده‌تر نیز قابل استفاده است ولی در این بخش فقط معادله‌های درجهٔ دوم مطرح می‌شود و هنرجویان فقط با حل این نوع معادله‌ها آشنا می‌شوند. لازم به ذکر است که در روش هندسی معمولاً نمی‌توانیم جواب دقیق را بیابیم و فقط تقریبی از جواب به دست می‌آید.

ورود به مطلب:

مناسب است که یک معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی مشخص را بنویسید و از هنرجویان بخواهید راه‌های پیشنهادی خود را برای حل آن بگویند. ممکن است کسی نتواند راه حل خاصی ارائه کند، می‌توانید هنرجویان را راهنمایی کنید و با تغییر شکل معادله به صورت تساوی $x^۲$ با معادلهٔ یک خط و تجربه‌ای که در برخورد خط‌ها به دست آمده است، هنرجویان را به سمت محل برخورد نمودار رابطهٔ $y=x^۲$ و نمودار یک خط برسانید. سپس می‌توانید از فعالیت طراحی شده در کتاب استفاده کنید.

فعالیت آموزشی



اهداف موضوعی:

- آشنایی با روش هندسی حل معادله‌های درجهٔ دوم

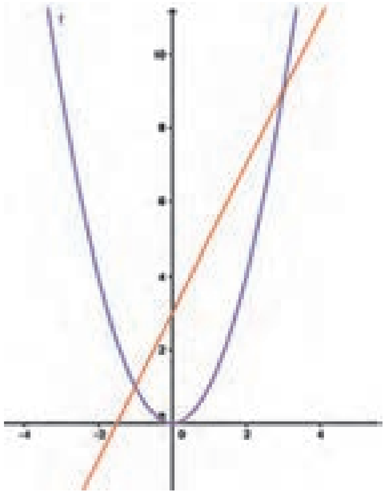
مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن، پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، ارزیابی کردن

۱

X	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$X^۲$	۴	۱	۰	۱	۴	۹
۲X+۳	-۱	۱	۳	۵	۷	۹

۲



۳ از روی شکل دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ نقاط برخورد این دو نمودار هستند.

۴ بله، زیرا $(۳)^۲ = ۲(۳) + ۳$ و $(-۱)^۲ = ۲(-۱) + ۳$

۵ بله
$$\begin{cases} (۳)^۲ = ۲(۳) + ۳ \Rightarrow ۹ = ۹ \\ (-۱)^۲ = ۲(-۱) + ۳ \Rightarrow ۱ = ۱ \end{cases}$$

در انتهای این فعالیت باید نتیجه‌گیری شود که جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $x^۲=ax+b$ را می‌توان با یافتن طول نقطه‌های برخورد نمودار خط $y=ax+b$ و منحنی $y=x^۲$ پیدا کرد.

این روش همان روش هندسی حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌باشد به این صورت که برای حل معادلهٔ $x^۲-۲x-۳=۰$ ابتدا جمله $x^۲$ را در یک طرف و بقیه را به طرف دیگر می بریم، سپس نمودار رابطه‌های $y_۱ = ۲x + ۳$ و $y_۲ = x^۲$ را رسم می کنیم. برای یافتن جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۲x-۳=۰$ می‌توان طول نقطه‌های برخورد دو نمودار رابطه‌های بالا را در صورت امکان به‌دست آورد.

در سه مثال بعد انواع حالات ممکن معادله‌های درجهٔ دوم از نظر تعداد جواب‌ها بررسی شده‌اند.

تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (با توجه به معادله)، یکی یا دو تا یا هیچ می‌باشد.

معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید (برای سهولت در رسم، از نرم افزار جئوجبرا کمک بگیرید).

الف) $x^2-2x+1=0$ ب) $x^2-1=0$ پ) $2x^2+x+1=0$

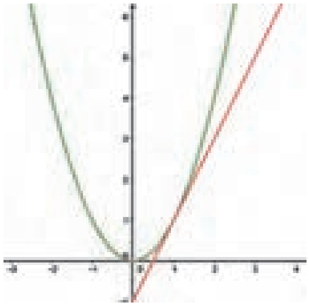
اهداف:

- کسب مهارت استفاده از روش هندسی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم و تشخیص تعداد جواب‌ها

شکل‌های مربوط به این سه معادله به صورت زیر است.

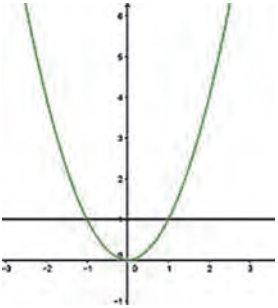
کسب مهارت به‌کارگیری نرم‌افزار، پرورش تفکر بصری

(الف)



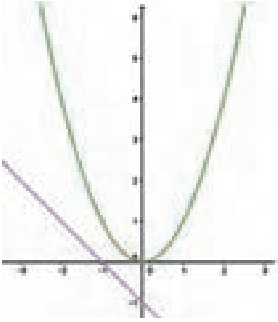
x=۱ جواب معادله است

(ب)



x=۱ و x=-۱ جواب‌های معادله هستند

(پ)



جواب ندارد

مسئله‌ها

برای تثبیت روش حل هندسی معادلهٔ درجهٔ دوم هنرجویان باید در دو سؤال ۱ و۲ یا با کمک جئوجبرا یا با جدول مقادیر و رسم نمودار آنها طول نقطه‌های برخورد دو منحنی را در صورت وجود به‌طور تقریبی تعیین نموده و آن را به عنوان جواب تقریبی معادلهٔ درجهٔ دوم مطرح نمایند.

۱) معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید و جواب‌های آنها را به طور تقریبی به دست آورید.

الف) $2x^2-3x=5$

ب) $2x^2+8x=0$

پ) $x^2+x=1$

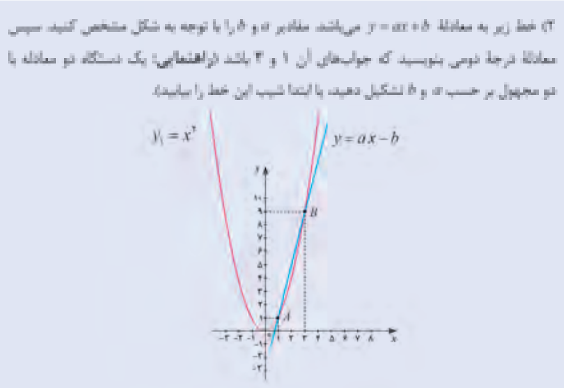
ت) $x^2+4x=-4$

مهارت‌ها و فرایندها:

- تفکر بصری، تخمین زدن،

هر کدام از حالت‌های بالا را باید به‌صورت $x^۲=ax+b$ در آورده و با رسم نمودارها، معادله را حل کنیم.

برای مثال حالت (الف) را به صورت $x^۲=\frac{۳}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ و حالت (ب) را به صورت $x^۲=-۲x$ می‌نویسیم و مشابه کار در کلاس (۵) حل می‌کنیم.

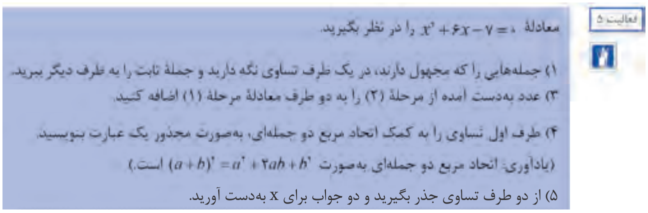

۳) خط زیر به معادلهٔ $y=ax+b$ می‌باشد. مقادیر a و b را با توجه به شکل مشخص کنید. سپس معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن ۱ و ۳ باشند (راهنمایی: یک دستگاه دو معادله با دو مجهول بر حسب a و b تشکیل دهید یا ابتدا شیب این خط را بیابید).

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

در این مسئله می‌خواهیم ضرایب a و b را در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲=ax+b$ طوری بیابیم که جواب‌های آن، طول نقطه‌های داده شده روی نمودار است. در این حالت معادله خط $y=ax+b$ را باید به صورتی به دست آوریم که نمودار $y=x^۲$ را در نقطه‌هایی به طول‌های ۱ و۳ قطع کند. مقادیر a و b را یافته سپس معادله $x^۲=ax+b$ را می‌سازیم. این معادله همان معادلهٔ درجهٔ دوم موردنظر می‌باشد. برای یافتن a و b باید دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$ روی این خط باشند، بنابراین داریم $۱=a+b$ و $۹=۳a+b$. با حل این دستگاه نتیجه می‌شود $a=۴$ و $b=-۳$.

فعالیت آموزشی


فعالیت ۵

معادلهٔ $x^۲+۶x-۷=۰$ را در نظر بگیرید.

۱) جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.
۳) عدد به‌دست آمده از مرحلهٔ (۲) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۱) اضافه کنید.

۴) طرف اول تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به‌صورت مجذور یک عبارت بنویسید.
(یادآوری: اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌صورت $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$ است.)

۵) از دو طرف تساوی جذر بگیرید و دو جواب برای x به‌دست آورید.

اهداف موضوعی:

- حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت جبری با هدف آماده‌سازی برای تعمیم این روش در حالت کلی

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، اکتشاف هدایت شده (دنبال کردن دستورالعمل‌ها)

۱ $x^2+6x=7$

۲ $\frac{6}{2}=3 \Rightarrow 3^2=9$

۳ $x^2+6x+9=7+9 \Rightarrow x^2+6x+9=16$

۴ $(x+3)^2=16$

۵ $|x+3|=4 \Rightarrow x+3=4$ یا $x+3=-4 \Rightarrow x=1$ یا $x=-7$

این فعالیت زمینه ساز یافتن فرمول کلی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم به‌صورت جبری را فراهم می‌سازد.

معادلهٔ $x^2-3x+2=0$ را مانند فعالیت ۵ حل کنید.

اهداف:

تقویت مهارت دنبال کردن دستورالعمل‌ها به منظور درک رویه‌ها

$$x^2-3x+2=0$$

$$x^2-3x=-2 \xrightarrow{\left(\frac{-3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}} x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-2 \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$\rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2} \Rightarrow x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ یا $x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=1$ یا $x=2$

تذکر: می‌توانید قبل از اینکه فعالیت زیر را انجام دهید از هنرجویان سؤال کنید آیا همیشه می‌توان از این راه به جواب رسید؟ آیا معادله همیشه جواب دارد؟ آیا روشی برای یافتن وجود و تعداد جواب‌ها بدون رسم و روش هندسی وجود دارد؟

فعالیت آموزشی

فعالیت ۴

معادلهٔ درجهٔ دوم دلخواه $ax^2+bx+c=0$ را در نظر بگیرید که در آن $a\neq 0$.

۱) طرفین معادلهٔ بالا را بر عدد a تقسیم کنید و معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ضریب x^2 در آن برابر ۱ باشد.

۲) جمله‌های دارای x را در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.

۳) در معادلهٔ بالا، نصف ضریب x را به‌دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

۴) عدد به دست آمده از مرحلهٔ (۳) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۲) اضافه کنید.

۵) به کمک تساوی‌های بالا، جاهای خالی را پر کنید:

$$(x+\frac{b}{\quad})^2=\frac{\quad -4ac}{\quad}$$

۶) تساوی بالا در چه شرایطی امکان‌پذیر است؟ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ در چه شرایطی جواب دارد؟

۷) نشان دهید در صورت مثبت بودن b^2-4ac جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ برابر جواب‌های دو معادلهٔ زیر است.

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

اهداف موضوعی:

■ یافتن فرمول کلی روش حل معادلهٔ درجهٔ دوم، تشخیص وجود جواب و تعداد جواب‌ها

مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، استدلال، اکتشاف هدایت شده

۱ $$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

۲ $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

۳ $$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{2}{1}}=\frac{b}{2a} \Rightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$$

۴ $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

۵ $$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

۶ چون سمت چپ این رابطه به توان دو است پس سمت راست باید عددی غیر منفی باشد.

یعنی باید $\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}\geq ۰$ و چون مخرج عددی همواره مثبت است پس $b^۲-۴ac\geq ۰$ این معادله در صورتی جواب دارد که $b^۲-۴ac\geq ۰$ بند (۷) حال اگر $b^۲-۴ac\geq ۰$ می‌توان از طرفین رابطه به دست آمده در بند (۵) جذر گرفت؛ خواهیم داشت :

$$\left|x+\frac{b}{۲a}\right|=\sqrt{\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}}\Rightarrow x+\frac{b}{۲a}=\frac{\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

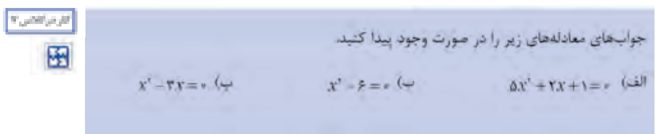
$$\Rightarrow x+\frac{b}{۲a}=+\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \text{ یا } x+\frac{b}{۲a}=-\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$x=\frac{-b}{۲a}+\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

$$\text{یا } x=\frac{-b}{۲a}-\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}=\frac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

به کمک فعالیت ۶ روش جبری یا فرمول کلی برای یافتن جواب های هر معادلهٔ درجهٔ دوم، در صورت وجود، بیان می شود. در این فعالیت از $\Delta=b^۲-۴ac$ برای بررسی وجود جواب و تعداد جواب‌ها استفاده می‌شود.


جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۵x^۲+۲x+۱=۰$ ب) $x^۲-۶=۰$ پ) $x^۲-۳x=۰$

اهداف:

- کسب مهارت استفاده از فرمول‌های محاسبه جواب معادله درجه دوم

حل قسمت الف) $۵x^۲+۲x+۱=۰$

معادله جواب ندارد $\Leftarrow$ $\Delta=b^۲-۴ac=(۲)^۲-۴(۵)(۱)=-۱۶<۰$

قسمت ب) $\Rightarrow x^۲-۶=۰$

$\Delta=b^۲-۴ac=(۰)^۲-۴(۱)(-۶)=۲۴>۰$

$$\rightarrow x_۱=\frac{-(۰)-\sqrt{۲۴}}{۲}=-\sqrt{۶} \text{ و } x_۲=\frac{-(۰)+\sqrt{۲۴}}{۲}=\sqrt{۶}$$

قسمت پ)

$$x^{۲}-۳x=۰$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۳)^{۲}-۴(۱)(۰)=۹>۰\Rightarrow$$

$$x_{۱}=\frac{-(-۳)+\sqrt{۹}}{۲}=۳ \text{ و } x_{۲}=\frac{-(-۳)-\sqrt{۹}}{۲}=۰$$

مسئله‌ها

۱) جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۲x^{۲}+۵x=۰$

ب) $۳x^{۲}+۱۳x+۳=۰$

پ) $\sqrt{۲}x(x+\sqrt{۵})=\sqrt{۸}$

ت) $x^{۲}+x+۲=۰$

ث) $(۲x-۱)^{۲}=۵$

ج) $(x+۲)^{۲}=-۴$

مهارت‌ها و فرایندها:

- استفاده از روش جبری برای حل معادله

توصیهٔ آموزشی:

بهتر است هنرجویان قوی‌تر معادله‌ها را با استفاده از هر دو روش حل کنند.

در این قسمت شش معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده که باید حل شوند همه را می‌توان به دو روش هندسی و جبری حل نمود هدف آموزشی این سؤال حل معادله‌های درجهٔ دوم دلخواه می‌باشد.

الف) حل به روش جبری (جواب‌ها $x=۰$ و $x=\frac{-۵}{۲}$)

ب) حل به روش جبری (جواب‌ها $x_{۱}=\frac{-۱۳+\sqrt{۱۳۳}}{۶}$ و $x_{۲}=\frac{-۱۳-\sqrt{۱۳۳}}{۶}$)

پ) می‌توان طرفین را بر $\sqrt{۲}$ تقسیم نمود $\sqrt{۲}x(x+\sqrt{۵})=\sqrt{۸}$

$$x(x+\sqrt{۵})=۲\Rightarrow x^{۲}+\sqrt{۵}x-۲=۰ \text{ و } \Delta=(\sqrt{۵})^{۲}-۴(۱)(۲)=۵+۸=۱۳$$

$$x_{۲}=\frac{-\sqrt{۵}-\sqrt{۱۳}}{۲} \text{ و } x_{۱}=\frac{-\sqrt{۵}+\sqrt{۱۳}}{۲}$$

هدف آموزشی این سؤال دیدن معادلهٔ درجهٔ دوم به شکلی دیگر و تشخیص همه ضرایب که بر $\sqrt{۲}$ بخش‌پذیرند و ساده‌نمودن ضرایب جهت محاسبات ساده‌تر و نهایتاً حل است.

ت) با یافتن $\Delta = -۷$ و توجه به اینکه Δ منفی است معادله جواب ندارد.

ث) **روش اول :** سمت چپ را به توان ۲ می رسانیم

$$۴x^۲ + ۱ - ۴x = ۵ \Rightarrow ۴x^۲ - ۴x - ۴ = ۰ \xrightarrow{\text{همه جملات را بر ۴ تقسیم می‌کنیم}} x^۲ - x - ۱ = ۰$$

$$\Delta = (-۱)^۲ - ۴(۱)(-۱) = ۵ \rightarrow x_۱ = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \text{ و } x_۲ = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

روش دوم : از طرفین جذر می‌گیریم

$$|۲x - ۱| = \sqrt{۵} \Rightarrow ۲x - ۱ = \sqrt{۵} \text{ یا } ۲x - ۱ = -\sqrt{۵} \Rightarrow x_۱ = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \text{ و } x_۲ = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

ج) مثال چالش برانگیز: (این نوع مسائل ذهن هنرجو را پویا می‌کند)
چون سمت چپ معادله غیرمنفی و سمت راست معادله منفی است معادله جواب ندارد.

۲) اگر یکی از جواب‌های معادله $۵x^۲ + ۱۳x + c = ۰$ برابر (۳-) باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

می دانیم جواب معادله، تساوی رابطه را برقرار می‌کند پس:

$$۵(-۳)^۲ + ۱۳(-۳) + c = ۰ \Rightarrow ۴۵ - ۳۹ + c = ۰ \Rightarrow c = -۶$$

پس معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $۵x^۲ + ۱۳x - ۶ = ۰$ است.

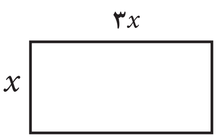
$$\Delta = (۱۳)^۲ - ۴(۵)(-۶) = ۲۸۹ \Rightarrow x_۱ = \frac{-۱۳+\sqrt{۲۸۹}}{۱۰} \text{ و } x_۲ = \frac{-۱۳-\sqrt{۲۸۹}}{۱۰}$$

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{-۱۳+۱۷}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \text{ و } x_۲ = \frac{-۱۳-۱۷}{۱۰} = -۳$$

۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۳۰۰ مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها



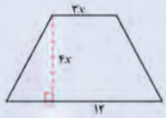
$$\text{مساحت} = x \times ۳x = ۳x^۲ = ۳۰۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow$$

$$x^۲ - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow \Delta = (۰)^۲ - ۴(۱)(-۱۰۰) = ۴۰۰ > ۰$$

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{\sqrt{۴۰۰}}{۲} = ۱۰ \text{ و } x_۲ = \frac{-\sqrt{۴۰۰}}{۲} = -۱۰$$

جواب منفی قابل قبول نیست و مسئله فقط یک جواب دارد. مستطیل با عرض ۱۰ و طول ۳۰ جواب است.

۴) مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مقابل، ۱۰۸ سانتی‌متر مربع است. مقدار x را پیدا کنید.



مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

ابتدا با توجه به فرمول مساحت یک ذوزنقه داریم

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(۳x+۱۲)(۴x)}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{(۳x+۱۲)(۴x)}{۲} = ۱۰۸ \Rightarrow ۱۲x^۲ + ۴۸x - ۲۱۶ = ۰ \Rightarrow$$

همه جمله‌ها را بر ۱۲ تقسیم می‌کنیم

$$x^۲ + ۴x - ۱۸ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ + ۷۲ = ۸۸$$

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{-۴+\sqrt{۸۸}}{۲} \quad \text{و} \quad x_۲ = \frac{-۴-\sqrt{۸۸}}{۲}$$

$x_۱ = -۲+\sqrt{۲۲}$ و $x_۲ = -۲-\sqrt{۲۲}$ فقط جواب $x_۱$ قابل قبول است که مثبت است زیرا طول نمی‌تواند منفی شود.

۵) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، ۱۳۲ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله

عدد کوچک‌تر را با x نشان می‌دهیم. عدد متوالی بعد از آن $x+۱$ خواهد بود. بنابرفرض مسئله

$$x(x+۱) = ۱۳۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۳۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta=(۱)^۲-۴(۱)(-۱۳۲)=۵۲۹}$$

$$x_۱ = \frac{-۱+\sqrt{۵۲۹}}{۲} = ۱۱ \quad \text{و} \quad x_۲ = \frac{-۱-\sqrt{۵۲۹}}{۲} = -۱۲$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ و دو عدد متوالی ۱۲- و ۱۱- هر دو جواب هستند.

۶) عددی طبیعی بیابید که دو برابر آن به اضافهٔ ۳۵، با مربع آن عدد مساوی باشد.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله

این عدد طبیعی را با n نشان می‌دهیم.

$$۲n+۳۵=n^۲ \Rightarrow n^۲-۲n-۳۵=۰ \quad , \quad \Delta=(-۲)^۲-۴(۱)(-۳۵)=۴+۱۴۰=۱۴۴$$

$$\Rightarrow n=\frac{۲+۱۲}{۲}=۷ \quad \text{و} \quad n=\frac{۲-۱۲}{۲}=-۵$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا عدد طبیعی مثبت است.

۷) نشان دهید $-۱+\sqrt{۲}$ یک جواب معادلهٔ $x^۲+۲x-۱=۰$ است.

مهارت‌ها و فرایندها:

- استدلال کردن

می دانیم اگر عددی جواب یک معادله باشد باید با جایگذاری آن عدد به جای مجهول معادله، تساوی معادله برقرار شود. پس شرط جواب‌بودن را بررسی می کنیم.

$$(-۱+\sqrt{۲})^۲+۲(-۱+\sqrt{۲})-۱=۰ \Rightarrow$$

$$۱+۲-۲\sqrt{۲}-۲+۲\sqrt{۲}-۱=۰ \Rightarrow ۰=۰$$

چون این عدد تساوی را برقرار کرده است، یک جواب معادله است.

۸) مساحت ناحیهٔ خاکستری ۴۰ سانتی‌متر مربع است. اندازهٔ هر ضلع مربع‌ها را بدست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

مساحت مربع بزرگ‌تر $(۳y+۲)^۲$ و مساحت مربع کوچک‌تر $y^۲$ است. مساحت قسمت رنگی بین این دو مربع $(۳y+۲)^۲-y^۲$ است. با توجه به فرض مسئله: $(۳y+۲)^۲-y^۲=۴۰$. در این صورت:

$$۹y^۲+۴+۱۲y-y^۲-۴۰=۰ \Rightarrow ۸y^۲+۱۲y-۳۶=۰$$

طرفین را بر ۴ تقسیم می کنیم

$$۲y^{۲}+۳y-۹=۰ \xrightarrow{\Delta=۹+۷۲} y=\frac{-۳\pm۹}{۴} \quad y_{۱}=-۳ \quad , \quad y_{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\text{اندازه ضلع مربع کوچک} = y=\frac{۳}{۲}$$

$$\text{اندازه ضلع مربع بزرگ} = ۳y+۲=۳\left(\frac{۳}{۲}\right)+۲=\frac{۱۳}{۲}$$

و جواب منفی قابل قبول نیست.

۹) معمای زیر در کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی آمده است (گرفته شده از کتاب خوارزمی بنیانگذار جبر، کاروانا برزینا).

"مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را در یک چهارم آن و یک درهم ضرب کنم، حاصل آن بیست می‌شود."

این مقدار را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

عدد را x فرض می‌کنیم.

$$\left(\frac{۱}{۳}x+۱\right)\left(\frac{۱}{۴}x+۱\right)=۲۰ \Rightarrow \frac{۱}{۱۲}x^{۲}+\frac{۷}{۱۲}x-۱۹=۰$$

طرفین را در ۱۲ ضرب می‌کنیم.

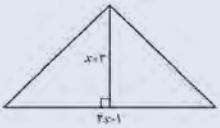
$$x^{۲}+۷x-۲۲۸=۰ \xrightarrow{\Delta=۹۶۱} x=\frac{-۷\pm۳۱}{۲} \Rightarrow x_{۱}=-۱۹ \;,\; x_{۲}=۱۲$$

جواب منفی قابل قبول نیست، زیرا مقدار پول منفی نمی‌تواند باشد.

۱۰) مساحت مثلث روبه‌رو ۲۴ سانتی‌مترمربع است.

الف) مقدار x را پیدا کنید.

ب) اندازهٔ قاعده و ارتفاع مثلث چقدر است؟



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال،

الف)

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲}$$

$$۲۴=\frac{(۳x-۱)(x+۳)}{۲} \Rightarrow ۳x^{۲}+۸x-۵۱=۰$$

$$\Rightarrow x_{۱}=۳ \;\text{و}\; x_{۲}=-\frac{۱۷}{۳}$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا طول قاعده و ارتفاع منفی نمی‌تواند باشد.

ب) $\text{ارتفاع قاعده} = ۳x-۱=۳(۳)-۱=۸$

$\text{اندازه ارتفاع} = x+۳=۳+۳=۶$

توسعهٔ دانش

مجهول، متغیر، پارامتر:

سه اصطلاح مجهول و متغیر و پارامتر در ریاضی بسیار به‌کار می‌روند. این اصطلاحات بسیار به هم نزدیکند و ممکن است با هم جابه‌جا به‌کار گرفته شوند. اصطلاح مجهول در ارتباط با مفهوم معادله است. هر کجا عددی نامعلوم باشد ولی اطلاعاتی از آن در دسترس باشد و بخواهیم از طریق آن اطلاعات عدد نامعلوم را به دست آوریم، مفهوم مجهول و معادله رخ می‌دهند. آن عدد نامعلوم را با نمادی نشان می‌دهیم که مجهول نامیده می‌شود و اطلاعات مربوط به مجهول را به طور جبری می‌نویسیم که عموماً به صورت تساوی دو مقدار است و آن را یک معادله می‌نامند؛ مثلاً آیا عددی هست که ضرب آن در خودش با جمع آن با خودش مساوی باشد؟ اگر چنین عددی را با x نشان دهیم در اینجا x مجهول است و اطلاعات مسئله می‌گوید $x \times x = x + x$. این یک معادله است که ساده شده آن به صورت $x^{۲} = ۲x$ نوشته می‌شود.

حل یک معادله به معنای یافتن عدد یا اعدادی است که اگر جای مجهول قرار گیرند، تساوی برقرار می‌شود. در این مثال ۰ و ۲ جواب هستند.

اصطلاح متغیر بیشتر در ارتباط با مفهوم تابع است. اگر بخواهیم اثر یک تابع را روی مقدار دلخواهی از دامنه آن نشان دهیم نمادی را در نظر می‌گیریم که نشان‌دهندهٔ یک مقدار دلخواه در دامنهٔ تابع باشد. این نماد را متغیر تابع می‌نامند. در اینجا نماد متغیر به معنای مجهول نیست و معادله‌ای نیز وجود ندارد فقط چگونگی اثر تابع روی متغیر عموماً با یک فرمول بیان می‌شود.

مثلاً اگر تابعی که مساحت یک مربع را بر حسب طول ضلع آن نشان می‌دهد با f نشان دهیم داریم $D_f = (۰, +\infty)$ و اگر نماد x را به عنوان عضو دلخواهی از D_f به‌کار بریم x متغیر این تابع است و اثر تابع روی x به صورت $f(x) = x^{۲}$ نوشته می‌شود. در این نمادگذاری‌ها مجهولی وجود ندارد تا به دنبال آن بگردیم. اما اگر سؤالی به این صورت مطرح شود که به ازای چه مقداری در دامنه مقدار تابع برابر ۴ می‌شود، در اینجا با یک معادله و یک مجهول روبرو می‌شویم. اگر نمادی که مجهول را نشان می‌دهد با همان x نشان دهیم باید داشته باشیم $f(x) = ۴$. این یک معادله است و نماد x در اینجا مجهول است.

اینکه یک نماد به عنوان مجهول به‌کار گرفته شده است یا متغیر، مربوط به کاربرد آن است. اگر معادله‌ای در کار است و حل معادله هدف است نماد آن مجهول است ولی اگر معادله‌ای وجود ندارد و شیوهٔ عمل یک تابع توصیف می‌شود نماد به‌کار رفته متغیر است.

مفهوم پارامتر به مفهوم متغیر بسیار نزدیک است. پارامتر نیز با یک نماد نمایش داده می‌شود که دامنه‌ای از تغییرات برای آن در نظر می‌گیرند. پارامتر هم در معادله‌ها و هم در توابع ممکن است رخ دهد. در برخی معادله‌ها ممکن است اعدادی نامعین و دلخواه وجود داشته باشند که آنها را پارامتر می‌نامند. به ازای هر مقداری برای پارامتر، یک معادلهٔ مشخص و جدید خواهیم داشت. عملاً این گونه معادله‌ها دسته‌ای از معادله‌ها هستند و به ازای مقدار دهی به پارامتر یا پارامترهای موجود در آن اعضایی از این دسته معادله‌ها ساخته می‌شوند. مثلاً معادلهٔ $x^{۲}-۲ax+a=۰$ را در نظر بگیرید. در این معادله a عدد معینی نیست و به ازای هر مقداری که برای آن در نظر بگیریم معادلهٔ جدیدی ساخته می‌شود. این، یک دسته معادله بر حسب پارامتر a است. در اینجا x مجهول معادله و a پارامتری است که نشان‌دهندهٔ عددی دلخواه ولی ثابت است.
اینکه در معادلهٔ داده شده کدام نماد مجهول و کدام نماد پارامتر است خود به خود معلوم نیست و ارائه دهندهٔ معادله باید مشخص کند کدام نماد مجهول و کدامیک پارامتر است. در مثال بالا کاملاً ممکن بود ما a را مجهول و x را پارامتر در نظر بگیریم.
در بیان قانون توابع نیز ممکن است پارامترهایی رخ دهند که نقش آنها ایجاد دسته‌ای از توابع است که به ازای مقادیر مختلف پارامتر به وجود می‌آیند. مثلاً در تابع با قانون $\mathrm{f}(x)=(x-a)^{۲}-a$ نماد a یک پارامتر است که نشان دهنده یک عدد دلخواه ولی ثابت است. با تغییر مقدار a توابع مختلفی ایجاد می‌شوند.
تشخیص اینکه یک نماد به صورت مجهول، متغیر، یا پارامتر به‌کار رفته است یا از طریق متن گفتگو مشخص می‌شود یا به طور مستقیم باید بیان شود.

معادله‌ها:

در ریاضیات و کاربردهای آن، مفهوم معادله بسیار رخ می‌دهد. در حالت کلی مفهوم معادله از طریق مفهوم تابع بیان می‌شود. در هر معادلهٔ عددی که مجهول آن یک عدد است، تابعی با متغیر عددی مانند f وجود دارد و معادله به صورت $f(x)=c$ می‌باشد. جواب‌های این معادله، اعدادی در دامنه تابع f هستند که تساوی را برقرار می‌کنند. از لحاظ نموداری، جواب‌های این معادله از برخورد نمودار تابع f و خط $y=c$ به دست می‌آیند.
در حالتی که f تابعی چندجمله‌ای از درجه n باشد، معادله را معادلهٔ چندجمله‌ای از درجه n می‌نامند. قبلاً با معادله‌های درجهٔ اول و در این فصل با معادله‌های درجهٔ دوم آشنا شده‌اید. برای معادله‌های درجهٔ سوم و چهارم نیز روش‌هایی برای

حل آنها وجود دارد، اما گالوا و آبل ثابت کردند که برای حل معادلات چندجمله‌ای درجات بالاتر روش و فرمولی برحسب رادیکال‌ها وجود ندارد.

به همین دلیل در حل معادله‌ها، روش‌های دیگری ابداع شده است که آنها را روش‌های عددی می‌نامند. در این روش‌ها، هدف یافتن جواب دقیق نیست، بلکه یافتن تقریبات اعشاری جواب با دقت کافی هدف خواهد بود. عملاً جواب‌های تقریبی با دقت کافی به همان خوبی جواب‌های دقیق هستند و چیزی از آنها کم ندارند. بر فرض جواب دقیق یک معادله را هم که بیابیم در به‌کارگیری این جواب برای حل یک مسئله عملی، دقت ابزار ما فقط در حد خاصی است و نمی‌توان از جواب در همان حد دقیق بودنش استفاده کرد. مثلاً فرض کنید جواب دقیق یک معادله $\sqrt{\ }$ باشد و دقت ابزار ما فقط در حد اعداد اعشاری دو رقمی باشد. در این حالت مقدار دقیق برای ما فایده‌ای ندارد و همان تقریب اعشاری ۱/۴۱ از $\sqrt{۲}$ برای کار ما کافی‌است. پس، اگر معادله را با روش‌های عددی حل می‌کردیم و جواب تقریبی ۱/۴۱را به دست می‌آوردیم هیچ کمبودی نسبت به حل دقیق با جواب $\sqrt{۲}$ نداشت.

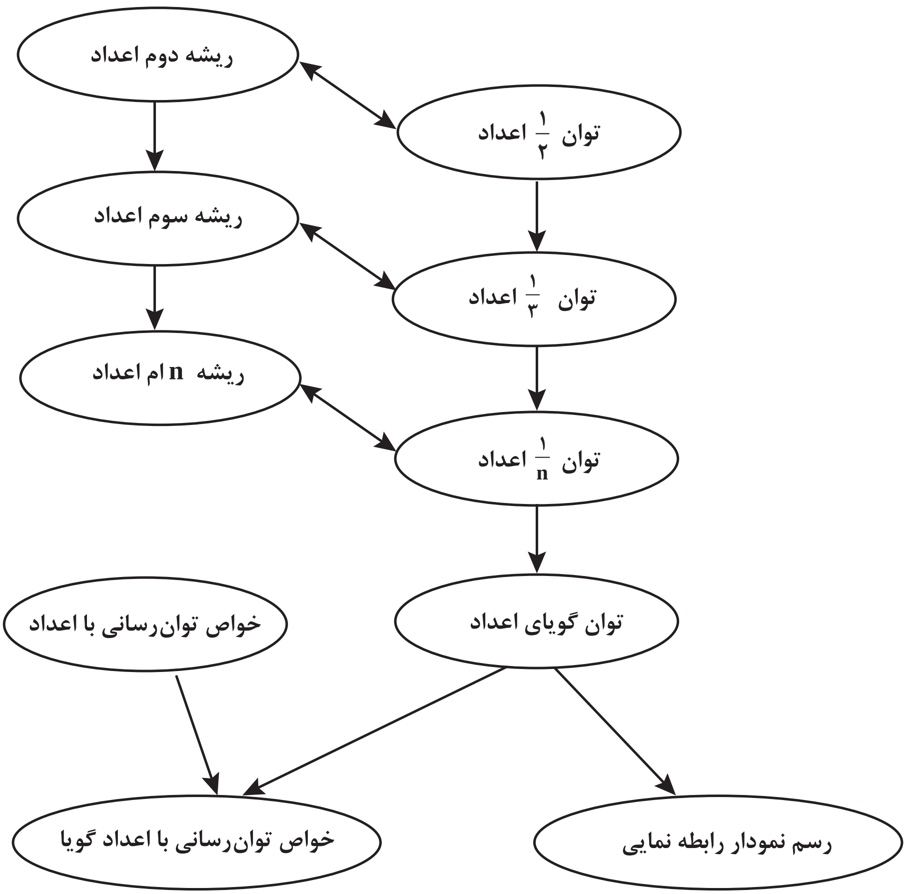
معادله‌ها با توجه به نوع تابع f به انواع و اقسامی از معادله‌ها تقسیم‌بندی می‌شوند که برخی از آنها قابلیت حل دقیق را دارند و بسیاری از آنها به طور دقیق قابل حل نیستند. اکثر روش‌های عددی حل معادله‌ها عمومیت دارند و در مورد هر تابعی قابل به‌کار بردن هستند. روش نصف کردن یکی از ساده‌ترین روش‌های حل معادله‌ها است که در سر کلاس هم می‌توان آن را به‌کار برد و جواب‌هایی با تقریب‌های مناسب به دست آورد. در روش نصف کردن تابع f باید پیوسته باشد و روی یک بازهٔ بسته $[a, b]$ تعریف شده باشد و مقدار $f(a)$ و $f(\mathrm{b})$ با علامت‌های مختلف باشند تا مطمئن باشیم (طبق قضیه‌ها) معادله $f(x) = ۰$ حداقل یک جواب در بازهٔ $[a, b]$ دارد.

برای یافتن یکی از این جواب‌ها نقطهٔ $c = \dfrac{a+b}{۲}$ وسط این بازه را در نظر می‌گیریم و مقدار $f(c)$ را حساب می‌کنیم. اگر $f(c) = ۰$ به جواب رسیده‌ایم و اگر $f(c) \neq ۰$ به علامت آن نگاه می‌کنیم که با علامت $f(a)$ تفاوت دارد است یا با علامت $f(b)$. با هر کدام تفاوت داشت بازهٔ جدیدی تشکیل می‌دهیم که یک سر آن c است و سر دیگر آن a یا b است. اگر این عملیات را n بار تکرار کنیم به بازه‌ای می‌رسیم که یک جواب معادله در آن بازه است و طول بازه $\dfrac{b-a}{۲^{\mathrm{n}}}$ است. برای n به اندازه کافی بزرگ طول این بازه بسیار کوچک می‌شود به گونه‌ای که دو سر بازه تا چند رقم اعشار با هم مساوی‌اند و یک جواب این معادله عددی با همین رقم‌های اعشار است. برای دقیق‌تر کردن جواب تعداد مراحل تکرار را باید بیشتر کنیم.

فصل پنجم

توان‌رسانی به توان عددهای گویا

طرح کلی فصل پنجم (نقشه مفهومی)



اهداف کلی فصل

- درک مفهوم توان‌های گویای اعداد
- درک ارتباط بین توان‌رسانی به توان عددهای گویا و ریشه‌گیری.
- درک مفهوم ریشه k ام عددهای حقیقی و نمایش رادیکالی آنها.
- تعمیم خواص توان‌رسانی به توان عددهای صحیح به خواص توان‌رسانی به توان عددهای گویا.
- درک تقریب اعشاری ریشه‌های یک عدد.
- توجه به اهمیت توان‌رسانی به توان عددهای گویا در مدل‌سازی پدیده‌های واقعی

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- اعداد با توان‌های کسری را به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی را به صورت توانِ کسری نمایش دهند.
- با استفاده از ماشین حساب تقریب اعشاریِ هر عددِ با توان گویا را پیدا کنند.
- ریشه‌های یک عدد طبیعی را با استفاده از تجزیه به عوامل اول پیدا کنند.
- از توان‌های گویا در مدل‌سازی ریاضیِ پدیده‌های طبیعی استفاده کنند.
- از خواص توان‌رسانی به توان عددهای گویا برای انجام عملیات جبری (ضرب و تقسیم و توان‌رسانی) روی اعداد توان‌دار استفاده کنند.
- از فناوری (ماشین حساب) برای درک و بررسی وضعیت‌ها استفاده کنند.

پیش نیازها :

- آشنایی با ریشهٔ دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با توان‌رسانی به توان اعداد صحیح و خواص آن.
- توانایی رسم نمودار با نقطه‌یابی.
- توانایی تجزیه یک عدد طبیعی به عامل‌های اول.

نگاه کلی به فصل:

در مدل‌سازی برخی پدیده‌های طبیعی مانند رشد و زوال در زیست‌شناسی، محاسبه انواع سودهای مرکب در علم اقتصاد به مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد

گویا و حقیقی مواجه می‌شویم. هدف این فصل، آموزش مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد گویا است. توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی فرایند دیگری لازم دارد که در ارتباط با حدگیری است و نمی‌توانیم وارد آن شویم. اما به طور شهودی می‌توان انتظار داشت که هنرجویان توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی را هم می‌پذیرند.
فرایند آموزش مفهوم توان‌رسانی اعداد که در سال‌های گذشته دیدیم، با تعریف توان‌های طبیعی اعداد شروع می‌شود و با تعمیم آن به توان‌های صحیح ادامه می‌یابد. در این فصل با گسترده‌تر شدن دامنه تعمیم به توان‌رسانی با اعداد گویا خواهیم رسید و زمینه برای معرفی توابع نمایی آماده خواهد شد. نموداری که در آخر این فصل آمده، نمایش برخی از توان‌های یک عدد در یک دستگاه مختصات می‌باشد که نقاطی از نمودار یک تابع نمایی است. با وصل این نقاط به یکدیگر می‌توان نموداری از یک تابع نمایی را مشاهده کرد و توجه هنرجویان علاقمند و قوی‌تر را به توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی (که البته از اهداف کتاب نیست) معطوف کرد.
روش آموزشی این فصل برای درک مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد گویا درگیر شدن مستقیم با مسئلهٔ رشد در زیست‌شناسی است. در این فصل، مسئله‌ای در ارتباط با رشد باکتری‌ها و مقدار باکتری‌ها در لحظات گوناگون مطرح شده است. حل این مسئله نیازمند مدل‌سازی است و به کمک الگویابی به عددی با توان کسری می‌رسیم. با این روش نیاز به معرفی توان‌های کسری (گویا) از اعداد مشخص می‌شود.
توان‌رسانی به توان اعداد گویا و ریشه‌گیری در ارتباط با یکدیگرند. برای محاسبهٔ مقدار توان‌های کسری یا ریشه‌گیری از اعداد، فقط روش تجزیه عدد به عوامل اول مورد نظر است در غیر این صورت (یعنی وقتی عدد مربع یا مکعب یا ... نیست) برای محاسبهٔ ریشه (یا توان کسری) از ماشین حساب استفاده شود. آموزش نحوهٔ استفاده از ماشین حساب جهت نمایش تقریب اعشاری توان‌های گویا و درک بهتر مقدار این اعداد در این فصل مطرح شده است. ذکر این نکته برای هنرجویان ضروری است که تقریب‌های اعشاری از توان‌های گویا هیچ‌کدام نمایش دهنده مقدار دقیق این اعداد نیستند (مگر در مواقعی که عدد دقیقاً توان n ام یک عدد آشنای دیگر باشد) و مقدار دقیق آن صرفاً با نمادهای رادیکالی (یا به صورت عددی توان‌دار با توان گویا) نمایش داده می‌شوند.

	فرایند	توضیح فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متون ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل مسئله و با انتخاب مناسب آنها	ـ استفاده از الگویابی برای تعریف ریشه kام هرعدد حقیقی (فعالیت ۶)
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ـ انتقال تفکرات محمد به معلم علوم (در مکالمه محمد و معلم) و سازماندهی آن (کار در کلاس ۳ سؤال آخر)
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ استفاده از زبان ریاضی برای بیان «توان $\frac{1}{3}$ هر عدد برابر با ریشه سوم آن عدد است (تعریف صفحه ۹۴ کتاب درسی)
	استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	ـ دلیل تساوی $\sqrt{2}$ و $2^{\frac{1}{2}}$ (فعالیت ۱) ـ دلیل تساوی $\sqrt[3]{2}$ و $2^{\frac{1}{3}}$ (فعالیت ۲) ـ سؤال ۱ (کار در کلاس بعد از فعالیت ۳)
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	ـ تکثیر باکتری‌ها و محاسبه وزن آنها (ارتباط ریاضی با زیست‌شناسی)
		تشخیص چگونگی ارتباط بین مفاهیم ریاضی	ـ ارتباط توان‌رسانی با اعداد گویا و ریشه‌گیری (در حوزه اعداد) ـ نمایش عدد با توان $\frac{1}{2}$ به صورت طول یک پاره‌خط (مثال دوم بعد از فعالیت ۱) ـ نمایش عدد با توان $\frac{1}{3}$ به‌صورت طول یک پاره‌خط (مثال دوم بعد از فعالیت ۲)
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	ـ نمایش توان‌های گویا روی محورهای مختصات (کار در کلاس ۷ و مسئله ۸ آخر فصل) ـ استفاده از دیاگرام در فعالیت‌های ۱ و ۲ برای درک مقدار رادیکالی وزن و ارتباط آن با نمایش وزن به صورت یک عدد با توان $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$.
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ بیان ارتباط بین تعداد باکتری‌ها و زمان گذشته از شروع تکثیر (در مکالمه محمد و معلم) ـ مقایسه ریشه‌های چهارم یک عدد (فعالیت ۴ قسمت ۶) ـ مقایسه نمایش یک عدد با توان گویا و نمایش رادیکالی آن با استفاده از نمایش اعشاری آنها (استفاده از ابزار بعد از فعالیت ۲ و بعد از فعالیت ۶) ـ تعمیم ریشه ۲ و ۳ اعداد به ریشه ۴ و ۵ و k (فعالیت ۳) ـ تعمیم $2^{\frac{1}{2}}$ به $a^{\frac{1}{2}}$ و $2^{\frac{1}{3}}$ به $a^{\frac{1}{3}}$ (متن بعد از فعالیت ۲). ـ تعمیم خواص توان‌رسانی با اعداد صحیح به خواص توان‌رسانی با اعداد گویا

بخش اول: مفهوم توان‌رسانی به توان عددهای گویا

اهداف بخش

- درک مفهوم توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ از اعداد
- درک ارتباط بین توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و رادیکال‌های با فرجه ۲ و ۳
- نمایش اعدادِ با توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی با فرجه ۲ و ۳ به صورت توانِ کسری
- استفاده از اعداد توان‌دارِ با توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ درمدل‌سازی پدیده‌های طبیعی
- استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ تقریب اعشاری اعدادِ باتوان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$

واژه‌های کلیدی:

توان‌رسانی با اعداد گویا، ریشه‌گیری.

نگاه کلی به بخش :

در این بخش ابتدا با مدل‌سازی به کمک الگویابی، مسئلهٔ تکثیر باکتری‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. از این طریق مفهوم توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ اعداد به طور طبیعی مطرح می‌شوند. سپس جهت درک ارتباط بین یک عدد توان‌دار با توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و ریشه‌گیری، دو فعالیت مطرح شده است. دیاگرامی‌که در هر دو فعالیت آمده است، برای محاسبهٔ وزن باکتری‌ها از دو مسیر مختلف می‌باشد. از این طریق، درکی از نمایش وزن باکتری‌ها به صورت یک عدد رادیکالی ایجاد شود.

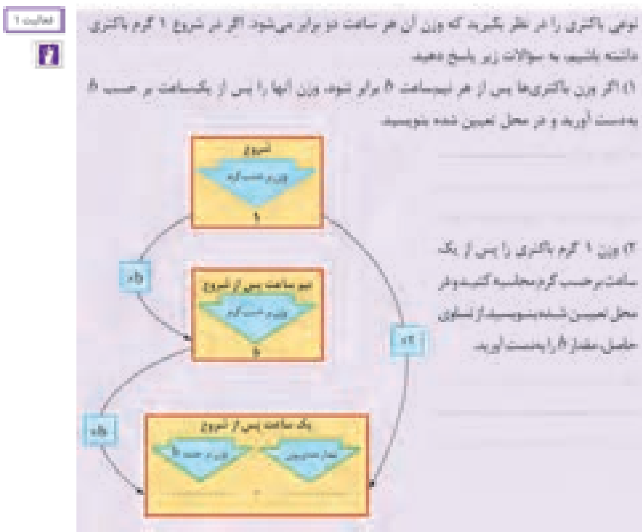
مثال‌های این بخش برای تقویت مهارت تبدیل اعداد با توان $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ به اعداد رادیکالی و ارائه تعبیر هندسی آنها مطرح شده است.

ورود به مطلب :

برای ورود به مطلب در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند، معلم می‌تواند با استفاده از مکالمهٔ ابتدای فصل سؤال‌های مناسبی را در کلاس مطرح کند و فضای آموزشی را به مباحثه‌ای هدایت نماید که تمامی‌هنرجویان در رسیدن به اهداف مکالمه مطرح شده، مشارکت داشته باشند. در غیر این صورت معلم می‌تواند از هنرجویان بخواهد مکالمهٔ بین معلم و محمد را مطالعه کنند تا برای انجام فعالیت ۱ آمادگی داشته باشند.

اگر هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند و در صورتی که دبیر لازم بداند می‌تواند در شروع باکتری‌هایی را که وزن آنها در هر ساعت ۴ برابر می‌شود استفاده کرده و از هنرجویان بخواهد وزن آنها را پس از نیم‌ساعت حساب کنند و سپس باکتری‌هایی را که وزن آنها پس از هر ساعت ۲ برابر می‌شود را مطرح کند زیرا درک فعالیت با استفاده از اعدادی که مربع کامل هستند، ساده‌تر است.

فعالیت آموزشی



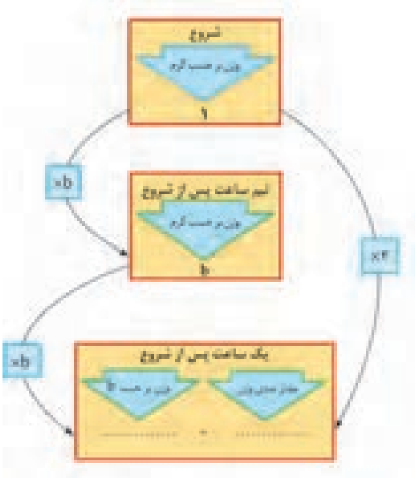
اهداف موضوعی:

- درک ارتباط بین $\sqrt{۲}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ در یک زمینهٔ واقعی.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، مدل‌سازی یک پدیده

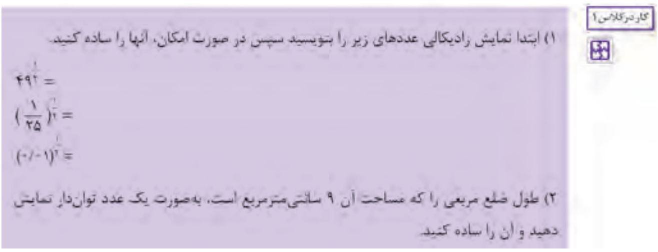
ارتباط بین $\sqrt{۲}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ در حوزهٔ اعداد، ارتباط بین وزن باکتری‌ها و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ (ارتباط ریاضی و زیست‌شناسی)



حل فعالیت :

۱ نمودار تکمیل شده :

۲ $b^{۲} = ۲ \Rightarrow b = \sqrt{۲}$


کار در کلاس ۱

۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۴۹^{\frac{۱}{۲}} =$

$(\frac{۱}{۲۵})^{\frac{۱}{۲}} =$

$(۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}} =$

۲) طول ضلع مربعی را که مساحت آن ۹ سانتی‌مترمربع است، به‌صورت یک عدد توان‌دار نمایش دهید و آن را ساده کنید.

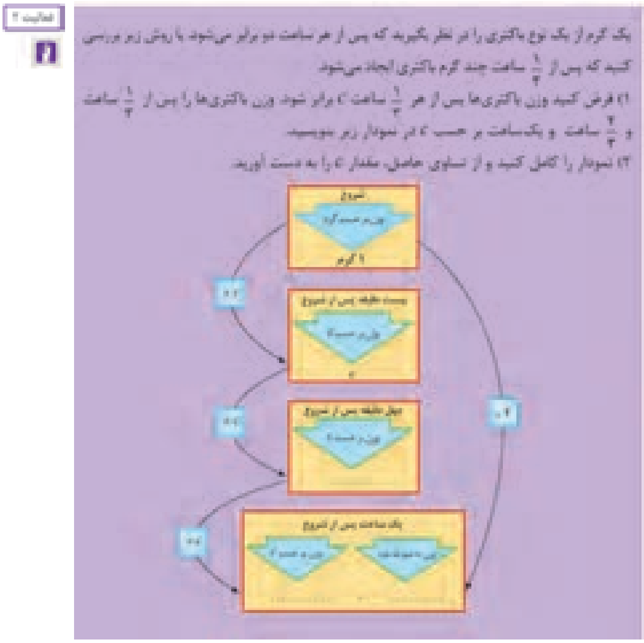
اهداف :

■ کسب مهارت در نمایش رادیکالی اعدادِ با توانِ $\frac{۱}{۲}$ و محاسبهٔ حاصل آنها.

۱ الف) $۴۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۴۹} = ۷$ ب) $\left(\frac{۱}{۲۵}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۲۵}} = \frac{۱}{۵}$ ج) $(۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۰/۰۱} = ۰/۱$

۲ $S^{\frac{۱}{۲}} = ۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$

فعالیت آموزشی



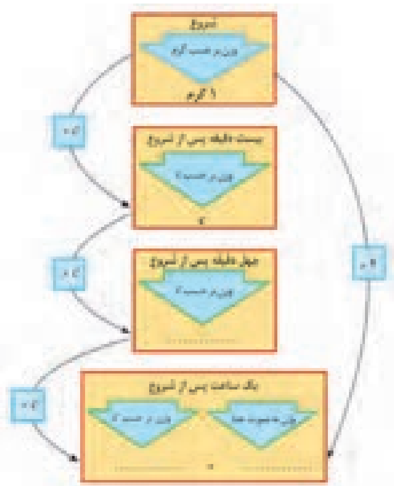
اهداف موضوعی :

■ درک ارتباط بین $\sqrt[3]{۲}$ و $۲^{\frac{۱}{۳}}$ در یک زمینهٔ واقعی.

مهارت‌ها و فرایندها:

پیوندها و اتصال‌ها، مدل‌سازی یک پدیده

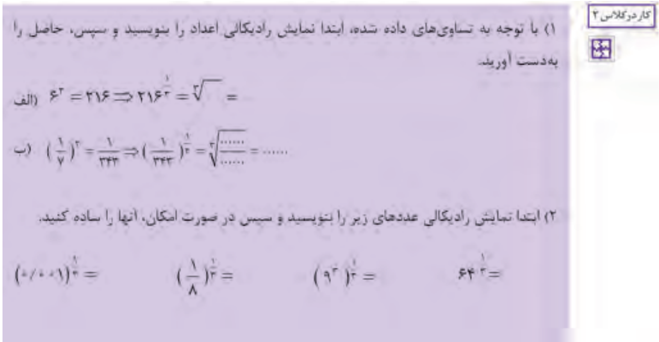
۱ نمودار تکمیل شده :



۲ برای محاسبهٔ مقدار c داریم: $c^{۳}=۲ \Rightarrow c=\sqrt[۳]{۲}$

در این فعالیت اگر هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند، می‌توان در شروع باکتری‌هایی را که وزن آنها در

هر ساعت ۸ برابر می‌شود را در نظر گرفت و از هنرجویان خواست وزن آنها را پس از ۲۰ دقیقه و ۴۰ دقیقه حساب کنند و سپس به باکتری‌هایی که در کتاب مطرح شده رسید.



کار در کلاس ۲

۱) با توجه به تساوی‌های داده شده، ابتدا نمایش رادیکالی اعداد را بنویسید و سپس، حاصل را به‌دست آورید.

الف) $۶^{۳} = ۲۱۶ \Rightarrow ۲۱۶^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\quad} =$

ب) $(\frac{۱}{۷})^{۳} = \frac{۱}{۳۴۳} \Rightarrow (\frac{۱}{۳۴۳})^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{......}{......}} = ...$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۶۴^{\frac{۱}{۳}} =$ $\quad (۹^{۳})^{\frac{۱}{۳}} =$ $\quad (\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۳}} =$ $\quad (۰/۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}} =$

اهداف:

■ کسب مهارت در نمایش رادیکالی اعداد با توان $\frac{۱}{۳}$ و محاسبهٔ حاصل آنها، پرورش مهارت برقراری پیوند و اتصال بین مفاهیم ریاضی

۱

الف) $۲۱۶^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۱۶} = ۶$

ب) $\left(\frac{۱}{۳۴۳}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۳۴۳}} = \frac{۱}{۷}$

۲

$(۷۲۹)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۷۲۹} = ۹$ $\qquad ۶۴^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

$(۰/۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۰/۰۰۱} = ۰/۱$ $\qquad \left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۲}$

تذکر : اعدادی که در تمرین ۲ کار درکلاس آمده از انواع کسری، اعشاری و صحیح انتخاب شده و دبیران می‌توانند طبق نظر خود اعداد دیگری را انتخاب کنند و از هنرجویان بخواهند تا آنها را حل کنند.

استفاده از ماشین حساب

یک گرم از باکتری‌هایی را که وزن آنها پس از یکساعت دو برابر می‌شوند در نظر بگیرید. با استفاده از ماشین حساب وزن آنها را در هر یک از دو حالت زیر بر حسب گرم با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار نشان دهید.(توجه کنید: اگر از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کنید، ممکن است ترتیب فشاردادن کلیدها متفاوت باشد)

الف) پس از نیم‌ساعت

محاسبه از طریق توان‌رسانی:

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

ب) پس از ۲۰ دقیقه

محاسبه از طریق توان‌رسانی:

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

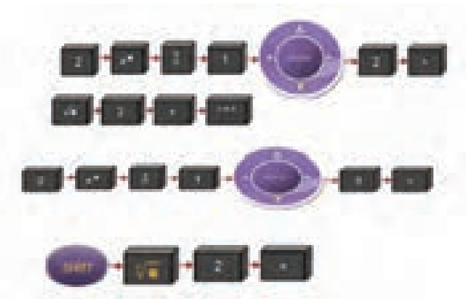
استفاده از ابزار :

اهداف :

- آشنایی با تقریب اعشاریِ ریشه‌های دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با تقریب اعشاریِ توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ اعداد.
- استفاده از تقریب اعشاری برای مقایسهٔ نمایش یک عدد باتوان ($\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$) و نمایش رادیکالی آن اعداد.
- تقویت مهارت استفاده از ماشین‌حساب برای محاسبهٔ تقریب اعشاری ریشه‌های دوم و سوم و توان‌های $\frac{۱}{۲}$و $\frac{۱}{۳}$ اعداد.
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد

الف) $۲^{\frac{۱}{۲}} \approx ۱/۴۱$ و $\sqrt{۲} \approx ۱/۴۱$

ب) $۲^{\frac{۱}{۳}} \approx ۱/۲۶$ و $\sqrt[۳]{۲} \approx ۱/۲۶$



مسئله‌ها

۱) نقطه چین‌ها را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

$$۱۱^{۳} = ۱۳۳۱ \Rightarrow ۱۳۳۱^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\quad} = \dots$$

$$۱۷^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow ۲۸۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{\quad} = \dots$$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها

$$۱۱^{۳} = ۱۳۳۱ \Rightarrow (۱۳۳۱)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱۳۳۱} = ۱۱$$

$$۱۷^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow (۲۸۹)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{۲۸۹} = ۱۷$$

۲) مقادیر خواسته شده را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار با توان گویا بنویسید و سپس عبارت رادیکالی متناظر آن را نوشته و با استفاده از ماشین حساب حاصل را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

الف) مقدار x

ب) باکتری‌هایی را در نظر می‌گیرید که وزن آنها پس از یک ساعت دو برابر می‌شود. اگر با دو گرم باکتری شروع کنیم پس از نیم ساعت چقدر باکتری داریم؟ مقدار باکتری‌ها پس از بیست دقیقه چقدر است؟

پ) قطر یک مربع به ضلع ۴ را پیدا کنید.

مهارت‌ها وفرایندها :

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

الف) مقدار x :

$$x^{۲} = ۶^{۲} - ۳^{۲} = ۲۷ \to x = ۲۷^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲۷} \approx ۵/۲$$

ب) وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت:

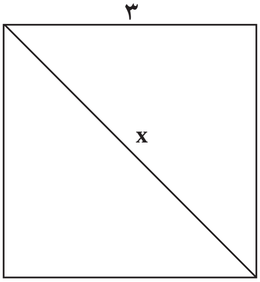
$$۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{۴} = ۲$$

وزن باکتری‌ها پس از بیست دقیقه :

$$۴^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۴} \approx ۱/۵۸$$

پ) قطر یک مربع به ضلع ۳ :

$$x^{۲} = ۳^{۲} + ۳^{۲} = ۱۸ \Rightarrow x = ۱۸^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۸} \approx ۴/۲۴$$



۳) بخشی از راه حل احمد برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^{۲} - ۳x - ۲ = ۰$ به صورت زیر است:

$$x = \frac{۳ \pm \left((-۳)^{۲} - ۴ \times ۲ \times (-۲)\right)^{\frac{۱}{۲}}}{۲ \times ۲} = \ldots$$

درستی یا نادرستی راه حل را بررسی کرده و در صورت درستی با ادامهٔ راه حل و درصورت نادرستی با نوشتن راه حل درست، ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها :

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارزیابی کردن.

راه حل احمد درست است و ادامه آن به صورت زیر است:

$$x = \frac{۳ \pm ۲۵^{\frac{۱}{۲}}}{۴} = \frac{۳ \pm ۵}{۴} = -\frac{۱}{۲}\,,\,۲$$

۴) دارایی‌های یک شرکت در هر سال، ۱۵۰ درصد سال قبل است. دارایی این شرکت طی ده سال به صورت زیر گزارش شده است :

بدو تأسیس: ۱ میلیارد ریال، پایان سال اول: ۱/۵ میلیارد ریال، پایان سال دوم: ۲/۲۵ میلیارد ریال و ...

الف) دارایی شرکت در پایان سال‌های دوم، چهارم و دهم را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

ب) رابطه‌ای بنویسید که دارایی در پایان سال n ام را به صورت یک عبارت توان‌دار بر حسب n نمایش دهد.

پ) اگر روند رشد دارایی‌ها در هر ماه نیز طبق رابطهٔ قسمت قبل باشد، دارایی شرکت را پس از ۴ ماه و ۶ ماه، به صورت یک عدد توان‌دار و یک عبارت رادیکالی نمایش دهید و با ماشین حساب مقدار آن را به صورت یک عدد اعشاری نمایش دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ مدل‌سازی، حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، الگویابی، تعمیم دادن، مهارت به کارگیری فناوری

چون دارایی ها در هر سال ۱۵۰ درصد سال قبل است بنابر این هر سال ۱/۵ برابر خواهد شد: (اعداد بر حسب میلیارد ریال می باشند)

الف) پایان سال اول: $۱/۵ \times ۱ = ۱/۵$ پایان سال دوم: $۱/۵ \times ۱/۵ = ۱/۵^{۲}$

پایان سال سوم: $۱/۵ \times ۱/۵^{۲} = ۱/۵^{۳}$ پایان سال چهارم: $۱/۵ \times ۱/۵^{۳} = ۱/۵^{۴}$

با توجه به رابطهٔ بین عدد سال و توان ۱/۵ می توان میزان دارایی در پایان سال دهم را به صورت زیر نوشت: پایان سال دهم: $۱/۵^{۱۰}$

ب) با تعمیم رابطهٔ قسمت قبل به سال n اُم داریم : پایان سال n ام: $۱/۵^{n}$

پ) پایان ۴ ماه (معادل $\frac{۴}{۱۲}$ یا $\frac{۱}{۳}$ سال) $۱/۵^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱/۵} \approx ۱/۱۴$

پایان ۶ ماه (معادل $\frac{۶}{۱۲}$ یا $\frac{۱}{۲}$ سال) $۱/۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱/۵} \approx ۱/۲۲$

بخش دوم: ریشه‌گیری عددهای حقیقی

اهداف بخش

- درک مفهوم ریشه‌های دوم و سوم اعداد و تعمیم آن به ریشهٔ k ام.
- نمایش ریشه‌های دوم و سوم اعداد به‌صورت رادیکالی تعمیم تعریف $a^{\frac{1}{2}}$ به $a^{\frac{1}{n}}$ و نمایش رادیکالی آن.
- محاسبهٔ ریشه‌های k ام یک عدد طبیعی به کمک تجزیه به عوامل اول.
- تعمیم خواص توان‌رسانی با اعداد صحیح به توان‌رسانی با اعداد گویا.

پیش نیازهای بخش:

- آشنایی با ریشهٔ دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با توان‌رسانی به توان اعداد صحیح.

واژه‌های کلیدی:

ریشه‌گیری، توان‌رسانی با اعداد گویا.

نگاه کلی به بخش :

در این بخش ابتدا با طرح یک سؤال لزوم معرفی ریشه‌های چهارم و بالاتر یک عدد مطرح می‌شود سپس با معرفی ریشهٔ k ام، تعداد ریشه‌های زوج و فرد یک عدد بررسی می‌شود. نمایش رادیکالی ریشهٔ یک عدد و اینکه چه اعدادی درچه حالت‌هایی دارای ریشه نیستند نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در ادامه معرفی توان $\frac{1}{n}$ یک عدد به عنوان تعمیم توان‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ انجام می‌شود. همچنین با بیان خواص توان‌رسانی به توان اعداد گویا (که تعمیمی از خواص توان‌رسانی با اعداد صحیح می‌باشد) توان $\frac{1}{n}$ اعداد به توان‌های گویا تعمیم داده می‌شود. در دو قسمت از این بخش کار با ابزار پیشنهاد شده است که برای ارتقای مهارت استفاده از ماشین حساب برای پیدا کردن تقریب اعشاری اعدادِ با

توان گویا و اعدادِ رادیکالی می‌باشد. با پیدا کردن تقریب اعشاری اعدادی که به صورت‌های مختلف نمایش داده شده‌اند تساوی آنها به کمک ماشین حساب نیز بررسی می‌شود.

ورود به مطلب :

برای ورود به مطلب معلم می‌تواند با ارائه سؤالی نظیر سؤال ابتدای بخش انگیزه لازم برای جلب توجه دانش‌آموزان را به وجود آورد. سپس از دانش‌آموزان بخواهید تا فعالیت ۳ را انجام دهند.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۳

در هر قسمت، ابتدا جمله‌ها را کامل کنید، سپس به سؤال پاسخ دهید.

۱) یک ریشهٔ دوم عدد ۲۵ عدد ... است؛ زیرا $۲۵ = ...^۲$)

۲) ریشه‌های دوم یک عدد را تعریف کنید.

۳) یک ریشهٔ سوم عدد ۸ عدد ... است؛ زیرا $۸ = ...^۳$)

۴) ریشه‌های سوم یک عدد را تعریف کنید.

۵) برای ریشه‌های چهارم یک عدد، چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ چهارم مثالی بزنید.

۶) برای ریشه‌های پنجم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ پنجم مثالی بزنید.

۷) برای ریشه‌های kاُم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟

۸) اگر $a = b^k$ آنگاه ...... یک ریشهٔ ...... عدد ...... است.

اهداف موضوعی:

■ آشنایی با ریشهٔ k ام یک عدد.

مهارت‌ها و فرایندها:

تعمیم تعریف ریشهٔ دوم و سوم به ریشهٔ چهارم و پنجم و k ام اعداد، بازیابی اطلاعات، فرضیه‌سازی

۱ قسمت اول : ۵ یا ۵- قسمت دوم : $(-۵)^۲= ۵^۲=۲۵$

۲ عدد b ریشهٔ دوم عدد a است هرگاه : $b^۲=a$

۳ قسمت اول : ۲ قسمت دوم : $۲^۳=۸$

۴ عدد b ریشهٔ سوم عدد a است هرگاه : $b^۳=a$

۵ عدد b ریشهٔ چهارم عدد a است هرگاه : $b^۴=a$ مثال از ریشهٔ چهارم: عدد ۳ ریشه چهارم ۸۱ است زیرا $۳^۴=۸۱$

۶ عدد b ریشهٔ پنجم عدد a است هرگاه: $b^۵=a$ مثال از ریشهٔ پنجم : عدد ۲ ریشهٔ پنجم ۳۲ است زیرا $۲^۵=۳۲$

۷ عدد b ریشهٔ kام عدد a است هرگاه : $b^k=a$

۸ عدد b یک ریشهٔ k ام عدد a است هرگاه $b^k=a$

کار در کلاس ۲

۱) به جای نقطه‌چین‌ها، عددهای مناسب قرار دهید.

الف) از آنجا که $۳^۵=۲۴۳$ ، عدد ...... یک ریشهٔ پنجم عدد ...... است.

ب) با توجه به تساوی، $(-۵)^۶=$ ...... عدد ...... یک ریشهٔ ششم عدد ...... است

پ) تساوی $\frac{۱}{۸}= \left(\frac{۱}{۲}\right)$ نشان می‌دهد که عدد $\frac{۱}{۲}$ یک ریشهٔ ...... عدد ...... است.

۲) یک ریشهٔ چهارم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۶۲۵ ب) $\frac{۱}{۸۱}$ ج) ۰/۰۰۰۱

۳) یک ریشهٔ پنجم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۱ ب) $-\frac{۱}{۳۲}$ ج) ۳×۸۱

۴) برای پیدا کردن ریشه‌های چهارم و پنجم یک عدد، چه پیشنهادی دارید؟

اهداف:

- کسب مهارت یافتن ریشه‌های چهارم و پنجم، فرضیه‌سازی

الف) قسمت اول : ۳ قسمت دوم : ۲۴۳.

ب) قسمت اول : ۱۵۶۲۵ قسمت دوم : ۵ قسمت سوم : ۱۵۶۲۵

ج) تساوی $\frac{۱}{۸}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳$ نشان می‌دهد عدد $\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ سوم عدد $\frac{۱}{۸}$ است.

۲ـ الف) ۵ یا ۵- ب) $\frac{۱}{۳}$ یا $-\frac{۱}{۳}$ ج) ۰/۱ یا ۰/۱-

۳ـ الف) ۱ ب) $-\frac{۱}{۲}$ ج) ۳

دبیران می‌توانند با ذکر مثال‌های بیشتر از اعداد اعشاری، کسری، صحیح یا اعداد توان‌دار درک بهتری از توان‌های کسری در هنرجویان به وجود آورند. البته لازم به ذکر است که عدد داده شده باید توان چهارم یا پنجمِ یک عدد آشنا باشد تا محاسبهٔ مقدار آن بدون استفاده از ماشین حساب امکان‌پذیر باشد.

۴ـ آنها را به عوامل اول تجزیه کرده و به صورت حاصل ضرب توان‌های اعداد اول می‌نویسیم. سپس با توجه به توان‌های آنها و تعریف ریشه، ریشهٔ چهارم و پنجم را به‌دست می‌آوریم. (نمونهٔ این روش با توجه به توانایی تجزیهٔ هنرجویان در این پایه و بر پایهٔ اطلاعات قبلی آنها، در قالب فعالیت و سؤال در کتاب کار آمده است.)

فعالیت آموزشی

فعالیت ۴

۱) جدول زیر را کامل کنید.

عدد	-3	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	2	...	...
توان چهارم		...	$\frac{16}{81}$	...	...	...	...	...	...

۲) آیا در سطر دوم جدول، عدد منفی دیده می‌شود؟ چرا ؟

۳) توان چهارم اعداد قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) آیا یک عدد منفی می‌تواند ریشهٔ چهارم داشته باشد؟ چرا؟

۵) با استفاده از جدول، ریشه‌های چهارم اعداد ۱ و $\frac{16}{81}$ را بنویسید.

۶) با توجه به پاسخ‌های به دست آمده در مورد تعداد ریشه‌های چهارم عدد مثبت a چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این ریشه‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۷) آیا این نتیجه در مورد ریشه‌های زوج دیگر نیز درست است؟ با مثال نشان دهید.

اهداف موضوعی :

- تعیین تعداد ریشه‌های زوج یک عدد مثبت.
- درک عدم وجود ریشهٔ زوجِ اعداد منفی.

مهارت‌ها و فرایندها:

- الگویابی، تعمیم دادن، استدلال کردن، مقایسه کردن

۱ جدول کامل شده :

عدد	...	...	۲	۱	$\frac{۲}{۳}$	۰	$-\frac{۲}{۳}$	۱-	۲-
توان چهارم	...	...	۱۶	۱	$\frac{۱۶}{۸۱}$	۰	$\frac{۱۶}{۸۱}$	۱	۱۶

۲ خیر زیرا هر عددی (مثبت یا منفی) اگر به توان یک عدد زوج برسد علامت آن همواره مثبت است.

۳ با هم مساویند.

۴ خیر زیرا توان چهارم هیچ عددی منفی نیست.

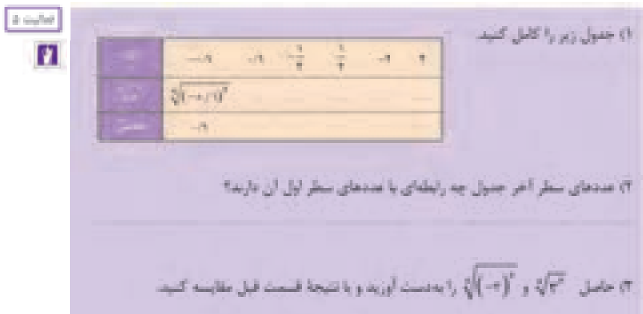
۵ ریشه‌های چهارم ۱ عدد ۱ و ۱- است و ریشه‌های چهارم عدد $\frac{۱۶}{۸۱}$ اعداد $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ هستند.

۶ عدد مثبتِ a دوریشهٔ چهارم دارد که قرینه هستند.

۷ بله مثلاً عدد ۶۴ دو ریشهٔ ششم دارد که عبارت‌اند از ۲ و ۲- زیرا $۶۴ = ۲^۶ = (-۲)^۶$

دبیران در صورت نیاز می‌توانند در قسمت ۷ با انتخاب اعداد اعشاری یا اعداد بیشتر زمینه مساعدتری را برای رسیدن به نتیجهٔ فعالیت توسط هنرجو فراهم کنند.

فعالیت آموزشی



هدف موضوعی:

- پیدا کردن ریشهٔ ششم یک عدد

مهارت‌ها و فرایندها:

- الگویابی، مقایسه کردن

۱

a	۲	ـ۲	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰/۱	ـ۰/۱
$\sqrt{\ }$	$\sqrt[۴]{۲^{۴}}$	$\sqrt[۴]{(-۲)^{۴}}$	$\sqrt[۴]{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۴}}$	$\sqrt[۴]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}}$	$\sqrt[۴]{۰/۱^{۴}}$	$\sqrt[۴]{(-۰/۱)^{۴}}$
حاصل	۲	۲	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰/۱	۰/۱

۲ اعداد سطر آخر قدر مطلق اعداد سطر اول هستند.

۳ $۳=\sqrt[۶]{۷۲۹}=\sqrt[۶]{۳^{۶}}$ و $\sqrt[۶]{(-۳)^{۶}}=\sqrt[۶]{۷۲۹}=۳$ در این حالت نیز حاصل عدد مثبت ۳ است.

در کار کردن با قدر مطلق بدفهمی‌هایی وجود دارد که برخی از آنها به شکل زیر است: برای محاسبهٔ درست $|a|$ به هنرجویان متذکر شوید که با توجه به علامت a حاصل $|a|$ را بنویسند. یعنی برای آنها یاد آوری کنید که $|a|$ در صورت مثبت بودن a با خود a برابر است و $|a|$ در صورت منفی بودن a با a - برابر است. اغلب، وقتی از پارامتری داخل علامت قدر مطلق استفاده می‌کنیم هنرجویان مقدار آن پارامتر را مثبت در نظر می‌گیرند. مثلاً در پرسش زیر که از برخی دانش‌آموزان پرسیده شده است:

آیا ممکن است که $|a|=-a$

دانش‌آموزانی بوده‌اند که جواب منفی داده‌اند و این ناشی از تصور اشتباهی است که علامت a را مثبت فرض می‌کنند. توصیه می‌شود برای محاسبهٔ حاصل قدر مطلق مخصوصاً وقتی عبارات متعددی (که شامل رادیکال یا کسر و یا … است) داخل علامت قدر مطلق می‌باشد علامت عبارت داخل قدر مطلق را به‌دست آورند (اگر شامل عبارت رادیکالی یا کسری هستند آنها را با تقریب اعشاری مناسب تقریب بزنند) و سپس با استفاده از تعریف قدر مطلق، حاصل را به‌دست آورند. مثلاً برای حذف علامت قدر مطلق در عبارت : $\left|\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right|$ اگر هنرجو بداند $\sqrt{۳}$ از $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر است متوجه می‌شود علامت $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ منفی است بنابراین حاصل قدر مطلق به صورت زیر است.

$$\left|\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right|=-(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

در غیر این صورت با ملاحظه مقدار تقریبی $\sqrt{۲} \approx ۱/۴۱$ و $\sqrt{۳} \approx ۱/۷۳$ ملاحظه می‌کند:

$$\sqrt{۲} - \sqrt{۳} \approx ۱/۴۱ - ۱/۷۳ = -۰/۳۲$$

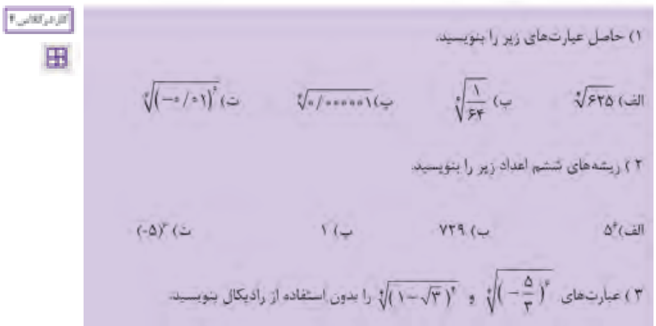
یعنی حاصل منفی است و سپس از تعریف استفاده می‌کند.

گاهی هنرجویان درساده کردن عباراتی به صورت $\sqrt[۲]{a^۲}$ دچار اشتباه می‌شوند. به سؤال زیر، که در یک آزمون برای تحقیق در مورد بدفهمی‌های قدر مطلق مطرح شده است، دقت کنید :

ساده شدهٔ عبارت $\sqrt{(-۸)^۲}$ کدام است ؟

الف) ۸ ب) ۸- ج) ۸- و ۸ د) ۴ هـ) ۴ و ۴-

این سؤال برای دو سری از دانش‌آموزانی که مباحث مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال به آنها تدریس می‌شده داده شده است، پاسخ صحیح به این سؤال از ۴۵/۵۱ درصد تا ۵۷/۳۵ درصد بوده است. یکی از دلایل این بدفهمی‌تصور یکی بودن این سؤال با جواب‌های معادلهٔ $x^۲ = a^۲$ است که این جواب‌ها $x=\pm a$ می‌باشد.


کار در کلاس ۴

۱) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[۴]{۶۲۵}$ ب) $\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}}$ پ) $\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱}$ ت) $\sqrt[۶]{(-۰/۰۱)^۶}$

۲) ریشه‌های ششم اعداد زیر را بنویسید.

الف) $۵^۶$ ب) ۷۲۹ پ) ۱ ت) $(-۵)^۶$

۳) عبارت‌های $\sqrt[۶]{\left(-\frac{۵}{۳}\right)^۶}$ و $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^۴}$ را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

اهداف :

- کسب مهارت در محاسبهٔ ریشهٔ زوج برخی اعداد.

۱ الف) $\sqrt[۴]{۶۲۵} = ۵$ ب) $\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}} = \frac{۱}{۲}$

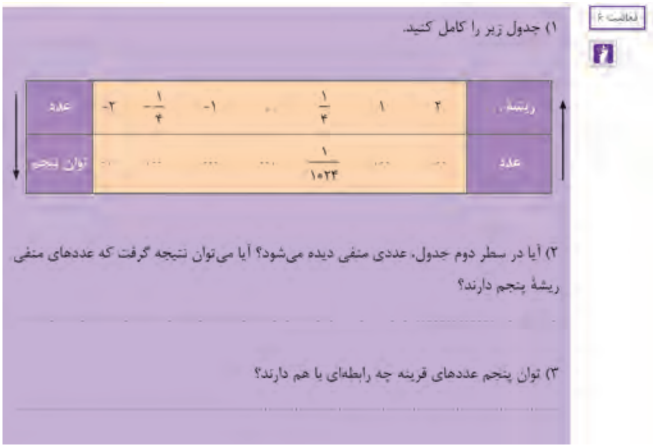
پ) $\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱} = ۰/۱$ ت) $\sqrt[۶]{(-۰/۰۱)^۶} = ۰/۱$

۲ الف) $\sqrt[۶]{۵^۶} = ۵$ ب) $\sqrt[۶]{۷۲۹} = ۳$

پ) $\sqrt[۶]{۱} = ۱$ ت) $\sqrt[۶]{(-۵)^۶} = ۵$

۳ $\sqrt[۶]{\left(-\frac{۵}{۳}\right)^۶} = \left|-\frac{۵}{۳}\right| = \frac{۵}{۳}$ و $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^۴} = \left|۱-\sqrt{۳}\right| = \sqrt{۳}-۱$

فعالیت آموزشی


فعالیت ۶

۱) جدول زیر را کامل کنید.

ریشهٔ پنجم	۲	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	-۱	$-\frac{۱}{۴}$	-۲	عدد
عدد	...	...	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$	...	...	...	...	توان پنجم

۲) آیا در سطر دوم جدول، عددی منفی دیده می‌شود؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که عددهای منفی ریشهٔ پنجم دارند؟

۳) توان پنجم عددهای قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

اهداف موضوعی:

- درک وجود ریشهٔ فرد برای هر عدد حقیقی (با علامت مثبت یا منفی)
- تعیین تعداد ریشه‌های فرد یک عدد.

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، الگویابی

۱ جدول زیر را کامل کنید.

ریشه پنجم	۲	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	-۱	$-\frac{۱}{۴}$	-۲	عدد
عدد	۳۲	۱	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$	۰	-۱	$-\frac{۱}{۱۰۲۴}$	-۳۲	توان پنجم

۲ **قسمت اول :** بله در سطر دوم جدول عدد منفی وجود دارد.

قسمت دوم : بله می‌توان نتیجه گرفت اعداد منفی ریشهٔ پنجم دارند.

۳ توان پنجم دو عدد قرینه، قرینهٔ هم هستند.

حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[۵]{۱۱^۵}$ ب) $\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲۴۳}}$ پ) $\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۰۱}$ ت) $\sqrt[۷]{(-۳)^۷}$

اهداف:

■ تمرین در محاسبهٔ ریشهٔ پنجم برخی اعداد.

الف) $\sqrt[۵]{۱۱^۵}=۱۱$ ب) $\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲۴۳}}=\frac{۱}{۳}$

پ) $\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۰۱}=-۰/۱$ ت) $\sqrt[۷]{(-۳)^۷}=-۳$

ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را نوشته و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) $(۳^۸)^{\frac{۱}{۸}}$ ب) $(\frac{۱}{۳۲})^{\frac{۱}{۵}}$ پ) $(۰/۰۰۰۰۱)^{\frac{۱}{۵}}$ ت) $۲۴۳^{\frac{۱}{۵}}$

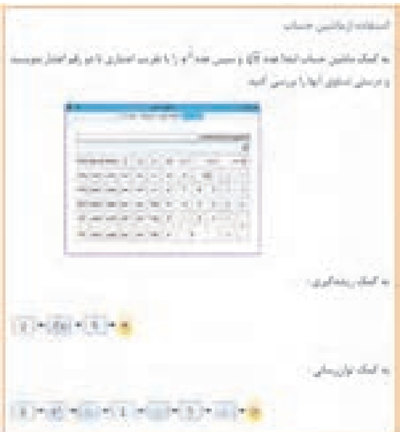
اهداف :

■ تمرین در نمایش رادیکالی اعداد با توان گویا

الف) $(۳^۸)^{\frac{۱}{۸}}=\sqrt[۸]{۳^۸}=۳$ ب) $\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}}=\frac{۱}{۲}$

پ) $(۰/۰۰۰۰۱)^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱}=۰/۱$ ت) $۲۴۳^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۲۴۳}=۳$

استفاده از ابزار :



اهداف :

■ آشنایی با تقریب اعشاری ریشه‌های اعداد.

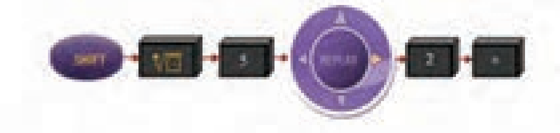
■ آشنایی با تقریب اعشاری توانِ $\frac{۱}{n}$ اعداد.

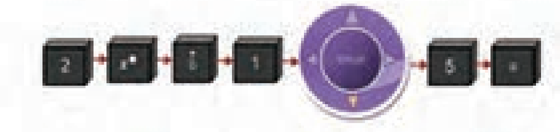
■ تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای یافتن تقریب اعشاریِ ریشه‌های یک عدد .

■ تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای یافتن تقریب اعشاریِ توان $\frac{۱}{n}$ اعداد.

- بررسی تساویِ نمایش‌های یک عدد (نمایش به صورتِ یک عدد باتوان $\frac{۱}{n}$ و نمایش رادیکالی آن عدد) با استفاده از تقریب اعشاری آنها
- تقویت مهارت گرد کردن تقریب اعشاری اعداد.

$$\sqrt[۵]{۲} \approx ۱/۱۵ \quad \text{و} \quad ۲^{\frac{۱}{۵}} \approx ۱/۱۵$$





می‌توانید نمایش اعشاری اعداد دیگر را نیز از هنرجویان بخواهید و برای تأکید بیشتر بر تقریب اعشاری می‌توان از هنرجویان خواست به جای نمایش تا دو رقم اعشار نمایش تا سه یا چهار رقم اعشار را نیز نوشته و مقایسه را با تقریب‌های دقیق‌تر انجام دهند.

یکی از اشتباهات رایج که معمولاً به دلیل عدم توجه به ترتیب عملیات اتفاق می‌افتد، یکسان گرفتن دو عبارت $(a^m)^n$ و $(a^n)^m$ می‌باشد در حالی که مثلاً به ازای $a=-۱$ و $n=\frac{۱}{۳}$ و عبارت اول تعریف می‌شود ولی عبارت دوم تعریف نمی‌شود. می‌توان برای آگاهی هنرجویان فعالیتی را طراحی کرد تا با تأکید بر ترتیب عملیات، مشخص کرد که به ازای چه مقادیری از n و m و a این دو عبارت معنادار هستند و به ازای چه مقادیری معنادار نیستند.

تا اینجا توان‌رسانی به توان اعداد گویای به صورت $\frac{۱}{n}$ آموزش داده شده است. برای تکمیل بحث و رسیدن به توان‌رسانی به توان یک عدد گویای دلخواه، برای پرهیز از مشکل شدن درس، از ارائهٔ تعریف رسمی‌خودداری شده است و به جای آن با ارائه مثال این تعریف انجام شده است. از طریق این مثال‌ها هنرجو می‌تواند توان‌رسانی‌های دیگر را هم انجام دهد.

در صورت آمادگی کلاس و مشکل نشدن مبحث، شما می‌توانید تعریف رسمی توان‌رسانی به توان یک عدد گویای دلخواه را پس از ارائه مثال‌ها، به صورت زیر برای هنرجویان بیان کنید.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (\circ < a)$$

استفاده از ابزار :

اهداف :

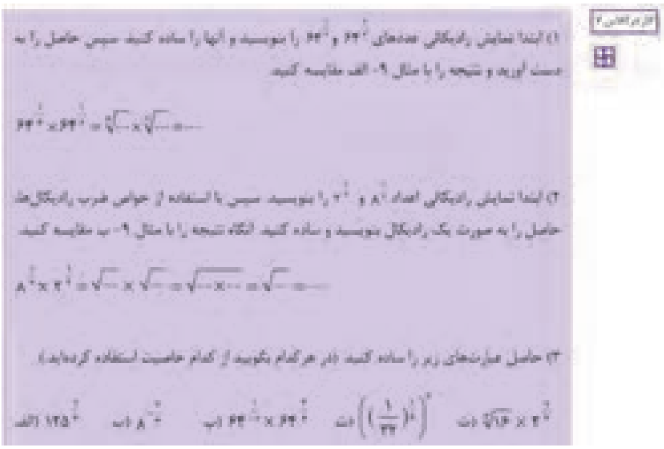
- آشنایی با تقریب اعشاری توان‌های گویای اعداد.
- بررسی درستی خواص توان‌رسانی اعداد با استفاده از تقریب اعشاری آنها
- تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ تقریب اعشاری توان‌های گویای اعداد.

$$۳^{\frac{۲}{۳}} \approx ۲/۰۸ \quad \text{و} \quad \left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} \approx ۲/۰۸$$

درصورتی که کلاس آمادگی لازم را دارد معلم می‌تواند برای محاسبهٔ $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲}$ ابتدا $۳^{\frac{۱}{۳}}$ را محاسبه کرده سپس نمایش اعشاری آن را تا دو رقم اعشار در نظر

گرفته و به توان ۲ برساند و در مورد اختلاف دو مقدار (که ناشی از گرد کردن $۳^{\frac{۱}{۳}}$ می‌باشد) با هنرجویان بحث کند: (یعنی : $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} \approx (۱/۴۴)^{۲} = ۲/۰۷۳۶$)

همچنین می‌توان از هنرجویان خواست برای محاسبهٔ $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲}$ ابتدا نمایش اعشاری $۳^{\frac{۱}{۳}}$ را تا سه یا چهار رقم اعشار بنویسند و سپس حاصل را به توان ۲ برسانند و نتیجهٔ حاصل را با نتیجهٔ قبلی مقایسه نمایند تا به نقش دقت تقریب اعداد اولیه، دردقت نتایج پی‌ببرند. (یعنی : $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} \approx (۱/۴۴۲۲)^{۲} = ۲/۰۷۹۹$)


کار در کلاس ۲

۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای $۶۴^{\frac{۱}{۳}}$ و $۶۴^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید و آنها را ساده کنید سپس حاصل را به دست آورید و نتیجه را با مثال ۹- الف مقایسه کنید.

$۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۳]{\dots} \times \sqrt{\dots} = \dots$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی اعداد $۸^{\frac{۱}{۲}}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید. سپس با استفاده از خواص ضرب رادیکال‌ها حاصل را به صورت یک رادیکال بنویسید و ساده کنید. آنگاه نتیجه را با مثال ۹- ب مقایسه کنید.

$۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\dots} \times \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots} = \dots$

۳) حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید (در هر کدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید.)

الف) $۱۲۵^{\frac{۲}{۳}}$ ب) $۸^{-\frac{۲}{۳}}$ پ) $۶۴^{-\frac{۱}{۲}} \times ۶۴^{\frac{۲}{۳}}$ ت) $\left(\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}\right)^{۲}$ ث) $\sqrt[۳]{۱۶} \times ۴^{\frac{۲}{۳}}$

اهداف :

- بررسی خواص توان‌رسانی با اعداد گویا با استفاده از خواص رادیکال‌ها
- پرورش مهارت مقایسه کردن، استدلال کردن

۱ همان‌طور که دیده می‌شود نتیجه با مثال ۹ـ الف مساوی است.

$$۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۳]{۶۴} \times \sqrt[۲]{۶۴} = ۴ \times ۸ = ۳۲$$

۲ همان‌طور که دیده می‌شود نتیجه با مثال ۹ـ ب یکسان است.

$$۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۸} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۸ \times ۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۳ حاصل عبارات زیر را ساده کنید. (در هر کدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید)

الف) $$۱۲۵^{\frac{۲}{۳}}=\left(۱۲۵^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲}=(\sqrt[۳]{۱۲۵})^{۲}=۵^{۲}=۲۵$$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

ب) $$۸^{-\frac{۲}{۳}}=\left(۸^{\frac{۱}{۳}}\right)^{-۲}=(\sqrt[۳]{۸})^{-۲}=۲^{-۲}=\frac{۱}{۲^{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $\left(a^m\right)\quad a^{mn}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

پ) $$۶۴^{\frac{۱}{۱۲}}\times ۶۴^{\frac{۳}{۴}}=۶۴^{\frac{۱}{۱۲}+\frac{۳}{۴}}=۶۴^{\frac{۱۰}{۱۲}}=۶۴^{\frac{۵}{۶}}=\left(۶۴^{\frac{۱}{۶}}\right)^{۵}=(\sqrt[۶]{۶۴})^{۵}=۲^{۵}=۳۲$$

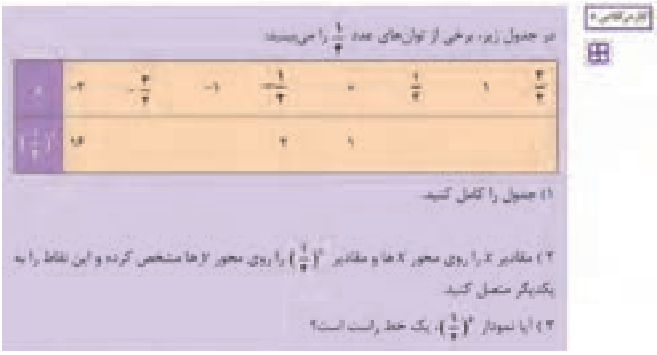
خواص توان‌رسانی (خاصیت $a^m\times a^n=a^{m+n}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

ت) $$\left(\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}\right)^{۳}=\left(\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}}\right)^{۳}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱}{۸}$$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $(a^m)^n=a^{mn}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

ث) $$\sqrt[۳]{۱۶}\times ۲^{\frac{۲}{۳}}=۱۶^{\frac{۱}{۳}}\times ۲^{\frac{۲}{۳}}=(۴^{۲})^{\frac{۱}{۳}}\times ۲^{\frac{۲}{۳}}=۴^{\frac{۲}{۳}}\times ۲^{\frac{۲}{۳}}=۸^{\frac{۲}{۳}}=\left(۸^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲}=(\sqrt[۳]{۸})^{۲}=۲^{۲}=۴$$

برای رسیدن به پاسخ از نمایش رادیکالی یک عدد به نمایش آن عدد به‌صورت یک عدد توان‌دار، خواص توان‌رسانی (خاصیت $(a^m)^n=a^{mn}$ و $a^m\times b^m=(ab)^m$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا ، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد ، استفاده شده است.



در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد $\frac{۱}{۴}$ را می‌بینید.

x	۲-	$-\frac{۳}{۲}$	۱-	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$
$(\frac{۱}{۴})^x$	۱۶			۲	۱			

۱) جدول را کامل کنید.

۲) مقادیر x را روی محور xها و مقادیر $(\frac{۱}{۴})^x$ را روی محور yها مشخص کرده و این نقاط را به یکدیگر متصل کنید.

۳) آیا نمودار $(\frac{۱}{۴})^x$، یک خط راست است؟

اهداف:

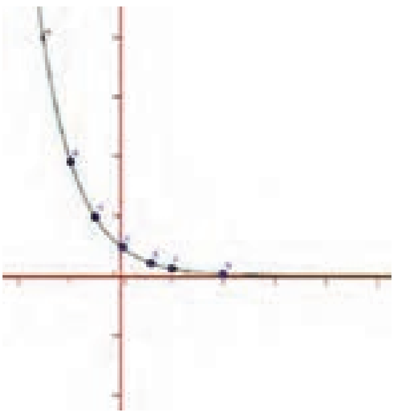
■ آشنایی با نمودار رابطه $y=a^x$ در حالت $a=\frac{۱}{۴}$

■ پرورش مهارت‌های حل مسئله، ارائه بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن.

۱ جدول تکمیل شده:

x	۲-	$-\frac{۳}{۲}$	۱-	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$
$\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$	۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$

۲



۳ خیر نمودار مربوط به یک خط راست نیست.

می‌توان از هنرجویان خواست با مقایسهٔ نمودار ارائه شده در متن درس و نمودار مربوط به سؤال کار در کلاس، تفاوت‌ها و شباهت‌های این دو نمودار را بیان کنند

و تفسیر کنند. (افزایشی یا کاهشی بودن، علامتِ اعداد سطر دوم این دو جدول که همگی مثبت هستند و ..) در مثال قبل از کار در کلاس نیز با استفاده از نمودار می‌توان تعبیری از توان‌های حقیقی یک عدد (مثلاً $۲^{\sqrt{۲}}$) را به هنرجویان قوی‌تر ارائه داد.

مسئله‌ها

۱) به جای نقطه‌چین‌ها عبارت مناسب قرار دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ یافتن ریشه‌های یک عدد

الف) $۷^{۲} = ۴۹ \Rightarrow (۴۹)^{\dots} = \sqrt[\dots]{\dots} =$

$$۷^{۲} = ۴۹ \Rightarrow (۴۹)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{۴۹} = ۷$$

ب) $۱۷^{۳} = ۴۹۱۳ \Rightarrow ۴۹۱۳^{\dots} = \sqrt[\dots]{\dots} =$

$$۱۷^{۳} = ۴۹۱۳ \Rightarrow (۴۹۱۳)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۴۹۱۳} = ۱۷$$

ب) $۱۳^{۴} = ۲۸۵۶۱ \Rightarrow ۲۸۵۶۱^{\dots} = \sqrt[\dots]{\dots} =$

$$۱۳^{۴} = ۲۸۵۶۱ \Rightarrow (۲۸۵۶۱)^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۲۸۵۶۱} = ۱۳$$

ت) $۱۵^{-۴} = (\frac{۱}{۱۵})^{۴} = \frac{۱}{۵۰۶۲۵} \Rightarrow (\frac{۱}{۵۰۶۲۵})^{\dots} = \sqrt[\dots]{\dots} = \dots$

$$۱۵^{-۴} = \frac{۱}{۵۰۶۲۵} \Rightarrow (\frac{۱}{۵۰۶۲۵})^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۵۰۶۲۵}} = \frac{۱}{۱۵}$$

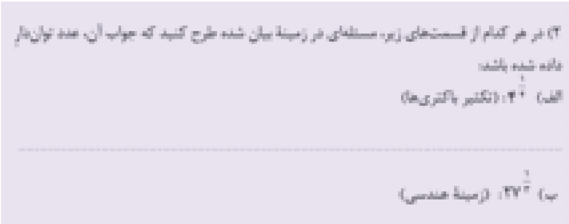
ث) $(\frac{۱}{۳})^{۹} = \dots \Rightarrow (\dots)^{\frac{۱}{۹}} = \sqrt[۹]{\dots} = \dots$

$$(\frac{۱}{۳})^{۹} = \frac{۱}{۱۹۶۸۳} \Rightarrow (\frac{۱}{۱۹۶۸۳})^{\frac{۱}{۹}} = \sqrt[۹]{\frac{۱}{۱۹۶۸۳}} = \frac{۱}{۳}$$

ج) $۵^{۶} = ۱۵۶۲۵ \Rightarrow (۱۵۶۲۵)^{\frac{۱}{۶}} = \sqrt[۶]{۱۵۶۲۵} = \dots$

$$۵^{۶} = ۱۵۶۲۵ \Rightarrow (۱۵۶۲۵)^{\frac{۱}{۶}} = \sqrt[۶]{۱۵۶۲۵} = ۵$$

$$(۰/۳)^{۵} = ۰/۰۰۲۴۳ \Rightarrow (۰/۰۰۲۴۳)^{\frac{۱}{۵}} = \sqrt[۵]{۰/۰۰۲۴۳} = ۰/۳$$


۴) در هر کدام از قسمت‌های زیر، مسئله‌ای در زمینهٔ بیان شده طرح کنید که جواب آن، عدد توان‌دار داده شده باشد:

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}$ (تکثیر باکتری‌ها)

ب) $۲۷^{\frac{۱}{۳}}$ (زمینهٔ هندسی)

مهارت‌ها و فرایندها :

■ طرح مسئلهٔ نیمه ساختار یافته

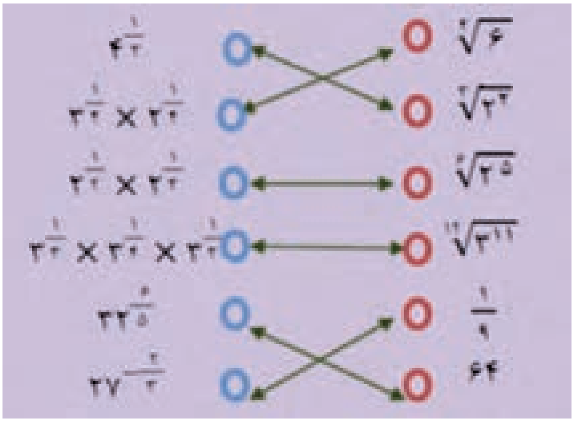
الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}$: (تکثیر باکتری‌ها) باکتری‌هایی را در نظر می‌گیریم که وزن آنها پس از یک ساعت ۴ برابر می‌شوند اگر با ۱ گرم باکتری شروع کنیم وزن آنها پس از ۱۵ دقیقه $۴^{\frac{۱}{۴}}$ خواهد بود.

ب) $۲۷^{\frac{۱}{۳}}$**:** (زمینه هندسی) طول ضلع مکعبی با حجم ۲۷ واحد مکعب.


۳) هریک از عددها را به عدد مساوی آن در ستون مقابل وصل کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ مقایسه کردن

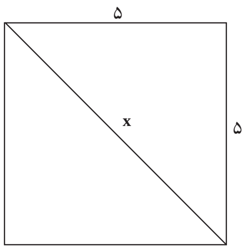


مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

۴) پاسخ هر یک از پرسش‌های زیر را به دو صورت عدد توان‌دار و عبارت رادیکالی نمایش دهید و در صورت امکان، ساده کنید.

الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟



الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

$$x^{۲} = ۵^{۲} + ۵^{۲} = ۵۰ \Rightarrow x = ۵۰^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵۰} \approx ۷/۰۷$$

ب) وزن ۱ گرم از نوعی باکتری در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. وزن باکتری پس از ۲۰ دقیقه چقدر می‌شود؟

ب) وزن ۱ گرم از یک نوع باکتری که در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. پس از گذشت ۲۰ دقیقه :

$$۸^{\frac{۲۰}{۶۰}} = ۸^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب چقدر است؟

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب : $۱۰۰۰^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱۰۰۰} = ۱۰$

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ سانتی‌متر چقدر است؟

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع زاویهٔ قائمه ۶ و ۹ برابر است با:

$a^{۲} = ۶^{۲} + ۹^{۲} \Rightarrow a^{۲} = ۱۱۷ \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{۱۱۷} \approx \pm۱۰/۸$ که فقط ۱۰/۸ قابل قبول است.

۵) ابتدا نمایش رادیکالی عبارت‌های زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) ریشه‌های دوم عدد ۱۲۱

ب) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲

پ) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲-

ت) ریشه‌های ششم عدد $\frac{۱}{۶۴}$

ث) توان $\frac{۱}{۳}$ عدد ۲۷

ج) توان $\frac{۱}{۵}$ عدد ۳۲

مهارت‌ها و فرایندها :

■ محاسبهٔ توان‌های گویای یک عدد

الف) $\pm\sqrt{۱۲۱} = \pm ۱۱$

ب) $\sqrt[۵]{۳۲} = ۲$

پ) $\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$

ت) $\pm\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}} = \pm\frac{۱}{۲}$

ث) $۲۷^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۷} = ۳$

ج) $۳۲^{\frac{۱}{۵}} = \sqrt[۵]{۳۲} = ۲$

۶) حاصل هر کدام از عبارت‌های زیر را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار و سپس، به صورت عبارت رادیکالی بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}} \times ۴^{\frac{۱}{۳}}$

ب) $۶۴^{-\frac{۱}{۲}} \times ۶۴^{-\frac{۱}{۳}}$

پ) $(\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۴}} \times (\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۱۲}}$

ت) [illegible]

ث) [illegible]

ج) [illegible]

مهارت‌ها و فرایندها :

■ ساده کردن توان‌های گویا

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}} \times ۴^{\frac{۱}{۳}} = ۴^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}} = ۴^{\frac{۷}{۱۲}} = \sqrt[۱۲]{۴^۷} = \sqrt[۱۲]{۱۶۳۸۴}$

ب) $۶۴^{-\frac{۱}{۲}} \times ۶۴^{-\frac{۱}{۳}} = ۶۴^{-\frac{۱}{۲}+(-\frac{۱}{۳})} = ۶۴^{-\frac{۵}{۶}} = \frac{۱}{۶۴^{\frac{۵}{۶}}} = \frac{۱}{\left(۶۴^{\frac{۱}{۶}}\right)^۵} = \frac{۱}{(\sqrt[۶]{۶۴})^۵} = \frac{۱}{۲^۵} = \frac{۱}{۳۲}$

پ) $\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۴}} \times \left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۱۲}} = \left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}} = \left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۴}{۱۲}} = \left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۲}$

ت) $۵^{\frac{۱}{۳}} \times ۲۵^{\frac{۱}{۳}} = ۵^{\frac{۱}{۳}} \times (۵^{۲})^{\frac{۱}{۳}} = ۵^{\frac{۱}{۳}} \times ۵^{\frac{۲}{۳}} = ۵^{\frac{۳}{۳}} = ۵$

ث) $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} = ۳^{\frac{۲}{۳}} = \left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} = (\sqrt[۳]{۳})^{۲} = \sqrt[۳]{۹}$

ج) $(۲۷^{-۲})^{\frac{۱}{۶}} = ۲۷^{-\frac{۲}{۶}} = ۲۷^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲۷^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۷}} = \frac{۱}{۳}$

۷) عبارت‌های زیر را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

الف) $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^{۴}}$ ب) $\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۳}}$

مهارت ها و فرایندها :

■ ریشه‌گیری از عبارت توان‌دار

الف) $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^{۴}} = \left|۱-\sqrt{۳}\right| = \sqrt{۳}-۱$ ب) $\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۳}} = \sqrt{۲}-\sqrt{۳}$

۸) با کامل کردن جدول زیر، نقاط آن را روی محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط را به هم وصل کنید.

(برای محاسبهٔ توان های گویا می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

x	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱
۲^{x}	...	...	...	...	...	...	...

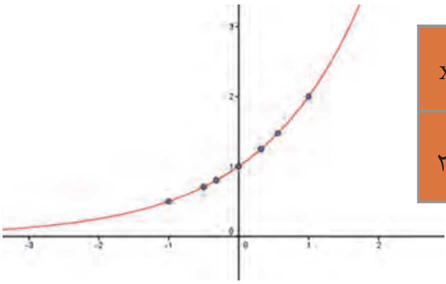
مهارت ها و فرایندها :

توان‌رسانی، کار با ماشین‌حساب

از هنرجویان بخواهید توان‌های اعداد دیگر را نیز رسم کرده و نمودارها را با نمودار ارائه شده در فصل، مقایسه کنند (مثلاً نمودار $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$)

(برای محاسبهٔ توان‌های گویا می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

x	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱
۲^{x}	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$	۱	$\sqrt[۳]{۲}$	$\sqrt{۲}$	۲



در تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا، ایده اصلی آن است که خواص اساسی توان رسانی که در زیر می‌آید برقرار بمانند.

$$a^{m+n}=a^m a^n \quad , \quad (a^m)^n=a^{mn} \quad , \quad (ab)^n=a^n b^n$$

مثلاً، اگر بخواهیم $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف کنیم، این عدد باید به گونه‌ای تعریف شود که داشته باشیم:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$$

این تساوی نشان می‌دهد که $a^{\frac{1}{n}}$ باید ریشهٔ nام a باشد. از آنجا که اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند ناچاریم که در حالت nهای زوج، a را مثبت در نظر بگیریم و طبق قرارداد آن ریشهٔ nام a که مثبت است را به عنوان $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف می‌کنیم، یعنی $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$. در گسترش این تعریف به اعداد گویای دلخواه $\frac{m}{n}$ برای حفظ خواص اساسی توان رسانی $a^{\frac{m}{n}}$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{1}{n}\times m}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(\sqrt[n]{a})^m.$$

از آنجا که یک عدد گویا را به شکل‌های مختلف می‌توان نوشت، باید ثابت شود در تعریف بالا نوع نوشتن عدد گویا تأثیری بر نتیجه ندارد. یعنی اگر داشته باشیم $\frac{m'}{n'}=\frac{m}{n}$ باید بتوانیم ثابت کنیم $(\sqrt[n']{a})^{m'}=(\sqrt[n]{a})^m$. در حالتی که a مثبت باشد اثبات این تساوی امکان‌پذیر است ولی در حالتی که a منفی باشد این تساوی ممکن است بی‌معنا شود زیرا ممکن است مجبور باشیم از یک عدد منفی ریشهٔ زوج بگیریم. مثلاً در توان رسانی عدد ۱- به توان $\frac{۱}{۳}$ داریم $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ ولی عبارت $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}=(-۱)^{\frac{۲}{۶}}=(\sqrt[۶]{-۱})^{۲}$ بی معناست.

برای آنکه بدون هیچ محدودیتی بتوانیم توان رسانی به توان اعداد گویا را انجام دهیم و از خواص اساسی توان رسانی استفاده کنیم، قرارداد جهانی بر این است که در توان رسانی به توان اعداد گویا پایه همواره مثبت است و توان رسانی اعداد منفی به توان اعداد گویا (غیر صحیح) تعریف نمی‌شود.

با این قرارداد، تعریف انجام شده مشکلی در بردارد و خواص اساسی توان رسانی به توان اعداد گویا برقرار خواهند بود، یعنی برای اعداد حقیقی مثبت a و b و اعداد

گویای r و s داریم:

$$a^{r+s}=a^r a^s \quad , \quad (a^r)^s=a^{rs} \quad , \quad (ab)^r=a^r b^r$$

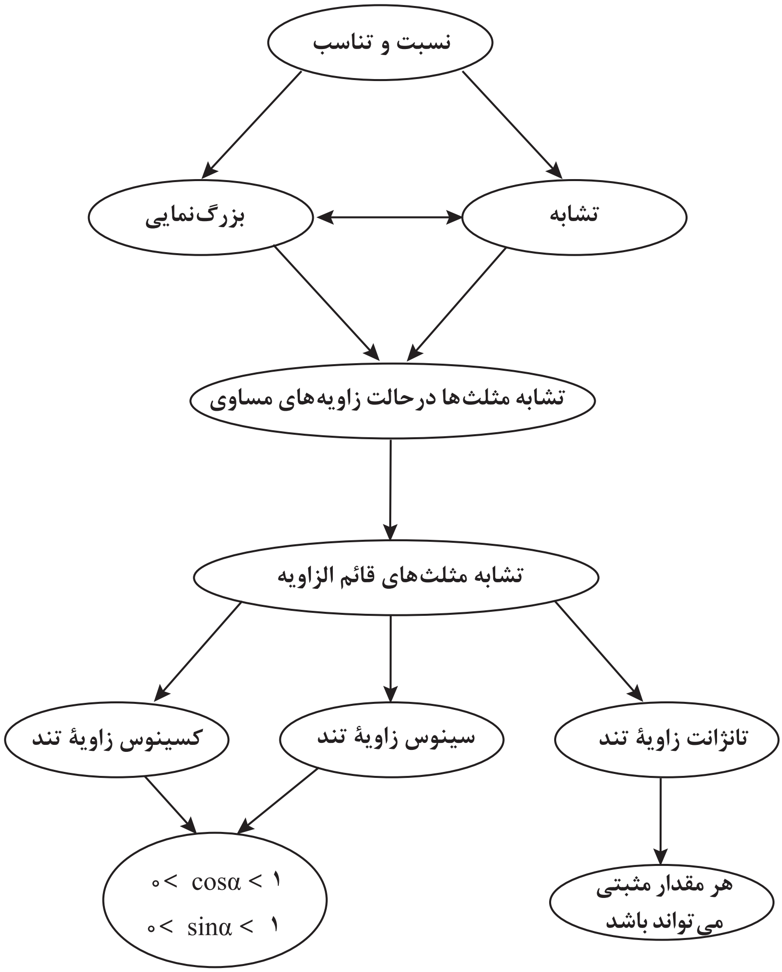
مفهوم توان رسانی به توان اعداد حقیقی هم قابل تعریف است. از آنجا که شناخت ما از اعداد حقیقی از طریق تقریبات گویای این اعداد است، برای هر عدد حقیقی مانند c فرض کنید که $\{r_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گویا باشد که c را تقریب می‌زند، به عبارت دیگر این دنباله از اعداد گویا به c همگراست. فرض کنیدa عدد حقیقی مثبتی باشد، برای تعریف a^c مقادیر a^{r_n}ها را حساب می‌کنیم. ثابت می‌شود اعداد a^{r_n} عدد حقیقی خاصی را تقریب می‌زنند (یعنی به عدد حقیقی خاصی همگرا هستند)، آن عدد را طبق تعریف a^c می‌نامیم. مثلاً برای یافتن $۵^{\sqrt{۲}}$ ابتدا دنباله تقریبات اعشاری $\sqrt{۲}$ را به صورت $\{r_n\}$ در نظر می‌گیریم و مقادیر ۵^{r_n}را محاسبه می‌کنیم. این مقادیر با بزرگ شدن n به $۵^{\sqrt{۲}}$ نزدیک می‌شوند. برای n به اندازه کافی بزرگ ۵^{r_n} تقریبات اعشاری $۵^{\sqrt{۲}}$ را تا هر مقدار که خواسته باشیم نشان خواهد داد.

با این تعریف، خواص اساسی توان رسانی برای توان‌های اعداد حقیقی به همان شکل برقرار خواهند بود.

فصل ششم

نسبت‌های مثلثاتی

طرح کلی مفاهیم فصل ششم (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی فصل

- درک مفهوم ضریب بزرگ‌نمایی k در دو شکل متشابه برای $k>1$ و $0<k<1$
- محاسبهٔ مقدار k با داشتن اندازهٔ دو شکل متشابه
- درک نسبت‌های مثلثاتی تانژانت ، سینوس و کسینوس یک زاویه تند به عنوان ویژگی زاویه
- شناسایی مقادیر ممکن برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه تند
- درک رابطهٔ بین تغییرات نسبت‌های مثلثاتی با تغییرات زاویه

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- با داشتن اندازهٔ دو شکل متشابه، مقدار k را تعیین کند.
- نسبت‌های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس یک زاویهٔ تند را با رسم مثلث قائم الزاویه محاسبه کند.
- با داشتن نسبت مثلثاتی، زاویهٔ متناظر با آن را از طریق رسم محاسبه کند.
- از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در حل مسائل استفاده کند.

پیش نیازهای فصل :

- آشنایی با دو مفهوم نسبت و تناسب
- آشنایی با مفهوم تشابه دو مثلث

ابزارهای کمک آموزشی :

خط‌کش، نقاله، گونیا، ماشین‌حساب و رایانه

استاندارد های فرایندی	فرایند	توصیف فرایند	مثال
استاندارد های فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و با انتخاب مناسب آنها	استفاده از تشابه بین دو مثلث برای یافتن نسبت اضلاع متناظرشان و تساوی آنها استفاده از چوب و سایه چوب برای یافتن ارتفاع اهرام مصر
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	توضیح منوچهر به معلم خودش در مورد سؤال ایجاد شده درسینما (چگونگی بزرگی تصویر روی پرده سینما نسبت به فیلم) توضیح علی به معلم خودش در مورد یافتن طول نردبان بازشده در ماشین آتش‌نشانی
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	برای یافتن ارتفاع کوه از مفهوم تشابه و روابط اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه استفاده کند. برای یافتن طول نردبان جرثقیل آتش نشانی از رابطه بین نسبت مثلثاتی استفاده کند .
	استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	دلیل عدم تشابه دو شکل را بیان کند دلیل تغییرات نسبت های مثلثاتی را با تغییرات زاویه بیان کند
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	دلیل درستی یا نادرستی روابط را در مسائل آخر فصل بیان کند
		تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	طول سیم نگهدارنده دکل را به کمک مفهوم سینوس بیابد. طول ارتفاع انتهای نردبان را در سطح زمین به کمک سینوس بیابد.
	بازنمایی ها	ارائهٔ نمایش‌های مختلف یک مفهوم	در همهٔ قسمت‌های فصل وجود دارد
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	مقایسه نسبت‌های $\frac{CD}{CB}$, $\frac{CE}{CB}$, $\frac{CA}{CB}$ و ذکر مساوی بودن آنها به کمک تشابه یا با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع

بخش اول: تشابه

اهداف بخش

- درک مفهوم بزرگ‌نمایی (با ضریب $0<k<1$ و با ضریب $k>1$)
- آشنایی با تشابه دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌ها
- استفاده از مفهوم بزرگ‌نمایی و تشابه در حل مسائل

واژه‌های کلیدی:

تشابه، بزرگ‌نمایی

نگاه کلی به بخش

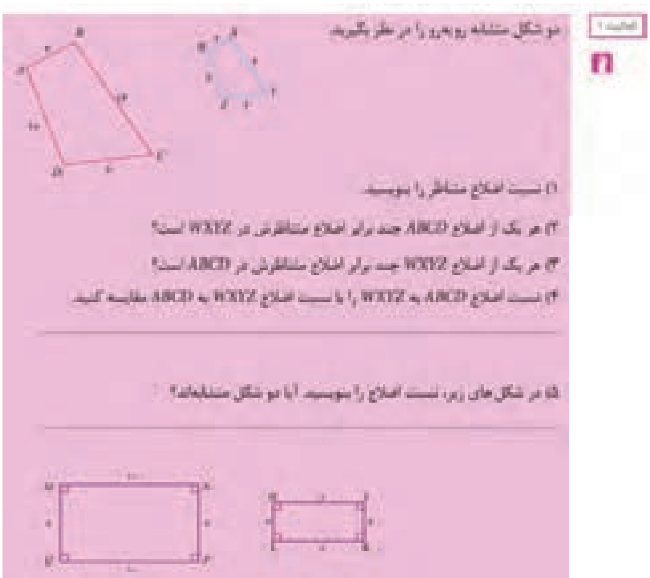
مطالب این بخش در ارتباط با تشابه دو شکل و مفهوم بزرگ‌نمایی است. برای رسیدن به مفهوم تشابه از مفهوم کمکی بزرگ‌نمایی استفاده شده است، ولی مفهوم اصلی، تشابه و حالت تشابه دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌های دو مثلث است. تشابه کاربردهای بسیار زیاد در زندگی روزمره مانند معماری، ماکت‌سازی، نقشه‌کشی، رسم فنی، بزرگ کردن و کوچک کردن شکل‌ها در رایانه، عکاسی، نجوم، مساحی، تصویربرداری پزشکی، ... دارد. به‌علت نیاز به این مفهوم در تعریف نسبت‌های مثلثاتی و به دلیل نبود قضیه حالت‌های تشابه در کتاب‌های درسی ریاضی سال‌های گذشته، ابتدا مفهوم تشابه از طریق مفهوم بزرگ‌نمایی یادآوری می‌شود. سپس رابطهٔ تالس برای متشابه بودن دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌ها مطرح شده است.

ورود به مطلب:

بهتر است از مثال‌هایی که در اطراف خود می‌بینیم و اجسام متشابهی که دیده می‌شوند، شروع کنیم. مانند عکس منظره و خود منظره، نقشهٔ شهر و شهر، ماکت ساختمان و خود ساختمان. سپس مفهوم تشابه و نسبت تشابه یادآوری شود و کاربردهای آن در نقشه و ماکت و عکس و ... ذکر شود. بعد از این مقدمات می‌توانید به کتاب مراجعه کنید و شیوهٔ ساختن شکل‌های متشابه و ویژگی اساسی ثابت بودن نسبت طول پاره‌خط‌های متناظر را تذکر دهید. به عنوان مثال بهتر است در نقشهٔ بین دو شهر، دو نقطهٔ دلخواه را انتخاب نموده و با اندازه‌گیری مستقیم طول پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند و مقایسه با فاصلهٔ واقعی بین آن دو شهر و یافتن نسبت این دو عدد و ادامهٔ این کار حداقل برای دو

نقطهٔ دلخواه دیگر به این نسبت برسیم. همچنین در استفاده از ضریب بزرگ نمایی متوجه ضرورت بیان این مفهوم و نحوهٔ استفاده از آن می‌شویم. لطفاً به کتاب کار قسمت تشابه رجوع شود. (مثال‌های حل شده)

فعالیت آموزشی



دو شکل متشابه روبه‌رو را در نظر بگیرید.

۱) نسبت اضلاع متناظر را بنویسید.

۲) هر یک از اضلاع ABCD چند برابر اضلاع متناظرش در WXYZ است؟

۳) هر یک از اضلاع WXYZ چند برابر اضلاع متناظرش در ABCD است؟

۴) نسبت اضلاع ABCD به WXYZ را با نسبت اضلاع WXYZ به ABCD مقایسه کنید.

۵) در شکل‌های زیر، نسبت اضلاع را بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟

اهداف موضوعی:

- آشنایی با مفهوم بزرگ‌نمایی و معرفی ضریب بزرگ‌نمایی
- محاسبهٔ ضریب بزرگ‌نمایی k در دو شکل متشابه
- تشخیص رابطهٔ بین مقدار k با بزرگ شدن یا کوچک شدن شکل

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، مقایسه کردن

۱) $\frac{AB}{WX}=\frac{BC}{XY}=\frac{CD}{ZY}=\frac{AD}{WZ}=۲$

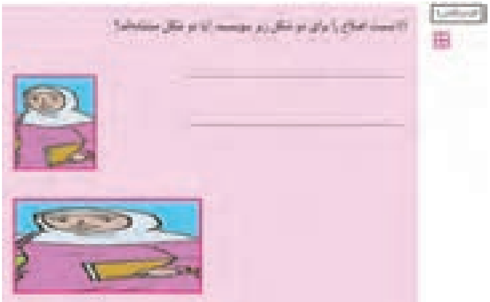
۲) ۲ برابر

۳) $\frac{۱}{۲}$ برابر

۴) معکوس یکدیگرند

۵) $$\frac{HL}{MQ}=\frac{۳}{۶}\neq\frac{HJ}{MN}=\frac{۷}{۱۰}\neq\frac{JK}{NP}=\frac{۳}{۶}\neq\frac{LK}{QP}=\frac{۷}{۱۰}$$

خیر، متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان برابر نیست. کافی است نقاط دلخواه روی یکی از این عکس‌ها انتخاب کنیم و فاصلهٔ بین آنها را بیابیم و با فاصلهٔ نقاط نظیرشان در عکس دیگر مقایسه کنیم تا وجود تفاوت در نسبت‌ها را تشخیص دهیم.



اهداف:

- بررسی مفهوم تشابه از طریق مقایسهٔ نسبت اضلاع متناظر
- ساختن شکل متشابه از طریق دستگاه مختصات (طول و عرض نقاط)
- پرورش مهارت استدلال کردن و تفکر بصری

۱ خیر، زیرا ، نسبت طول اضلاع متناظر متفاوت است. کافی است چند نقطهٔ متناظر را انتخاب کنیم و فاصله‌های متناظر را اندازه‌گیری کنیم و نسبت آنها را به دست آوریم.

۲ الف) شکل ۱ ، زیرا ارتفاع شکل عوض نمی‌شود ولی طول آن سه برابر می‌شود.

ب) شکل ۲

پ) شکل ۳

توصیهٔ آموزشی:

به دبیران توصیه می شود در حین تدریس به موارد زیر اشاره نمایند.

- بعد از یافتن ضریب بزرگ نمایی، زمانی که k بین صفر و ۱ است ذکر کنیم که

استفاده از لفظ بزرگ نمایی لزوماً به معنی بزرگ شدن نیست بلکه می‌تواند شکل اولیه را کوچک‌تر کند و بستگی به k دارد.

- در شکل پروانه‌ها بهتر است نقاط دلخواهی را روی شکل انتخاب کنید و با یافتن فاصلهٔ بین این نقاط و نقاط متناظرشان و همچنین یافتن زاویه‌های نظیر در شکل‌های (الف) و (ب) و (پ) به سؤال‌ها پاسخ داد.
- همچنین می‌توان با قرار دادن پروانه‌ها در مستطیل‌ها طول و عرض آنها را بررسی نمود.

در ادامه در زمینهٔ تاریخی با بیان یک مسئلهٔ واقعی (محاسبهٔ طول ارتفاع اهرام مصر) قضیهٔ تشابه مثلث‌ها از طریق تساوی زاویه‌ها به‌طور غیرمستقیم ارائه شده است . اثبات درستی این قضیه به‌علت طولانی بودن و دور شدن از هدف این فصل ارائه نشده است.

توجه شود که خورشید در فاصله‌ای بسیار دور قرار دارد و شعاع‌های نوری که به یک جسم تابیده می شود با هم موازی محسوب می‌شوند زیرا خطای عدم توازی این شعاع‌ها با دستگاه‌های اندازه‌گیری ما قابل تشخیص نیست. با استفاده از خطوط موازی و مورب می توان به سؤال گفته شده در قسمت تالس جواب داد . به‌جای مسئلهٔ تاریخی، می‌توان زمینه‌های دیگری مانند یافتن ارتفاع تیرک پرچم و.... را انتخاب نموده و برای یادگیری بیشتر در کلاس استفاده نمود.

نکته: توجه شود شرط تساوی زاویه‌ها برای برقراری تشابه بین چندضلعی‌های بیشتر از سه ضلع کافی نیست و برای متشابه بودن هر دو چندضلعی باید برابری نسبت اضلاع رأس‌های نظیر هم برقرار باشد.

به‌عنوان مثال در فعالیت ۱ با اینکه دو شکل مستطیل هستند و زاویه‌های برابر دارند ولی متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان مساوی نیست.

اهداف:

- کسب مهارت تشخیص مثلث‌های متشابه

■ کسب مهارت تشخیص اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه، پرورش مهارت استدلال کردن

الف) دومثلث ABC و KBH به‌دلیل داشتن زاویه‌های مساوی، متشابه‌اند و ضلع AB نظیر ضلع KB می‌باشد زیرا هردو روبروی زاویهٔ قائمه هستند.

ب)
$$\frac{AB}{KB}=\frac{BC}{BH}=\frac{CA}{KH}$$

ممکن است هنرجویان در تشخیص اضلاع متناظر در شکل‌های متشابه دچار مشکل باشند. در مثلث‌های متشابه اضلاع متناظر آنهایی هستند که زاویهٔ روبروی آنها مساوی هستند.

توجه داشته باشید که در هر تشابهی که بین دو شکل برقرار می‌شود، ابتدا یک تناظر بین نقاط دو شکل برقرار می‌شود و تحت این تناظر است که مفهوم اضلاع متناظر و زاویه‌های متناظر مشخص می‌شوند. البته دو شکل دلخواه، ممکن است تحت تناظرهای متفاوتی با هم متشابه باشند.

در این بخش می‌توانید برای یادگیری عمیق‌تر و ارزیابی بیشتر هنرجویان از تمرین‌ها و مسائل بخش تشابه در کتاب کار استفاده نمایید.

مسیرهایی برای توسعه

الف) تحقیق کنید آیا برای تشابه دو مثلث قوانین دیگری وجود دارد؟ به تمرین ۱ در کتاب کار در بخش تشابه توجه شود.

ب) آیا می‌توانید قضایای دیگر تشابه دو مثلث را بیان کنید؟

پ) تحقیق کنید ضریب بزرگ‌نمایی منفی وجود دارد یا خیر؟ درصورت وجود، به چه معنا است؟

ت) آیا به کمک رایانه و فقط با کشیدن شکل از یک طرف و بزرگ نمودن آن به شکلی متشابه با آن شکل می‌رسید؟ چرا؟

بخش دوم: تانژانت یک زاویه

اهداف بخش

- درک مفهوم تانژانت یک زاویهٔ تند
- محاسبهٔ مقدار تقریبی تانژانت یک زاویهٔ تند
- استفاده از مفهوم تانژانت در حل مسائل واقعی
- درک رابطه بین تغییرات زاویه با تغییرات تانژانت زاویه
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن تانژانت آن زاویه

واژه‌های کلیدی:

تانژانت زاویهٔ تند، نسبت اضلاع

نگاه کلی به بخش:

این بخش با طرح مسئله‌ای واقعی در مورد ارتباط ابعاد تصویر تشکیل شده روی پردهٔ سینما و فاصلهٔ پرده از چشمهٔ نور آغاز می‌شود. سپس از طریق یک فعالیت هندسی، نسبت‌هایی یکسان تشکیل می‌شود که همگی با داشتن یک زاویهٔ تند به‌دست می‌آیند. این نسبت‌های یکسان در صفحات بعدی به‌عنوان تانژانت معرفی خواهد شد. علت یکسان شدن این نسبت‌ها، مفهوم تشابه است که در بخش قبلی مورد بحث قرار گرفته است.

شیوهٔ تعریف، بنا کردن یک مثلث قائم‌الزاویه روی زاویهٔ داده شده است و تذکر این نکته ضروریست که طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی زاویه، تأثیری در تانژانت ندارد. با این شیوهٔ تعریف، مقدار تقریبی تانژانت یک زاویهٔ تند از طریق محاسبهٔ مستقیم و اندازه‌گیری اضلاع توسط هنرجو به‌دست می‌آید.

در ادامه، رابطهٔ بین تغییرات تانژانت و تغییرات زاویه از روی شکل بررسی می‌شود. همچنین مسئلهٔ یافتن زاویه‌ای که تانژانت آن داده شده است، در طی یک فعالیت به‌طور هندسی حل می‌شود. در پایان نحوهٔ کار با ماشین حساب برای محاسبهٔ تانژانت زوایای گوناگون بیان می‌شود.

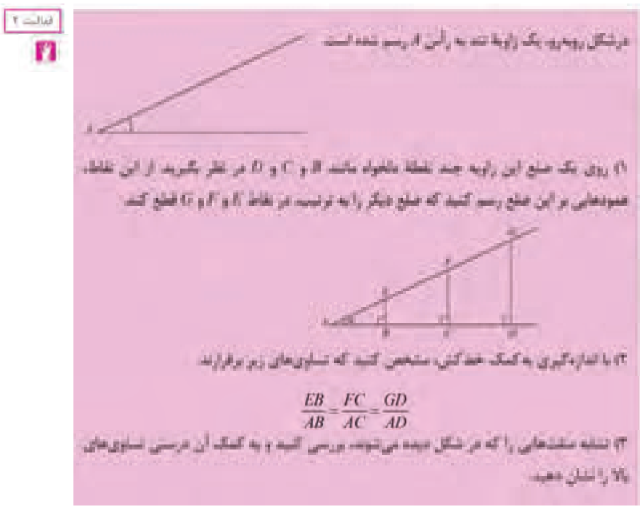
ورود به مطلب:

برای معرفی نسبت‌های مثلثاتی با طرح یک مسئلهٔ مربوط به زندگی پیرامونی شروع کنید و از تعریف مستقیم نسبت‌های مثلثاتی پرهیز کنید. هر مسئله‌ای که حل آن نیازمند یک نسبت مثلثاتی است می‌تواند به عنوان ورود به مفهوم استفاده شود. ولی هر چه مسئله ساده‌تر باشد و به فهم هنرجو نزدیک‌تر باشد، و مستقیم‌تر به نسبت مثلثاتی مربوط باشد، بهتر است. رسم شکل فرضی از مسئلهٔ واقعی که در آن اطلاعات مورد نیاز برای حل مسئله موجود می‌باشد، از راهبردهای حل مسئله است و این راهبرد در مسائل مربوط به نسبت‌های مثلثاتی بسیار مناسب است. محاسبهٔ ارتفاع برج‌های مهم شهر یا ساختمان‌های مرتفع یا ارتفاع نقاط طبیعی مثل کوه‌ها و عرض رودخانه‌ها و .... می‌تواند موجب جلب توجه هنرجویان شود.

توصیهٔ آموزشی:

درصورت نیاز به ارزشیابی تکوینی به فعالیت جایگزین توجه کنید. (کتاب کار فعالیت ابتدای بخش تانژانت)

فعالیت آموزشی


فعالیت ۲

در شکل روبه‌رو یک زاویهٔ تند به رأس A رسم شده است.

۱) روی یک ضلع این زاویه چند نقطهٔ دلخواه مانند B و C و D در نظر بگیرید. از این نقاط، عمودهایی بر این ضلع رسم کنید که ضلع دیگر زاویه را به ترتیب در نقاط E و F و G قطع کند.

۲) با اندازه‌گیری به کمک خط‌کش مشخص کنید که تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\frac{EB}{AB}=\frac{FC}{AC}=\frac{GD}{AD}$$

۳) تشابه مثلث‌هایی را که در شکل دیده می‌شوند، بررسی کنید و به کمک آن درستی تساوی‌های بالا را نشان دهید.

اهداف موضوعی:

■ درک تساوی نسبت اضلاع ضلع مقابل به زاویهٔ تند به ضلع مجاور با آن در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی اضلاع یک زاویهٔ تند

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن

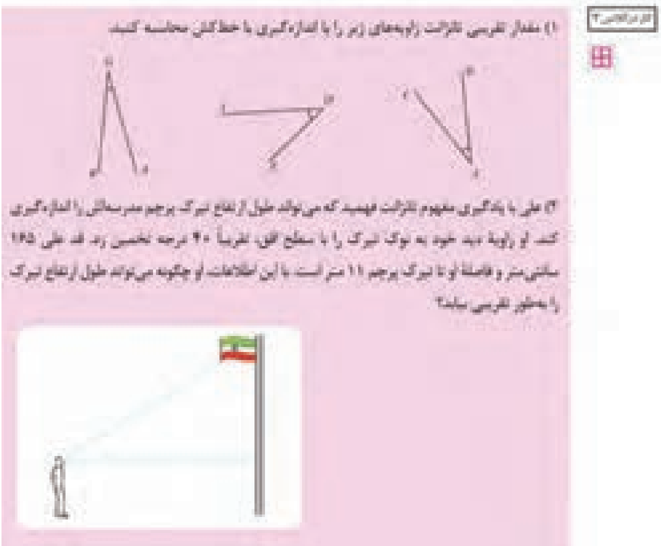
۱ لازم است هنرجو در رسم خطوط عمود بر هم توانایی استفاده از خط‌کش و گونیا را داشته باشد.

۲ با اندازه‌گیری پاره‌خط‌های ذکر شده به نسبت‌های تقریباً مساوی در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در زاویهٔ A مشترکند می‌رسیم. بهتر است هنرجویان با خط‌کش این کار را انجام داده و نتیجه‌گیری کنند. البته تساوی‌های به‌دست آمده تقریبی خواهند بود.

۳ با استفاده از زاویه‌های مثلث در مثلث‌های قائم‌الزاویه، دیده می‌شود که طبق نتایج بخش قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه (در شکل) متشابه‌اند (زیرا همگی دارای یک زاویهٔ راست بوده و در زاویهٔ تند A مشترکند). بنابراین می‌توانیم نسبت اضلاع متناظر را بنویسیم و با طرفین وسطین و نوشتن نسبت جدید، نتیجه بگیریم که:

$$\frac{EB}{AE}=\frac{FC}{AF}=\frac{GD}{AG}$$

این تساوی‌ها مبنای اصلی تعریف نسبت مثلثاتی تانژانت هستند.


کار در کلاس ۳

۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های زیر را با اندازه‌گیری با خط‌کش محاسبه کنید.

۲) علی با یادگیری مفهوم تانژانت فهمید که می‌تواند طول ارتفاع تیرک پرچم مدرسه‌اش را اندازه‌گیری کند. او زاویهٔ دید خود به نوک تیرک را با سطح افق تقریباً ۴۰ درجه تخمین زد. قد علی ۱۶۵ سانتی‌متر و فاصلهٔ او تا تیرک پرچم ۱۱ متر است. با این اطلاعات او چگونه می‌تواند طول ارتفاع تیرک را بطور تقریبی بیابد؟

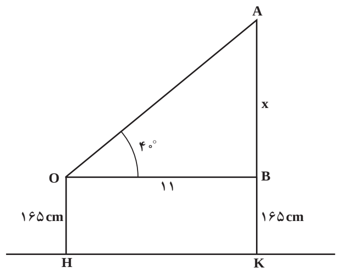
اهداف:

- کسب مهارت در محاسبهٔ تقریبی تانژانت یک زاویه، به‌کارگیری تانژانت در حل مسائل، برقراری پیوند و اتصال با مسائل زندگی روزمره

۱ هدف این تمرین، یافتن مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های دلخواه داده شده

در حالت‌های مختلف است. برای این کار هنرجو باید برای هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب بسازد. کافی است از نقطه‌ای روی یکی از اضلاع زاویه‌های داده شده بر ضلع دیگر عمود کند. سپس با اندازه‌گیری اضلاع روبرو به زاویه و مجاور به زاویه و تقسیم آنها بر هم مقدار تقریبی تانژانت زاویه را محاسبه کند.

۲ در این سؤال هنرجو در یک مسئلهٔ محیط پیرامونی خود قرار می‌گیرد. برای حل به شکل زیر توجه کنید.



OB=HK=۱۱m

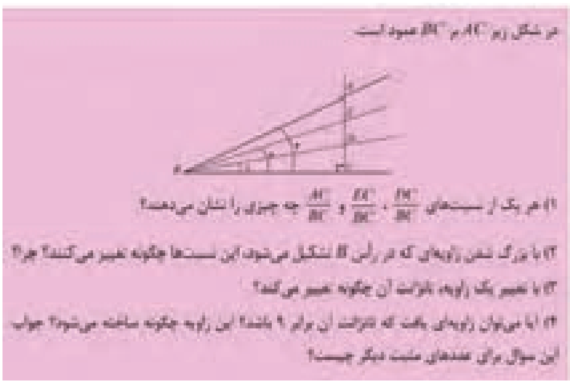
$$= \tan ۴۰^\circ = \frac{x}{۱۱}$$

$$\Rightarrow x = ۱۱\tan ۴۰^\circ \approx ۹/۲۳$$

$\Rightarrow$ طول ارتفاع تیرک $= x + BK = ۱۱\tan ۴۰^\circ + ۱/۶۵ \approx ۱۰/۸۸$

در ادامه سؤالی دربارهٔ مقادیر ممکن برای تانژانت یک زاویه مطرح می‌شود که در طی یک فعالیت جواب آن به‌دست می‌آید.

فعالیت آموزشی


در شکل زیر ... عمود است.

۱) هر یک از نسبت‌های ... چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس B تشکیل می‌شود این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

۳) با تغییر یک زاویه، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ این زاویه چگونه ساخته می‌شود؟ جواب این سؤال برای عددهای مثبت دیگر چیست؟

اهداف موضوعی:

- درک رابطهٔ بین تغییرات زاویه و تانژانت آن زاویه

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری، یافتن زاویه با داشتن تانژانت آن زاویه، تعمیم دادن

۱ در شکل صفحهٔ قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه در ضلع CB مشترکند ولی زاویه‌های تند آنها در رأس B تغییر می‌کند. این نسبت‌ها تانژانت زاویه‌های تندی هستندکه در رأس B ساخته شده‌اند. زیرا همگی این نسبت‌ها به‌صورت نسبت طول ضلع مقابل به این زاویه‌ها به ضلع مجاور این زاویه‌ها هستند.

نسبت‌های $\frac{CD}{CB}$ و $\frac{CE}{CB}$ و $\frac{CA}{CB}$ به‌ترتیب تانژانت زاویه‌های $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ می باشند.

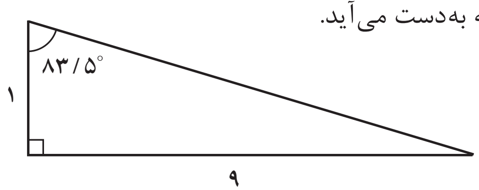
$$\tan B_۳ = \frac{AC}{BC} \ , \ \tan B_۲ = \frac{EC}{BC} \ , \ \tan B_۱ = \frac{DC}{BC}$$

۲ چون BC ثابت و DC<EC<AC پس $\frac{DC}{BC} < \frac{EC}{BC} < \frac{AC}{BC}$ یعنی با بزرگ شدن زاویه در رأس B این نسبت‌ها هم بزرگ‌تر می‌شوند.

۳ از آنجا که نسبت‌های بند قبل همان تانژانت آن زاویه‌ها بودند نتیجه می‌شود: هرچه زاویه تند بزرگ‌تر شود تانژانت آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و اگر زاویه تند کوچک‌تر شود تانژانت آن کوچک‌تر می‌شود. یعنی

$$\tan B_۳ > \tan B_۲ > \tan B_۱$$

۴ بله، کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۱ و ۹ باشد در این صورت زاویهٔ روبرو به ضلع به طول ۹ جواب مسئله است. زیرا در محاسبهٔ تانژانت این زاویه نسبت $\frac{۹}{۱}$ حساب می‌شودکه ۹ نمایش طول ضلع روبرو به زاویه و ۱ نمایش طول ضلع مجاور به آن زاویه است. با اندازه‌گیری این زاویه با نقاله مقدار تقریبی ۸۳/۵ درجه به‌دست می‌آید.



اگر به جای عدد ۹ از هر عدد مثبت دیگری هم استفاده کنیم، می‌توانیم عملیات بالا را تکرار کنیم و هر عدد مثبتی تانژانت زاویه‌ای خواهد بود.

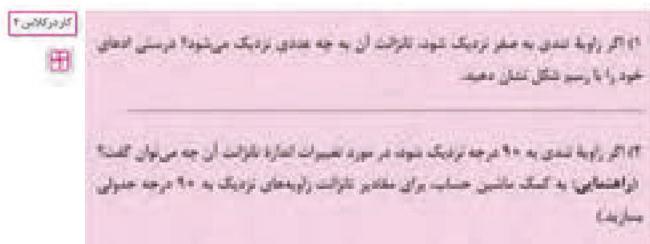
اشتباهات ممکن

■ ممکن است با توجه به انتخاب ضلعی به طول واحد در حل سؤال ۴ در این فعالیت این حس در هنرجو ایجاد شود که همیشه ضلع مقابل به زاویهٔ تند، همان تانژانت آن زاویه است. بهتر است در اینجا ضمن تذکر این مورد مثال‌های دیگری زده شود که لزوماً از ضلعی به طول واحد استفاده نشود. مثلاً از اعدادی به عنوان طول ضلع استفاده کرد که نسبت آنها ۹ شود.

■ به هنرجویان توضیح داده شود که نسبت مثلثاتی یک زاویه مانند $\tan 40^\circ$ یک عدد است و منظور حاصل‌ضرب یک عدد در یک عبارت نیست. (به کتاب کار بخش تانژانت یک زاویه در تمرین ۲ توجه شود)

استفاده از ابزار:

برای یافتن مقدار تانژانت زاویه‌ها می‌توان از ماشین‌های حساب علمی کمک گرفت. توجه داشته باشید که در استفاده از ماشین حساب واحد اندازه‌گیری زاویه به درستی انتخاب شده باشد چون در هر ماشین حسابی می‌توان واحد اندازه‌گیری زاویه را درجه، رادیان، یا گراد انتخاب کرد. روش استفاده به صورت تصویری توضیح داده شده است .


کار در کلاس ۴

۱) اگر زاویهٔ تندی به صفر نزدیک شود، تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ درستی ادعای خود را با رسم شکل نشان دهید.

۲) اگر زاویهٔ تندی به ۹۰ درجه نزدیک شود در مورد تغییرات اندازهٔ تانژانت آن چه می‌توان گفت؟ (راهنمایی: به کمک ماشین حساب برای مقادیر تانژانت زاویه‌های نزدیک به ۹۰ درجه جدولی بسازید.)

اهداف:

■ درک مفهوم تانژانت به روش هندسی

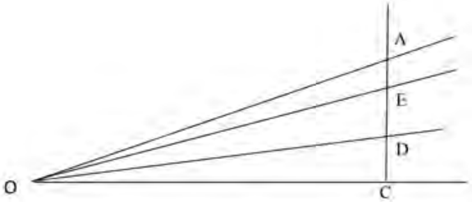
■ به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی با تقریب اعشاری مناسب

■ پرورش مهارت استدلال کردن، نمایش یک مفهوم با بازنمایی‌های مختلف، کار با ماشین حساب

۱ در شکل صفحهٔ بعد دیده می‌شود که با نزدیک شدن اندازهٔ زاویه به صفر تانژانت

آن نیز به صفر نزدیک می‌شود. زیرا در نسبتی که تانژانت را می‌سازد، مخرج ثابت است ولی صورت از هر عدد مثبت دلخواهی کوچک‌تر می‌شود و این به معنای نزدیک شدن تانژانت به صفر است.

۲ هرچه زاویه بزرگ‌تر شود و به ۹۰ درجه نزدیک شود، تانژانت نیز بزرگ‌تر می‌شود و از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود. زیرا مخرج ثابت است ولی صورت از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این وضعیت اصطلاحاً می‌گویند مقدار تانژانت به بی‌نهایت می‌رود. با ماشین حساب نیز می‌توان به این مطلب رسید.



$\tan ۸۰^\circ \approx ۵/۶۷$	$\tan ۸۵^\circ \approx ۱۱/۴۳$	$\tan ۸۹/۵^\circ \approx ۱۱۴/۵۸$
$\tan ۸۱^\circ \approx ۶/۳۱$	$\tan ۸۶^\circ \approx ۱۴/۳$	$\tan ۸۹/۷^\circ \approx ۱۹۰/۹۸$
$\tan ۸۲^\circ \approx ۷/۱۱$	$\tan ۸۷^\circ \approx ۱۹/۰۸$	$\tan ۸۹/۹^\circ \approx ۵۷۲/۹۵$
$\tan ۸۳^\circ \approx ۸/۱۴$	$\tan ۸۸^\circ \approx ۲۸/۶۳$	$\tan ۸۹/۹۵^\circ \approx ۱۱۴۵/۹۱$
$\tan ۸۴^\circ \approx ۹/۵۱$	$\tan ۸۹^\circ \approx ۵۷/۲۸$	

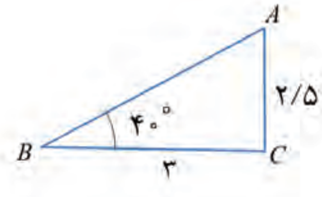
مسئله‌ها


۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های ۴۰ و ۵۰ درجه را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

کافی است به کمک نقاله زاویه ۴۰ درجه رسم کنید و با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌های تند آن ۴۰ درجه است و با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع روبرو و مجاور به این زاویه، نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور این زاویه را که جواب مسئله خواهد بود، به‌دست آورید. همین عملیات را برای زاویهٔ ۵۰ درجه تکرار کنید.



$$\tan ۴۰^\circ \approx \frac{۲/۵}{۳} \approx ۰/۸۳$$

۲) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله

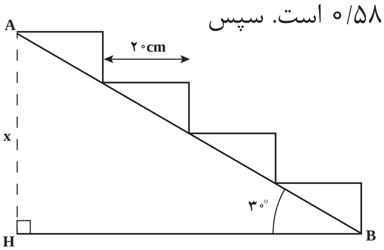
مشابه بند (۴) فعالیت ۴ یا مثال ارائه شده می‌توان عمل کرد. (این زاویه تقریباً ۸۲/۵ درجه است.)

۳) با توجه به شکل روبه‌رو ارتفاع نقطهٔ A از زمین را بیابید (عرض همهٔ پله‌ها ۲۰cm است).

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، تفکر بصری

ابتدا تانژانت زاویهٔ ۳۰ درجه را می‌یابیم که تقریباً مساوی ۰/۵۸ است. سپس



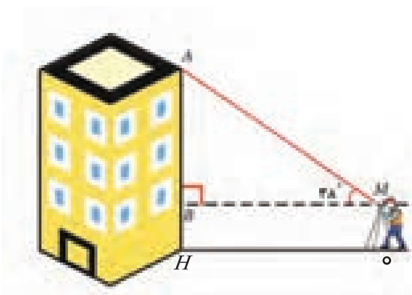
$$BH = ۴ \times ۲۰ = ۸۰cm$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = x = ۸۰ \times ۰/۵۸ = ۴۶/۴$$

۴) برای محاسبهٔ ارتفاع ساختمانی، دوربین زاویه‌یاب را در یک سطح افقی در نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱۵ متری از ساختمان (نقطهٔ O) مستقر کرده‌ایم و به نقطهٔ بالای ساختمان نشانه می‌رویم. زاویه دید برابر ۳۸ درجه به‌دست آمده است. اگر ارتفاع دوربین از زمین یک متر و ۵۴ سانتی‌متر باشد ارتفاع ساختمان را به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری



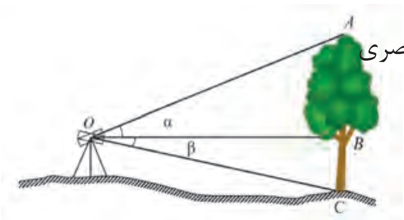
$$\left.\begin{array}{l} BH = OM = ۱۵۴cm = ۱/۵۴m \\ OH = ۱۵m \\ \tan\alpha = \dfrac{AB}{BM} \Rightarrow AB = ۱۵\tan ۳۸^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

ارتفاع ساختمان $= AH = AB + BH \approx ۱۳/۲۵$ متر

۵) به کمک دوربین زاویه‌یاب زاویه‌های α و β به ترتیب ۲۳ درجه و ۱۲ درجه بدست آمده‌اند و فاصلهٔ افقی دستگاه تا درخت ۱۸ متر است با توجه به شکل ارتفاع درخت را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

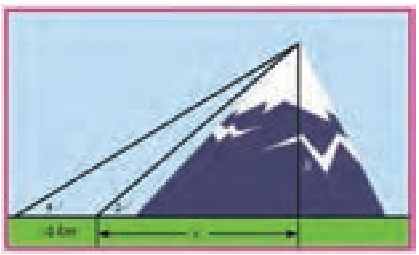


در این دو مثلث $\hat{B}=۹۰^\circ$ و $OB=۱۸m$ و $\beta=۱۲^\circ$ و $\alpha=۲۳^\circ$ بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} \tan\alpha=\dfrac{AB}{OB}\rightarrow AB=OB\tan\alpha=۱۸\tan ۲۳^\circ \\ \tan\beta=\dfrac{BC}{OB}\rightarrow BC=OB\tan\beta=۱۸\tan ۱۲^\circ \end{array}\right\}\Rightarrow$$

ارتفاع درخت $=AB+BC\approx ۷/۶۴+۳/۸۳=۱۱/۴۷$

۶) یک مهندس نقشه‌بردار برای محاسبهٔ ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه نوک کوه با زاویهٔ ۵۰ درجه نسبت به افق دیده می‌شود پس از آنکه نیم‌کیلومتر از کوه دور می‌شود مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویهٔ ۴۰ درجه دیده می‌شود ارتفاع کوه چقدر است؟



مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

$$\left.\begin{array}{l} \tan ۴۰^\circ=\dfrac{h}{۰/۵+x} \\ \tan ۵۰^\circ=\dfrac{h}{x}\Rightarrow x=\dfrac{h}{\tan ۵۰^\circ} \end{array}\right\}\Rightarrow \tan ۴۰^\circ=\dfrac{h}{۰/۵+\dfrac{h}{\tan ۵۰^\circ}}\Rightarrow h\approx ۱/۴۳$$

بخش سوم: سینوس یک زاویه

اهداف بخش

- درک مفهوم سینوس یک زاویهٔ تند
- محاسبهٔ مقدار تقریبی سینوس یک زاویهٔ تند
- استفاده از سینوس یک زاویه در حل مسائل پیرامونی
- درک رابطه بین تغییرات زاویه با تغییرات سینوس زاویه
- تشخیص مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویهٔ تند
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن سینوس آن زاویه

واژه‌های کلیدی :

سینوس زاویهٔ تند، نسبت اضلاع

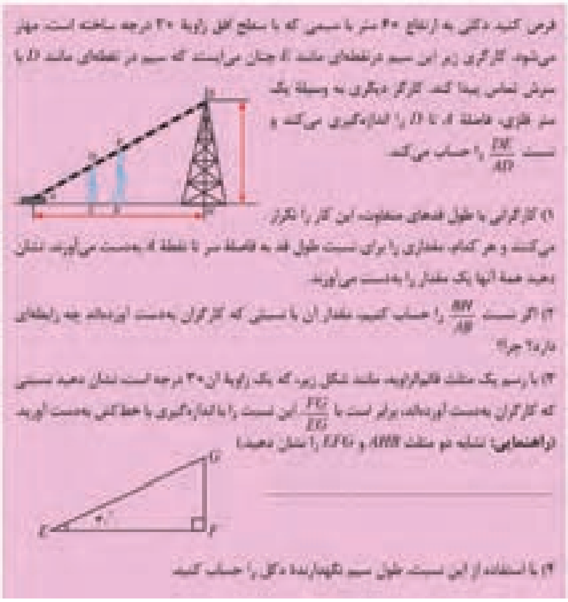
نگاه کلی به بخش:

روش آموزشی این بخش طرح مسئله و انجام یک فعالیت برای حل آن مسئله است. با انجام این فعالیت، مفید بودن استفاده از نسبت مثلثاتی سینوس مطرح می‌شود و در انتها مفهوم سینوس ساخته می‌شود. ویژگی‌های سینوس یک زاویه تند و یافتن سینوس یک زاویهٔ تند از طریق اندازه‌گیری مستقیم اضلاع به طور تقریبی و مقادیر ممکن سینوس زاویه‌های تند ارائه می‌شود.

ورود به مطلب:

دبیر با هر مسئله‌ای شبیه مسئله‌ای که در این بخش مطرح شده است می‌تواند آموزش را شروع کند و انگیزهٔ تعریف سینوس را ایجاد کند. فعالیت ۶ نمونه‌ای از حل مسئله‌ای است که در آن مفهوم سینوس وجود دارد و می‌توان از طریق آن مفهوم سینوس را تعریف کرد.

فعالیت آموزشی


فرض کنید دکلی به ارتفاع ۴۰ متر با سیمی که با سطح افق زاویهٔ ۳۰ درجه ساخته است مهار می‌شود. کارگری زیر این سیم در نقطه‌ای مانند K چنان می‌ایستد که سیم در نقطه‌ای مانند D با سرش تماس پیدا کند. کارگر دیگری به وسیلهٔ یک متر فلزی، فاصلهٔ A تا D را اندازه‌گیری می‌کند و نسبت $\frac{DE}{AD}$ را حساب می‌کند.

۱) کارگرانی با طول قدهای متفاوت این کار را تکرار می‌کنند و هر کدام مقداری را برای نسبت طول قد به فاصلهٔ سر تا نقطهٔ A به‌دست می‌آورند. نشان دهید همهٔ آنها یک مقدار را به‌دست می‌آورند.

۲) اگر نسبت $\frac{BH}{AB}$ را حساب کنید مقدار آن با نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند چه رابطه‌ای دارد؟ چرا؟

۳) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مانند شکل زیر، که یک زاویهٔ آن ۳۰ درجه است نشان دهید نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند برابر است با $\frac{FG}{EG}$. این نسبت را با اندازه‌گیری با خط‌کش به‌دست آورید.
(راهنمایی: تشابه دو مثلث ABH و EFG را نشان دهید.)

۴) با استفاده از این نسبت طول سیم نگهدارندهٔ دکل را حساب کنید.

اهداف موضوعی:

■ درک تساوی نسبت ضلع مقابل به زاویهٔ تند به وتر در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی اضلاع یک زاویهٔ تند.

مهارت‌ها و فرایندها:

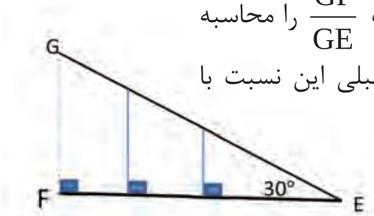
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن

ابزار مورد نیاز :

خط‌کش و نقاله برای اندازه‌گیری مستقیم

۱ به دلیل تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه EDA و KFA (به‌دلیل زاویهٔ مشترک $\angle A$ و $\angle E = \angle K = 90^\circ$) خواهیم داشت $\frac{ED}{DA} = \frac{KF}{FA}$

۲ به‌دلیل تشابه دو مثلث ABH و ADE (به‌دلیل زاویهٔ مشترک $\angle A$ و $\angle H = \angle E = \angle K = 90^\circ$) داریم $\frac{BH}{AB} = \frac{FK}{AF} = \frac{DE}{AD}$ یعنی نسبت $\frac{BH}{AB}$ هم با نسبت‌های قبل مساوی است.



۳ طول GF و GE را به‌کمک خط‌کش اندازه گرفته و نسبت $\frac{GF}{GE}$ را محاسبه می‌کنیم $\frac{FG}{EG}=\frac{۱}{۲}$. به‌خاطر تشابه این مثلث و مثلث‌های قبلی این نسبت با نسبت‌های قبلی مساوی است.

۴ به کمک بندهای (۱) و (۲) و (۳) می‌توان مسئله را حل کرد.

$$\frac{BH}{AB}=\frac{\text{طول ارتفاع دکل}}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۶۰\,\text{m}}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \text{متر ۱۲۰} = \text{طول سیم نگهدارنده}$$

در ادامه مفهوم سینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.

۱) به کمک نقاله و با رسم چند مثلث قائم الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه‌های ۲۰ و ۳۵ و ۴۰ درجه را بیابید.

اهداف:

- کسب مهارت حل مسئله، یافتن مقدار تقریبی سینوس یک زاویه از طریق اندازه‌گیری مستقیم

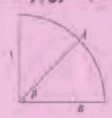
مثلاً برای زاویهٔ ۲۰ درجه، ابتدا به کمک نقاله یک زاویهٔ ۲۰ درجه رسم می‌کنیم. سپس با رسم خطی عمود بر یکی از دو ضلع زاویه از نقطه‌ای روی ضلع دیگر زاویه، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم. طول ضلع مقابل به زاویه ۲۰ درجه و وتر مثلث را اندازه‌گیری می‌کنیم و با محاسبهٔ نسبت آنها، سینوس زاویه را محاسبه می‌کنیم. به همین ترتیب در مورد بقیهٔ زاویه‌ها عمل می‌کنیم.

$\sin ۲۰^\circ \approx ۰/۳۴$ و $\sin ۳۵^\circ \approx ۰/۵۷$ و $\sin ۴۰^\circ \approx ۰/۶۴$

فعالیت آموزشی

یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.

۱) نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را مطابق شکل رسم کنید. طول پاره‌خط AB چه رابطه‌ای با زاویهٔ β دارد؟ ________



۲) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ β، سینوس آن چگونه تغییر می‌کند؟ ________

۳) با نزدیک شدن زاویهٔ β به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ ________

۴) با نزدیک شدن زاویهٔ β به ۹۰ درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ ________

۵) سینوس β چه عددهایی می‌تواند باشد؟ ________

اهداف موضوعی:

- درک رابطهٔ بین تغییرات یک زاویهٔ تند و سینوس آن زاویه، درک مقادیر ممکن

برای سینوس یک زاویهٔ تند، درک حدی از مقادیر سینوس در نزدیکی زاویه‌های صفر و ۹۰ درجه

مهارت‌ها و فرایندها:

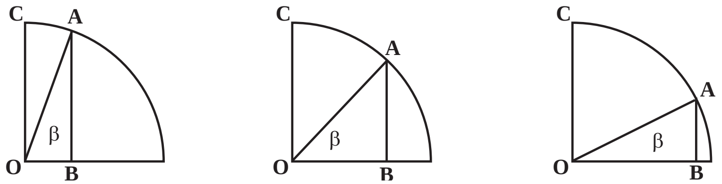
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری

۱ با توجه به تعریف سینوس یک زاویهٔ تند در مثلث‌های قائم‌الزاویه چون مثلث OAB در رأس B قائمه است پس سینوس زاویهٔ β عبارت است از $\frac{BA}{AO}$ ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است، پس $\sin\beta=BA$

اشتباهات ممکن:

در این قسمت انتخاب ضلع مقابل به زاویه همان سینوس زاویه می‌باشد. بهتر است مثال‌هایی زده شود تا معلوم شود این اتفاق همیشه نمی‌افتد و فقط در این مثال که طول وتر ۱ است این وضعیت رخ داده است.

۲ با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویهٔ β طول پاره خط BA بزرگ می‌شود. بنابراین سینوس آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و با کم شدن زاویه، سینوس آن کمتر می‌شود. در شکل‌های زیر از چپ به‌راست به‌صورت شهودی مشاهده می‌کنید که با کوچک شدن زاویه، طول BA یعنی مقدار سینوس زاویهٔ β نیز کم می‌شود.



۳ با نزدیک شدن زاویهٔ β به صفر طول AB یعنی سینوس زاویهٔ β از هر عدد مثبتی کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود.

۴ با نزدیک شدن زاویهٔ β به ۹۰° دیده می‌شود BA به CO نزدیک می‌شود. بنابراین $\sin\beta$ به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

۵ چون در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویهٔ قائمه از وتر کوچک‌تر است پس $BA<AO=۱$ بنابراین $\sin\beta<۱$ و چون $\sin\beta$ طول پاره خط BA است پس $\sin\beta>۰$ یعنی $۰<\sin\beta<۱$ یعنی سینوس زاویهٔ تند β عددی بین ۰ و ۱ است.

ممکن است در نمادگذاری نسبت‌های مثلثاتی هنرجویان عبارت $\sin\alpha$ را همانند ضرب عبارت $\sin$ در α فرض کنند و نتیجه بگیرند $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$ در مثال‌های عددی می‌توان نادرستی این تصور را نشان داد. در این بخش سؤال‌هایی پرسیده شده است تا بدفهمی هنرجویان را در این مورد کاهش دهد. هدف از این سؤال‌ها آن است که هنرجو بداند در رابطه‌هایی مانند $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$، ضریب α در صورت با عدد (۲ در مخرج) ضریب عددی قابل ساده شدن نیست. برای بررسی این وضعیت‌ها می‌توان سؤال‌هایی مانند سؤال زیر به هنرجویان داد.

۱ درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را با محاسبه عددی تعیین کنید

$$\frac{\sin 60^\circ}{2\sin 30^\circ} = \sin 30^\circ$$

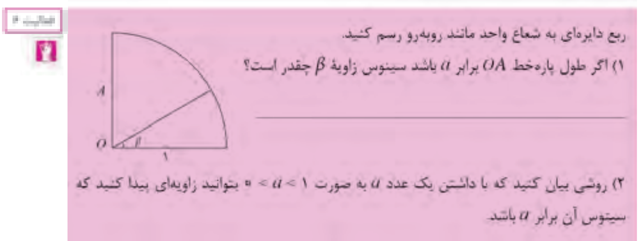
$$2\sin 20^\circ = \sin 40^\circ$$

در مسئلهٔ زیر هدف تأکید بر مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویهٔ تند که باید بین ۰ و ۱ باشد است.

۲ آیا زاویهٔ تندی وجود دارد که سینوس آن $\frac{4}{3}$ باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا $\frac{4}{3} > 1$ و همیشه سینوس یک زاویه تند بین ۰ و ۱ است. هنرجویان ممکن است از دلایل دیگری مانند اینکه سینوس یک زاویه برابر است با اندازه ضلع مقابل به آن زاویه به اندازه وتر و اشاره به این نکته که در مثلث قائم‌الزاویه اضلاع زاویه قائم همواره از وتر کوچک‌تر هستند پس سینوس همواره کسری کوچک‌تر از واحد است نیز استفاده نمایند.

فعالیت آموزشی


فعالیت ۴

ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند روبه‌رو رسم کنید.

۱) اگر طول پاره‌خط OA برابر a باشد سینوس زاویهٔ β چقدر است؟

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد a به صورت $0 < a < 1$ بتوانید زاویه‌ای پیدا کنید که سینوس آن برابر a باشد.

اهداف:

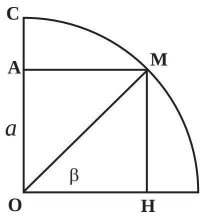
کسب مهارت محاسبه زاویه‌ای که سینوس آن معلوم است از طریق رسم.

مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تعمیم دادن

۱ طبق فعالیت قبل $MH = \sin\beta$ پس $a = \sin\beta$

۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند زیر رسم کنید روی شعاع قائم آن به اندازهٔ a جدا کنید، $AO = a$ از A عمودی بر AO رسم کنید تا ربع دایره را در M قطع کند. زاویه‌ای که پاره‌خط OM با شعاع افقی نیم‌دایره می‌سازد، جواب است.



$OA = MH = \sin\beta$

حال به کمک نقاله می‌توان اندازهٔ زاویهٔ β را اندازه گرفت.

نتیجه از دو بند (۱) و (۲) : سینوس هر زاویه عددی بین ۰ و ۱ است و هر عدد بین ۰ و ۱ می‌تواند سینوس یک زاویهٔ تند باشد.

مسئله‌ها

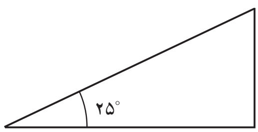
۱- الف) سینوس زاویهٔ ۲۵ درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویهٔ تند آن ۲۵ درجه باشد سپس وتر و طول ضلع روبرو به این زاویه را با خط کش اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت ضلع روبرو به این زاویه به وتر، سینوس ۲۵ درجه می‌باشد. پس:

$\sin ۲۵^\circ \approx ۰/۴۲$



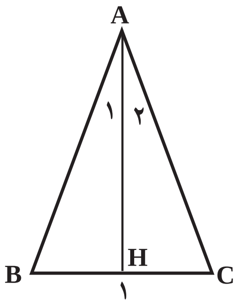
ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویهٔ رأس آن ۵۰ درجه باشد. اگر قاعدهٔ این مثلث ۱۰ سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

ارتفاع این مثلث را از رأس آن رسم می‌کنیم. چون در مثلث متساوی‌الساقین

میانه و عمود منصف و ارتفاع و نیمساز رسم شده از رأس بر هم منطبق‌اند داریم:
$\angle A_1 = \angle A_2 = ۲۵^\circ$ و $HB=CH=۵$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHA یا CHA،
$\angle HAB = ۲۵^\circ$ و



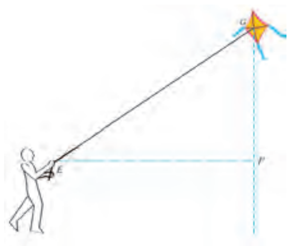
$$\sin ۲۵^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۵}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۵}{\sin ۲۵^\circ} \approx ۱۱/۸۳$$

۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر ۰/۸ است؟

مهارت‌ها و فرایندها :

- حل مسئله

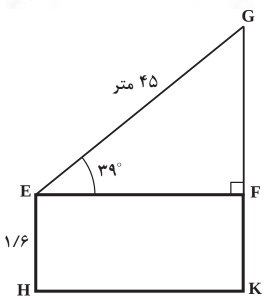
می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که طول وتر آن ۱۰ واحد و یکی از ضلع‌های دیگرش ۸ واحد باشد. زاویه روبه‌رو به ضلع به طول ۸ جواب است. این زاویه را با نقاله اندازه می‌گیریم که تقریباً ۵۳ درجه است.



۳) رضا بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید ۴۵ متر نخ بادبادک او رها شده است. طبق شکل، زاویهٔ نخ با سطح افق ۳۹ درجه و فاصلهٔ دست رضا از سطح زمین یک متر و شصت سانتی‌متر است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟

مهارت‌ها و فرایندها :

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها



$$\sin ۳۹^\circ = \frac{GF}{۴۵} \Rightarrow GF \approx ۲۸/۳۲$$

$\Rightarrow$ ارتفاع بادبادک $= GF + FK \approx ۲۸/۳۲ + ۱/۶ = ۲۹/۹۲$

بخش چهارم: کسینوس یک زاویه تند

اهداف بخش

- درک مفهوم کسینوس یک زاویهٔ تند
- استفاده از کسینوس یک زاویه در حل مسائل پیرامونی
- محاسبهٔ مقدار تقریبی کسینوس یک زاویهٔ تند
- درک رابطه بین تغییرات یک زاویه با تغییرات کسینوس زاویه
- تشخیص مقادیر ممکن برای کسینوس یک زاویهٔ تند
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن سینوس آن زاویه

واژه‌های کلیدی:

کسینوس زاویهٔ تند، نسبت اضلاع

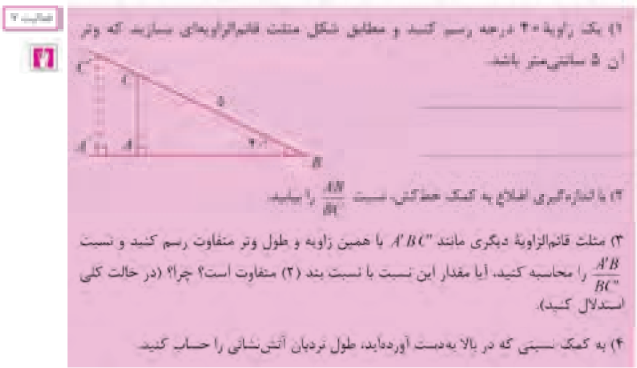
نگاه کلی به بخش:

روش آموزشی این بخش طرح یک مسئله و انجام یک فعالیت برای حل آن مسئله است. با انجام این فعالیت، مفید بودن مفهوم نسبت مثلثاتی کسینوس مطرح می‌شود و در انتها مفهوم کسینوس تعریف می‌شود. ویژگی‌های کسینوس یک زاویه و یافتن کسینوس یک زاویه از طریق اندازه‌گیری مستقیم اضلاع به طور تقریبی و مقادیر ممکن تقریبی کسینوس زاویه‌های تند بیان می‌شود. در پایان با داشتن مقدار کسینوس یک زاویه، چگونگی محاسبهٔ آن زاویه بررسی می‌شود.

ورود به مطلب:

این مفهوم شبیه مفهوم سینوس است و با همان روش قابل آموزش است. در اینجا نیز می‌توانید مسئلهٔ مناسبی بیابید که مفهوم کسینوس در آن وجود داشته باشد و با حل آن مسئله به‌طور ضمنی مفهوم کسینوس را ارائه کنید. یا طبق روند کتاب و با مسئله‌ای که در کتاب مطرح شده است آموزش را شروع کنید.

فعالیت آموزشی



فعالیت ۲

۱) یک زاویهٔ ۴۰ درجه رسم کنید و مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد.

۲) با اندازه‌گیری اضلاع به کمک خط‌کش، نسبت $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

۳) مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری مانند $A'BC'$ با همین زاویه و طول وتر متفاوت رسم کنید و نسبت $\frac{A'B}{BC'}$ را محاسبه کنید، آیا مقدار این نسبت با نسبت بند (۲) متفاوت است؟ چرا؟ (در حالت کلی استدلال کنید).

۴) به کمک نسبتی که در بالا به‌دست آورده‌اید، طول نردبان آتش‌نشانی را حساب کنید.

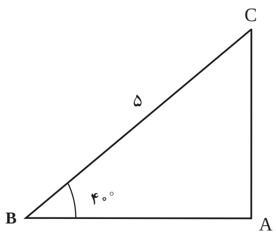
اهداف موضوعی:

■ درک تساوی نسبت ضلع مجاور به زاویهٔ تند به وتر در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی اضلاع یک زاویهٔ تند

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن

۱ در این بند هنرجو باید توانایی رسم داشته باشد و به‌کمک خط‌کش و پرگار و نقاله مثلث خواسته شده را رسم کند.

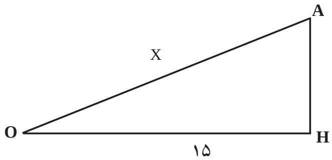


۲ به کمک خط‌کش AB و BC را اندازه‌گیری می‌کنیم. $AB \approx ۳/۸$ و $BC = ۵$

در نتیجه $\frac{AB}{BC} \approx ۰/۷۶$

۳ $\frac{A'B}{BC'} \approx ۰/۷۶$ خیر، زیرا دو مثلث رسم شده، دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه تند مساوی ۴۰ درجه می‌باشند و چون هر کدام یک زاویهٔ ۹۰ درجه نیز دارند با هم متشابه‌اند و اگر نسبت اضلاع متناظر را در این مثلث‌های متشابه بنویسیم با هم مساوی‌اند.

۴ مثلثی که در مسئله آتش‌نشانی رسم کردیم با مثلثی که در بند (۲) رسم کردیم متشابه‌اند (به خاطر بند ۳) . با نوشتن نسبت اضلاع متناظر داریم:



$$\frac{\text{۱۵ متر}}{\text{طول نردبان}} = \frac{OH}{OA} = \frac{AB}{BC} \approx ۰/۷۶ \Rightarrow \text{طول نردبان} \approx \frac{۱۵}{۰/۷۶} = ۱۹/۷ \text{ متر}$$

در ادامه این بخش، مفهوم کسینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.

کار در کلاس ۶

۱) یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین رسم کنید.

الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث ۴۵ درجه‌اند.

ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازهٔ یک واحد در نظر بگیریم، طول وتر این مثلث چقدر است؟

پ) با استفاده از محاسبات بالا، سینوس و کسینوس و تانژانت زاویهٔ ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.

الف) طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ رسم شده را حساب کنید.

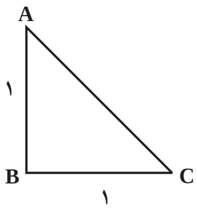
ب) با استفاده از محاسبات انجام شده سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه را به‌دست آورید.

۳) به کمک دو سؤال بالا، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
سینوس			
کسینوس			
تانژانت			

اهداف:

■ کسب مهارت حل مسئله، محاسبهٔ مقدار دقیق کسینوس زاویه‌های خاص ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ درجه، استدلال کردن



۱) الف: چون دو ضلع این مثلث با هم مساوی‌اند $\angle A = \angle C$ و چون مجموع آنها ۹۰ درجه است، هردو زاویه ۴۵ درجه هستند.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle C \\ \angle A + \angle B + \angle C = ۱۸۰^\circ , \angle B = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle C = ۴۵^\circ$$

۱) ب:

اگر یکی از ضلع‌های آن ۱ باشد ضلع دیگرش هم ۱ است و با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان طول وتر این مثلث را یافت.

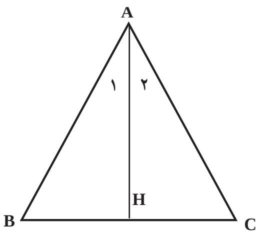
$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۲}$$

۱) پ:

$$\sin\angle A = \sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ و } \cos\angle A = \cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \tan\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

۲)



الف: می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع همهٔ ضلع‌ها و زاویه‌ها مساوی‌اند. در نتیجه:

$\angle A = \angle B = \angle C = ۶۰^\circ$ از طرفی ارتفاع و نیمساز و میانه و عمودمنصف رسم شده از همهٔ رأس‌ها یکسان هستند، پس

$$HB = CH = \frac{CB}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ و } \angle HAB = \angle HAC = ۳۰^\circ = \frac{\angle A}{۲}$$

در مثلث قائم الزاویهٔ ABH به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۱^۲ = AH^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(ب)

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } \sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

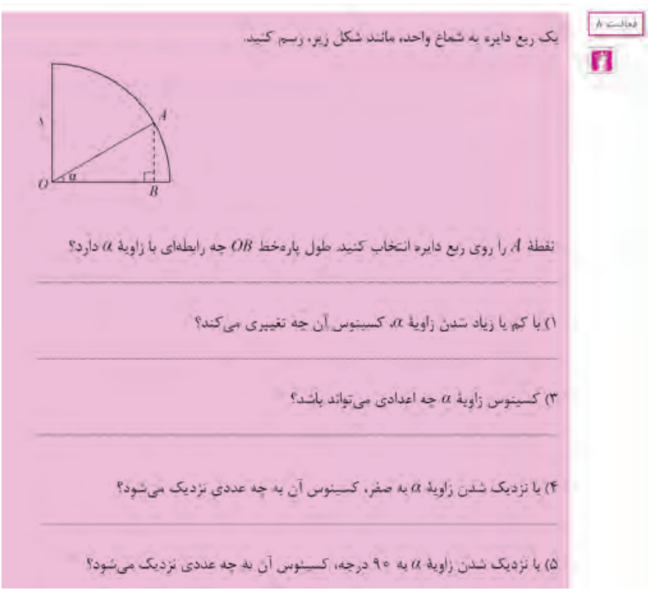
$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۱}{۲} \text{ و } \sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

این محاسبه‌ها را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

نسبت‌های مثلثاتی	۳۰ درجه	۴۵ درجه	۶۰ درجه
سینوس	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
تانژانت	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$

فعالیت آموزشی


فعالیت ۸

یک ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.

نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره‌خط OB چه رابطه‌ای با زاویهٔ α دارد؟

۱) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ α، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

۳) کسینوس زاویهٔ α چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۴) با نزدیک شدن زاویهٔ α به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۵) با نزدیک شدن زاویهٔ α به ۹۰ درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

اهداف موضوعی:

■ درک رابطهٔ بین تغییرات یک زاویه با کسینوس آن زاویه، درک مقادیر ممکن برای کسینوس یک زاویهٔ تند، درک حدی از مقادیر کسینوس در نزدیکی زاویه‌های صفر و ۹۰ درجه

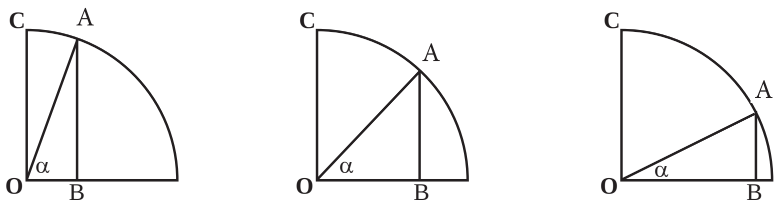
مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری

۱ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویهٔ تند در مثلث‌های قائم الزاویه، چون مثلث در رأس B قائمه است، کسینوس زاویه α عبارت است از $\frac{BO}{AO}$ ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است، $OB=\cos\alpha$.

در کلاس توضیح دهید که **فقط در این شکل که طول وتر ۱ واحد است**، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد.

۲ با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویهٔ α طول پاره‌خط BO کوچک می‌شود. بنابراین کسینوس α کوچک‌تر می‌شود و با کم شدن α کسینوس α بزرگ‌تر می‌شود. در شکل‌های زیر این مطلب را به‌صورت شهودی مشاهده می‌کنید.



۳ چون در مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویهٔ قائمه از وتر کوچک‌تر است داریم: $BO<AO=1$. بنابراین $\cos\alpha<1$ و چون $\cos\alpha$ طول پاره‌خط BO است داریم: $\cos\alpha>0$. پس: $0<\cos\alpha<1$ یعنی کسینوس زاویهٔ تند α عددی بین ۰ و ۱ است.

۴ با نزدیک شدن زاویهٔ α به صفر طول OB بزرگ می‌شود و به شعاع افقی نزدیک می‌شود یعنی $\cos\alpha$ به عدد یک نزدیک می‌شود.

۵ با نزدیک شدن زاویهٔ α به 90° دیده می‌شود BO کوچک می‌شود. یعنی کسینوس زاویهٔ α از هر عدد مثبتی کوچک‌تر شده و به صفر نزدیک می‌شود.

مناسب است که تذکر داده شودکه فقط در این شکل که طول وتر ۱ است، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد. بهتر است مثالی زده شود که وتر در آن ۱ نباشد. (به مثال ابتدای بخش کسینوس در کتاب کار توجه شود)

فعالیت آموزشی

فعالیت ۹

ربع دایره‌ای به شعاع واحد، مانند شکل روبه‌رو رسم کنید.

۱) اگر طول پاره‌خط BO برابر b باشد، کسینوس زاویهٔ α چقدر است؟

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد b به صورت $۰ < b < ۱$ بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که کسینوس آن برابر b باشد.

اهداف موضوعی:

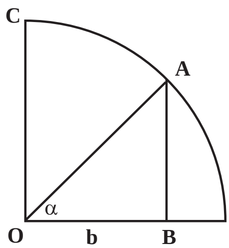
■ کسب مهارت محاسبه زاویه‌ای که کسینوس آن معلوم است از طریق رسم

مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات کلامی، تعمیم دادن

۱ با توجه به واحد بودن طول وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB داریم: $\cos\alpha=OB=b$.

۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنید. سپس روی شعاع افقی آن به اندازهٔ b جدا کنید که $b=BO$. از B عمودی بر BO رسم کنید تا ربع دایره را در A قطع کند. زاویهٔ AOB جواب مسئله است زیرا $\cos\alpha=OB=b$



سپس به کمک نقاله می‌توان اندازهٔ آن زاویه را محاسبه نمود.

این فعالیت نشان می‌دهد که هر عدد بین ۰ و ۱ می‌تواند برابر کسینوس زاویه‌ای باشد.

دقت شود در این بخش به بدفهمی و نامثال‌های کسینوس نیز پرداخته شود تا احتمال اشتباه هنرجو به حداقل برسد. مثلاً کدام یک از رابطه‌های زیر درست یا نادرست‌اند (به کمک محاسبه)

۱) $\dfrac{\cos ۶۰^\circ}{۲\cos ۳۰^\circ}=\cos ۳۰^\circ$

۲) $\cos ۸۰^\circ=۲\cos ۴۰^\circ$

۲ آیا زاویهٔ تندی وجود دارد که کسینوس آن $\frac{۴}{۳}$ باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا $\frac{۴}{۳} > ۱$ درحالی که همیشه کسینوس یک زاویه تند بین ۰ و ۱ است.

مسیرهایی برای توسعه:

۱ تحقیق توسط هنرجویان برای بررسی درستی رابطه‌های زیر (قرارداد $(\sin\alpha)^{۲} = \sin^{۲}\alpha$ بیان شود):

الف) $\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$

ب) $\cos^{۲}\alpha = \dfrac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}$

پ) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

مسئله‌ها

۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب، کسینوس زاویه‌های ۱۵و ۷۵ درجه را حساب کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

به کمک خط‌کش و نقاله قبلاً توضیح کامل داده شده است.

$$\cos ۱۵^\circ \approx ۰/۹۶ , \cos ۷۵^\circ \approx ۰/۲۶$$

۲) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ ۱۰۰ متر و با زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ ۵۰ درجه است.

الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب، از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش، کسینوس زاویهٔ ۵۰ درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

ب) طول اضلاع زمین مثلث شکل را بیابید.

پ) مساحت زمین را بیابید.

مهارت‌ها و فرایندها:

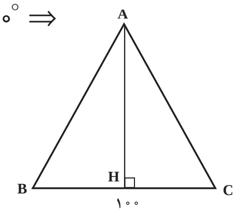
■ حل مسئله

الف) همانند سؤال ۱ عمل می‌کنیم که نتیجه می‌شود $\cos ۵۰^\circ \approx ۰/۶۴$

ب) شکل زمین را مانند زیر رسم می‌کنیم. از A ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ HBA:

$$BH = \frac{BC}{۲} = ۵۰m \Rightarrow \cos \angle B = \frac{BH}{AB} \text{ و } \angle B = ۵۰^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = AB = \frac{۵۰}{\cos ۵۰^\circ} \approx \frac{۵۰}{۰/۶۴} = ۷۸/۱۲۵$$



پ) از رابطهٔ فیثاغورس داریم :

$$AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow AH = \sqrt{AB^{۲} - BH^{۲}} = \sqrt{(۷۸/۱۲۵)^{۲} - ۵۰^{۲}} \approx ۶۰$$

$$S = \frac{AH \times BC}{۲} \approx \frac{۶۰ \times ۱۰۰}{۲} = ۳۰۰۰$$

۳) حسن و علی در یک روز تعطیل می‌خواهند از دو نقطهٔ متفاوت و هم‌سطح در دو مسیر مختلف از پای کوه تا قلهٔ آن بروند. علی با زاویهٔ ۳۲ درجه و حسن با زاویهٔ ۴۰ درجه از کوه بالا می‌روند. علی پس از طی ۱۲۰۰ متر و حسن پس از طی ۸۰۰ متر به قلهٔ کوه می‌رسند. فاصلهٔ علی و حسن را در پای کوه محاسبه کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

ابتدا به کمک مثلث قائم‌الزاویه مناسب مقدار کسینوس زاویه‌های ۳۲ و ۴۰ درجه را می‌یابیم. سپس با استفاده از تعریف کسینوس مقدار x و y را یافته و با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \cos ۳۲^{\circ} = \dfrac{y}{۱۲۰۰} \\ \cos ۳۲^{\circ} \approx ۰/۸۵ \end{array}\right\} \Rightarrow y = ۱۲۰۰ \cos ۳۲^{\circ} \approx ۱۲۰۰ \times ۰/۸۵ = ۱۰۲۰m$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos ۴۰^{\circ} = \dfrac{x}{۸۰۰} \\ \cos ۴۰^{\circ} \approx ۰/۷۷ \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۸۰۰ \cos ۴۰^{\circ} \approx ۸۰۰ \times ۰/۷۷ = ۶۱۶m$$

$$x + y = ۱۶۳۶m$$

۴) درستی یا نادرستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos ۲۰^{\circ} < \cos ۴۰^{\circ}$

ب) $\tan ۲۰^{\circ} < \tan ۳۰^{\circ}$

پ) $\sin ۳۰^{\circ} < \sin ۲۰^{\circ}$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ مقایسه کردن، استدلال کردن

هدف این سؤال استفاده از اطلاعات هنرجو پس از یادگیری نسبت‌های مثلثاتی و تعیین رابطهٔ بین تغییرات نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با تغییرات آن زاویه است.

الف) نادرست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود، کسینوس آن کوچک می‌شود.

ب) درست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود تانژانت آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.

پ) نادرست است زیرا هرچه زاویه تند بزرگ شود سینوس آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.

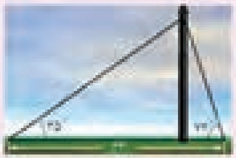
۵) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

$$A=\frac{\sin ۶۰^\circ+\tan ۴۵^\circ-\cos ۳۰^\circ}{۱+\sin ۳۰^\circ} \quad و \quad B=\frac{\tan ۶۰^\circ+۲\cos ۳۰^\circ-۲\sqrt{۳}}{۱+\sin ۶۰^\circ}$$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات

$$B=\frac{\sqrt{۳}+۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۲\sqrt{۳}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۰ \quad و \quad A=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$



۶) دو کابل فلزی یک برج مخابراتی را نگه داشته‌اند. زاویهٔ بین زمین و کابل‌ها به ترتیب ۳۵ و ۷۲ درجه و فاصله بین محل اتصال دو کابل در زمین، ۳۳ متر است. طول هر یک از این کابل‌ها چقدر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، حل مسئله، تفکر بصری

$$\cos ۳۵^\circ=\frac{m}{x}\Rightarrow m=x\cos ۳۵^\circ \text{ ، } \cos ۷۲^\circ=\frac{n}{y}\Rightarrow n=y\cos ۷۲^\circ$$

$$,\begin{cases} x\cos ۳۵^\circ+y\cos ۷۲^\circ=m+n=۳۳ \\ x\sin ۳۵^\circ=h=y\sin ۷۲^\circ\Rightarrow x=\dfrac{y\sin ۷۲^\circ}{\sin ۳۵^\circ} \end{cases}\Rightarrow y\approx ۱۹/۷ \;,\;\; x\approx ۳۲/۷$$

۷) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos ۶۰^\circ=۲\cos ۳۰^\circ$ ب) $\sin ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ$

پ) $\cos ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ$ ت) $\tan ۶۰^\circ+\tan ۳۰^\circ=\frac{۲}{\sin ۶۰^\circ}$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات، استدلال کردن، مقایسه کردن

با جایگذاری مقادیر نسبت‌های مثلثاتی می‌توان درستی یا نادرستی آنها را تعیین کرد.

الف) نادرست زیرا $\frac{۱}{۲}\neq ۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) درست

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} < ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱$$

پ) درست زیرا

$$\frac{۱}{۲} < ۲(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

ت) درست زیرا

$$\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۸) سمت راست تساوی‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $A = \sin ۳۰^\circ + \cos ۳۰^\circ$

ب) $B = \frac{۲\cos ۳۰^\circ - ۲\sin ۳۰^\circ}{۲\tan ۴۵^\circ + ۳\cos ۶۰^\circ}$

پ) $C = ۱-۲ \sin ۳۰^\circ$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات

$$A = \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$$

$$B = \frac{۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۲(\frac{۱}{۲})}{۲(۱) + ۳(\frac{۱}{۲})} = \frac{۲(\sqrt{۳}-۱)}{۷}$$

$$C = ۱ - ۲(\frac{۱}{۲}) = ۰$$

تاریخچه و توسعه مثلثات

مثلثات از درون هندسه بیرون آمد و بیش از همه، ریاضیدانان ایرانی روی آن کار کردند. بررسی‌های اخترشناسی در بابل قدیم و یونان، ریاضیدانان را به سمت موضوع‌هایی کشانید که می‌توان آنها را پیش درآمد مثلثات دانست. نخستین تابع‌های مثلثاتی را باید جدول وترها برحسب کمان آنها دانست که برای محاسبه‌های اخترشناسی لازم بود و در دو سدهٔ پیش از میلاد به‌وجود آمد.
برای نخستین بار دانشمندان هندی در فاصلهٔ زمانی از سدهٔ پنجم تا دوازدهم میلادی از «نیم‌وتر» به‌جای وتر استفاده کردند که متناظر با مفهوم سینوس امروزی است. آنها نیم‌وتر را «اردهاجیا» (یا «جیااردها») می‌گفتند که از لحاظ لغوی به معنای نصف وتر است. به‌تدریج اردهاجیا را کوتاه کردند و «جیا» نامیدند.
به جز این، هندی‌ها از یک منهای کسینوس x هم استفاده می‌کردند و آن را «کوماجیا» می‌نامیدند و مقدار cosx را «کوتی جیا» می‌گفتند.
«ابوالوفای بوزجانی» (۹۴۰ تا ۹۸۸ میلادی) ریاضیدان ایرانی (ویرانه‌های بوزجان نزدیک تربت‌جام است)، تانژانت را به نام «ظل» وارد مثلثات کرد و جدولی را تنظیم کرد که نیم درجه، نیم درجه مقدار سینوس‌ها را تعیین می‌کرد. دستورهای sin(a+b) و sin(a-b) را کشف کرد و برخی از مسئله‌های مثلثات کروی را حل نمود.
اما گام اصلی را نصیرالدین طوسی برداشت. تألیف او به نام «کشف القناع فی اسرار شکل القطاع» در واقع نخستین کتاب درباره مثلثات است. نقش طوسی را در مثلثات، باید شبیه نقش اقلیدس در هندسه دانست. زیرا او توانست مجموعهٔ آنچه را که پیش از او وجود داشت، به صورت دانشی مستقل و منظم درآورد. ترجمه‌ای از کتاب طوسی در سال ۱۹۸۱ به زبان فرانسوی انجام گرفت و تا مدت‌ها به‌عنوان کتاب درسی، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان در اروپای غربی بود.
از نام‌گذاری «مثلثات» می‌توان حدس زد که این شاخه از ریاضیات دست کم در آغاز پیدایش خود به‌نحوی با مثلث و مسئله‌های مربوط به مثلث بستگی داشته است. در واقع پیدایش و پیشرفت مثلثات را باید نتیجه‌ای از تلاش‌های ریاضیدانان برای رفع دشواری‌های مربوط به محاسبه‌هایی دانست که در هندسه روبروی دانشمندان بوده است.
بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی زمان تیموریان با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم پیدا کرده بود، توانست راهی برای محاسبهٔ سینوس کمان یک درجه با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات

از سدهٔ پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت. یک نمونه از مواردی که ایرانی بودن این دانش را تا حدودی نشان می‌دهد از این قرار است: ریاضیدانان ایرانی از واژهٔ «جیب» (واژهٔ عربی به معنی «گریبان») برای سینوس و از واژهٔ «جیب تمام» برای کسینوس استفاده می‌کردند. وقتی نوشته‌های ریاضیدانان ایرانی به ویژه خوارزمی به زبان لاتین و زبان‌های اروپایی ترجمه شد، معنای واژهٔ «جیب» را در زبان خود به‌جای آن گذاشتند: سینوس. این واژه در زبان فرانسوی همان معنای جیب عربی را دارد. نخستین ترجمه از نوشته‌های ریاضیدانان ایرانی که در آن صحبت از نسبت‌های مثلثاتی شده است، ترجمه‌ای بود که در سدهٔ دوازدهم میلادی به وسیلهٔ گرادوس کره مونه سیس ایتالیایی از عربی به لاتینی انجام گرفت و در آن واژهٔ سینوس را به کار برد. اما دربارهٔ ریشهٔ واژهٔ «جیب» دو دیدگاه وجود دارد: «جیا» در زبان سانسکریت به معنای وتر و گاهی نیم وتر است. نخستین کتابی که به وسیلهٔ فزازی (یک ریاضیدان ایرانی) به دستور منصور خلیفهٔ عباسی به زبان عربی ترجمه شد، کتابی از نوشته‌های دانشمندان هندی درباره اخترشناسی بود. مترجم برای حرمت گذاشتن به نویسندگان کتاب، «جیا» را تغییر نمی‌دهد و تنها برای اینکه در عربی بی معنا نباشد، آن را به صورت «جیب» در می‌آورد. دیدگاه دوم که منطقی‌تر به نظر می آید این است که در ترجمه از واژهٔ فارسی «جیپ»- بر وزن سیب- استفاده شد که به معنی «تکهٔ چوب عمود» یا «دیرک» است. نسخه‌نویسان بعدی که فارسی را فراموش کرده بودند و معنای «جیپ» را نمی‌دانستند، آن را جیب خواندند که در عربی معنایی داشته باشد.

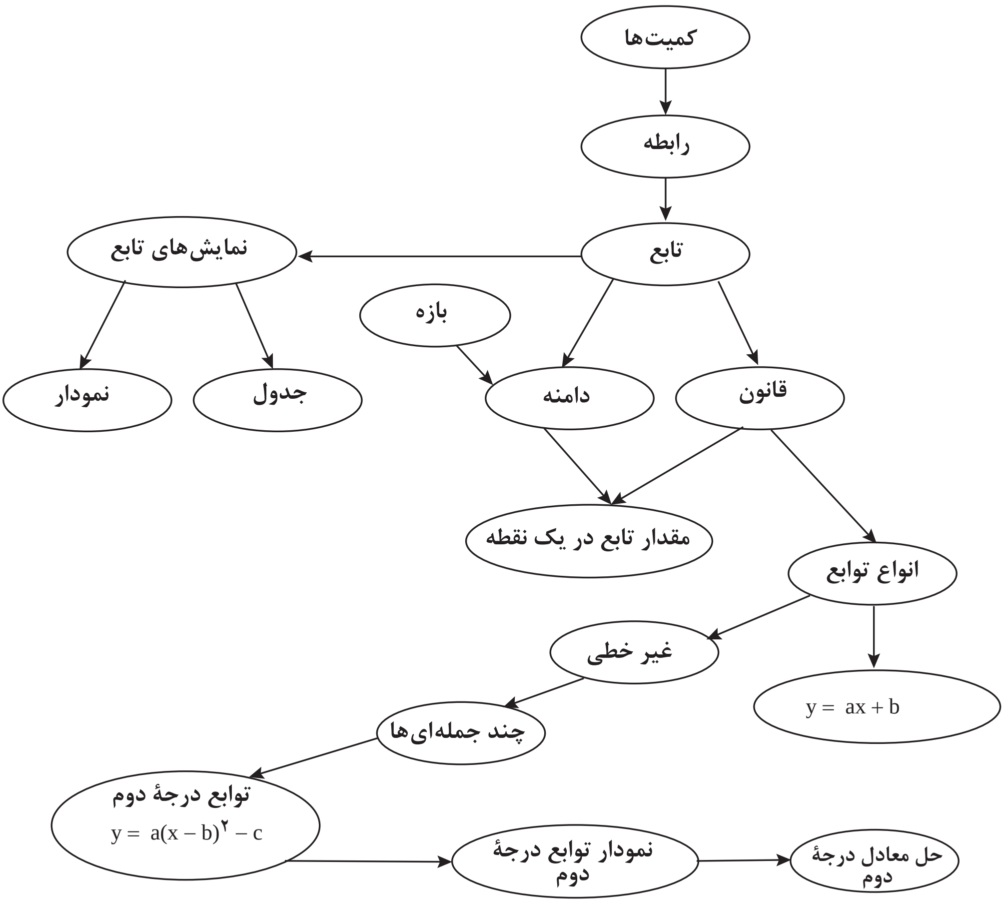
در کتاب، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند به صورت نسبت اضلاع در یک مثلث قائم‌الزاویه تعریف شده‌اند، ولی با رسم یک نیم‌دایره، اگر از واحد گرادیان برای اندازهٔ زاویه استفاده کنیم، خواهیم دید نسبت‌های مثلثاتی در ارتباط با طول کمان‌های دایره و طول وتر این کمان‌ها است. مثلاً سینوس یک زاویه برابر نصف طول وتر کمان آن زاویه بر حسب رادیان است. با این نگاه، که نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه را با ارتباط بخشیدن به طول کمان و طول وتر کمان ببینیم می توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه را هم تعریف کرد.

مثلاً، با رسم یک ربع دایرهٔ به شعاع واحد در صفحهٔ تحلیلی مشاهده می‌شود که سینوس و کسینوس هر زاویهٔ تندی متناظر مختصات نقطه‌ای روی این نیم‌دایره است که آن زاویه را نشان می‌دهد. می‌توانیم این مطلب را برای بقیهٔ زاویه‌ها نیز تعمیم دهیم و مختصات هر نقطه‌ای روی دایره را به صورت سینوس و کسینوس زاویهٔ متناظر با آن نقطه تعریف کرد.

فصل هفتم

تابع

طرح کلی مفاهیم فصل هفتم (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی

- درک مفهوم رابطهٔ بین کمیت‌ها
- درک مفهوم تابع در زمینهٔ پدیده‌های طبیعی
- آشنایی با نمایش‌های جدولی و نموداری تابع
- آشنایی با قانون تابع و مفهوم متغیر تابع و دامنهٔ تابع
- درک مفهوم بازه در اعداد حقیقی
- آشنایی با انواع توابع خطی و غیرخطی
- آشنایی با توابع خاص (درجهٔ دوم و ثابت)
- آشنایی با انتقال نمودار توابع درجهٔ دوم و درجهٔ اول در راستای افقی و قائم
- درک تساوی توابع
- یافتن جواب معادلهٔ درجهٔ دوم با توجه به نمودار تابع درجهٔ دوم
- آشنایی با مقدار تابع در یک نقطه

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- رابطهٔ بین دو کمیت را تشخیص داده و قانون آن را بنویسند.
- یک تابع را به‌صورت جدول و نمودار ارائه دهند.
- تابع بودن یا تابع نبودن رابطهٔ بین کمیت‌ها را تشخیص دهند.
- تعریف یک بازه را بیان کنند و نمایش‌های مختلف بازه را ارائه کنند و روی محور نمایش دهند.
- دامنه و قانون توابعی را که در زمینهٔ واقعی و محیط پیرامونی دیده می‌شوند، به‌دست آورند.
- بازه‌ها را به عنوان زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی بشناسند و اجتماع و اشتراک آنها را به‌دست آورند.
- مقدار تابع را در یک نقطه از دامنه محاسبه کنند یا پیدا کنند.
- نمودار توابع درجهٔ دوم را رسم کنند.
- نمودار توابع درجهٔ دوم و درجهٔ اول را در راستای قائم و افقی انتقال دهند و بتوانند قانون آنها را بنویسند.
- توابع چندجمله‌ای را با بیان چند مثال تعریف کنند.
- علامت ضرایب a و b و c را در توابع درجهٔ دوم به کمک نمودار آن تعیین کنند.

- چگونگی تغییرات تابع را از روی نمایش جدولی تابع بیان کنند.
- دو تابع مساوی را تشخیص دهند.
- از روی نمودار توابع درجهٔ دوم، تعداد و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را تشخیص دهند و بیان کنند.
- توضیحات کلامی را خوانده و توانایی نقل و تفسیر آنها را داشته باشند.
- مسائل در زمینه‌های واقعی را بخوانند و مدل ریاضی برای آن بسازند.

پیش نیازهای فصل :

- آشنایی با عبارات گویا وچند جمله‌ای‌ها و یافتن مقدار عددی آنها به ازای مقدار برای متغیر
- آشنایی با مختصات نقطه و نمایش آن در صفحه محورهای مختصات
- آشنایی با رسم توابع درجهٔ اول (خطی)
- آشنایی با مجموعهٔ اعداد حقیقی و زیر مجموعه‌های آن

واژه‌های کلیدی:

رابطهٔ بین دو کمیت، تابع، دامنه، قانون تابع، بازه، جدول تابع، نمودار تابع، توابع چندجمله‌ای

ابزار کمک آموزشی:

خط کش، صفحهٔ شطرنجی، رایانه

نگاه کلی به فصل

روش آموزشی این کتاب برای معرفی تابع، با سایر کتاب‌ها فرق دارد و دبیران با توجه به این تفاوت باید شیوهٔ نوینی برای آموزش مفهوم تابع در پیش بگیرند. هدف این کتاب ارائه مفهوم ریاضی تابع با همان روند تاریخی به وجود آمدن مفهوم تابع است. به همین دلیل دراینجا از تابع به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب یاد نخواهیم کرد و بر مفهوم شهودی و اصلی تابع که عملگری است که به اعضای مجموعهٔ مبدأ، عنصری معین در مجموعهٔ مقصد نظیر می‌کند، تأکید خواهیم داشت. از لحاظ تاریخی، تابع به معنای رابطهٔ بین کمیت‌ها بوده است و ما نیز با همین روش مفهوم تابع را ارائه خواهیم کرد.

این فصل، با یک مکالمه بین معلم و هنرجو شروع می‌شود که با یکدیگر سعی می کنند تا یک مسئله را حل کنند. نکتهٔ اصلی این مسئله دیدن رابطهٔ بین کمیت‌هایی است که مشاهده می کنیم. برای متمرکز کردن هنرجو به مفهوم اصلی رابطهٔ بین کمیت‌ها، فعالیت‌هایی طراحی شده‌اندکه در زمینه‌های مختلف وجود رابطهٔ بین کمیت‌ها را نشان می‌دهند.

پس از درک وجود رابطهٔ بین کمیت‌ها، سعی در فرمول‌بندی این رابطه به زبان ریاضی می‌کنیم تا به تعریف اصلی تابع برسیم. تعریف تابع همچنان غیر رسمی انجام می‌شود ولی در طی مثال‌های متعدد دو مفهوم زیربنایی دامنه و قانون تابع ارائه می‌شوند.

یک اشتباه رایج دربارهٔ مفهوم تابع این است که دامنهٔ یک تابع را از طریق قانون (یا ضابطه) تابع تعیین می‌کنند، در حالی که این دو مفهوم مستقل از یکدیگرند. برای ساختن یا ارائه هر تابعی، ابتدا باید دامنهٔ آن را ارائه کرد و سپس قانونی که روی این دامنه عمل می‌کند را باید بیابیم. دامنهٔ یک تابع را قانون آن معین نمی‌کند بلکه محدودیت‌های مسئلهٔ مورد بررسی، و آن چیزی که تابع قرار است توصیف کند، مشخص‌کنندهٔ دامنهٔ تابع است. اگر در جهان ریاضی هم باشیم و هیچ محدودیت عملی هم نداشته باشیم، این فرد ارائه کنندهٔ تابع است که باید بگوید تابع مورد نظرش چه قانونی دارد و این قانون روی چه مجموعه‌ای قرار است عمل کند. برای تأکید روی این نکته، مثال‌ها و مسئله‌های متعددی در متن کتاب آورده شده است.

در ادامه به نمایش‌های تابع‌ها پرداخته شده است. این مفهوم نیز در قالب یک مکالمه بین هنرجویان و دبیر ارائه شده است.این مکالمات با طرح سؤال‌ها و شبهاتی که در این زمینه وجود داشته است شروع می‌شود و در طی مکالمه سعی می‌شود مسئله‌های پیش آمده حل شوند. در ادامه با تعریف جدول و نمودار توابع در طی مثال‌های متعدد مفید بودن این نمایش‌ها برای تشخیص رفتار توابع نشان داده می‌شود.

ادامهٔ فصل به بررسی توابع خاص و نمودار آنها می‌پردازد. از میان توابع خاص، فقط به توابع خطی و درجهٔ دوم پرداخته می‌شود تا سطح کتاب زیاد بالا نرود و مفاهیم برای هنرجویان مشکل نشود.

دراین فصل همچنین بازه‌ها و نمایش آنها نیز مطرح می‌شوند تا در بیان ریاضی دامنهٔ تابع‌ها، دچار مشکل نشویم.

از آنجا که رسم نمودار توابع کار آسانی نیست و هنرجویان هنوز مطالب کافی برای رسم نمودار توابع را فرا نگرفته‌اند، دراین فصل از نرم‌افزار جئوجبرا کمک گرفته شده است تا به عنوان یک ابزار هنرجویان را در رسم نمودار توابع یاری کند.

	فرایند	توضیح فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ـ ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و با انتخاب مناسب آنها	ـ ارائه نمایش‌های جدولی و نموداری تابع در مورد رابطه بین دو کمیت ـ بیان چگونگی تغییرات تابع از روی نمودار و جدول آن
	ارتباط کلامی	سازمان دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ـ ارائه رابطه بین دو کمیت توسط آرش پس از مثال‌های مختلف دبیردر موردمیزان نور چراغ و فاصله چراغ از ما
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ با ارائه فرمول مساحت مثلث در فعالیت ۴ تابع ثابت معرفی می‌کند.
	استدلال واثبات	به‌کارگیری استدلال	ـ بیان دلیل تشخیص چگونگی تغییرات تابع از روی نمایش‌های نموداری و جدول آن ـ بیان دلیل برای تشخیص مجموعه مقادیردامنه توابعی که در زمینه‌های واقعی ساخته می‌شوند. ـ بیان دلیل تابع بودن یا تابع نبودن رابطه بین دو کمیت
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	ـ تعیین رابطه بین طول فنر و وزن وزنه آویزان شده به آن ـ تعیین رابطه بین گنجایش بنزین در باک ماشین و میزان مسافت طی شده
		تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	ـ نمایش بازه‌ها به صورت ریاضی و مجموعه‌ای و رسم نمودار آنها روی محور اعداد حقیقی
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	ـ تقریباً در بیشتر مواقع این اتفاق افتاده است (مانند ارائه نمایش‌های مختلف یک بازه...)
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ توانایی مقایسه نمودارهای توابع و در رسم به روش انتقال ـ توانایی مقایسه و یافتن نوع تابع از روی قانون آن

بخش اول: مفهوم تابع

اهداف بخش

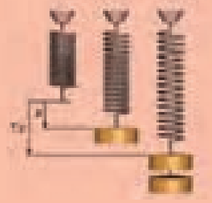
- آشنایی با رابطهٔ بین دو کمیت و درک آن در زمینهٔ واقعی
- نوشتن قانون یا ضابطه برای بیان چگونگی رابطهٔ بین دو کمیت و تعیین مقادیر ممکن برای کمیت‌ها
- تشخیص تابع بودن یا نبودن رابطهٔ بین دو کمیت
- تعیین دامنهٔ تابعی که در زمینه‌های واقعی تعریف شده است از طریق محدودیت‌های واقعی

واژه‌های کلیدی:
رابطهٔ بین دو کمیت، تابع، دامنه

ورود به مطلب:
رابطهٔ بین کمیت‌ها مفهوم اصلی در پیدایش مفهوم تابع است. دبیران می‌توانند از طریق طرح مسئله‌ای که به یکی از این رابطه‌ها اشاره دارد وارد مفهوم رابطهٔ بین کمیت‌ها شوند. در کتاب از مسئلهٔ اندازه‌گیری فاصلهٔ ستارگان استفاده شده است تا از طریق آن به رابطهٔ بین شدت نور و فاصلهٔ چشمهٔ نور توجه شود. از این نوع رابطه‌ها بسیار داریم که هم به عنوان ورودی و هم به عنوان مثال می‌توانیم از آنها استفاده کنیم. مثلاً رابطهٔ بین شدت صدا و فاصلهٔ منبع صدا، رابطهٔ بین فشار هوا و ارتفاع از سطح دریا، رابطهٔ بین فشار وارد بر سطح و مساحت سطح و ... (به مثال‌هایی که در این زمینه در کتاب کار وجود دارد رجوع کنید.)

فعالیت آموزشی

فرض کنید فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنیم، ۱ سانتی‌متر به طول فنر اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۶۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود، پاره می‌شود.



۱) در جای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

هر چه جرم وزنهٔ آویزان شده .... شود، طول فنر .... می‌شود.

۲) اگر به این فنر یک وزنهٔ ۲۰۰ گرمی آویزان کنیم، طول آن چقدر می‌شود؟

۳) اگر با آویزان کردن وزنه‌ای، طول فنر ۲۰ سانتی‌متر شود، جرم آن چقدر بوده است؟

۴) در حالت کلی، اگر یک وزنهٔ a گرمی به فنر آویزان کنیم و فنر پاره نشود، طول فنر بر حسب a چقدر خواهد شد؟

۵) اگر وزنه‌ای را به فنر آویزان کنیم و فنر پاره نشود و طول آن برابر l شود، جرم آن وزنه بر حسب l چقدر است؟

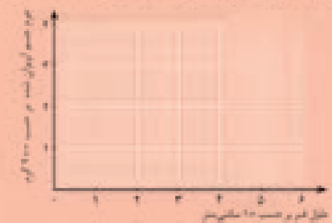
۶) از این طریق، چه ابزاری ساخته می‌شود؟

۷) حداقل و حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟

۸) جدول زیر ارتباط بین طول فنر و جرم وزنهٔ آویزان شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

طول فنر کشیده شده	۱۰	۱۵	۲۰	......	۴۰	۴۵	۵۰	......
جرم وزنهٔ آویزان شده	۰	...	...	۲۰۰	...	...	...	۷۵۰

۹) در شکل زیر، محور افقی نشان دهندهٔ طول فنر و هر واحد آن معادل ۱۰ سانتی‌متر است. محور عمودی نشان دهندهٔ جرم جسم آویزان شده است و هر واحد آن معادل ۲۰۰ گرم است. جدول بالا، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را پیدا کنید و بگویید چه شکلی را نشان می‌دهند.



۱۰) حداقل و حداکثر طولی که این فنر پیدا می‌کند، چقدر است؟

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم رابطه، قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت‌ها

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال، بازنمایی‌ها، ارتباط کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

۱ زیادتر ـ بلندتر، یا کمترـ کوتاه‌تر

۲ $۳۰=۲۰+۱۰=$ طول فنر $\Rightarrow ۳۰۰\div۱۵=۲۰$

۳ گرم $۱۵۰=۱۰\times۱۵ \Rightarrow ۲۰-۱۰=۱۰$

۴ $l=\frac{a}{۱۵}+۱۰ \quad ۰<a<۷۵۰$

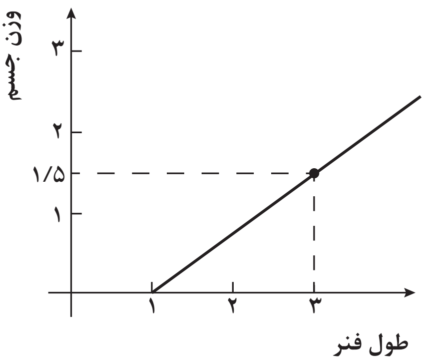
۵ $a=۱۵(l-۱۰) \quad ۱۰<l<۶۰$

۶ ترازوی دستی

۷ صفر و ۷۵۰ گرم

۸

طول فنر کشیده شده	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰
جرم جسم آویزان شده	۰	۷۵	۱۵۰	۳۰۰	۴۵۰	۵۲۵	۶۰۰	۷۵۰



۹ نمودار حاصل یک خط است.

۱۰ بین ۱۰ و ۶۰ سانتی‌متر است.

فعالیت آموزشی

فرض کنید خودرویی با گنجایش ۶۰ لیتر بنزین دارید. اگر این خودرو با سرعت ثابت حرکت کند، برای طی کردن هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند. باک این خودرو قبل از حرکت پر شده است. مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو با مسافت طی شده رابطه دارد. توجه داشته باشید که هیچ خودرویی تمام بنزین باک خود را مصرف نمی‌کند و لازم است حداقل ۵ لیتر بنزین در باک موجود باشد.

۱) در جای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

هر چه بنزین در باک .... شود، مسافت طی شده .... می‌شود.

۲) حجم بنزین موجود در باک چه مقادیری می‌تواند باشد؟

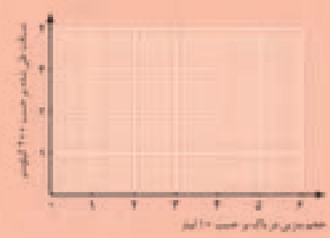
۳) اگر مقدار بنزین باقی‌مانده در باک را بر حسب لیتر با x نشان دهیم و مسافت طی شده را برحسب کیلومتر با L نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار L را بر حسب مقدار x بیان کند.

با توجه به پاسخ پرسش‌های بالا، به سؤال‌های زیر جواب دهید.

۴) جدول زیر، ارتباط بین حجم بنزین موجود در باک و مسافت طی شده را نشان می‌دهد. آن را کامل کنید.

حجم بنزین در باک	۶۰	۵۰	۴۵	۳۵	....	۲۰	....	۵
مسافت طی شده	۰	....	....	....	۳۷۵	....	۶۲۵	....

۵) در شکل زیر، محور افقی حجم بنزین در باک را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۱۰ لیتر است. محور عمودی مسافت طی شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۲۰۰ کیلومتر است. جدول صفحهٔ قبل نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را پیدا کنید و بگویید چه شکلی را نشان می‌دهند.



۶) با در نظر گرفتن میزان بنزین موجود در باک این خودرو چه مسافت‌هایی را می‌تواند طی کند؟

۷) اگر ۳۰ لیتر بنزین در باک باقی‌مانده باشد، ماشین چند کیلومتر مسافت طی کرده است؟

۸) آیا پاسخ دادن به سؤال های (۲) و (۳) برای شناخت رابطهٔ بین بنزین باقی مانده و مسافت طی شده کافی است؟

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم رابطه در زمینه‌های مختلف، درک قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت ها
- شناخت رابطهٔ بین دو کمیت در زمینه‌های واقعی و طبیعی

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال ها

۱ کمتر ـ بیشتر

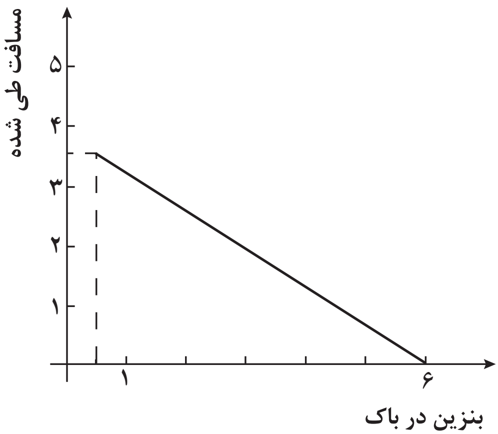
۲ حداقل ۵ لیتر و حداکثر ۶۰ لیتر

۳ ۵≤ V ≤۶۰ L=(۶۰−V)×۱۲/۵ , میزان بنزین باک = V

۴

حجم بنزین در باک	۶۰	۵۰	۴۵	۳۵	۳۰	۲۰	۱۰	۵
مسافت طی شده	۰	۱۲۵	۱۸۷/۵	۳۱۲/۵	۳۷۵	۵۰۰	۶۲۵	۶۸۷/۵

۵



۶ بین صفر تا ۵/ ۶۸۷ کیلومتر

۷ ۵۰۰ کیلومتر

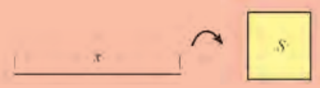
۸ بله، شناخت رابطهٔ بین این دو کمیت فقط نیازمند دانستن بندهای (۲) و (۳) است.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۳

مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با آن یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.

۱) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟



۲) طول قطعهٔ بریده شده از مفتول، چه مقادیری می‌تواند باشد؟

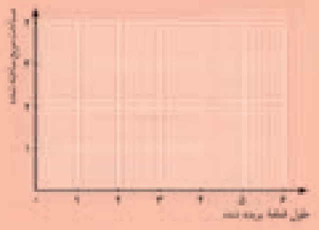
۳) اگر طول قطعهٔ بریده شده از مفتول را با x نشان دهیم و مساحت مربع ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان می‌کند.

با توجه به پاسخ‌های خود، به سؤال‌های زیر جواب دهید.

۴) جدول زیر، ارتباط طول قطعهٔ بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

طول قطعهٔ بریده شده	۴	۲۰	۴۴	...	۶۰	۱۰۰
مساحت مربع	۱	...	...	۱۴۴	...	...

۵) در شکل زیر، محور افقی طول قطعهٔ بریده شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۴۰ سانتی‌متر است. محور عمودی مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۲۰۰ سانتی‌متر مربع است. جدول صفحهٔ قبل، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را بیابید و شکل حاصل را به طور تقریبی رسم کنید.



۶) مساحت‌های مربع‌های ساخته شده چه مقادیری می‌توانند باشند؟ مجموعهٔ مقادیر این مساحت‌ها را مشخص کنید.

۷) برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰۰ سانتی‌متر مربع، چه مقدار از مفتول را باید ببریم؟

۸) آیا پاسخ به سؤال‌های (۲) و (۳) برای شناخت رابطهٔ مساحت مربع ساخته شده و طول قطعهٔ بریده شده از مفتول کافی است؟

اهداف موضوعی:

■ درک مفهوم رابطه در زمینه هندسی، درک قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت‌ها.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها

۱ خیر زیرا مساحت عددی مثبت است.

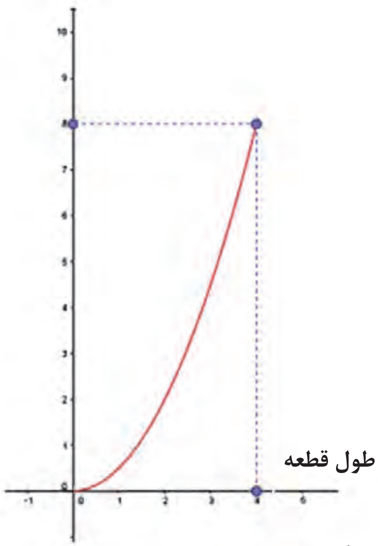
۲ اگر طول قطعه بریده شده را x در نظر بگیریم x عددی بین حداقل و حداکثر طول مفتول خواهد بود، یعنی بین صفر و ۱۶۰ سانتی‌متر

۳ $s=\left(\frac{x}{۴}\right)^{۲}=\frac{x^{۲}}{۱۶}, ۰<x<۱۶۰$ طول قطعهٔ بریده شده $= x$

۴

طول قطعهٔ بریده شده	۴	۲۰	۴۴	۴۸	۶۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۶۰
مساحت مربع	۱	۲۵	۱۲۱	۱۴۴	۲۲۵	۶۲۵	۹۰۰	۱۶۰۰

۵



۶ بین صفر و ۱۶۰۰ سانتی مترمربع.

این مجموعه به صورت $\{x\in \mathbb{R} \mid ۰ < x \leq ۱۶۰۰\}$ نوشته می‌شود.

۷ $۹۰۰=\frac{x^{۲}}{۱۶} \Rightarrow x=۱۲۰\text{cm}$

۸ بله، به کمک جواب‌های بند (۲) و (۳) جواب بقیهٔ سؤال‌ها را می‌توان داد.

پس از این فعالیت‌ها که هنرجویان با مفهوم رابطهٔ بین کمیت‌ها آشنا شده‌اند و مقداری هم به طور غیرمستقیم با مفهوم دامنه و قانون تابع کار کرده‌اند، مفهوم تابع به طور مستقیم ارائه می‌شود. برای تأکید بر یکتایی مقدار تابع با یک مثال، حالتی که یک رابطه تابع نیست نیز تذکر داده می‌شود.

کار در کلاس ۱

۱) در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده تابعی از طول فنر کشیده شده است؟ آیا طول فنر کشیده شده، تابعی از جرم جسم آویزان شده است؟

۲) مثالی از دو کمیت مرتبط (الف) و (ب) ارائه کنید که در آن کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد ولی کمیت (الف) تابعی از کمیت (ب) نباشد.

اهداف:

- تشخیص نوع رابطهٔ بین دو کمیت، پرورش تفکر واگرا

۱ بله هم جرم جسم تابعی از طول فنر است و هم طول فنر تابعی از جرم جسم است، زیرا با مشخص شدن هر یک، دیگری کاملاً مشخص می‌شود.

۲ مثلاً، رابطهٔ بین یک عدد و مربع آن عدد را در نظر بگیرید. با داشتن یک عدد می‌توان مربع آن عدد را تعیین نمود ولی با داشتن مربع یک عدد، دو عدد می‌توان یافت که مربع آنها همان مقدار باشد.

در ادامه، دو مفهوم اساسی دامنه و قانون تابع معرفی می‌شوند و چگونگی تساوی دو تابع بیان می‌شود. مناسب است که در اینجا مثال‌هایی زده شوند که نشان‌دهندهٔ دو تابع مساوی و غیرمساوی باشند.

مثال: تابع با قانون $y_۱=\sqrt{x}\sqrt{x}$ و دامنهٔ مجموعهٔ اعداد مثبت با تابع با قانون $y_۲=x$ و دامنهٔ مجموعهٔ اعداد مثبت مساوی‌اند، زیرا دامنهٔ آنها یکی است و حاصل عمل قانون آنها نیز یکی است.

مثال: تابع با قانون $y_۱=\sqrt{x}\sqrt{x}$ و دامنهٔ مجموعه اعداد مثبت با تابع با قانون $y_۲=x$ و دامنهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد مساوی نیستند، زیرا دامنهٔ آنها یکی نیست.

کار در کلاس ۲

۱) در فعالیت (۲)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک، بیان می‌کند.

۲) در فعالیت (۳)، دامنه و قانون تابعی رابنویسید که مساحت مربع ساخته شده را بر حسب طول قسمت بریده شده از مفتول، بیان می‌کند.

اهداف:

- ارتباطات (زبان ریاضی)، شناسایی دامنه و قانون تابع

۱ دامنهٔ تابع = $\{v\in \mathbb{R} \mid ۵ \le v \le ۶۰\}$

قانون تابع: $l=(۶۰-v)\times ۱۲/۵$

۲ دامنهٔ تابع = $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 160\}$

قانون تابع: $s = \frac{x^2}{16}$

مسئله‌ها

۱ـ الف) آیا با مشخص بودن محیط یک دایره، مساحت آن مشخص می‌شود؟ آیا مساحت دایره، تابعی از محیط آن است؟ دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

ب) آیا با مشخص بودن مساحت یک دایره، محیط آن مشخص می‌شود؟ آیا محیط دایره، تابعی از مساحت آن است؟ دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی)

الف) بله، مساحت دایره را از روی محیط آن می‌توان به‌دست آورد و مساحت دایره تابعی از محیط آن است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد مثبت است. برای به‌دست آوردن قانون این تابع فرض کنید P محیط یک دایره باشد.

محیط دایره $= P = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{P}{2\pi}$ و مساحت دایره $= S = \pi r^2$

$$\Rightarrow \quad = \pi\left(\frac{P}{2\pi}\right) = \frac{P}{4\pi}$$

ب) بله، محیط دایره را از روی مساحت آن می‌توان به‌دست آورد و محیط دایره تابعی از مساحت آن است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد مثبت است. برای به‌دست آوردن قانون این تابع فرض کنید S مساحت یک دایره باشد.

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow P = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi S}$$

۲ـ الف) دو مثلث رسم کنید که محیط آنها ۱۰ سانتی‌متر و طول اضلاع آنها متفاوت باشد. مساحت این دو مثلث را پیدا کنید. آیا این دو مساحت برابرند؟

ب) آیا با مشخص بودن محیط یک مثلث، مساحت آن مشخص می‌شود؟ آیا مساحت مثلث تابعی از محیط آن است؟

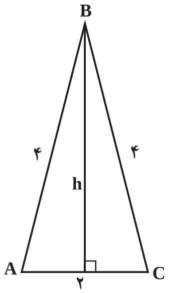
مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن

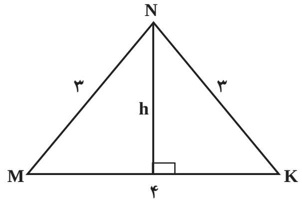
الف) خیر، دو مثلث متساوی‌الساقین زیر را در نظر بگیرید با رسم ارتفاع مرسوم از

رأس این مثلث‌ها و استفاده از رابطهٔ فیثاغورس می‌توان طول ارتفاع آنها را یافت
در شکل ABC ، $h=\sqrt{۱۵}$ و در شکل MNK ، $h=\sqrt{۵}$، بنابراین

$$S_{۱}=\frac{\sqrt{۱۵}\times ۲}{۲}=\sqrt{۱۵} \quad \text{و} \quad S_{۲}=\frac{\sqrt{۵}\times ۴}{۲}=۲\sqrt{۵}$$



(۱)



(۲)

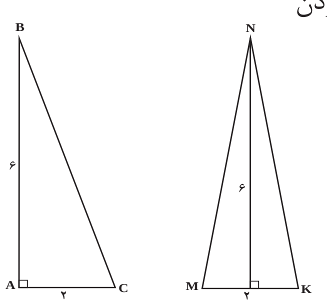
ب) خیر، قسمت (الف) نشان داد که دو مثلث با محیط مساوی ممکن است مساحت متفاوت داشته باشند، پس با دانستن محیط یک مثلث، مساحت آن مشخص نمی‌شود و مساحت مثلث تابعی از محیط آن نیست.

۳. الف) دو مثلث متفاوت با مساحت‌های برابر رسم کنید. محیط آنها را پیدا کنید. آیا مقدار محیط‌ها برابرند؟

ب) آیا با مشخص بودن مساحت یک مثلث، محیط آن مشخص می‌شود؟ آیا محیط مثلث تابعی از مساحت آن است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن



الف) خیر، به دو مثلث بالا توجه کنید.

$$S_{MNK}=\frac{۶\times ۲}{۲}=۶ \quad \text{و} \quad S_{ABC}=\frac{۶\times ۲}{۲}=۶$$

ولی در مثلث ABC ، $BC=\sqrt{۴۰}$ و در مثلث MNK ، $MN=NK=\sqrt{۳۷}$ و بنابراین

$$\text{محیط } ABC = ۶+۲+\sqrt{۴۰} \approx ۱۴/۳$$
$$\text{محیط } MNK = \sqrt{۳۷}+\sqrt{۳۷}+۲ \approx ۱۴/۱$$

که با هم مساوی نیستند

ب) خیر، قسمت (الف) نشان داد که دو مثلث با مساحت مساوی ممکن است محیط متفاوت داشته باشند، پس با دانستن مساحت یک مثلث، محیط آن مشخص نمی‌شود و محیط مثلث تابعی از مساحت آن نیست.

۴) سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. آیا ارتفاع سنگ از سطح زمین، تابعی از زمان است؟چرا؟ اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ زمان شروع پرتاب باشد، دامنهٔ این تابع چیست؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، پیوند و اتصال با زندگی روزمره

بله، زیرا در هر لحظه زمان سنگ در جایی معین است و ارتفاع آن نیز معین است. از آنجا که این حرکت فقط در ۳ ثانیه انجام می‌شود، دامنه این تابع مجموعهٔ اعداد بین ۰ تا ۳ است.

۵) در یک سرسره که فاصلهٔ پای سرسره تا نردبان آن ۲ متر است، مقدار مسافتی که بچه سر می‌خورد به ارتفاع سرسره وابسته است. اگر حداقل ارتفاع سرسره‌ها ۲ متر و حداکثر ارتفاع آنها ۴ متر باشد، تابعی را که مسافت سُر خورده شده را بر حسب ارتفاع سرسره بیان می‌کند با مشخص کردن دامنه و قانون آن بدست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

بین طول وتر x (طول سرسره) و ارتفاع پله‌های سرسره از زمین y یک رابطه وجود دارد و به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم.

$$x^۲=y^۲+۲^۲ \Rightarrow x=\sqrt{y^۲+۴}$$

دامنهٔ این تابع مقادیر ممکن برای y است که مجموعهٔ اعداد بین ۲ و ۴ است.

۶) یک شیرینی فروشی به طور ثابت ماهانه ۷ میلیون تومان بابت اجارهٔ مغازه و آب و برق و دستمزد کارگران، پرداخت می‌کند. هزینهٔ مواد اولیهٔ هر کیلوگرم شیرینی ۳,۰۰۰ تومان است. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲,۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲,۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد.

الف) درآمد این مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با بدست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

ب) هزینهٔ ماهیانهٔ این مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با بدست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

پ) سود این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

الف) اگر x میزان شیرینی بر حسب کیلوگرم باشد داریم:

$R = ۱۲۰۰۰x$ = درآمد حاصل از فروش x واحد شیرینی ، $۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

ب) $C = ۳۰۰۰x + ۷۰۰۰۰۰۰$ = هزینه تولید x واحد شیرینی ، $۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

پ) سود = $P - C = ۱۲۰۰۰x - (۳۰۰۰x + ۷۰۰۰۰۰۰)$ ، $۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

P = سود = $۹۰۰۰x - ۷۰۰۰۰۰۰$ ، $۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

می‌توان در اینجا توضیح داد که حداقل باید ۷۷۸ کیلو شیرینی تولید شود تا شیرینی فروش ضرر نکند. یعنی باید به جای x در این رابطه عددی قرار داد که P را مثبت کند.

P = سود = $۹۰۰۰x - ۷۰۰۰۰۰۰ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۷۷۸$

۷) یک مقاومت ثابت ۳۰۰ اُهمی را به طور موازی با یک مقاومت متغیر می‌بندیم. مقاومت معادل تابعی از مقاومت متغیر است. اگر مقاومت متغیر حداقل ۵ اهم و حداکثر ۱,۵۰۰ اهم باشد، دامنه و قانون تابعی را به دست آورید که مقاومت معادل را بر حسب مقاومت متغیر بیان می‌کند.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{۳۰۰} = \frac{۱}{y} \Rightarrow y = \frac{۳۰۰x}{۳۰۰ + x} \quad , \quad ۵ \leq x \leq ۱۵۰۰$$

بازه‌ها

اهداف بخش

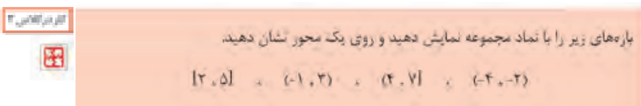
- درک مفهوم بازه (فاصله)
- استفاده از بازه‌ها در نمایش دامنهٔ توابع
- آشنایی با نمایش هندسی بازه‌ها
- آشنایی با نماد بی‌نهایت و چگونگی استفاده از آن برای نمایش یک بازه

واژه‌های کلیدی:

بازه، بی‌نهایت

ورود به مطلب:

هدف این بخش فقط نمادگذاری برای نمایش برخی زیرمجموعه‌های مهم در مجموعهٔ اعداد حقیقی است. بنابراین تنها انگیزهٔ مهم این بخش نمادگذاری برای ساده‌تر صحبت کردن است و مناسب است که با مراجعه به بخش‌های قبل و دیدن برخی زیر مجموعه‌ها که به آنها برخورد کرده بودیم، انگیزهٔ لازم برای نام‌گذاری آنها را فراهم کنید. بازه‌ها دستهٔ خاصی از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ اعداد حقیقی هستند که بسیار به کار می‌آیند و به همین دلیل آنها را نام‌گذاری می‌کنیم.


بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

[۲ ، ۵] ، (-۱ ، ۳) ، (۴ ، ۷] ، (-۴ ، -۲)

اهداف:

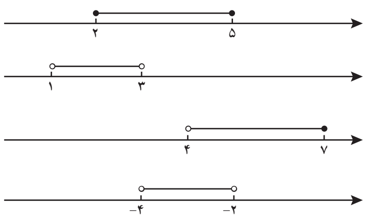
- پرورش نمایش یک مفهوم با ارائه‌های مختلف

$[۲\ ,\ ۵]=\{x\in \mathbb{R} \mid ۲ \le x \le ۵\}$

$(-۱, ۳) =\{x\in \mathbb{R} \mid -۱ < x < ۳\}$

$(۴\ ,۷] =\{x\in \mathbb{R} \mid ۴ < x \le ۷\}$

$(-۴\ ,\ -۲) =\{x\in \mathbb{R} \mid -۴ < x < -۲\}$



در ادامهٔ این بخش، نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ برای نمایش بازه‌های بی‌کران معرفی می‌شوند.

توجه داشته باشید که $+\infty$ و $-\infty$ نماد هستند و نشان‌دهندهٔ هیچ عدد حقیقی نیستند و اشاره به نقطهٔ خاصی روی محور اعداد حقیقی ندارند. استفاده از این نمادها در بازه‌ها به معنای بی‌کرانگی بازه از بالا یا پایین است. مثلاً اگر بخواهیم مجموعه همهٔ اعداد بیشتر از ۲، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۲\}$، را نشان دهیم، می‌توانیم آن را به صورت $[۲, +\infty)$ نمایش دهیم.

چون هر بازه، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد حقیقی است می‌توانید از اجتماع و اشتراک بازه‌ها نیز صحبت کنید و گاهی ممکن است این اعمال مجموعه‌ای مجدداً یک بازه ایجاد کند. همچنین می‌توانید از نماد $(-\infty, +\infty)$ برای نمایش کل مجموعهٔ اعداد حقیقی برای هنرجویان قوی‌تر استفاده نمایید.

بخش ۲: نمادگذاری تابع‌ها

اهداف بخش

- آشنایی با نحوهٔ نام‌گذاری تابع‌ها و دامنهٔ آنها
- آشنایی با مفهوم مقدار تابع در یک نقطه و بیان جبری قانون تابع از طریق یک متغیر
- درک مفهوم دامنهٔ یک تابع به عنوان مجموعهٔ مقادیر متغیر آن تابع
- درک تمایز بین مفهوم تابع و قانون تابع
- درک تفاوت تابع‌های با قانون یکسان و دامنه‌های مختلف

واژه‌های کلیدی:

متغیر، دامنهٔ تابع، مقدار تابع

نگاه کلی به بخش

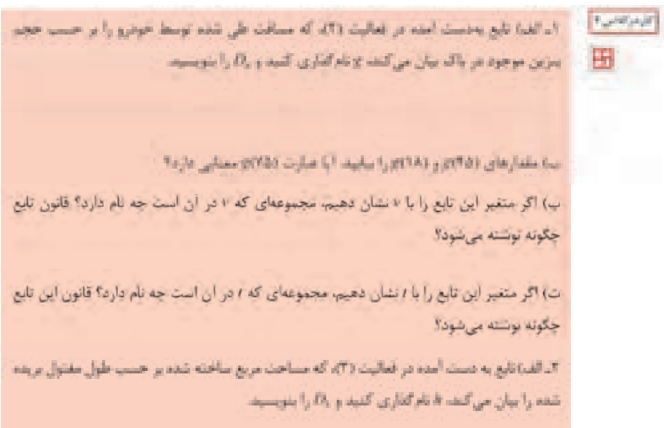
پس از درک مفهوم تابع برای بررسی جزئیات این مفهوم نیازمند نام‌گذاری اجزای مفهوم تابع هستیم تا بتوانیم با سهولت در مورد آنها صحبت کنیم. به همین دلیل شیوهٔ نام‌گذاری خود تابع، دامنهٔ آن و مقادیر تابع به کمک متغیرها مطرح شده‌اند. در این بخش برای داشتن یک تصویر ذهنی بهتر از ماهیت تابع، به طور غیرمستقیم به نمایش فلشی تابع در یک مثال خاص اشاره شده است. ولی کار با چنین نمایشی از اهداف کتاب نیست. دبیران در صورت نیاز می‌توانند برای کمک به درک مفهوم تابع به عنوان یک عملگر عمل‌کننده روی بعضی مقادیر و ایجاد مقادیری دیگر، از این نمایش استفاده کنند. این نمایش برای توصیف توابع دلخواه بسیار مفید است. از آنجا که در این کتاب فقط با توابع با متغیر عددی و مقادیر عددی سر و کار خواهیم داشت از این نمایش استفاده‌ای نکردیم.

اشتباه رایج:

در ادامه از طریق مکالمه بین هنرجو و دبیر به اشتباهی رایج در مفهوم تابع پرداخته‌ایم. در این اشتباه، برای محاسبهٔ مقدار تابع در یک نقطه به قانون تابع نگاه می‌کنند که آیا در آن نقطه معنا دارد یا خیر در حالی که برای محاسبهٔ مقدار تابع در یک نقطه

باید به دامنهٔ تابع توجه کرد که آیا آن نقطه در دامنهٔ تابع می‌باشد یا خیر. این اشتباه ناشی از این بدفهمی است که تابع و قانون تابع یکسان گرفته می‌شوند در حالی که دامنهٔ تابع نیز بخشی از مفهوم تابع است که مستقل از قانون تابع تعیین می‌شود.
در این بخش با ارائهٔ مثال‌ها و مسئله‌ها و کار در کلاس‌های متنوع سعی شده است اهمیت دامنه و شیوه‌های تعیین آن مشخص شوند. در تعیین دامنه نکتهٔ اصلی در آن است که آن تابع قرار است چه پدیده‌ای را توصیف کند. محدودیت‌هایی که شرایط آن پدیده ایجاد می‌کند وضعیت دامنهٔ تابع را مشخص می‌کند. البته ارائهٔ تابع در جهان ریاضی هم انجام می‌شود که حتی اگر هیچ پدیدهٔ واقعی هم در کار نباشد این ارائه کنندهٔ تابع است که باید دامنهٔ تابع را مشخص کند نه اینکه خود به خود از روی قانون تابع، دامنهٔ آن مشخص باشد.

ورود به مطلب:
هدف اصلی این بخش نام‌گذاری تابع‌ها است و شیوهٔ ورود به این گونه مباحث یادآوری ضرورت نام‌گذاری برای سخن گفتن است. مثلاً اگر در مورد چند تابع بخواهیم صحبت کنیم باید نامی داشته باشند تا به آنها اشاره کنیم و برای آنکه بتوانیم در مورد تفاوت‌های این توابع صحبت کنیم باید جزئیات عملیاتی که با توابع انجام می‌دهیم را بتوانیم بیان کنیم.
دربارهٔ اهمیت توجه به دامنهٔ تابع‌ها، می‌توانید از مثال‌های کتاب استفاده کنید یا مثال‌هایی شبیه آن را که متناسب هنرجویان کلاس باشد بیابید و مطرح کنید.


کار در کلاس ۲

۱ـ الف) تابع به‌دست آمده در فعالیت (۴)، که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند g نام‌گذاری کنید و D_g را بنویسید.

پ) مقدارهای $g(45)$ و $g(68)$ را بیابید. آیا عبارت $g(75)$ معنایی دارد؟

ب) اگر متغیر این تابع را با v نشان دهیم، مجموعه‌ای که v در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

۲ـ الف) تابع به دست آمده در فعالیت (۳)، که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتول بریده شده را بیان می‌کند، h نام‌گذاری کنید و D_h را بنویسید.

ب) مقدارهای $h(5)$ و $h(12)$ را بیابید. آیا عبارت $h(200)$ معنایی دارد؟

پ) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر این تابع را با k و متغیر این تابع را با z نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که z در آن است، مشخص کنید.

اهداف :

■ نام‌گذاری تابع و بیان قانون تابع و دامنهٔ تابع از طریق متغیر، پرورش مهارت‌های استفاده از نمادهای ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی و بیان ایده‌ها، حل مسئله

۱ الف) x را میزان مصرف بنزین بر حسب لیتر در نظر می‌گیریم.

$g(x) = (۶۰-x)\ ۱۲/۵ \qquad D_g = [۵\ ,۶۰]$

ب) $g(۴۵) = (۶۰-۴۵)\ ۱۲/۵ = ۱۸۷/۵$

$g(۱۸) = (۶۰-۱۸)\ ۱۲/۵ = ۵۲۵$

خیر، $g(۷۵)$ معنی ندارد زیرا ۷۵ در دامنهٔ این تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود حجم بنزین موجود در باک ماشین است و ماشینی که باک آن حداکثر ۶۰ لیتر گنجایش دارد نمی‌تواند ۷۵ لیتر بنزین در خود داشته باشد.

پ) مجموعه‌ای که متغیر یک تابع در آن تغییر می‌کند همان دامنهٔ آن تابع است. اگر نام متغیر v باشد قانون این تابع به صورت $g(v) = (۶۰ - v)۱۲/۵$ نوشته می‌شود.

ت) اگر نام متغیر t باشد قانون این تابع به صورت $g(t) = (۶۰ - t)۱۲/۵$ نوشته می‌شود و مجموعه‌ای که t در آن تغییر می‌کند دامنهٔ g است.

۲ الف) $D_h = (۰\ ,۱۶۰]$ و قانون تابع با متغیر t به صورت $h(t) = \frac{t^۲}{۱۶}$ است.

ب)

$$h(۵) = \frac{۵^۲}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \approx ۱/۵۷$$

$$h(۱۲) = \frac{۱۲^۲}{۱۶} = ۹$$

خیر $h(۲۰۰)$ معنی ندارد، زیرا ۲۰۰ در دامنهٔ تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود. طول مفتول بریده شده از یک مفتول ۱۶۰ سانتی‌متری است و نمی‌توان از چنین مفتولی یک مفتول ۲۰۰ سانتی‌متری برید.

پ) اگر نام متغیر تابع x باشد قانون تابع به صورت $h(x) = \frac{x^۲}{۱۶}$ نوشته می‌شود و x در دامنهٔ تابع h تغییر می‌کند.

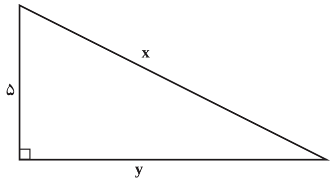
ت) در این حالت $D_k = (۰\ ,۱۶۰]$ و $K(z) = \frac{z^۲}{۱۶}$ و $z \in D_k$

مسئله‌ها

۱) طول یکی از ضلع‌های زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۵ سانتی‌متر است. مساحت این مثلث، وابسته به طول وتر آن است. دامنه و قانون تابعی را مشخص کنید که مساحت این مثلث را برحسب طول وتر آن بیان می‌کند. برای این تابع و متغیر آن نامی انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود، به زبان ریاضی بنویسید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی)



$$x^{۲} = ۲۵ + y^{۲} \Rightarrow y = \sqrt{x^{۲} - ۲۵}$$

$$S = \frac{۵y}{۲} = \frac{۵\sqrt{x^{۲} - ۲۵}}{۲}$$

چون وتر از ضلع‌های زاویهٔ قائمه باید بزرگ‌تر باشد، پس: $x > ۵$. یعنی $D_s = (۵ , +\infty)$.

حالا اگر متغیراین تابع را به جای x ، l بنامیم و قانون تابع مساحت مثلث را f بنامیم، داریم:

$$f(l) = \frac{۵\sqrt{l^{۲} - ۲۵}}{۲} \qquad D_f = (۵ , +\infty)$$

و اگر متغیراین تابع را با u نشان دهیم و تابع مساحت را با h نشان دهیم، داریم:

$$h(u) = \frac{۵\sqrt{u^{۲} - ۲۵}}{۲} \qquad D_h = (۵ , +\infty)$$

۲) یک باغ میوه به مساحت ۱۰هکتار در نظر بگیرید. یک کارگر در یک روز می‌تواند ۱۰۰مترمربع از این باغ را میوه‌چینی کند.

الف) یک کارگر در چند روز تمام میوه‌های باغ را می‌چیند؟ دو کارگر در چند روز کار میوه‌چینی را تمام خواهند کرد؟

ب) آیا تعداد روزهای لازم برای چیدن تمام میوه‌های این باغ تابعی از تعداد کارگران است؟ چرا؟ قانون این تابع چیست؟ اگر حداکثر ۳۵ نفر کارگر همزمان قادر به کار میوه‌چینی باشند، دامنه این تابع چیست؟

پ) اگر این تابع را g بنامیم، مقادیر g(۱۵) و g(۳۰) را به‌دست آورید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

ت) آیا $g(\frac{۱}{۲})$ و $g(۴۰)$ معنایی دارند؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

الف) ابتدا مساحت زمین را بر حسب مترمربع به‌دست می‌آوریم.

$۱۰ \times ۱۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰ \; m^{۲}$

$۱۰۰۰۰۰ \div ۱۰۰ = ۱۰۰۰$ روز

یک کارگر در ۱۰۰۰ روز میوه‌چینی را کامل می‌کند و دو کارگر در ۵۰۰ روز میوه‌چینی را کامل می‌کنند.

ب) بله تعداد روزهای لازم برای کامل شدن میوه‌چینی تابعی از تعداد کارگران است، زیرا با مشخص شدن تعداد کارگران تعداد روزهای مورد نیاز دقیقاً مشخص خواهد شد و اگر تعداد کارگران x باشد تعداد روزها به صورت $\frac{۱۰۰۰}{x}$ است.

دامنهٔ این تابع با توجه به اینکه حداکثر تعداد ممکن برای کارگران ۳۵ نفر است، مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۳۵\}$ است.

پ) $g(x)=\frac{۱۰۰۰}{x}$

تعداد روزهایی که ۵ کارگر میوه‌چینی را کامل می‌کنند: $g(۵)=۲۰۰$

تعداد روزهایی که ۳۰ کارگر میوه‌چینی را کامل می‌کنند حدود ۳۳/۳ روز $=\frac{۱۰۰۰}{۳۰}=g(۳۰)$

ت) خیر زیرا x نمایش تعداد کارگر است و نصف کارگر بی‌معنی است.

$g(۴۰)$ بی‌معناست زیرا با توجه به دامنه حداکثر ۳۵ کارگر می‌توانند کار کنند.

۳) کرایهٔ تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیهٔ تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر طی شده ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را که کرایهٔ تاکسی را برحسب مسافت طی شده بیان می‌کند به دست آورید. با توجه به اینکه تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند دامنهٔ این تابع را مشخص کنید. برای این تابع و متغیر آن نامی انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نامهای انتخابی خود بیان کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

فرض مسئله به معنای آن است که به ازای هر ۲ متر، ۱ تومان کرایه دریافت می‌شود. مسافت طی شده را بر حسب متر و کرایه را بر حسب تومان در نظر می‌گیریم. اگر متغیر این تابع را با k و خود تابع را با x نشان دهیم طول مسافت طی شده برحسب متر خواهد بود و داریم:

$$k(x)=-x+۶۰۰ \qquad D_k=[۰,۵۰۰۰۰۰]$$

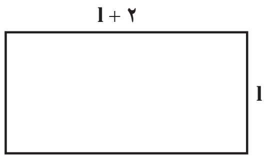
اگر متغیر را با l و تابع را با f نشان دهیم

$$f(l)=\frac{۱}{۲}l+۶۰۰ \qquad D_f=[۰,۵۰۰۰۰۰]$$

۴) مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۲ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را g بنامید و متغیر آن را با l نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا $g(-1)$ معنایی دارد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال، ارتباطات کلامی (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)



$g(l)= l\,(l+۲) \qquad D_g =(۰\,,+\infty)$

خیر $g(-۱)$ معنی ندارد زیرا طول یک پاره خط (عرض) نمی‌تواند منفی باشد.

۵) سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر زمان را بر حسب ثانیه با t و ارتفاع از سطح زمین را با متر اندازه‌گیری کنیم و با h نشان دهیم و لحظهٔ رها کردن سنگ لحظهٔ صفر باشد، قانون این تابع به‌صورت $h(t) = -۵t^۲ + ۲۵$ است.

الف) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

ب) مقدارهای $h(۱)$ و $h(۲)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

پ) آیا $h(۳)$ و $h(-۱)$ معنایی دارند؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

الف) قانون این تابع تا زمانی اعتبار دارد که سنگ به زمین برسد و بعد از آن اعتبار ندارد. رسیدن سنگ به زمین در زمانی رخ می‌دهد که $h=۰$ و با حل معادلهٔ $h = -۵t^۲ +۲۵=۰$ دیده می‌شود که زمان رسیدن سنگ به زمین در لحظهٔ $t = \sqrt{۵}$ است. پس $D_h = (۰,\sqrt{۵}\,]$.

ب) $h(۱) = -۵(۱)^۲+۲۵=۲۰$ و $h(۲) = -۵(۲)^۲+۲۵ = ۵$. یعنی در پایان ۱ ثانیه سنگ در ارتفاع ۲۰ متری و در پایان ۲ ثانیه سنگ در ارتفاع ۵ متری از زمین قرار دارد.

پ) هیچ معنایی ندارند زیرا این اعداد در دامنهٔ تابع نیستند و اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم دیده می‌شود شروع حرکت از لحظهٔ صفر به بعد است و قبل از صفر چنین حرکتی وجود ندارد و همچنین در لحظهٔ $\sqrt{۵}$ حرکت خاتمه می‌یابد و بعد از آن، قانون تابع اعتباری ندارد.

بخش ۳: نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

اهداف بخش

- آشنایی با جدول تغییرات تابع
- آشنایی با نمودار تابع
- کسب مهارت در رسم جدول مقادیر تابع
- کسب مهارت در رسم نمودار تابع از روی جدول
- تشخیص رفتار تابع از روی جدول و نمودار
- درک رابطهٔ بین نمودار تابع و جدول مقادیر تابع

نگاه کلی به بخش:

در این بخش با طرح یک مسئلهٔ واقعی (تغییرات قیمت سکه در هفته‌های مختلف) هنرجو برای درک عمیق‌تری از تابع که ممکن است ضابطه یا فرمولی نداشته باشد آماده می‌شود. در این مسئله که در طی یک مکالمه مورد بحث قرار می‌گیرد همچنین، نمایش جدولی تابع‌ها نیز مطرح خواهند شد. در این قسمت همزمان دو هدف دنبال می‌شود که یکی درک و پذیرش تابع‌هایی که فرمول ندارند و یکی دیدن جدول تغییرات یک تابع است.

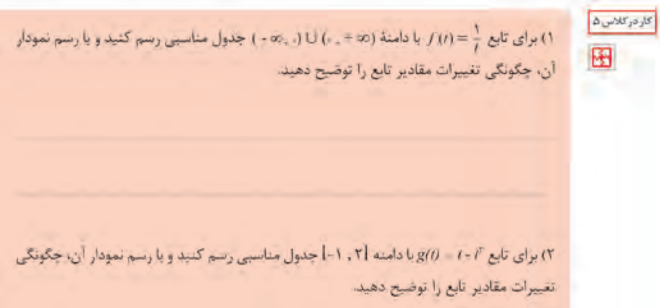
در مثال‌های این قسمت دامنهٔ برخی تابع‌ها گسسته است. (به فعالیتی که در مورد عدد پی و رقم‌های اعشاری آن در کتاب کار شده است، رجوع کنید.)

البته نمایش جدولی یک تابع، غیرمستقیم در فعالیت‌ها به عنوان جدول نمایش رابطهٔ بین دو کمیت مطرح شده است که در این بخش به عنوان جدول تغییرات تابع یا نمایش جدولی تابع رسماً معرفی می‌شوند.

ورود به مطلب:

برای ورود به نمایش جدولی و نموداری تابع‌ها و اهمیت آن می‌توانید تابع قابل توجهی را مطرح کنید و سؤالاتی را در مورد رفتار آن، مانند کم یا زیاد شدن مقادیر تابع مطرح کنید که از روی قانون تابع نتوان به سادگی پاسخ آنها را یافت. سپس با یافتن نقطه به نقطه مقادیر تابع و یادداشت این مقادیر در یک جدول هم به

سؤال‌های مطرح شده پاسخ دهید و هم غیر مستقیم جدول یک تابع را به‌دست آورده باشید و آن را به‌عنوان نمایش جدولی تابع معرفی کنید. نمایش نموداری نیز مستقیماً از نمایش جدولی ساخته می‌شود که یک درک بصری و کامل از مقادیر یک جدول به‌دست می‌دهد.


کار در کلاس ۵

۱) برای تابع $f(t)=\frac{1}{t}$ با دامنهٔ $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ جدول مناسبی رسم کنید و با رسم نمودار آن، چگونگی تغییرات مقادیر تابع را توضیح دهید.

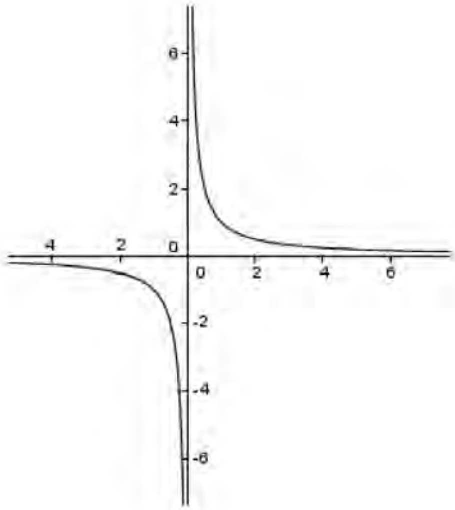
۲) برای تابع $g(t)=t-t^2$ با دامنه $[-1,2]$ جدول مناسبی رسم کنید و با رسم نمودار آن، چگونگی تغییرات مقادیر تابع را توضیح دهید.

اهداف :

- پرورش مهارت‌های نمایش مفاهیم با ارائه‌های مختلف، برقراری ارتباطات کلامی

۱

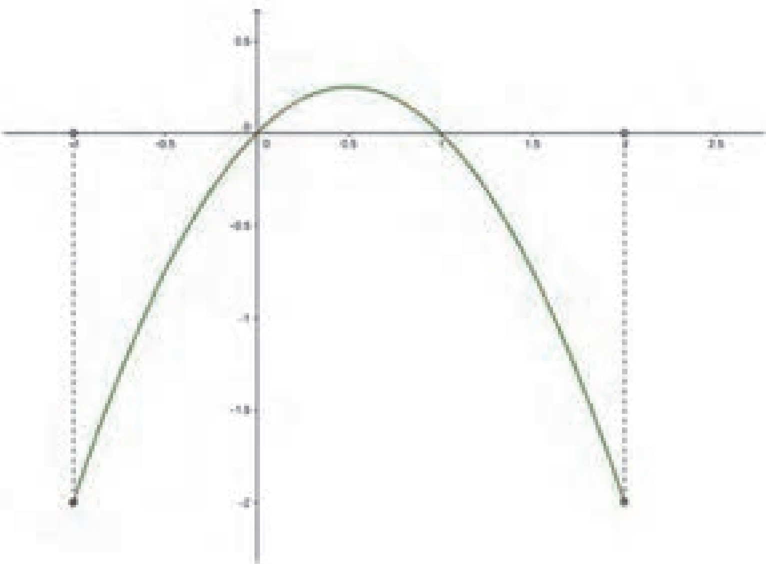
t	$-\infty$	$\leftarrow$	...	-۱۰	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	$۰/۰۱$	$۰/۱$	۱۰	...	$\rightarrow$	$+\infty$
$\frac{۱}{t}$	۰	$\leftarrow$	...	$-۰/۱$	-۱۰	-۱۰۰	$\rightarrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\leftarrow$	۱۰۰	۱۰	$۰/۱$	...	$\rightarrow$	۰



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که مقادیر این تابع در بازهٔ $(-\infty,۰)$ با بزرگ شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن مقدار متغیر به صفر، مقدار تابع از هر عددی کوچک‌تر می‌شود که به اصطلاح گوییم مقدار تابع به منفی بی‌نهایت می‌رود و هر چه مقدار متغیر از هر عددی کوچک‌تر شود (در اعداد منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ شود)، مقدار تابع به صفر نزدیک‌تر می‌شود و همچنین در بازهٔ $(۰,+\infty)$ با نزدیک شدن مقادیر متغیر به صفر مقدار تابع از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این حالت گوییم مقدار تابع به بی‌نهایت می‌رود و هرچه مقدار متغیر بزرگ‌تر شود مقدار تابع به صفر نزدیک‌تر می‌شود.

۲

t	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲
$g(t)$	-۲	$-\frac{۳}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{-۳}{۴}$	-۲



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که مقادیر تابع در بازهٔ $[-۱, -\frac{۱}{۲}]$ با بزرگ شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن مقدار متغیر به $-\frac{۱}{۲}$، مقدار تابع بزرگ می‌شود و به $\frac{۱}{۴}$ نزدیک می شود و همچنین در بازهٔ $[-\frac{۱}{۲}, ۲]$ با بزرگ شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن به ۲ مقدار تابع کوچک‌تر شده و به ۲- نزدیک می‌شود.

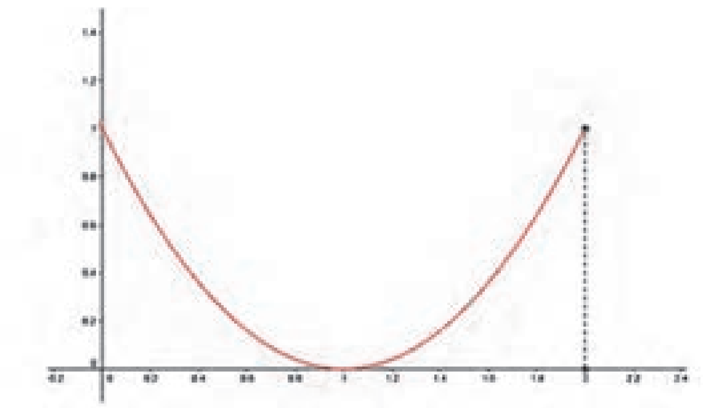
مسئله‌ها

۱) تابع f را با قانون $f(x) = (x - ۱)^۲$ و دامنهٔ $[۰ , ۲]$ در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، باز نمایی‌های چندگانه

x	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	۱	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۷}{۴}$	۲
$f(x)$	۱	$\frac{۹}{۱۶}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۱۶}$	۰	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۹}{۱۶}$	۱



از روی نمودار دیده می‌شود که با تغییر مقدار متغیر از ۰ به ۱ مقدار تابع کم می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود و همچنین با تغییر مقدار متغیر از ۱ به ۲ مقدار تابع زیاد می‌شود و به ۱ نزدیک می‌شود.

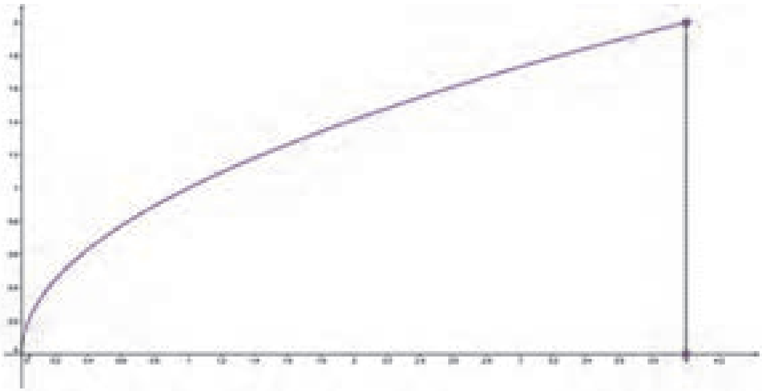
۲) تابع g را با قانون $g(t)=\sqrt{t}$ و دامنهٔ [۰ ، ۴] در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، باز نمایی‌های چندگانه

t	۰	۱	۲	۳	۴
$g(t)$	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲

از روی نمودار دیده می‌شود که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه، مقدار تابع نیز بزرگ می‌شود.

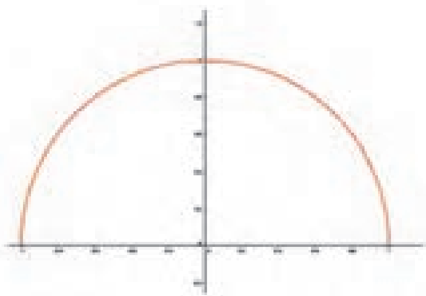


۳) تابع f را با قانون $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و دامنهٔ [-۱ ، ۱] در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه

x	۱-	$\frac{-۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
$f(x)$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۰



نمودار واقعاً مربوط به یک نیم‌دایره است ولی با رسم تقریبی می‌توان شبیه نیم‌دایره بودن آن را به‌دست آورد.

۴) در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آنها ۲ واحد بیشتر از طول یکی از اضلاع آن است، مساحت آنها تابعی از طول وتر است.
الف) دامنه و قانون این تابع را به‌دست آورید.
ب) جدول مناسبی برای این تابع رسم کنید و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید و رفتار این تابع را توضیح دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

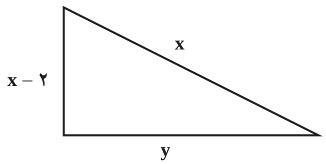
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، باز نمایی‌های چندگانه، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

$$x^۲ = (x-۲)^۲ + y^۲ \rightarrow y = \sqrt{۴x-۴} \Rightarrow f(x) = s = \frac{(x-۲)y}{۲} = \frac{(x-۲)\sqrt{۴x-۴}}{۲}$$

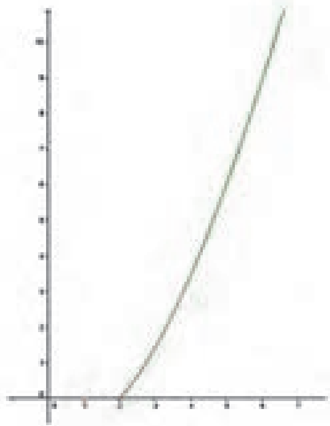
$$\Rightarrow S = (x-۲)\sqrt{x-۱}$$

دامنهٔ این تابع کلیه مقادیر ممکن برای طول وتر است که حداقل ۲ خواهد بود.

$D_f=(۲,+\infty)$



x	۲	۳	۴	۵	....	$+\infty$
$f(x)$	۰	$\sqrt{۲}$	$۲\sqrt{۳}$	۶	....	$+\infty$



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه‌اش، مقدار تابع نیز بزرگ می‌شود تا جایی که اگر مقدار متغیر بسیار بزرگ شود مقدار تابع نیز بسیار بزرگ و از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود که به اصطلاح گوییم $f(x)$ به بی‌نهایت می‌رود. یعنی با بزرگ شدن وتر مساحت نیز بزرگ می‌شود.

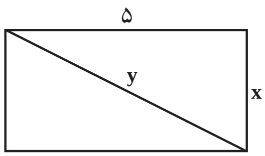
۵) در مستطیل‌هایی که طول یک ضلع آن ۵ واحد است، طول قطر مستطیل تابعی از طول ضلع دیگر مستطیل است.

الف) اگر مستطیل‌های با مساحت حداکثر ۱۰۰ واحد را در نظر بگیریم، دامنه و قانون این تابع را مشخص کنید.

ب) جدول مناسبی برای این تابع رسم کنید و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید و رفتار این تابع را توضیح دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، باز نمایی‌های چندگانه، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)



الف) ابتدا قانون این تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$y^{۲} = x^{۲} + ۲۵ \Rightarrow y = \sqrt{x^{۲} + ۲۵} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^{۲} + ۲۵}$$

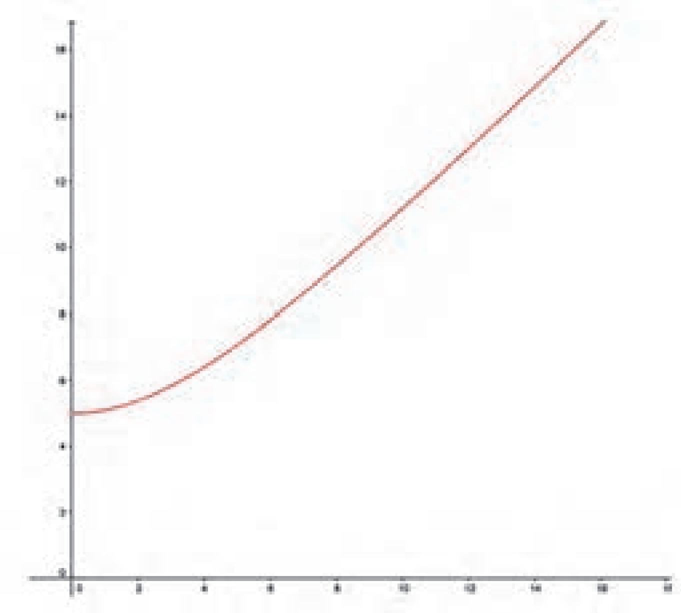
از آنجا که مستطیل‌های مورد نظر حداکثر ۱۰۰ واحد مساحت دارند باید داشته باشیم:

$$S = ۵x \leq ۱۰۰ \Rightarrow x \leq ۲۰ \Rightarrow ۰ < x \leq ۲۰$$

پس دامنهٔ این تابع بازهٔ $(۰,۲۰]$ است.

ب)

x	۰	۱	۴	۸	....	۲۰
$f(x)$	۵	$\sqrt{۲۶}$	$\sqrt{۴۱}$	$\sqrt{۸۹}$	....	$\sqrt{۴۲۵}$



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه‌اش، مقدار تابع یعنی طول قطر نیز افزایش می‌یابد.

بخش پنجم: نمودار برخی تابع‌های خاص

اهداف بخش

- آشنایی با تابع‌های چندجمله‌ای و نمایش جبری و دامنهٔ آنها
- تشخیص تغییرات نمودار تابع $y=ax+b$ به ازای تغییرات a و b به کمک نرم‌افزار جئوجبرا
- آشنایی با نمودار تابع‌های درجهٔ دوم به کمک نرم‌افزار جئوجبرا
- حل معادلهٔ درجهٔ دوم به کمک نمودار تابع درجهٔ دوم
- تشخیص تابع‌های مساوی

واژه‌های کلیدی:
تابع چند جمله‌ای، تابع خطی، تابع ثابت، تابع درجهٔ دوم، نمودار تابع

نگاه کلی به بخش

پس از شناخت مفهوم تابع و نمایش‌های آن لازم است تابع‌هایی که در عمل بسیار با آنها برخورد می‌کنیم را بشناسیم تا در به‌کارگیری تابع‌ها مهارت کافی داشته باشیم. در این بخش به‌دلیل پرکاربرد بودن تابع‌های چندجمله‌ای، خطی، درجهٔ دوم، ثابت در توصیف پدیده‌های طبیعی، چگونگی این تابع‌ها را از لحاظ نموداری و ضابطه بررسی می‌کنیم.

ورود به مطلب:
برای شروع این بخش می‌توانیم با این مثال شروع کنیم که پس از شناخت موجوداتی به نام حیوان لازم است برای شناخت بهتر، آنها را دسته‌بندی کنیم و انواعی از آنها را که بیشتر با آنها برخورد می‌کنیم با جزئیات بیشتری بشناسیم. در مورد تابع‌ها که مفهوم کلی آنها را شناختیم باید انواعی از آنها را که بیشتر با آنها برخورد می‌کنیم دسته‌بندی کنیم و آنها را با جزئیات بیشتری بشناسیم.

کار در کلاس ۶

دو تابع چند جمله‌ای مثال بزنید.

اهداف:

- پرورش تفکرواگرا

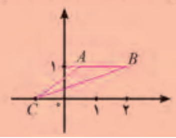
مثال: $y = x^{۲} - ۵x$ و $y = x^{۳} + ۵x - ۱$

در ادامه به دستهٔ خاصی از توابع چندجمله‌ای که توابع درجهٔ اول یا همان توابع خطی هستند پرداخته می‌شود. هنرجویان قبلاً با این توابع به عنوان رابطه‌های خطی آشنا شده‌اند و در اینجا از نقطه نظر یک تابع به آنها نگاه خواهند کرد. از میان آنها تابع ثابت ممکن است چالش‌هایی به همراه داشته باشد که دربارهٔ آن بحث مستقلی انجام شده است.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۲

در زیر پاره‌خط AB به طول a به موازات محور xها رسم شده است. فاصلهٔ پاره‌خط AB تا محور xها برابر ۱ است. نقطه C به طول x را روی محور اعداد در نظر می‌گیریم. مساحت مثلث ABC تابعی از طول نقطهٔ C است، این تابع را f بنامید.



۱) مقدارهای $f(۰)$ و $f(۵)$ و $f(-۸)$ را تعیین کنید.

۲) جدول این تابع را رسم کنید؛ قانون آن را مشخص نمایید و نمودار آن را رسم کنید.

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم تابع ثابت
- آشنایی با قانون توابع ثابت
- آشنایی با نمودار توابع ثابت

مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

۱) $f(-۸) = f(۵) = f(۰) = \frac{a}{۲}$

۲) اگر طول نقطهٔ C را x در نظر بگیریم داریم :

x	-۲	-۱	۰	۱	....	۲۰
$f(x)$	$\frac{a}{۲}$	$\frac{a}{۲}$	—	$\frac{a}{۲}$	....	$\frac{a}{۲}$

قانون این تابع به‌صورت $f(x) = \frac{a}{۲}$ می‌باشد. نمودار این تابع خطی افقی به فاصله $\frac{a}{۲}$ از محور طول‌ها است.

از طریق این فعالیت باید برای هنرجویان توضیح داده شود که مقدار این تابع در همهٔ نقاط با هم مساوی است و این گونه توابع را تابع ثابت می‌نامند.

فعالیت آموزشی

با استفاده از جئوجبرا، نمودار تابع‌های خطی $y=ax+b$ را به ازای مقادیر مختلفی از a و b رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (چگونگی استفاده از جئوجبرا در صفحهٔ بعد توضیح داده شده است.)

۱) با ثابت نگه داشتن a و تغییر مقادیر b، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به‌دست آمده، نسبت به هم چگونه است؟

۲) با تغییر مقادیر a، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ (مقادیر مثبت و منفی را برای a در نظر بگیرید.)

۳) علامت a چه تأثیری بر نمودار تابع‌های خطی دارد؟ وضعیت زاویهٔ خط با محور طول‌ها را توصیف کنید.

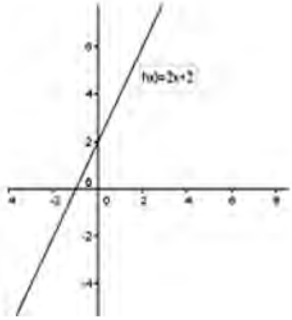
۴) آیا هر خطی در صفحه، نمودار یک تابع خطی است؟

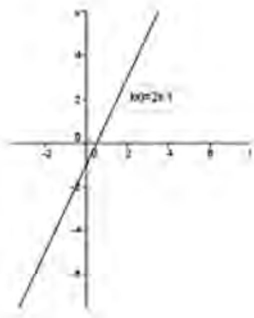
اهداف موضوعی:

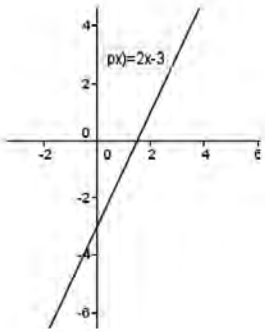
- آشنایی با نمودار توابع خطی در حالت‌های مختلف
- درک رابطهٔ بین تغییرات a و تغییرات نمودار توابع $y = ax + b$ با ثابت بودن b
- درک رابطهٔ بین تغییرات b و تغییرات نمودار توابع $y = ax + b$ با ثابت بودن a
- تشخیص تفاوت خط‌های عمود بر محور طول‌ها با سایر خط‌ها

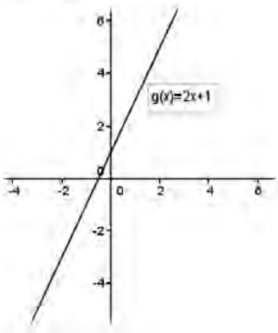
مهارت‌ها و فرایندها:

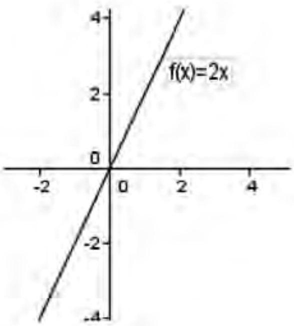
- پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، مقایسه کردن، ارتباطات کلامی، کار با نرم‌افزار





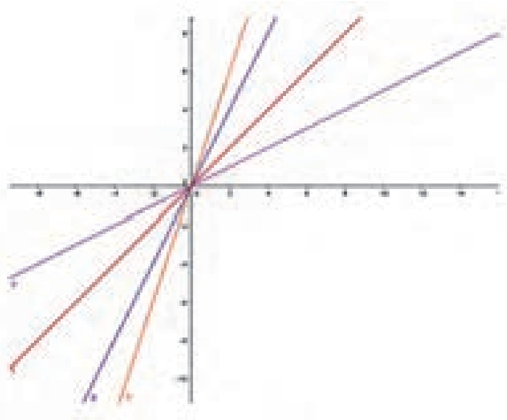




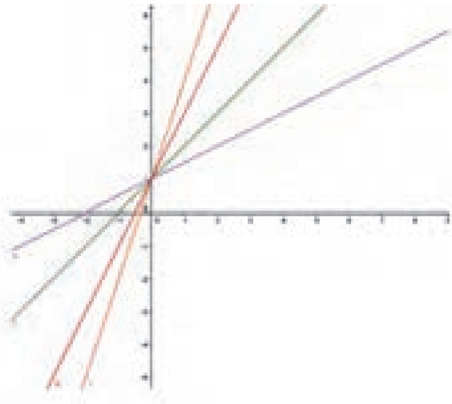


۱ نمودار توابع $f(x)=۲x$ و $g(x)=۲x+۱$ و $h(x)=۲x+۲$ و $k(x)=۲x-۱$ و $p(x)=۲x-۳$ در صفحهٔ قبل رسم شده‌اند: در این توابع مقدار a ثابت و مقدار b تغییر می‌کند. دیده می‌شود نمودار این توابع به موازات یکدیگر رسم شده‌اند. این خط‌ها همگی با هم موازیند و فقط محل تلاقی نمودار آنها با محور عرض‌ها تغییر می‌کند.

۲ نمودار تابع $f(x) = ax$ به ازای مقادیر مختلف a در زیر رسم شده‌اند. دیده می‌شود که تمام این خط‌ها از مبدأ می‌گذرند و با تغییر a این خط‌ها حول مبدأ دوران می‌کنند و تقریباً کلیهٔ خط‌های گذرنده از مبدأ را می‌سازند.



به‌عنوان مثالی دیگر، نمودار تابع $f(x) = ax +۱$ به ازای مقادیر مختلف a در زیر رسم شده‌اند. دیده می‌شود که تمام این خط‌ها از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می‌گذرند و با تغییر a این خط‌ها حول این نقطه دوران می‌کنند و تقریباً کلیهٔ خط‌های گذرنده از این نقطه را می‌سازند.



۳ اگر a مثبت باشد نمودار تابع با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ تند می‌سازد و اگر a منفی باشد خط نمودار تابع با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ باز می‌سازد. صفر بودن a نیز باعث می‌شود خط نمودار تابع، با محور طول‌ها موازی شود.

۴ خیر، خط‌هایی که بر محور طول‌ها عمودند نمی‌توانند نمودار یک تابع باشند.

دبیران در صورت داشتن وقت و آمادگی هنرجویان می‌توانند این مسئله که نمودار توابع با چه ویژگی مهمی تشخیص داده می‌شوند را مطرح کنند. نمودار یک تابع به گونه‌ای است که هر خط عمود بر محور طول‌ها حداکثر در یک نقطه آن شکل را قطع می‌کند، زیرا به ازای هر مقدار در دامنهٔ تابع فقط یک مقدار برای تابع داریم. برعکس هر شکلی در صفحه با این ویژگی، حتماً نمودار یک تابع است که دامنهٔ آن از تصویر عمودی آن شکل روی محور طول‌ها به‌دست می‌آید و به ازای هر مقدار در دامنه برای یافتن مقدار تابع یک خط عمود بر محور طول‌ها در آن نقطه رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با شکل را می‌یابیم آن را روی محور عرض‌ها تصویر می‌کنیم تا مقدار تابع به‌دست آید.

در ادامه توابع درجهٔ دوم مطرح می‌شوند.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۲

به کمک جئوجبرا، نمودار تابع $y=x^2$ را رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (در هر مرحله یک لغزنده تعریف کنید.)

۱) نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=x^2+c$ را به ازای مقادیر مختلف c در لغزندهٔ c رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=x^2+c$ را با نمودار تابع $y=x^2$ توصیف کنید.

۲) نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=(x-h)^2$ را به ازای مقادیر مختلف h (در لغزندهٔ h) رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=x^2$ را با نمودار تابع $y=(x-h)^2$ توصیف کنید.

۳) نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=ax^2$ را به ازای مقادیر مختلف مثبت برای a رسم کنید. با تغییر a، وضعیت نمودار $y=ax^2$ چه تغییری نسبت به نمودار $y=x^2$ پیدا می‌کند؟

۴) با تغییر علامت a از مثبت به منفی، چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

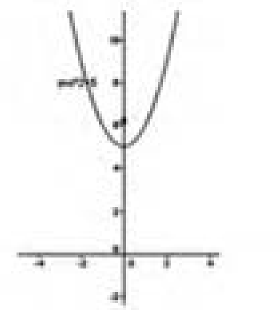
اهداف موضوعی:

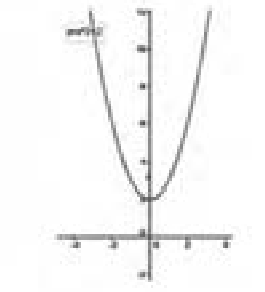
- تشخیص نمودار توابع درجهٔ دوم
- تشخیص تأثیر تغییر ضرایب بر رفتار تابع

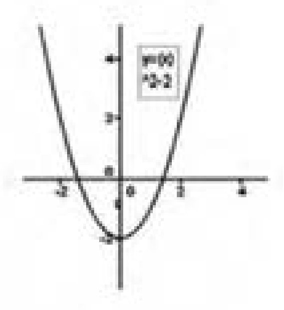
مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، مقایسه کردن، کار با نرم‌افزار، ارتباطات کلامی

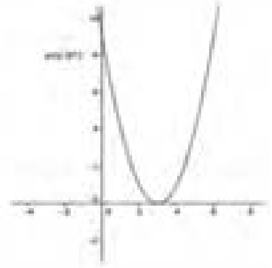
۱ با رسم نمودار تابع $y = x^2+c$ به ازای مقادیر مختلف c مشاهده می‌شود که نمودار تابع $y = x^2$ در راستای محور عرض‌ها جا به‌جا می‌شود. این جابه‌جایی در صورتی که مقدار c مثبت باشد رو به‌بالا و در صورتی که c منفی باشد رو به‌پایین خواهد بود.

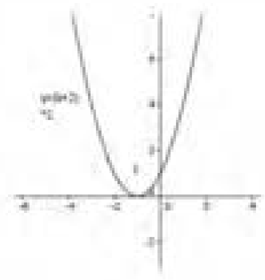


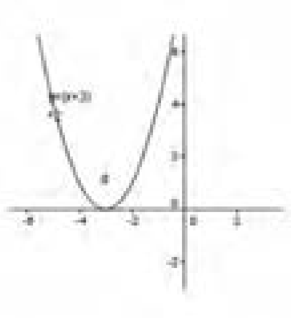




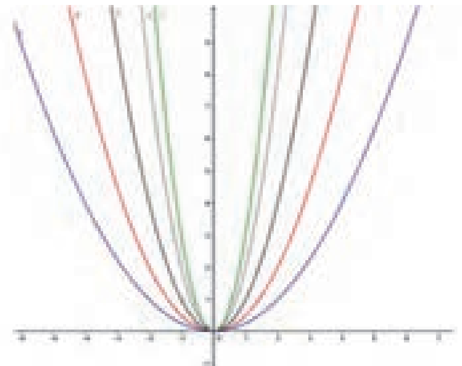
۲ با رسم نمودار تابع $y = (x - b)^2$، نمودار تابع $y = x^2$ در راستای محور طول‌ها جابه‌جا می‌شود. این جا به‌جایی در صورتی که مقدار b مثبت باشد رو به‌سمت راست و در صورتی که b منفی باشد رو به‌سمت چپ خواهد بود.



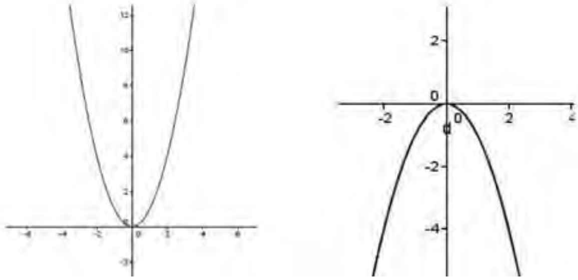


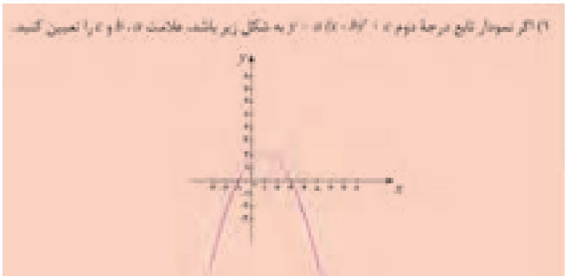


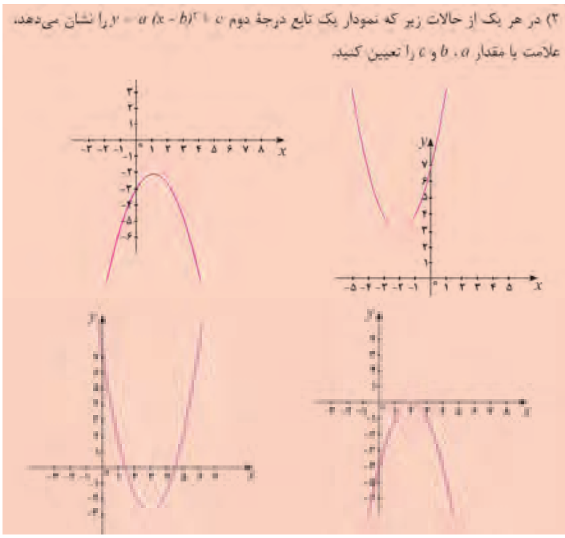
۳ با رسم نمودار تابع $y = ax^2$ به ازای مقادیر مختلف a، دهانه نمودار تابع $y = x^2$ بازتر یا بسته‌تر می‌شود. هرچه مقدار a بزرگ‌ترشود دهانهٔ نمودار بسته‌تر و هر چه مقدار a کوچک‌تر شود، دهانه نمودار بازتر می‌شود و همهٔ نمودارها از مبدأ می‌گذرند.



۴ دهانهٔ نمودار تابع $y = ax^2$ در صورتی که مقدار a مثبت باشد رو به بالا است و اگر a منفی باشد دهانهٔ نمودار رو به پایین می‌شود.







اهداف :

تشخیص شکل کلی نمودار توابع درجهٔ دوم از روی علامت و مقدار عددی a و b و c

پرورش مهارت‌های نمایش مفهوم با ارائه‌های مختلف، برقراری پیوندها و اتصال‌ها (بین نمایش جبر و نمایش هندسی)

۱ a منفی است زیرا دهانهٔ نمودار رو به پایین است. b مثبت است زیرا نمودار به راست منتقل شده است. c مثبت است زیرا در صورت منفی بودن همهٔ مقادیر تابع باید منفی شود در حالی‌که این تابع مقادیر مثبت هم دارد. از میزان انتقال به راست معلوم است که b=۱ و از میزان انتقال به بالا معلوم است که c=۲.

۲ الف) بنا به دلایلی که در ۱ گفته شد: a مثبت و b منفی و c مثبت است.

ب) a منفی و b مثبت و c منفی است.

پ) a منفی و b مثبت و c صفر است.

ت) a مثبت و b مثبت و c منفی است.

در ادامه کاربردی از رسم نمودار توابع برای حل معادله‌ها مطرح شده است. این روش برای حل هر معادله‌ای به‌صورت $f(x)$ = ۰ قابل به‌کار بردن است. اما در اینجا صرفاً برای حل معادله‌های درجهٔ دوم به‌کار گرفته شده است.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۷

۱) نمودار تابع $y = x^2 + x - 2$ را با جئوجبرا رسم کنید.

۲) نمودار این تابع در چه نقاطی محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

۳) جواب های معادلهٔ $x^2 + x - 2 = 0$ چه مقادیری هستند؟

۴) آیا بین جواب‌های این معادله و محل تقاطع نمودار آن تابع با محور طول‌ها رابطه‌ای وجود دارد؟

۵) آیا این نتایج برای هر معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری هم برقرار است؟

اهداف موضوعی:

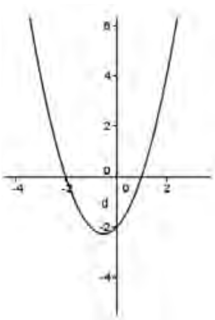
حل معادلهٔ درجهٔ دوم از طریق نمودار تابع درجهٔ دوم

- درک مفهوم جواب معادله
- درک رابطهٔ بین جواب‌های معادله و محل تقاطع نمودار تابع با محورها

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، بازنمایی چندگانه، ارتباطات کلامی، استدلال کردن، تقسیم کردن

۱



۲ نقاط برخورد به طول ۲- و ۱ هستند.

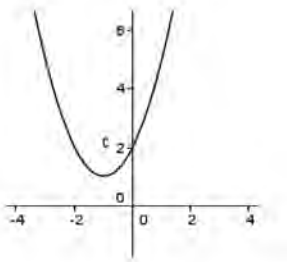
۳ $\Delta = b^۲ - ۴ac$ را به‌دست می‌آوریم $\Delta = ۹$ در نتیجه جواب‌های معادله به صورت $x = -۲$ و $x = ۱$ است.

۴ بله جواب‌های این معادله دقیقاً طول همان نقاط برخورد نمودار آن تابع با محور طول‌ها است.

۵ بله، زیرا محل برخورد نمودار یک تابع f با محور طول‌ها اگر در نقطهٔ x صورت بگیرد این به معنای آن است که $f(x) = ۰$. پس جواب‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ همان طول محل برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها است.

مسئله‌ها

۱) نمودار تابع $y = x^۲ + ۲x + ۲$ را در دامنهٔ $[-۴ , ۴]$ رسم کنید.



مهارت‌ها و فرایندها:

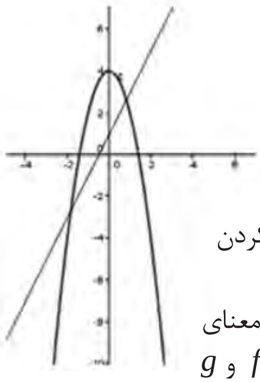
- بازنمایی‌های چندگانه، پیوندها و اتصال‌ها

۲) نمودارهای دو تابع $y = ۲x + ۱$ و $y = -۲x^۲ + ۴$ را با جئوجبرا رسم کنید.

الف) این دو نمودار در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

ب) طول نقاط برخورد این دو نمودار، در چه معادله‌ای صدق می‌کنند؟

پ) محل برخورد این دو نمودار را از طریق حل یک معادله به دست آورید.



مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه ، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن

الف) در دو نقطه نمودارها همدیگر را قطع کرده‌اند.

ب) اگر x طول یک نقطهٔ برخورد نمودارهای دو تابع f و g باشد این به معنای آن است که $f(x) = g(x)$. پس طول نقاط برخورد نمودارهای دو تابع f و g جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g(x)$ هستند. پس در اینجا معادله $-۲x^۲+۴=۲x+۱$ طول نقاط برخورد نمودارهای توابع $y=۲x+۱$ و $y=-۲x^۲+۴$ را به دست می‌دهد.

پ) معادله‌ای که جواب‌های آن طول نقاط برخورد را به‌دست می‌دهد به شکل $۲x^۲+۲x-۳=۰$ ساده می‌شود. پس به شکل زیر حل خواهد شد.

$$\Delta = b^۲ - ۴ac \Rightarrow \Delta = ۲۸ \Rightarrow x = \frac{-۲ \pm \sqrt{\Delta}}{۴} = \frac{-۲ \pm \sqrt{۲۸}}{۴} \Rightarrow x = \frac{-۲ + \sqrt{۲۸}}{۴} \ , \ x = \frac{-۲ - \sqrt{۲۸}}{۴}$$

۳) اگر توپی را به هوا پرتاب کنیم، ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با h و زمان را با t نشان دهیم، برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت $h = -5t^{2} + 20t$ است.

الف) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

ب) با رسم نمودار این تابع، تعیین کنید که این توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

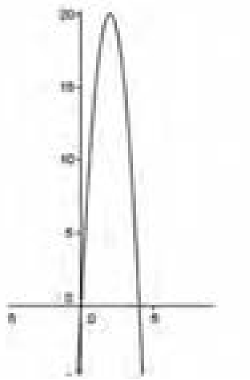
پ) در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ از لحاظ فیزیکی وضعیت تعداد جواب‌ها را تفسیر کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن

الف) این توپ از زمین به هوا می‌رود و دو باره به زمین برمی‌گردد. قانون این تابع فقط در این بازهٔ زمانی که توپ از سطح زمین به هوا می‌رود و به سطح زمین بازمی‌گردد اعتبار دارد. لحظاتی که توپ در سطح زمین است همان جواب‌های معادله $h = -5t^{2}+20t = 0$ است که ۰ و ۴ است. پس دامنهٔ این تابع بازهٔ $[0,4]$ است.

ب) با جئوجبرا نمودار تابع $h = -5t^{2}+20t$ را رسم می‌کنیم و دیده می‌شود که بیشترین مقدار ارتفاع توپ ۲۰ متر است.



پ) باید معادلهٔ $-5t^{2}+20t = 2$ را حل کنیم. با حل جبری این معادله داریم :

$t = \dfrac{-20 \pm \sqrt{360}}{-10} = \dfrac{10 \pm 3\sqrt{10}}{5}$. این معادله دو جواب در بازهٔ $[0,4]$ دارد.

یعنی توپ در دو لحظهٔ مختلف در ارتفاع ۲ متری قرار می‌گیرد، یکی هنگام بالا رفتن و یکی هنگام پایین آمدن.

مناسب است که این جواب‌ها را به طور نموداری با تقاطع نمودار بالا با خط افقی $y = 2$ نیز به‌دست آوریم و تفسیر کنیم.

تاریخ مفهوم تابع

تابع از اواخر قرن شانزدهم به دنیای ریاضی وارد شد. مفهوم تابع در تشخیص ارتباط بین مقادیر چند کمیت با هم است. تا زمانی که مسئله‌ای برای انسان پیش نیامده باشد که حل آن، نیازمند شناخت ارتباط بین کمیت‌ها باشد، نیازی به مفهوم تابع نبوده است. اولین مسائلی که نیازمند مفهوم تابع بود توسط گالیله پیش آورده شد که به مطالعه حرکت اجسام و سقوط آزاد اجسام پرداخت. در این مسئله یافتن ارتباط بین زمان و مکان اجسام مطرح بود که امروزه تابع حرکت جسم نام دارد. همچنین دکارت در اوایل قرن هفدهم با ساختن هندسه تحلیلی، برای توصیف خط‌ها و خم‌ها به ارتباط بین مؤلفه‌های طول و عرض نقاط این شکل‌ها رسید که بیان صریح آنها نیازمند مفهوم تابع بود.

ریاضی در طول تاریخ خود، همواره با فیزیک و مسائل مربوط به محیط پیرامونی همراه و عجین بوده است و تا شروع قرن بیستم هر ریاضیدانی مفاهیم ریاضی را در قالب مفاهیم فیزیکی یا هندسی دنیای پیرامون خود می‌دیده است. اولین جاهایی که مفهوم تابع رخ می‌دهند، ارتباط بین کمیت‌های متغیر فیزیکی است، به همین خاطر، نگاه اولیه به تابع به صورت ارتباط بین دو کمیت در حال تغییر است که متغیر اصلی را متغیر مستقل و کمیت وابسته به آن را متغیر تابع می‌نامند. در این نگاه، مفهوم تابع بسیار فیزیکی است و کمیتی در کار است که در حال تغییر کردن است و اصطلاح «متغیر» نیز از همین جا به وجود می‌آید.

رسیدن به مفهوم تابع به عنوان یک شیئی مستقل و نام و نشان‌دار که هیچ پیشینه‌ای در ذهن کسی ندارد، کار آسانی نیست و ریاضیدان‌ها باید بسیار کار کنند تا به تعریفی درخور دست پیدا کنند. عملاً این فعالیت ریاضیدان‌ها از دورهٔ لایب‌نیتس و نیوتون تا اوائل قرن بیستم که تعریف امروزهٔ تابع به‌وجود آمد حدوداً سه و نیم قرن ادامه یافت. در این مدت هر کس برای خود تعریفی و برداشتی از تابع داشت و پس از پالایش‌های بسیار، ما امروز تعریف شسته رُفته‌ای از تابع در اختیار داریم.

در زمان گالیله و دکارت، تنها اشیای شناخته شده در ریاضی، اعداد، نقاط، خط، صفحهٔ هندسی و اشیای ساخته شده از طریق آنها بوده‌اند. حتی چیزی به نام مجموعهٔ اعداد به عنوان یک شیئ ریاضی مورد قبول نبود. روابط و اعمال بین اعداد، در بیان خواص و گزاره‌ها به کار می‌رفت ولی به عنوان شیئ مستقل دیده نمی‌شدند. مثلاً ما اشیای فیزیکی اطراف خود را به عنوان شیئ به رسمیت

می‌شناسیم ولی رابطهٔ بالا یا پایین بودن دو شیئی نسبت به یکدیگر را به عنوان یک شیئ نمی‌شناسیم. تابع نیز از جنس رابطه است ولی نه رابطه‌ای بین دو عدد خاص بلکه رابطه‌ای بین دسته‌ای از اعداد با دسته‌ای از اعداد دیگر. چنین موجودی در آن زمان وجود نداشت و باید به طریقی به وجود می‌آمد.

در مورد برخی توابع خاص که در عمل با آنها برخورد می‌شد، قانونی که ارتباط بین دو کمیت را برقرار می‌ساخت وجود داشت و در تعریف اولیه از تابع، ریاضیدان‌ها می‌توانستند برای شناسایی تابع به همین قانون که با یک عبارت جبری و تحلیلی بیان می‌شد، اشاره کنند. چنین برداشتی از تابع را اولر در سال ۱۷۴۸ میلادی در یکی از کتاب‌هایش به شکل زیر ارائه کرد.

« یک تابع از یک متغیر، فرمولی جبری و تحلیلی است که از طریق اَعمال محاسباتی دلخواه روی متغیر و اعداد، تشکیل شده است. »

توابعی که به این شکل به وجود می‌آیند را می‌توانیم توابع اولری بنامیم. اگرچه توابع اولری، همهٔ توابعی را که ما می‌شناسیم در بر نمی‌گیرند ولی برای رفع نیازهای مرتبط با تابع در آن زمان کافی بوده‌اند. با کار روی توابع، این مفهوم توانست به عنوان یک شییء مستقل و با نام و نشان ریاضی، هویت بیابد و پذیرفته شد که در مورد توابع، همانند اعداد می‌توان صحبت کرد و خواص آنها را مورد مطالعه قرار داد، به ویژه مفاهیم پیوستگی و مشتق‌پذیری در مورد آنها قابل طرح است.

در برخورد با مسائل دیگری که در آنها خود تابع به عنوان مجهول مطرح می‌شود، نیاز به توابعی احساس شد که ممکن بود تابع اولری نباشند. مثلاً دالامبر در ۱۷۴۶ شکل یک تار مرتعش که نمودار یک تابع است را مورد مطالعه قرار داد و نتیجه گرفت شکل تار مرتعش وابسته به شکل اولیهٔ آن است. آیا شکل اولیهٔ یک تار حتماً به صورت نمودار یک تابع اولری است؟ دالامبر خودش معتقد بود که شکل اولیهٔ تار باید به صورت نمودار یک تابع با عبارت تحلیلی باشد، ولی اولر با این نظر مخالفت کرد و نهایتاً در ۱۷۵۵ تعریف خود از تابع را کلّیت داد و در کتاب دیگر خود تابع را به صورت زیر تعریف کرد.

« اگر کمیتی به‌گونه‌ای وابسته به یک کمیت دیگر باشد، که تغییر کمیت دوم موجب تغییری در کمیت اول شود، کمیت اول را تابعی از کمیت دوم نامیم. این تعریف در کلی‌ترین حالت قابل به‌کار بردن است و شامل هر طریقی که مقدارهای کمیت دوم بر حسب مقدارهای کمیت اول مشخص شوند، می‌شود. بنابراین، اگر x مقدار کمیت متغیر را نشان دهد، هر کمیت دیگری که به هر شکلی توسط آن تعیین شود تابعی از x نامیده می‌شود.»

در این زمان تابع هویت مستقل خود را در افکار اکثر ریاضیدان‌ها یافته بود و نیازی نبود تا برای اشاره به آن حتماً عبارتی تحلیلی در کار باشد تا به وجود تابع اطمینان پیدا کنند و وجود رابطه‌ای تعیین کننده با هر نوع ماهیتی، برای قبول وجود یک تابع کافی بود. البته توافق همگانی نسبت به مفهوم تابع به سادگی قابل حصول نبود و هر ریاضیدانی نظرگاه خاص خود را داشت، زیرا توابع به شکل‌های گوناگونی در مسائل ظاهر می‌شدند و رویه واحدی برای برخورد با توابع وجود نداشت و هنوز معلوم نبود چه نگاهی به تابع ارزشمند و مناسب است.

یکی از تغییرات که در مفهوم تابع رخ داد، آزاد شدن آن از ارتباط بین تغییرات کمیت‌های فیزیکی است. تعریف فوریه از تابع به گونه‌ای است که به تغییرات یک متغیر به عنوان مقادیر عددی معمولی نگاه می‌کند که متغیر می‌تواند اختیار کند و مقدارهای تابع نیز مقادیر عددی هستند که به ازای مقدارهای در نظر گفته شده برای متغیر با روشی معین که لزوماً تحت قانون ثابتی هم نیستند، به‌دست می‌آیند. در این نگاه لزومی ندارد که برای درک تابع، به مفاهیم فیزیکی و تغییراتی که در زمان رخ می‌دهند متوسل شویم و همان روش برای تعیین یک عدد از طریق یک عدد دیگر، تابع را مشخص می‌کند. دیریکله با کامل کردن کارهای فوریه در یافتن شرایط همگرایی سری‌های فوریه با تبعیت از فوریه تعریف تابع را در سال ۱۸۳۷ به شکل زیر ارائه می‌کند.

«y تابعی از x است، هر گاه طبق قانونی به ازای هر مقدار x مقدار منحصر بفردی برای y نظیر شود. »

در آن زمان این تعریف بسیار کلی به‌نظر می‌آمد و ضرورت چنین تعریفی روشن نبود. این سؤال مطرح بود که آیا آنالیز و حسابان نیازی به این‌گونه توابع که معلوم نیست قانون آنها چگونه ساخته شده است، دارد؟ با رشد ریاضی و ایجاد شاخهٔ آنالیز و پیدایش نظریهٔ مجموعه‌ها و وارد شدن مسائل پیچیده‌تر، نیاز به تعمیم مفاهیم، موجب پیدایش فضاهای کلی‌تر مانند فضاهای متریک و توپولوژیک شد. بحث توابع روی این فضاها نشان داد، دامنه و بُرد توابع نقشی اساسی در خواص توابع بازی می‌کنند. در تعمیم تعریف تابع، کاراتئودری در ۱۹۱۷ ، مجموعه‌های غیر عددی را نیز به عنوان دامنهٔ تابع معرفی کرد و نهایتاً بورباکی در ۱۹۳۹ تعریف تابع را به‌عنوان قانون نظیرسازی از اعضای یک مجموعه به مجموعهٔ دیگر عرضه کرد که نهایتاً زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ حاصلضرب را می‌سازد. این، تعریف رسمی تابع در ریاضیات امروزه است.

تعریف امروزهٔ تابع در ریاضیات دانشگاهی بسیار مختصر و مفید و منطقی است و بر اساس مجموعه‌ها انجام می‌شود. ولی این تعریف مختصر و منطقی برای شروع

آموزش تابع مفید نیست، زیرا بر اساس دانش قبلی هنرجو بنا نمی‌شود و مفهوم واقعی تابع را که ارتباط بین دو کمیت است به‌خوبی نشان نمی‌دهد. آموزش صحیح یک مفهوم معمولاً از طریق تعریف منطقی صورت نمی‌گیرد و روش‌های مفهوم‌سازی باید به کار گرفته شوند. به‌همین علت در این کتاب هیچ‌گونه بحثی از تعریف منطقی تابع به‌صورت مجموعهٔ زوج مرتبی دیده نمی‌شود.

پس از تبحر روی مفهوم تابع‌های با متغیر عددیِ و مقادیر عددی می‌توان از تابع‌های با دامنه‌های دیگر هم صحبت کرد. مثلاً تابع‌های با دامنهٔ گسسته از انسان‌ها یا سیارات یا چیزهایی دیگر که در ارتباط با زندگی روزمره هم باشد و فایده‌ای در تعریف آنها دیده شود. گسترش مفهوم تابع بستگی به نیاز هنرجویان دارد که نهایتاً در کجاها با چه نوع تابع‌هایی روبرو شوند.

منابع و مراجع

۱ STANDARDS & PRINUPIES FOR SCHOOL MATHE MATICS, NCTM

۲ ASSESSMENT & EVAIUATION, NCTM

۳ تدریس ریاضی در دورهٔ ابتدایی، گیل باتل، ترجمهٔ شهرناز بخشعلی زاده، انتشارات سمت ۱۳۸۹.

۴ رویکرد اسلامی به برنامه‌ریزی درسی، دکتر ناصر بروجردیان (گروه ریاضی۱۳۸۶).

۵ بررسی اثر آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه: زینب قربانی سخت، فرزانه نوروزی، شهرناز بخشعلی زاده.

۶ بررسی آموزش مبتنی بر برقراری ارتباطات و اتصالات: حمید دافعی، حمید صفدری، شهرناز بخشعلی‌زاده.

۷ بررسی تغییرات کتاب‌های درسی و روش تدریس معلمان: معینی، ابراهیم ریحانی، شهرناز بخشعلی‌زاده.

۱۲، ۱۳، ۱۴: پایان نامه‌های دوره کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهیدرجایی.