

# فصل دوم



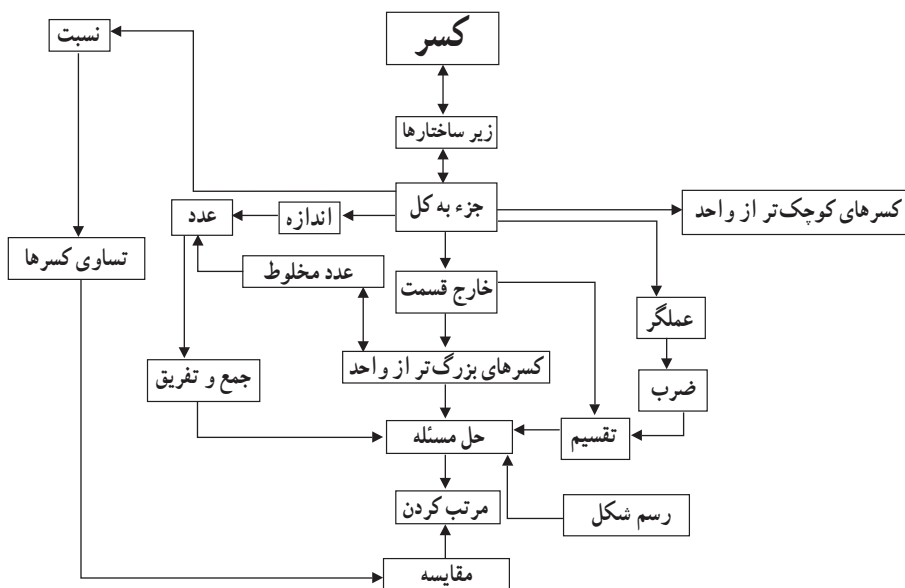
کسر



## نگاه کلی به فصل

این فصل شامل چهار درس است. در درس اول، علاوه بر یادآوری جمع و تفریق کسرها و اعداد مخلوط که دانش‌آموزان در سال گذشته آموخته‌اند، آنها با کوچک‌ترین مخرج و مضرب مشترک آشنا می‌شوند. در درس دوم، به ضرب کسرها اختصاص دارد. در این درس ضمن یادآوری ضرب کسرها و اعداد مخلوط، معکوس یک عدد معرفی می‌شود. همچنین روش دیگری برای یافتن جزء مجهول در تساوی کسرها ارائه می‌گردد. در سوم، به تقسیم کسرها اختصاص یافته است. در سال گذشته دانش‌آموزان با تقسیم عدد صحیح بر عدد صحیح، عدد صحیح بر کسر و کسر بر عدد صحیح آشنا شده‌اند. در این درس ضمن یادآوری این مفاهیم، تقسیم کسر بر کسر؛ ابتدا با کسرهایی با مخرج‌های مساوی و سپس با مخرج‌های نامساوی آموزش داده می‌شود. در درس چهارم، محاسبات با کسر را شامل می‌شود. در این درس دانش‌آموزان می‌آموزند زمانی که بالا و پایین خط کسری دو یا چند عمل جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم باشد، حاصل صورت و مخرج را جداگانه محاسبه نمایند و حاصل صورت را بر مخرج تقسیم نمایند. در این درس همچنین بر روش‌های مختلف مقایسه اعداد و استفاده از راهبرد رسم شکل در حل مسائل کسر تأکید شده است.

### شبکه مفهومی



## تصویر عنوانی

در روز ۱۳ آبان ۱۳۵۷، دانش‌آموزان تهرانی در اعتراض به دخالت‌های آمریکا در ایران، راهپیمایی کردند، ولی دژخیمان رژیم شاه، به آنان حمله کردند و آنان را به خاک و خون کشیدند. از آنجا که تأکید بر ارزش‌های یکی از عوامل فرهنگی در برنامه‌درسی ریاضیات است، هدف این تصویر نیز گرامیداشت یاد و خاطره شهدای دانش‌آموز روز ۱۳ آبان ۱۳۵۷ و تأکید بر نقش مؤثر دانش‌آموزان در عرصه‌های مهم اجتماعی و سیاسی است. بی‌گمان، دانش‌آموزان آگاه و رشید ما در مبارزه با استکبار، همواره نقشی فعال و فراموش‌ناشدنی ایفا کرده‌اند. اینک، آن رشادت‌ها و حماسه‌آفرینی‌ها، ایجاب می‌کند که قشر دانش‌آموز ما، در مبارزه با استکبار، سهم مهمی بر عهده گیرند و همچون گذشته از پیشگامان این قیام ملی باشند. معلمان می‌توانند پیرامون این مسائل و درس‌های روز ۱۳ آبان با دانش‌آموزان در کلاس به گفت‌وگو بپردازند. همچنین، برای گرامیداشت یاد و خاطره شهیدان گران‌قدر و والا مرتبه کشور عزیزمان در ادوار مختلف، عکس شش تن از فرزندان شهدا در تصویر مشاهده می‌شود. متن پایین صفحه برای ایجاد ارتباط بین تصویر و مبحث کسرها آورده شده است. می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا با انجام محاسباتی نظیر  $12 = \frac{84}{7} = \frac{8^\circ}{7} = \frac{1}{7} \times 8^\circ = \frac{1}{7} = \frac{12}{84} = \frac{12}{8^\circ}$  به درستی متن بی‌برند و آن را با کسر بیوند بزنند.

### دانستنی‌هایی برای معلم

#### زیرساختارهای کسر

کسر یکی از انتزاعی‌ترین مفاهیم ریاضی است که دانش‌آموزان در دوره ابتدایی با آن مواجه می‌شوند. برخی از محققان عقیده دارند که کسرها ساختار چند لایه‌ای دارند و درک مفهوم کسر به درک پنج زیرساختار جزء به کل، نسبت، عملگر، خارج قسمت و اندازه<sup>۱</sup>، و الحاق<sup>۲</sup> آنها به یکدیگر وابسته است. شرح مختصری از این زیرساختارها در ادامه ارائه شده است.

**زیرساختار جزء به کل:** با افزایش<sup>۳</sup> یک کمیت گسسته یا پیوسته به قسمت‌های هم‌اندازه و در نظر گرفتن قسمت‌هایی از آن، کسر به‌عنوان جزئی از کل حاصل می‌شود که به فرم  $\frac{a}{b}$  نوشته می‌شود.

۱- part-whole, ratio, operator, quotient & measure

۲- confluence

۳- افزایش (Partitioning) در واقع، در نظر گرفتن یک کمیت مشخص و تقسیم آن به چند قسمت مساوی است.

در زیر ساختار جزء به کل، کسر  $\frac{2}{3}$ ، به عنوان ۲ تکه کیک از یک کیک که به سه قسمت مساوی تقسیم شده است یا به عنوان ۲ عدد کیک کشمشی از ۳ عدد کیک کشمشی در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱).



شکل ۱- نمایش کسر  $\frac{2}{3}$  در زیر ساختار جزء به کل

اگرچه مطالعات نشان داده‌اند که دانش‌آموزان با درکی غیررسمی از رابطه جزء به کل به کلاس درس می‌آیند، زیر ساختار جزء به کل، نباید به‌تنهایی برای بیان مفهوم کسر تدریس شود. دانش‌آموزانی که تنها با زیر ساختار جزء به کل در کسرها آشنا می‌شوند، به اندازه کافی نمی‌توانند دیگر مفاهیم کسر را توسعه دهند.

**زیر ساختار نسبت:** در زیر ساختار نسبت، کسر مقایسه بین دو کمیت را بیان می‌کند و به عنوان یک شاخص مقایسه‌ای در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، کسر در این زیر ساختار، عدد نیست. برای مثال، نسبت تعداد مثلث‌ها به تعداد لوزی‌ها یا نسبت تعداد پرتقال‌ها به تعداد سیب‌ها در یک ظرف میوه (شکل ۲).



شکل ۲- نمایش نسبت ۲ به ۳، به شکل کسر  $\frac{2}{3}$  در زیر ساختار نسبت

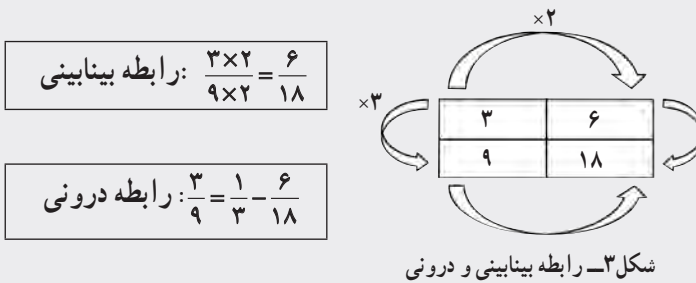
نولتینگ<sup>۱</sup> نسبت‌ها را به عنوان روابط بینابینی<sup>۲</sup> و درونی<sup>۳</sup> کسرها توصیف می‌کند. در رابطه بینابینی کسرها، بررسی رابطه بین حداقل دو نسبت، به الگوریتم «مخرج مشترک» منجر می‌شود. با ضرب یک عدد غیر صفر در دو کمیت صورت و مخرج در یک نسبت، دو نسبت هم‌ارز حاصل می‌شود. برای مثال، سه پیتزا برای نه نفر و شش پیتزا برای هجده نفر، نسبت‌های هم‌ارز هستند، چون سه ضربدر دو

۱- Noelting

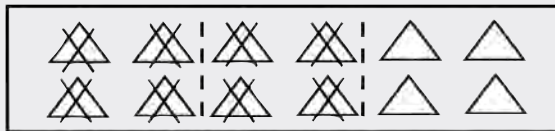
۲- Between Relationships

۳- Within Relationships

مساوی شش و نه ضربدر دو، مساوی هجده می‌شود. در رابطه درونی کسرها، همبستگی دو کمیت مجزا - که نسبت واحدی را دربردارند - بررسی می‌شود. با بررسی نسبت‌های بین این دو کمیت دیده می‌شود که هر دو نسبتی که رابطه ضربی یکسانی دارند، هم‌ارز هستند. برای مثال، سه پیتزا برای نه نفر و شش پیتزا برای هجده نفر نسبت‌های هم‌ارز هستند، چون سه برابر سه، مساوی نه و شش برابر سه، مساوی هجده است. رابطه درونی برای تعیین مقدار نسبی یا اندازه نسبت به‌کار می‌رود. دو رابطه در شکل زیر (شکل ۳) نشان داده شده‌اند.



**زیرساختار عملگر:** لامون عملگر را به‌عنوان یک تبدیل تعریف می‌کند که پاره‌خط‌ها را کوتاه یا بلند می‌کند، تعداد را در یک مجموعه از اشیاء، کاهش یا افزایش می‌دهد یا شکل‌ها را در صفحه هندسی و نقشه بزرگ‌نمایی می‌کند. مفهوم عملگر می‌تواند در بردارنده تفکری جبری باشد همانند تابعی که شکل‌های هندسی یا مجموعه‌ای از اشیاء را تغییر می‌دهد. مثال،  $\frac{2}{3}$  می‌تواند به‌عنوان دو-سوم از کمیتی درک شود.  $\frac{2}{3}$  از ۱۲ تا مثلث، ۸ تا مثلث می‌شود (شکل ۴).



شکل ۴- نمایش  $\frac{2}{3}$  در زیرساختار عملگر

زیرساختار عملگر به مفاهیم تناسب، ترکیب، همانی<sup>۱</sup> و وارون<sup>۲</sup> منجر می‌شود. در ضرب نیز به

۱- identity  
۲- inverse

خواص گروه<sup>۱</sup> منجر می‌گردد. در وضعیت «گروهی از»<sup>۲</sup>، اولین کسر روی کسر دوم عمل می‌کند. برای مثال،  $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$ ، می‌تواند به‌عنوان سه چهارم از نیمی از یک گروه در نظر گرفته شود، نتیجه این حاصل ضرب،  $\frac{3}{8}$  است. این نتیجه با تبدیل  $\frac{1}{4}$  به چهار قسمت مساوی و در نظر گرفتن سه قسمت از این قسمت‌ها حاصل می‌شود. مطرح کردن زیرساختار عملگر در برنامه درسی، نه تنها خواص جبری خاصی را برجسته می‌کند، به‌ویژه، به معکوس در ضرب<sup>۳</sup> و عضو خنثی<sup>۴</sup> منجر می‌شود، همچنین ورزیدگی در درک مفهوم توابع مرکب را مهیا می‌کند.

**زیرساختار خارج قسمت:** در زیرساختار خارج قسمت، هر کسر به‌عنوان نتیجه یا خارج قسمت یک تقسیم در نظر گرفته می‌شود. به طور خاص، کسر  $\frac{x}{y}$  بر ارزش عددی به‌دست آمده از تقسیم  $x$  بر  $y$  دلالت می‌کند به طوری که  $x$  و  $y$ ، هر دو اعداد صحیح هستند و  $y \neq 0$ . مثلاً، کسر  $\frac{2}{3}$  می‌تواند به‌عنوان خارج قسمت  $2 \div 3$  یا نتیجه تقسیم دو پیتزا میان سه نفر، به طوری که به هر نفر،  $\frac{1}{3}$  از هر پیتزا یا  $\frac{2}{3}$  از کل پیتزاها می‌رسد، تفسیر شود.

زیرساختار خارج قسمت کسرها، به ایجاد مقادیر هم‌ارز منجر می‌شود. به این معنا، زمانی که  $\frac{9}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  به‌عنوان وضعیت تقسیم محسوب شوند، به ترتیب نتایج، مقادیری هم‌ارز با ۳ و  $\frac{25}{10}$  هستند. همچنین معرفی کسرها به‌عنوان خارج قسمت به درک مفهوم عدد مخلوط یا کسرهای بزرگ‌تر از «یک» منجر می‌شود. برای مثال، هنگام افراز یا تقسیم پنج پیتزا میان سه نفر، به هر نفر یک پیتزای کامل و دو سوم از پیتزای دیگر یا  $1\frac{2}{3}$  پیتزا می‌رسد. به جای دادن یک پیتزای کامل به اولین نفر، هر پیتزا می‌تواند به سه قسمت تقسیم شود. در این وضعیت، جواب  $\frac{5}{3}$  می‌شود و هر نفر پنج سوم پیتزا یا ۵ تکه – که هر تکه یک سوم از هر پیتزا است – را دریافت می‌کند.

زیرساختار اندازه: در زیرساختار اندازه، کسر به‌عنوان یک عدد معرفی می‌شود که ویژگی کمی

۱- group properties

۲- “groups-of” situation

۳- multiplicative inverse

۴- identity elements

بودن کسرها را بیان می‌کند و به یک فاصله، اندازه‌ای را اختصاص می‌دهد. بدین منظور، کسری با صورت واحد (مانند  $\frac{1}{a}$ ) تعریف می‌شود و با تکرار این کسر از یک مبدأ معین، فاصله مورد نظر تعیین می‌شود. برای مثال  $\frac{2}{3}$  با فاصله ۲ تا  $\frac{1}{3}$  واحد از مبدأ متناظر است (شکل ۵).



شکل ۵- نمایش  $\frac{2}{3}$  در زیرساختار اندازه روی محور اعداد

افراز نقش بسزایی در درک زیرساختار اندازه دارد. کسر به‌عنوان اندازه، فرایند تکرار<sup>۱</sup> را یکپارچه می‌سازد طوری که یک واحد به یک مجموعه مرکب از اندازه‌های مساوی افزای می‌شود. مفهوم افزای، به شکل‌گیری مفاهیم جبری عملیات و هم‌ارزی کسرها منجر می‌شود. برای مثال، در وضعیت جمع، مانند  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ، فرایند جمع این کسرها به‌عنوان اندازه، به مختصات دو بردار به طول  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{4}$  نیاز دارد. این عمل به این صورت انجام می‌پذیرد که بردارها به دنبال هم قرار می‌گیرند و مکان حاصل جمع، جایی روی محور اعداد افزای شده است که بردار دوم پایان می‌یابد. علاوه بر مفهوم واحد، مفاهیم هم‌ارزی و مرتب کردن نیز در این زیرساختار، مطرح می‌شوند. هنگام افزای واحد به سه قسمت و متعاقباً به شش قسمت، دیده می‌شود که  $\frac{1}{6}$  نصف  $\frac{1}{3}$  است. پس  $\frac{2}{3}$  با  $\frac{1}{3}$  هم‌ارز است. این فرایند دست کم می‌تواند نشان دهد که زمان مرتب کردن اعداد از کم به زیاد، یک ششم قبل از یک سوم می‌آید.

می‌توان به‌طور کلی بیان کرد که درک هر یک از زیرساختارها برای درک کسرها لازم و ضروری است.

<sup>۱</sup> iteration process

## عملیات با کسرها

الگوریتم‌های عملیات با کسرها نباید آموزش داده شوند، بهتر است توسط دانش‌آموزان شکل بگیرند. آموزشی که تنها روی رویه‌ها تأکید کند، بدفهمی این رویه‌ها و کاربرد نادرست آنها را در دانش‌آموزان افزایش می‌دهد. بنابراین آموزش باید به دانش‌آموزان فرصت دهد تا خودشان رویه‌های عملیات با کسرها را بسازند.

مشکلات دانش‌آموزان در عملیات با کسرها از یادآوری نادرست رویه‌ها، همچنین، انتقال نادرست ایده‌های اعداد صحیح به مفاهیم عملیات با کسرها، ناشی می‌شود. یکی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در عملیات با کسرها این است که ضرب، همیشه اعداد را بزرگ‌تر و تقسیم، همیشه اعداد را کوچک‌تر می‌کند. جواب مسئله با ضرب و تقسیم ممکن است کوچک‌تر، بزرگ‌تر یا مساوی هر دو عدد در مسئله یا مساوی یک شود.

زبان مانع دیگری است که باید برای درک عملیات با کسرها بر آن غلبه کرد. درک دانش‌آموزان از چهار نماد عملیاتی بسیار محدود است. برای دانش‌آموزان، جمع به معنی اضافه‌شدن، تفریق، به معنی کم شدن، ضرب به معنی چند برابر شدن و تقسیم به معنی تقسیم شدن است. در کسرها، در بسیاری از موارد، عملیات، مفهوم متفاوتی به خود می‌گیرد، برای مثال، سه منهای دو، می‌تواند در آغاز با در نظر گرفتن سه شی و کم کردن دو تای آنها یا تفسیر منها به‌عنوان کم شدن تفسیر شود. زمانی که سه منهای یک دوم می‌شود، اینکه با سه شروع کنیم و یک دوم آن را کم کنیم، کار نادرستی است. وضعیت تقسیم در تقسیم، مثال دیگری از این حیث است. در اعداد صحیح، وضعیت تقسیم می‌تواند به‌عنوان مسائل تقسیمی تفسیر گردد. برای مثال،  $4 \div 3$  می‌تواند به‌عنوان تقسیم سه شی میان چهار نفر درک شود. اگر به جای آن، مسئله  $1 \frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$  باشد، گفتن اینکه شما  $1 \frac{3}{4}$  از چیزی را میان نیم نفر تقسیم می‌کنید، نادرست است. از این مثال، به آسانی دیده می‌شود که چگونه زبان می‌تواند توانایی دانش‌آموزان را در درک موقعیت‌های شامل کسر مختل سازد.

## مقایسه و مرتب کردن کسرها

مرتب کردن کسرها در درک کسرها به‌عنوان مقادیر بااهمیت است. وقتی که از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا مجموعه‌ای از کسرها را مرتب و مقایسه کنند، آنها معمولاً روش مخرج مشترک‌گیری را به‌کار می‌گیرند و تنها تمایل دارند این روش را برای مرتب کردن استفاده کنند.



برخی از محققان سه استراتژی مختلف، شامل به کارگیری نسبت‌ها، مرجع مقایسه<sup>۱</sup> و استراتژی‌های دست‌ورزی<sup>۲</sup> را برای مقایسه کسرها پیشنهاد کرده‌اند.

به کارگیری استراتژی نسبت، درک اندازه نسبی هر کسر را شامل می‌شود. برای مثال هنگام مقایسه  $\frac{5}{6}$  و  $\frac{2}{3}$ ، دانش‌آموزان در نهایت باید بتوانند بر رابطه (نسبت) بین ۵ و ۶ و بین ۲ و ۳ قضاوت کنند. این قضاوت نیازمند آن است که آنها بدون مخرج مشترک‌گیری ببینند که  $\frac{5}{6}$  نسبتاً بزرگ‌تر از  $\frac{2}{3}$  است. این مقایسه با ذکر این نکته که در هر کسر قسمتی کم داریم<sup>۳</sup>، می‌تواند انجام شود. در  $\frac{5}{6}$ ، به یک ششم اندازه واحد و در  $\frac{2}{3}$ ، به یک سوم آن برای واحد کامل شدن نیاز است، چون  $\frac{1}{6}$  کوچک‌تر از  $\frac{1}{3}$  است پس  $\frac{5}{6}$  بزرگ‌تر است.

در استراتژی مرجع مقایسه، دانش‌آموزان برای مقایسه دو یا تعداد بیشتری از کسرها نیاز دارند به یک کسر رجوع کنند تا بتوانند کسرها را مقایسه کنند. برای مثال چون  $\frac{1}{3}$  کوچک‌تر از  $\frac{1}{4}$  است و  $\frac{3}{5}$  بزرگ‌تر از  $\frac{1}{4}$  است پس  $\frac{1}{3}$  کوچک‌تر از  $\frac{3}{5}$  است. در این استراتژی، دانستن اندازه دقیق هر کسر نیاز نیست، تنها دانستن کوچک‌تر یا بزرگ‌تر بودن کسرها از «یک دوم» کفایت می‌کند.

استراتژی دست‌ورزی، مشابه مخرج مشترک‌گیری است که فقط با دست‌ورزی انجام می‌شود. در این استراتژی دانش‌آموزان می‌توانند آن را با مهره‌هایی از دو رنگ اجرا کنند. اگر از دانش‌آموزان خواسته شود تا  $\frac{5}{6}$  را با  $\frac{2}{3}$  مقایسه کنند، آنها می‌توانند با قرار دادن ۶ مهره که پنج تای آن قرمز و ششمی زرد است،  $\frac{5}{6}$  را بسازند، سپس، مجموعه دوم را که شامل دو مهره قرمز و سومی زرد است را برای بازنمایی  $\frac{2}{3}$  در نظر بگیرند. استراتژی دست‌ورزی نیازمند آن است که مجموعه‌ها شامل تعداد مهره یکسان باشند. در این مورد، باید تعداد مهره‌های مجموعه  $\frac{2}{3}$  دو برابر شود. بنابراین حالا هر مجموعه شش مهره دارد که نشان می‌دهد مخرج مشترک، شش است. بنابراین مجموعه اول پنج مهره قرمز و مجموعه دوم چهار مهره قرمز خواهد داشت. بازنمایی این دو کسر با کمک دو مجموعه مهره، نشان می‌دهد که  $\frac{5}{6}$  بزرگ‌تر است. در نهایت دانش‌آموزان باید استراتژی‌هایی را توسعه دهند که در دراز مدت به دست‌ورزی، نیاز نباشد.

دانش‌آموزانی که از ماهیت دست‌ورزی کسرها، درک مفهومی ندارند ممکن است مجدداً

۱- reference point

۲- manipulative

۳- missing

دانش‌شان از اعداد صحیح را به نادرستی به مقایسه کسرها تعمیم دهند. این دانش‌آموزان دو استراتژی نادرست را به کار می‌گیرند. استراتژی جمع، که در آن، مقایسه کسرها با اضافه کردن صورت و مخرج به هم و ایجاد عدد جدید صورت می‌گیرد. مثلاً دانش‌آموزی بیان می‌کند که «چون سه به اضافه چهار، هفت و چهار به اضافه چهار، هشت می‌شود» پس سه چهارم با هفت هشتم مساوی است. استراتژی نادرست دومی که به کار می‌گیرند استراتژی غلبه اعداد صحیح<sup>۱</sup> است. در این استراتژی، مقایسه دو کسر با مقایسه صورت و مخرج‌ها به طور مستقل انجام می‌شود. در مقایسه سه چهارم و پنج هشتم، دانش‌آموزی با به کارگیری این استراتژی بیان کرد که «چون سه کمتر از پنج و چهار کمتر از هشت است، پس سه چهارم کوچک‌تر از پنج هشتم است».

### توسعه مفاهیم

کاربرد وسیع کسرها در زندگی و ریاضیات نشان می‌دهد که آموزش و درک معنادار کسرها در دوره ابتدایی از ضروریات است. از آنجا که کسرها همانند اعداد صحیح با به کارگیری رویه‌های شمارشی<sup>۲</sup> ساخته نمی‌شوند، مرتب‌سازی و مقایسه کسرها دشوار است و نیاز به درک کسر به عنوان عدد دارد. چگال بودن کسرها برخلاف باور شهودی<sup>۳</sup> است که کسری بین دو کسر  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  وجود ندارد. این باور این عقیده را بیان می‌کند که بین هر دو کسر داده شده، بی‌شمار کسر وجود دارد. دانش‌آموزانی که چگال بودن کسرها را درک می‌کنند، می‌توانند مهارت‌های تخمین<sup>۴</sup> که در ارزیابی موجه بودن نتایج مقایسه کسرها مهم هستند را توسعه دهند.

کسرها برای درک و توسعه مفاهیم گوناگون مانند اعداد اعشاری، نسبت، نرخ، درصد، اعداد گویا و احتمال، در دوره ابتدایی ضروری هستند و پس از آن تا آخرین سال‌های دبیرستان به صورت‌های گوناگون، در معادلات و نامعادلات کسری، عبارت‌های جبری شامل کسر، شیب خط، توابع کسری و غیره به کار می‌روند. تحقیقات مختلف نشان داده‌اند که مشکلات دانش‌آموزان در مفاهیمی نظیر جبر و احتمال عمدتاً به عدم درک درست از کسرها باز می‌گردد.

پیچیدگی مفهوم کسر و اهمیت درک آن از یک سو و نیاز فراوان به این مفهوم در توسعه مفاهیم دیگر ریاضی، کاربرد فراوان آن در ریاضیات سطوح بالاتر و زندگی روزمره از سوی دیگر، بیش از

۱\_ whole-number dominance strategy

۲\_ counting procedures

۳\_ counterintuitive notion

۴\_ estimation

پیش مؤید مفهوم‌سازی و درک درست کسرها است. این مهم با تأکید بر خواص پنج‌گانه کسرها و ارتباط برقرار کردن میان آنها تحقق می‌یابد.

### استفاده از ابزار و تکنولوژی

۱- در مورد کسر، برنامه‌ها و فعالیت‌های رایانه‌ای زیادی در دسترس است. بسیاری از این نرم‌افزارها با یک جست‌وجوی ساده در اینترنت قابل دانلود هستند. به‌طور مثال در سایت‌های زیر مجموعه‌ای از فیلم‌های آموزشی، فعالیت‌ها، دست‌ورزی‌ها و تمرین‌ها قابل دانلود هستند.

<http://www.teachingideas.co.uk.maths>

<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>

<http://nctm.org>

۲- استفاده از ابزارهای فیزیکی مانند کاغذ و مقوای رنگی، کاغذ شفاف و سایر ابزارهای ساخته شده برای آموزش کسرها، کمک زیادی به درک بهتر مفاهیم کسر توسط دانش‌آموزان می‌نماید.

۳- استفاده از منابع قرار گرفته بر روی سایت واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی

<http://math-dept.talif.sch.ir>

### نمونه سؤال‌هایی برای ارزشیابی

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۱- چند تا  $\frac{2}{4}$  می‌شود ۱۰ واحد کامل؟

- الف) ۲۰      ب) ۵      ج) ۴۵      د) ۱۵

۲- معکوس کسر  $1\frac{3}{5}$  برابر است با

- الف)  $1\frac{5}{3}$       ب)  $\frac{8}{5}$       ج)  $\frac{5}{8}$       د) گزینه الف و ج

۳- حاصل تفریق دو کسر  $7\frac{1}{5}$  است اگر عدد کوچک تر  $2\frac{4}{5}$  باشد، عدد بزرگ تر کدام است؟

- الف)  $4\frac{2}{5}$       ب)  $5\frac{2}{5}$       ج) ۹      د) ۱۰

۴- خمس معکوس عدد  $3\frac{2}{5}$  کدام یک از اعداد زیر است؟

- الف)  $\frac{1}{17}$       ب)  $\frac{25}{17}$       ج)  $\frac{2}{3}$       د)  $\frac{17}{25}$

۵- کدام گزینه از بقیه گزینه ها بزرگ تر است؟

- الف)  $\frac{17}{3}$       ب)  $2\frac{2}{5}$       ج)  $3\frac{5}{6}$       د)  $4\frac{1}{3}$

۶- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

حاصل  $3\frac{1}{7}$  را می توان به صورت  $\frac{44}{14}$  نوشت.

حاصل  $5 - 3\frac{2}{6}$  برابر است با  $2\frac{2}{6}$ .

معکوس عدد  $1\frac{6}{8}$  برابر است با  $\frac{8}{14}$ .

به جای اینکه عددی را در ۸ ضرب کنیم می توانیم همان عدد را بر  $\frac{1}{8}$  تقسیم کنیم.

۷- حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید.

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{7} =$$

$$6 - 2\frac{1}{4} =$$

$$2\frac{2}{4} + \frac{3}{18} =$$

$$1\frac{1}{4} - \frac{2}{6} =$$

$$2\frac{1}{9} + 4\frac{2}{12} =$$

۸- حاصل ضرب و تقسیم‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} =$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{5} =$$

$$4 \div \frac{2}{3} =$$

$$5 \frac{2}{9} \times 7 =$$

$$7 \div \frac{1}{4} =$$

$$5 \div \frac{5}{3} =$$

$$4 \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} =$$

$$4 \frac{3}{5} \div 3 \frac{2}{7} =$$

$$1 \frac{4}{5} \times 1 \frac{1}{2} =$$

$$1 \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} =$$

۹- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4 - \frac{5 - 1 \frac{1}{3}}{2 + 1 \frac{2}{3}} =$$

$$\frac{5 \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} =$$

$$3 - \frac{2 \frac{2}{3} \div \frac{4}{6}}{1 \frac{3}{5}} =$$

$$\frac{3 \frac{1}{4} - 2 \frac{1}{8}}{1 \frac{1}{4}} =$$

۱۰- حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

$$\frac{66}{24} \times \frac{24}{36} =$$

$$\frac{32 \times 63 \times 12}{36 \times 45 \times 22} =$$

۱۱- الگوهای زیر را ادامه دهید.

$$\frac{1}{4} \text{ و } \frac{4}{9} \text{ و } \frac{7}{14} \text{ و } \text{ و } \text{ و } \text{ و } \text{ و}$$

$$\frac{3}{5} \text{ و } \frac{3}{8} \text{ و } \frac{3}{11} \text{ و } \frac{3}{10} \text{ و } \frac{3}{9} \text{ و } \frac{3}{8}$$

$$\frac{2}{3} \text{ و } \frac{4}{6} \text{ و } \frac{8}{12} \text{ و } \frac{4}{3} \text{ و } \frac{4}{4}$$

۱۲- دور عددهای بزرگ‌تر از  $2\frac{3}{4}$  خط بکشید.

$$\frac{13}{4} \text{ و } \frac{23}{40} \text{ و } \frac{8}{2} \text{ و } \frac{8}{9} \text{ و } \frac{1}{4}$$

۱۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$3 \text{ و } \frac{1}{18} \text{ و } 1 \text{ و } \frac{1}{3} \text{ و } \frac{1}{6}$$

$$\frac{12}{6} \text{ و } 1\frac{1}{8} \text{ و } \frac{1}{25} \text{ و } \frac{1}{10000} \text{ و } \frac{11}{10}$$

$$\frac{12}{20} \text{ و } 1\frac{1}{7} \text{ و } 3\frac{3}{5} \text{ و } \frac{19}{3} \text{ و } 5 \text{ و } \frac{11}{2}$$

۱۴- کسرهای زیر را با هم مقایسه کنید.

$$2\frac{7}{7} \square 3$$

$$1\frac{4}{8} \square \frac{11}{7}$$

$$\frac{13}{8} \square \frac{26}{96}$$

$$\frac{7}{6} \square \frac{10}{9}$$

$$\frac{7}{2} \square \frac{9}{3}$$

$$2\frac{4}{5} \square 3$$

$$7\frac{3}{4} \square \frac{31}{4}$$

$$\frac{11}{5} \square \frac{11}{2}$$

$$\frac{7}{6} \square \frac{9}{10}$$

$$\frac{7}{12} \square \frac{5}{9}$$

۱۵- یک سر آشپز  $\frac{1}{3}$  قاشق نمک را به طور مساوی در ۳ بشقاب غذا ریخت. در هر بشقاب چقدر نمک ریخته شده است؟

۱۶- محیط مثلثی  $21\frac{23}{24}$  متر است. اگر طول یک ضلع  $9\frac{5}{12}$  و طول ضلع دیگر آن  $4\frac{3}{6}$  متر باشد، طول ضلع سوم چقدر است؟

۱۷- اگر قالب پنیری را که جرم آن  $\frac{1}{5}$  کیلوگرم است را به ۴ تکه تقسیم کنیم، جرم هر تکه چقدر است؟

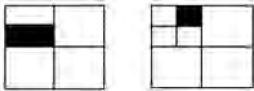
۱۸-  $\frac{2}{5}$  برابر  $\frac{2}{5}$  را پیدا کنید.

خمس  $\frac{2}{5}$  را پیدا کنید.

۱۹- الف) کسر  $\frac{7}{3}$  را روی شکل نشان دهید.

ب) کسر  $\frac{7}{3}$  چقدر کم دارد تا به ۳ واحد برسد؟

۲۰- مقدار رنگ شده در دو شکل زیر را به صورت کسر نمایش دهید.



۲۱- کوچک ترین کسر در بین کسرهای زیر کدام است؟

الف)  $\frac{1}{2}$     ب)  $\frac{5}{8}$     ج)  $\frac{5}{6}$     د)  $\frac{5}{12}$

۲۲- بدون مخارج مشترک گیری توضیح دهید که حاصل  $\frac{1}{12} + \frac{7}{8}$  به کدام یک از عددهای زیر نزدیک تر است؟

الف) ۲۰    ب) ۸    ج)  $\frac{1}{2}$     د) ۱

۲۳- مادر بزرگ از پودر بادام، پودر شکر و سفیده تخم مرغ نوعی شیرینی تهیه کرد. او  $\frac{2}{5}$  از شیرینی را به دختر بزرگش مریم داد. سپس  $\frac{3}{4}$  از باقی مانده آن را برای تزئین یک کیک استفاده کرد. چه مقدار از شیرینی باقی مانده است؟

۲۴- عدد خواسته شده را در هر مورد بیابید.

$$\frac{6}{12} = \frac{?}{16}$$

$$\frac{25}{40} = \frac{10}{?}$$

۲۵- مسئله‌ای با استفاده از عبارت  $\frac{1}{4} + \frac{1}{7}$  بنویسید و آن را حل نمایید.

۲۶- دنیا  $\frac{3}{5}$  از کتاب داستان ۲۴۰ صفحه‌ای اش را خواند. یک مسئله با استفاده از این اطلاعات بنویسید و مسئله‌ای را که نوشته‌اید حل کنید.

۲۷- برای عبارت زیر یک مسئله بنویسید و آن را حل کنید.

$$\frac{1}{4} \times 44 =$$

۲۸- اکرم با نیمی از پولش یک کتاب و با  $\frac{2}{5}$  پولش یک پاک‌کن خرید. چه کسری از پولش باقی مانده است؟

۲۹- اگر  $\frac{1}{6}$  یک گله، شامل ۱۵ گوسفند باشد چه تعداد گوسفند در گله وجود دارد؟

۳۰- اگر  $\frac{3}{4}$  یک کیسه گردو شامل ۶۹ گردو باشد،  $\frac{4}{33}$  آن شامل چند گردو است؟



۳۱- سبجان  $\frac{۲}{۹}$  از ۹۰ مداد رنگی‌اش را به خواهرش و  $\frac{۱}{۵}$  از آنها را به دوستش داد. پس از آن مادرش به او ۱۰ مداد رنگی دیگر داد. حالا او چند مداد رنگی دارد؟

۳۲- چند تا  $\frac{۱}{۵}$  در  $\frac{۴}{۵}$  وجود دارد؟

۳۳- جواد و احمد و علی سه پیتزا هم اندازه و هم شکل سفارش دادند. جواد  $\frac{۴}{۱۶}$  و احمد  $\frac{۳}{۱۲}$  پیتزایشان را خوردند. اگر سه دوست به یک میزان پیتزا خورده باشند، علی چه کسری از پیتزایش را خورده است؟

۳۴- اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

$$\frac{۲}{۳} \text{ و } ۱\frac{۱}{۳} \text{ و } \frac{۱۱}{۶}$$

۳۵- مریم  $\frac{۳}{۴}$  از پول توجیبی‌اش را خرج کرد و زهرا  $\frac{۱}{۴}$  از پول توجیبی‌اش را خرج کرد. آیا زهرا می‌تواند پول بیشتری از مریم خرج کرده باشد؟ چگونه؟

۳۶-  $\frac{۱}{۳}$  حقوق یک کارمندی ۳۲۰۰۰۰ تومان است. کل حقوق او چقدر است؟

۳۷- بعد از یک میهمانی  $\frac{۱}{۵}$  از یک کیک باقی ماند. روز بعد میترا  $\frac{۳}{۴}$  از کیک باقی مانده را خورد. در نهایت چه کسری از کیک باقی مانده است؟

۳۸- ۳۲۰ کتاب داستان در کتابخانه مدرسه‌ای موجود است که این کتاب‌ها  $\frac{۲}{۷}$  از کل کتاب‌های کتابخانه هستند. به طور کلی چند کتاب در کتابخانه وجود دارد؟

۳۹- حمیدرضا می‌خواهد یک شیشه بزرگ  $\frac{1}{3}$  لیتری از آب پرتقال را در بطری‌های  $\frac{1}{6}$  لیتری خالی کند. او چند بطری می‌تواند پر کند؟

۴۰- مریم یک روبان  $\frac{1}{2}$  متری دارد. او می‌خواهد آن را به تکه‌های کوچک‌تر  $\frac{1}{4}$  متری ببرد. روبان را به چند تکه کوچک‌تر می‌تواند ببرد؟

۴۱- سونیا، سبحان و مادرشان یک کیک را خوردند. سبحان  $\frac{1}{4}$  از کیک، سونیا و مادرشان هر کدام  $\frac{1}{4}$  از کیک را خوردند. چه مقدار کیک باقی مانده است؟

۴۲- الهام  $\frac{3}{10}$  از پولش را بابت کتاب و  $\frac{5}{10}$  از آن را بابت خودکار به فروشنده پرداخت کرد. او چه کسری از پولش را خرج کرده است؟

۴۳- جواد  $\frac{1}{4}$  از  $\frac{3}{8}$  یک پیتزا را خورد. او چه مقدار از پیتزا را خورده است؟

۴۴- اگر طول یک مسیر  $200$  کیلومتر باشد و  $\frac{1}{4}$  این مسیر را با دوچرخه و  $\frac{1}{10}$  آن را پیاده روی کرده باشیم، چند کیلومتر از مسیر باقی مانده است؟

۴۵-  $\frac{2}{5}$  از دانش‌آموزان یک مدرسه ابتدایی در کلاس پنجم تحصیل می‌کنند. اگر  $\frac{1}{5}$  آنها در مسابقات ورزشی شرکت کرده باشند، چه کسری از کل دانش‌آموزان در مسابقات ورزشی شرکت کرده‌اند؟

۴۶- نگین  $\frac{1}{3}$  پول خود را پس انداز می‌کند. او همیشه  $\frac{2}{5}$  پس انداز خود را به خرید کتاب اختصاص می‌دهد. نگین چه کسری از پول خود را برای خرید کتاب صرف می‌کند؟

۴۷- مهسا با نصف پولش برای مادرش هدیه خرید و با  $\frac{1}{6}$  باقی‌مانده آن برای خواهرش یک کتاب

خرید. اگر قیمت کتاب ۱۶۰۰ تومان باشد، کل پول مهسا چقدر بوده است؟

۴۸- ترانه با  $\frac{1}{3}$  پولش کتاب و با  $\frac{1}{4}$  آن کیف خرید و ۱۲۰۰ تومان برایش باقی ماند. پول ترانه چقدر بوده است؟

۴۹-  $\frac{2}{6}$  گنجایش منبع آبی خالی است. ربع باقی مانده را مصرف کرده ایم و در حال حاضر این منبع ۹۰۰ لیتر آب دارد. گنجایش منبع چند لیتر است؟

۵۰-  $\frac{1}{5}$  از  $\frac{3}{5}$  مسیر بین دو شهر آسفالت شده است. اگر مسافت آسفالت نشده ۱۶۴ کیلومتر باشد، فاصله این دو شهر چند کیلومتر است؟

۵۱-  $\frac{1}{5}$  باغچه ای گل کاری شده است. اگر  $\frac{1}{4}$  گل های باغچه میخک باشد، چه کسری از کل باغچه گل میخک کاشته شده است؟

۵۲- مریم  $\frac{1}{3}$  پولش را دفتر و  $\frac{1}{4}$  باقی مانده را خودکار خرید و ۳۰۰۰ تومان برایش باقی ماند. کل پول مریم چقدر بوده است؟

۵۳- می خواهیم  $\frac{1}{4}$  لیتر شکلات داغ را در چند فنجان بریزیم. اگر گنجایش هر فنجان  $\frac{1}{8}$  لیتر باشد، چند فنجان پر می شود؟

۵۴- یک ادویه فروش  $\frac{3}{4}$  کیلوگرم دارچین را به ۸ بسته مساوی تقسیم می کند. جرم هر بسته چقدر است؟

۵۵- یک مربی مهد کودک  $\frac{2}{3}$  لیتر شیر را بین ۳ کودک تقسیم می کند. به هر کودک چه مقدار شیر می رسد؟

۵۶- طول یک پاک کن  $\frac{1}{6}$  یک خط کش  $30^\circ$  سانتی متری است. طول پاک کن چند سانتی متر است؟

۵۷- آرش برای درست کردن یک کار دستی  $\frac{3}{4}$  یک مقوا را برش داد و سپس  $\frac{1}{4}$  آن را رنگ کرد. اگر مساحت مقوا  $80$  سانتی متر مربع باشد، او چند سانتی متر مربع را رنگ کرده است؟

۵۸- رامین  $\frac{2}{5}$  از  $\frac{3}{4}$  پولش را برای خرید کتاب استفاده کرد.  
الف) او چه کسری از پولش را خرج کرده است؟  
ب) چه کسری از پولش باقی مانده است؟

۵۹-  $\frac{3}{5}$  پول علی  $6000$  تومان است. کل پول علی را به دست آورید.

۶۰- مجید هر روز  $5$  کیلومتر می دود. طول مسیری که او می دود  $\frac{1}{4}$  کیلومتر است. او روزی چند بار این مسیر را می دود؟

### معرفی منابع

۱- دوستی، ملیحه (۱۳۹۲). بررسی درک و فهم دانش آموزان پایه ششم ابتدایی از کسرها. پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران.

۲- ریحانی ابراهیم؛ بخشعلی زاده، شهرناز و دوستی، ملیحه (۱۳۹۳). درک مفهوم کسر توسط دانش آموزان پایه ششم دوره ابتدایی. فصلنامه علمی پژوهشی مطالعات برنامه درسی، سال نهم، شماره ۳۴، صص ۱۳۳ تا ۱۶۴.

۳- دوستی، ملیحه و ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۴). شناسایی بدفهمی ها، راهبردها و استدلال های دانش آموزان پایه ششم در حل مسائل کسر. فصلنامه علمی پژوهش در آموزش، جلد ۱، شماره ۴، صص ۴۰ تا ۶۰.

۴- Ma, L. (۱۹۹۹). Knowing and teaching elementary mathematics  
Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

## رابطه طولی مفاهیم از پایه اول تا پایه پنجم روند ارائه زیرساختار جزء به کل

زیرساختار جزء به کل در پایه دوم:

- ۱- مفهوم سازی کسر به عنوان جزئی از کل و ارائه کسر به صورت کلامی با در نظر گرفتن تعداد قسمت‌های مطلوب از یک کل که به قسمت‌های مساوی تقسیم شده است.
- ۲- ارائه بازنمایی‌های پیوسته مختلف و ارتباط با فرم کلامی کسر

زیرساختار جزء به کل در پایه سوم:

- ۱- معرفی نماد کسر
- ۲- ارائه بازنمایی‌های پیوسته مختلف و ارتباط با فرم نمادین کسر

زیرساختار جزء به کل در پایه چهارم:

- ۱- بازنمایی‌های گسسته از کسر
- ۲- تأکید بر واحد

## روند ارائه کسرهای خاص

کسرهای خاص در پایه سوم:

- ۱- معرفی کسرهای نصف و ربع در بازنمایی‌های مختلف

کسرهای خاص در پایه چهارم:

- ۱- معرفی کسرهای ثلث و خمس در بازنمایی‌های مختلف
- ۲- معرفی کسر صفر

## روند ارائهٔ زیرساختار اندازه و عدد مخلوط

زیرساختار اندازه و عدد مخلوط در پایه دوم:

۱- مفهوم سازی کسر به عنوان اندازه و عدد مخلوط

زیرساختار اندازه و عدد مخلوط در پایه سوم:

۱- معرفی کسر به عنوان اندازه در بازنمایی‌های مختلف

۲- معرفی کسر به صورت تقریبی

۳- مفهوم سازی برای مقایسه اعداد مخلوط

زیرساختار اندازه و عدد مخلوط در پایه چهارم:

۱- معرفی نماد عدد مخلوط

زیرساختار اندازه و عدد مخلوط در پایه پنجم:

۱- معرفی کسر بزرگ‌تر از واحد و تبدیل عدد مخلوط به کسر

۲- تبدیل کسر بزرگ‌تر از واحد به عدد مخلوط

## روند ارائهٔ زیرساختار عملگر

زیرساختار عملگر در پایه سوم:

۱- معرفی کسر به عنوان عملگر

زیرساختار عملگر در پایه چهارم:

۱- مقایسه کسرها با واحدهای مختلف با در نظر گرفتن کسر به عنوان عملگر

## روند ارائهٔ تساوی، مقایسه و ساده کردن کسرها

تساوی، مقایسه و ساده کردن کسرها در پایه سوم:

۱- تساوی و مقایسه کسرها با تأکید بر مخرج مساوی

۲- مقایسه کسرها با مخرج‌های نامساوی با استفاده از شکل

تساوی، مقایسه و ساده کردن کسرها در پایه چهارم:

۱- مقایسه کسرها با صورت‌های مساوی

۲- تساوی کسرها با بازنمایی‌های مختلف

۳- ساده کردن کسرها

تساوی، مقایسه و ساده کردن کسرها در پایه پنجم:

۱- ساده کردن کسرها در ضرب

روند ارائه عملیات (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) کسرها

عملیات (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) کسرها در پایه چهارم:

۱- جمع و تفریق کسرها با مخرج مساوی یا مخرج یک کسر مضربی از مخرج دیگری

۲- ضرب عدد صحیح در کسر

عملیات (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) کسرها در پایه پنجم:

۱- جمع و تفریق کسرها با مخرج نامشترک و نسبت به هم اول

۲- جمع عددهای مخلوط

۳- تفریق عددهای مخلوط

۴- ضرب کسر در عدد صحیح

۵- ضرب کسر در کسر

۶- ضرب دو عدد مخلوط

۷- زیرساختار خارج قسمت و تقسیم دو عدد صحیح بر هم

۸- تقسیم کسر بر عدد صحیح

۹- تقسیم عدد صحیح بر کسر

## جدول انتظارات عملکردی:

## جدول انتظارات عملکردی فصل دوم ریاضی ششم

ردیف	عملکرد	مقیاس	بسیار خوب	خوب	قابل قبول	نیاز به تلاش
۱	ارتباط بین کسرهای بزرگ تر از واحد و عدد مخلوط را درک می کند و آنها را به عنوان دو نمایش متفاوت از یک مفهوم می داند.					
۲	جمع و تفریق کسرها را انجام می دهد.					
۳	می تواند جمع و تفریق اعداد مخلوط را به دست آورد.					
۴	کوچک ترین مخرج مشترک بین دو کسر را به دست می آورد.					
۵	تساوی کسرها را درک کرده و می تواند کسرهای مساوی با یک کسر را بنویسد.					
۶	می تواند جزء مجهول در کسرهای مساوی را به دست آورد.					
۷	می تواند معکوس هر عدد مخالف صفر را به دست آورد.					
۸	ضرب یک عدد صحیح در کسر، یک کسر در عدد صحیح و کسر در کسر را درک کرده و می تواند آنها را محاسبه کند.					
۹	ضرب دو عدد مخلوط در یکدیگر و ضرب یک عدد مخلوط در کسر را انجام می دهد.					
۱۰	می تواند کسرها را ساده کند.					
۱۱	تقسیم دو عدد صحیح بر یکدیگر را می تواند با کسر نمایش دهد.					



				تقسیم یک عدد کسری بر یک عدد صحیح، یک عدد صحیح بر یک عدد کسری و دو کسر بر یکدیگر را انجام می‌دهد.	۱۲
				محاسبات با کسر را انجام می‌دهد.	۱۳
				کسرها را به‌عنوان عدد درک کرده است.	۱۴
				در مقایسه و مرتب کردن کسرها به غیر از مخرج مشترک‌گیری از روش‌های دیگر نیز استفاده می‌کند.	۱۵
				مسائل مربوط به کسر را درک می‌کند و برای حل آنها از راهبرد رسم شکل بهره می‌برد.	۱۶

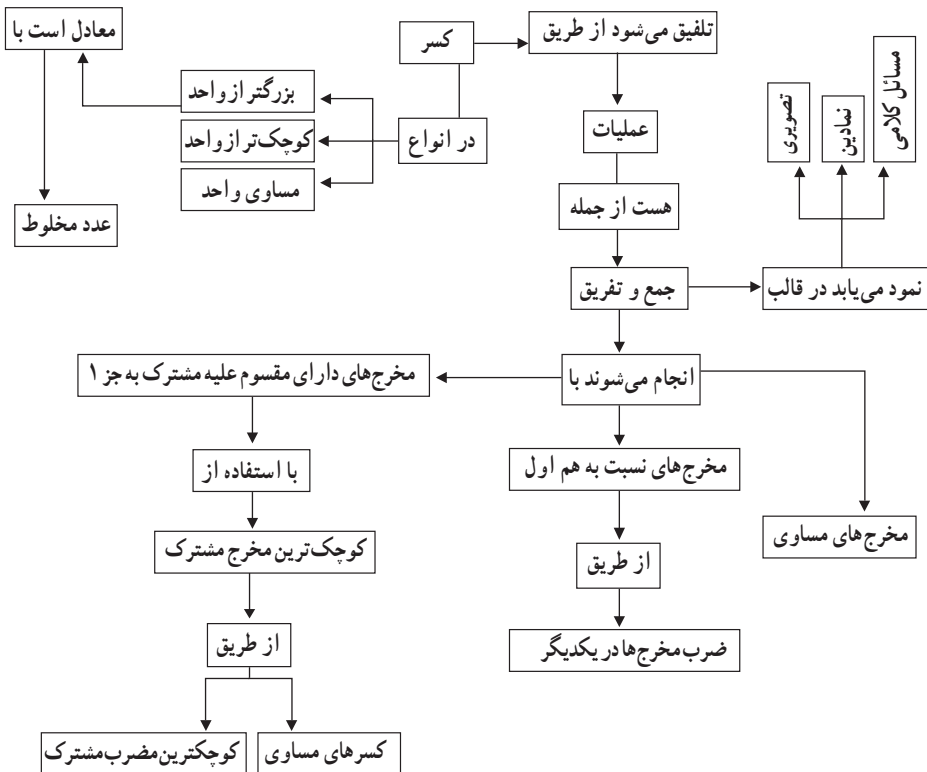


## جمع و تفریق کسرها

### اهداف

- ۱- یادآوری مفهوم واحد، کسر و عدد مخلوط
- ۲- یادآوری جمع و تفریق کسرها و اعداد مخلوط در حالات مختلف (مخرج‌های مساوی، مخرج یک کسر مضربی از مخرج دیگری و مخرج کسرها نسبت به هم اول)
- ۳- یافتن کوچک‌ترین مخرج مشترک در جمع و تفریق کسرهایی که مخرج آنها نسبت به هم اول نیست.

### نقشه مفهومی



## روش تدریس

## فعالیت (ص ۲۴)

**سؤال ۱-** هدف این فعالیت ایجاد ارتباط بین ریاضیات با دنیای واقعی و یادآوری کردن مفهوم کسر است. پیشنهاد می‌شود که برای انجام این فعالیت، دانش‌آموزان گروه‌های دو یا چند نفره تشکیل دهند و کاربردهای کسر در زندگی واقعی مانند تقسیم‌بندی‌های مختلف میوه، نان، شکلات، کیک، پیتزا و کاربرد آن در اندازه‌گیری را بیان کنند و در مورد آنها گفت‌وگو کنند. سپس نتایج کار گروه‌ها در کلاس مطرح شود. بحث کردن در مورد پاسخ‌های دانش‌آموزان می‌تواند باعث ایجاد انگیزه برای اهمیت شناخت و یادگیری کسرها در آنها شود.

**سؤال ۲-** هدف این فعالیت یادآوری مفهوم واحد، کسر بزرگ‌تر از واحد، عدد مخلوط و ارتباط بین آنها همراه با بازنمایی‌های مختلف تصویری و نمادین است. اینکه عدد مخلوط و کسر بزرگ‌تر از واحد دو نمایش مختلف از یک عدد هستند با انجام این سؤال به راحتی قابل درک است. برای انجام این فعالیت می‌توان روز قبل از دانش‌آموزان خواست تا شکل‌های هندسی موجود در جدول را با استفاده از طلق یا مقوا درست کرده و به کلاس بیاورند و فعالیت را با دست‌ورزی انجام داده و سپس جدول را کامل کنند. در سطر آخر این جدول دانش‌آموزان باید خودشان واحد دلخواهی را در نظر گرفته و مراحل بعدی را انجام دهند. دادن چنین اختیاراتی به دانش‌آموزان، سبب بالا بردن خلاقیت در آنها خواهد شد. پیشنهاد می‌شود که انجام این فعالیت نیز به گروه‌های دو نفری سپرده شود.

**سؤال ۳-** هدف این فعالیت یادآوری جمع و تفریق کسرهایی است که مخرج آنها ضربی از یکدیگر و یا نسبت به هم اول (مقسوم علیه مشترکی به جز ۱ ندارند) هستند.

## فعالیت (ص ۲۵)

هدف این فعالیت به دست آوردن کوچک‌ترین مخرج مشترک بین دو کسر با استفاده از کسرهایی مساوی است. برای انجام این فعالیت پیشنهاد می‌شود ابتدا در کلاس گروه‌بندی صورت گیرد، سپس معلم مسئله را روی تخته بنویسد و از گروه‌ها بخواهد بدون مراجعه به کتاب حاصل عبارت  $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$  را با یک یا چند روش به دست آورند. پس از مدتی از نمایندگان هر گروه خواسته شود تا راه‌حل‌هایشان را ارائه کنند و معلم جواب هر گروه را روی تخته بنویسد. انتظار می‌رود که دانش‌آموزان بتوانند با نوشتن کسرهایی مساوی با کسرهایی  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{5}{6}$  مخرج مشترک کوچک‌تر از ۲۴ را برای دو کسر بیابند

و یا از روش‌های دیگری مانند رسم شکل و یا رسم محور با تقسیم‌بندی کمتر از ۲۴ جواب را پیدا کنند. در غیر این صورت معلم می‌تواند به عنوان راهنما نظر دانش‌آموزان را به سوی نوشتن کسرهای مساوی با این دو کسر سوق دهد و از آنها بخواهد که مخرج‌های مشترک بین آنها را ذکر کنند. سپس در مورد اینکه با انتخاب کدام مخرج مشترک می‌توان سریع‌تر به جواب رسید و یا تقسیم‌بندی‌های روی شکل یا محور را راحت‌تر انجام داد بحث و گفت‌وگو نموده تا دانش‌آموزان خودشان به این نتیجه برسند که برای انجام سریع‌تر محاسبات باید کوچک‌ترین مخرج مشترک را انتخاب نمایند. پس از انجام این بحث و گفت‌وگوها دانش‌آموزان به راحتی قادر به حل فعالیت کتاب هستند.

### بررسی بعضی از سؤال‌های کار در کلاس

کار در کلاس ص ۲۶ :

هدف این کار در کلاس به دست آوردن کوچک‌ترین مخرج مشترک با استفاده از کوچک‌ترین مضرب مشترک بین مخرج‌ها است. می‌توان با انجام گفت‌وگویی مشابه با گفت‌وگوی زیر به هدف کار در کلاس رسید.

معلم: می‌خواهیم حاصل  $\frac{5}{18} + \frac{1}{12}$  را به دست آوریم، به نظر شما برای به دست آوردن مخرج مشترک باید چه کاری انجام دهیم؟

دانش‌آموزان: کوچک‌ترین مخرج مشترک بین ۱۲ و ۱۸ را انتخاب کنیم.

معلم: چگونه؟

دانش‌آموزان: کسرهای مساوی با هر کسر را می‌نویسیم. مثلاً:

$$\frac{5}{18} = \frac{10}{36} = \frac{15}{54}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{2}{24} = \frac{3}{36} = \frac{4}{48}$$

پس کوچک‌ترین مخرج مشترک ۳۶ است.

معلم: بین مخرج کسرهای مساوی با مخرج کوچک‌ترین کسر، چه رابطه‌ای می‌بینید؟

دانش‌آموزان: ضربی از مخرج کسر کوچک هستند.

معلم: آیا برای پیدا کردن کوچک‌ترین مخرج مشترک نیازی به صورت کسرها هست؟

دانش‌آموزان: خیر فقط به ضرایب مخرج‌ها نیاز داریم.  
 معلم: با توجه به مطالبی که گفته شد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  
 دانش‌آموزان: می‌توانیم از اول مضرب مخرج‌ها را بنویسیم و از بین آنها اولین مضرب مشترک یا کوچک‌ترین مضرب مشترک بین آنها را انتخاب کنیم.  
 مثلاً:

مضرب‌های ۱۸: ۱۸، ۳۶، ۵۴، ...

مضرب‌های ۱۲: ۱۲، ۲۴، ۳۶، ...

چون کوچک‌ترین مضرب مشترک ۳۶ است پس به عنوان مخرج مشترک در نظر گرفته می‌شود.

## فعالیت‌های پیشنهادی

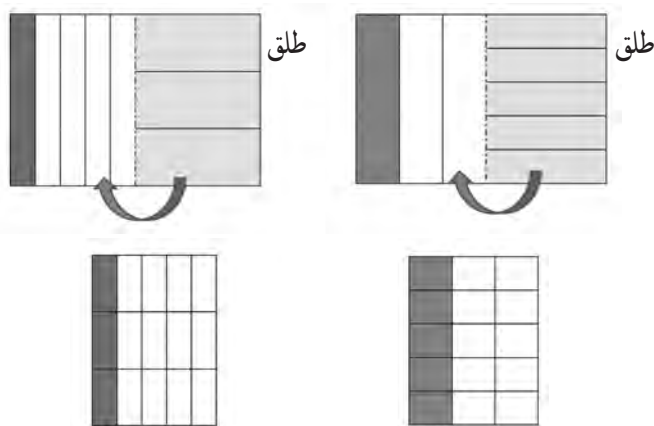
### فعالیت ۱:

برای یادآوری عدد مخلوط و چگونگی تبدیل آن به کسر بزرگ‌تر از واحد می‌توان از نوارهای کاغذی استفاده کرد. ابتدا دانش‌آموزان به گروه‌های دو نفری تقسیم‌بندی می‌شوند و از هر کدام از گروه‌ها خواسته می‌شود که با تقسیم‌بندی‌های مناسب و رنگ زدن نوارها اعداد مخلوط خواسته شده را بسازند و سپس آنها را به کسر بزرگ‌تر از واحد تبدیل کنند. مثلاً ابتدا با استفاده از ۴ نوار کاغذی  $\frac{1}{4}$  را درست کنند یعنی ۳ نوار کامل را نگه داشته و نوار چهارم را نصف کرده و آنها را رنگ کنند. سپس از آنها خواسته می‌شود که هر واحد را به ۲ قسمت مساوی تقسیم کنند و مقدار کسر شناخته شده را بگویند. با بریدن هر نوار به دو قسمت مساوی ۷ تکه  $\frac{1}{4}$  ساخته می‌شود که می‌شود  $\frac{7}{4}$ . همچنین می‌توان از دانش‌آموزان خواست که با کنار هم قرار دادن این تکه‌ها دوباره عدد مخلوط اولیه را بسازند تا رابطه بین عدد مخلوط و کسر بزرگ‌تر از واحد را به طور عمیقی درک کنند. با این کار دانش‌آموزان می‌فهمند که کسر بزرگ‌تر از واحد و عدد مخلوط در واقع دو نمایش مختلف برای یک عدد هستند.

### فعالیت ۲:

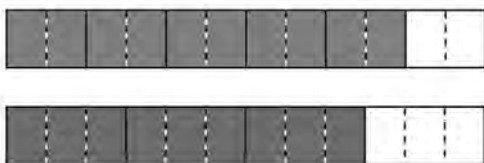
جهت یادآوری جمع و تفریق اعداد کسری و همچنین برای یادآوری کسرهای مساوی می‌توان از دست‌ورزی زیر بهره گرفت. از دانش‌آموزان می‌خواهیم که یک کاغذ و یک طلق شیشه‌ای هم‌اندازه را از کنار به هم بچسبانند. مثلاً برای انجام عبارت  $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$  ابتدا  $\frac{1}{3}$  را روی یک مقوا با تقسیم‌بندی‌های

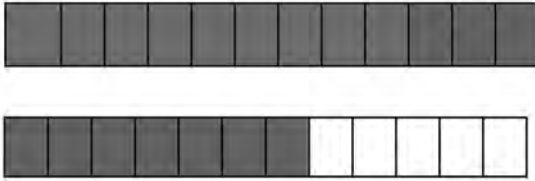
عمودی نمایش دهند و سپس با توجه به مخرج کسر دیگر طلق چسبیده به آن را به طور افقی به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنند تا با تا شدن طلق و قرار گرفتن روی کاغذ  $\frac{1}{3}$  به  $\frac{5}{15}$  تبدیل شود، همین کار را برای  $\frac{1}{5}$  انجام دهند تا به  $\frac{3}{15}$  تبدیل شود.



### فعالیت ۳ :

برای انجام این فعالیت به ۴ نوار سفید یکسان، مدادهای رنگی مختلف، قیچی و خطکش نیاز است. ابتدا عبارت  $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$  روی تخته نوشته می‌شود و از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا هر کدام از کسرهای را روی یک نوار نشان دهند، سپس آنها را بریده و روی نوارهای سفید دیگری کنار هم بچسبانند. اما برای انجام این کار چون تقسیم‌بندی‌ها یکسان نیست ابتدا دانش‌آموزان باید نوارها را به قسمت‌های مساوی تقسیم‌بندی کنند. برای تقسیم‌بندی کمتر و راحتی کار با راهنمایی و گفت‌وگوی معلم نظر دانش‌آموزان به سوی نوشتن کسرهای مساوی جلب می‌شود. پس از نوشتن کسرهای مساوی و پیدا کردن کوچک‌ترین مخرج مشترک از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا نوارها را تقسیم‌بندی کنند. پس از اینکه دانش‌آموزان هر نوار را به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم کردند، باید قسمت‌های رنگی را بریده و روی دو نوار کاغذی سفید دیگر کنار هم بچسبانند و جواب عبارت را به‌دست آورند.





### حل بعضی از تمرینات کتاب (ص ۲۷)

۳- هدف این سؤال به دست آوردن جواب به طور دقیق نیست بلکه دانش آموزان باید بتوانند با درک عمیق تری کسرها را تقریب بزنند و سریع به جواب برسند. مثلاً  $\frac{۹۹}{۱۰۰}$  به  $\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$  یعنی ۱ و  $\frac{۵}{۸}$  به  $\frac{۴}{۸}$  یا  $\frac{۵}{۸}$  نزدیک اند، پس جواب به  $\frac{۱}{۵}$  نزدیک است.

۵- در این سؤال یکی از بدفهمی‌هایی که برخی از دانش آموزان در جمع کردن کسرها دارند ارائه شده است. گاهی دانش آموزان در جمع دو کسر با صورت‌های مساوی، یکی از صورت‌ها را نوشته و مخرج کسرها را با یکدیگر جمع می‌کنند. در واقع این دانش آموزان قانونی را که برای جمع کردن کسرها با مخرج‌های یکسان درست است را به طور اشتباه به جمع کسرها با صورت‌های یکسان تعمیم می‌دهند. این دانش آموزان هنوز به درک عمیقی از مفهوم کسر نرسیده‌اند. گفتمان و بحث کلاسی روی این سؤال و همچنین کمک گرفتن از دست‌ورزی کمک شایانی به از بین رفتن و اصلاح شدن آن خواهد کرد.

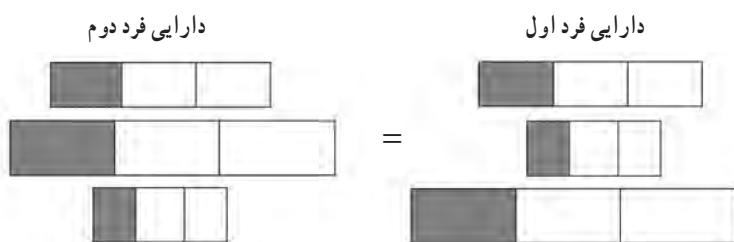
۶- هدف این سؤال طرح مسئله توسط دانش آموزان است. طرح مسئله باعث کشف و خلق مسئله‌های جدید و متنوع می‌شود و فرصتی برای بروز افکار و درک دانش آموزان راجع به مفاهیم مختلف ایجاد می‌کند. برای بررسی جواب‌های دانش آموزان می‌توان با گروه‌بندی کردن مناسب، به دانش آموزان فرصت بررسی و اصلاح مسئله‌ها و یادگیری مسائل جدید در گروه را داد. در زیر به ذکر چند نمونه از سؤالات پیشنهادی پرداخته می‌شود. قابل ذکر است که معلم به هیچ عنوان طرح کننده مسئله نیست و فقط دانش آموزان مسئله را طرح می‌کنند و مسئله‌های زیر فقط به عنوان نمونه آورده شده‌اند.

نمونه ۱) اگر نلگین دیروز  $\frac{۵}{۱۳}$  ساعت و امروز  $\frac{۷}{۱۰}$  ساعت تمرین ریاضی انجام داده باشد، او در مجموع چند ساعت تمرین ریاضی انجام داده است؟

نمونه ۲) برای درست کردن دو نوع شیرینی به  $\frac{۵}{۱۳}$  کیلوگرم آرد برای نوع اول و  $\frac{۷}{۱۰}$  کیلوگرم آرد برای نوع دوم، نیاز است. روی هم چه مقدار آرد لازم است؟

۷- در این تمرین ممکن است برخی از دانش‌آموزان به دلیل عدم درک صحیح مفهوم واحد و خاصیت عملگر بودن کسرها، کسرها را به صورت مجزا ببینند و به این دلیل که کسرها با هم مساوی هستند جواب نادرستی را به مسئله بدهند.

جواب این سؤال خیر است، زیرا مبالغ اهدا شده توسط این دو نفر ممکن است با هم متفاوت باشد. مثلاً ممکن است دارایی فرد اول ۳۰۰۰۰۰۰۰ تومان و فرد دوم ۶۰۰۰۰۰۰۰ تومان باشد که  $\frac{1}{3}$  دارایی فرد اول می‌شود ۱۰۰۰۰۰۰۰ تومان و  $\frac{1}{3}$  دارایی فرد دوم می‌شود ۲۰۰۰۰۰۰۰ تومان. می‌توان با استفاده از راهبرد رسم شکل نیز به راحتی این سؤال را حل نمود.



### توصیه‌های آموزشی

۱- معلمان دقت کنند که در طرح کردن سؤال برای جمع و تفریق کسرها اعدادی که در مخرج قرار می‌گیرند نباید خیلی بزرگ و نامعقول باشند زیرا هدف، انجام محاسبات سنگین نیست بلکه آموزش راه درست است.

۲- ایجاد فرصتی برای گفتمان در کلاس می‌تواند به درک بهتر مفاهیم ریاضی کمک بسیار زیادی کند. گفت‌وگوی دانش‌آموزان با معلم و گفت‌وگوی آنها با یکدیگر چه انفرادی و چه به صورت گروهی و توضیح دادن تفکرات و دفاع از ایده‌ها و قضاوت و ارزیابی در مورد ایده‌های ریاضی دانش‌آموزان دیگر و نیز نقد و بررسی راه‌حل‌های یک مسئله در کلاس درس، بخش‌های بسیار مهمی از فرایند گفتمان ریاضی به شمار می‌روند.

### بدهمی‌های رایج دانش‌آموزان

۱- برخی از دانش‌آموزان بین دو تفریق  $7 - 3\frac{1}{5}$  و  $5\frac{2}{3} - 1$  تفاوتی قائل نیستند.

مثلاً در  $7 - 3\frac{1}{5}$  قسمت‌های صحیح را از هم کم می‌کنند و  $4\frac{1}{5}$  را به دست می‌آورند.



در واقع این دانش‌آموزان بخش کسری را در تفریق نادیده می‌گیرند. یکی از دلایل این بدفهمی این است که دانش‌آموزان قاعده‌ای راجع به جمع اعداد مخلوط که «قسمت‌های صحیح با هم و کسرها با هم» را به طور نادرست برای انجام تفریق و یا حتی برای انجام ضرب اعداد مخلوط تعمیم می‌دهند.

۲- بدفهمی رایج دیگر این است که در جمع و تفریق کسرها مثلاً هنگامی که می‌خواهند حاصل عبارت  $3\frac{1}{2} + \frac{5}{7}$  را به دست آورند وقتی می‌خواهند مخرج کسرها را با هم برابر کنند فقط مخرج‌ها را در یک عدد ضرب می‌کنند و صورت‌ها را به همان شکل اولیه باقی می‌گذارند و عبارت را به صورت  $3\frac{1}{14} + \frac{5}{14}$  نوشته و حاصل را به دست می‌آورند. دلیل این بدفهمی درک نادرستی از کسرهای مساوی است.



## روش تدریس

## فعالیت ۱ صفحه ۲۸

هدف این فعالیت یادآوری ضرب کسرها است که در جدول به طور خلاصه به انواع آن (کسر در عدد صحیح، عدد صحیح در کسر و کسر در کسر) پرداخته شده است. در قسمت پایین جدول دانش‌آموزان باید مسئله‌ای را در مورد ضرب کسرها طرح و آن را حل کنند. طرح مسئله یکی از راه‌هایی است که منجر به ارتقاء خلاقیت دانش‌آموزان و بالا بردن قدرت تصمیم‌گیری و برقراری ارتباطات ذهنی می‌گردد و با استفاده از آن می‌توان به بسیاری از مشکلات دانش‌آموزان پی برد.

## فعالیت ۲ صفحه ۲۸

این فعالیت مقدمه‌ای است برای معرفی «مفهوم معکوس» که در کادر آبی صفحه ۲۹ آورده شده است. در این فعالیت دانش‌آموزان باید هر دو عدد از جدول که با ضرب کردن آنها در یکدیگر عدد ۱ حاصل می‌شود را انتخاب کنند.

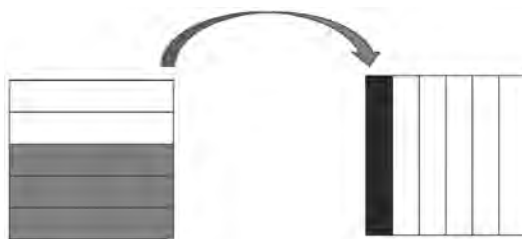
## فعالیت صفحه ۲۹

۱- هدف، یادآوری کسره‌های مساوی است که پیش‌زمینه‌ای برای به‌دست آوردن جزء مجهول در دو کسر مساوی است.

۲- برای به‌دست آوردن جزء مجهول در  $\frac{\square}{24} = \frac{2}{3}$  چون ۳ در ۸ ضرب می‌شود که ۸ از تقسیم ۲۴ بر ۳ به‌دست آمده است، بنابراین باید ۲ هم در ۸ که همان  $\frac{24}{3}$  است ضرب شود یعنی  $\frac{24}{3} = 2 \times \square$  که برابر است با  $\square = \frac{2 \times 24}{3}$ . این قاعده را می‌توان با انجام گفت‌وگویی با دانش‌آموزان برای آنها مفهوم‌سازی نمود تا مفهوم آن را چیزی جدا از مفهوم تساوی کسرها نبینند.

## فعالیت‌های پیشنهادی

فعالیت ۱) برای یادآوری و مفهوم‌سازی ضرب کسر در کسر می‌توان از دست‌ورزی زیر استفاده نمود. برای این کار یک کاغذ و یک طلق شیشه‌ای و ماژیک مورد نیاز است. مثلاً برای نشان دادن  $\frac{3}{5} \times \frac{1}{6}$  از دانش‌آموزان می‌خواهیم که کسر  $\frac{1}{6}$  را روی کاغذ و کسر  $\frac{3}{5}$  را روی طلق نمایش دهند و بعد طلق را روی کاغذ بیندازند، سپس با توجه به آن جواب را پیدا کنند. اگر به جای کاغذ و طلق از دو طلق استفاده کنند می‌توانند هر بار با پاک کردن آنها ضرب‌های بیشتری را نیز انجام دهند.



## بازی

فعالیت ۲ صفحه ۲۸ را می‌توان در قالب یک بازی به صورت زیر اجرا نمود. ابتدا از روی جدول زیر در اندازه بزرگ‌تر به تعداد نصف دانش‌آموزان کلاس پرینت گرفته و دانش‌آموزان را در گروه‌های ۲ نفره قرار داده و برگه‌های پرینت گرفته شده را به آنها می‌دهیم و از افراد هر گروه می‌خواهیم تا تمامی آنها را برش دهند و از هم جدا کنند.

$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	۵	$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{4}$	$2\frac{2}{3}$	۲	$\frac{6}{27}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{36}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{5}$	۴	$\frac{5}{3}$

سپس از آنها می‌خواهیم که کارت‌های ردیف بالا را بین خود تقسیم کنند و کارت‌های ردیف پایین را در وسط بگذارند. سپس هر کدام از دانش‌آموزان که توانست سریع‌تر کارت خود را روی جواب بگذارد هر دو کارت مال او می‌شود و ۱ امتیاز به او تعلق می‌گیرد. هر کس که امتیاز بیشتری به دست آورد برنده بازی است و توسط دیگر گروه‌ها تشویق می‌شود.

## حل بعضی از تمرینات کتاب (صفحه ۳۰)

۲- در این سؤال دانش‌آموزان ابتدا باید ضرب را انجام دهند سپس جواب آن را تقریب بزنند.

$$\frac{1}{4} \times 21 = \frac{21}{4} \rightarrow \frac{20}{4} = 5$$

$$\frac{2}{5} \times 6 = \frac{12}{5} \rightarrow \frac{10}{5} = 2$$

$$9 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{4} \rightarrow \frac{28}{4} = 7$$

۷- برای اینکه حاصل ضرب دو کسر بیشترین مقدار شود باید کوچک‌ترین اعداد را برای مخرج‌ها انتخاب نمود و به دلیل اینکه بین کسرهای علامت ضرب وجود دارد فرقی ندارد که ۱ و ۲ در مخرج کدام یک از دو کسر قرار بگیرند.

$$\frac{4}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{یا } \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

۸- در این سؤال نیز برای اینکه حاصل جمع دو کسر بیشترین مقدار شود باید کوچک‌ترین اعداد را برای مخرج‌ها انتخاب نمود. دانش‌آموز باید به تفاوت این سؤال با سؤال بالا دقت کند و مخرج کوچک‌تر را برای صورت بزرگ‌تر قرار دهد تا عدد بزرگ‌تری حاصل شود.

$$\frac{4}{1} + \frac{3}{2} = 5\frac{1}{2}$$

### توصیه‌های آموزشی

باید دقت شود که هنگام معرفی یک مفهوم جدید چه تعریفی به کار برده می‌شود، مثلاً اگر معکوس فقط به عنوان جابه‌جایی صورت و مخرج با یکدیگر معرفی شود ممکن است سبب ایجاد این بدفهمی شود که بعضی از دانش‌آموزان معکوس  $2\frac{2}{3}$  را به صورت  $2\frac{3}{2}$  بنویسند. اما با تعریفی که در کتاب درسی از معکوس آورده شده است دیگر این بدفهمی برای دانش‌آموزان به وجود نمی‌آید.

### بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان

۱- برای ضرب اعداد مخلوط در یکدیگر، برخی از دانش‌آموزان اعداد مخلوط را به کسر تبدیل نکرده و بخش‌های صحیح را در هم و بخش‌های کسری را نیز در هم ضرب می‌کنند. مثلاً می‌نویسند  $5\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{8} = 15\frac{1}{24}$

۲- بدفهمی دیگر در ضرب اعداد مخلوط این است که گاهی جزء صحیح هر عدد مخلوط را در صورت کسر ضرب می‌کنند، مثلاً می‌نویسند  $5\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{8} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$



## روش تدریس

## فعالیت ۱: (صفحه ۳۲)

در درس سوم قرار است تقسیم کسر بر کسر با مخرج‌های مساوی و نامساوی آموزش داده شود. بر این اساس، هدف از این فعالیت آموزش تقسیم کسر بر کسر با مخرج‌های مساوی است. دانش‌آموزان در کلاس پنجم، ضرب عدد صحیح در کسر، کسر در عدد صحیح و کسر در کسر را آموزش دیده‌اند. از آنجا که مفهوم ضرب، پیش‌نیاز مفهوم تقسیم است، در این فعالیت برای ارائه مفهوم تقسیم از مفهوم ضرب عدد صحیح در کسر که پیش‌دانسته دانش‌آموزان است استفاده می‌شود. سیر بررسی این فعالیت در کتاب از چپ به راست یعنی شروع با مفهوم ضرب و رسیدن به مفهوم تقسیم است. در کلاس درس، معلم چندین ضرب عدد صحیح در کسر را ارائه می‌نماید و از دانش‌آموزان می‌خواهد برای آنها شکل و محور مناسب بکشند. پس از انجام این کار توسط دانش‌آموزان از آنها می‌خواهیم مسیر رفته را برگردند. مثلاً در ضرب  $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$  پس از رسم شکل یا محور از دانش‌آموزان می‌خواهیم با توجه به شکل بگویند در  $\frac{8}{3}$  چند تا  $\frac{2}{3}$  وجود دارد؟ بعد از پاسخ کلامی دانش‌آموزان، از آنها می‌خواهیم آنچه گفته شده را با نمادهای ریاضی مناسب نمایش دهند. بعد از انجام این فعالیت با ضرب‌های مختلف و بررسی کتاب درسی از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که پس از بحث و گفت‌وگو نتیجه‌گیری مناسب داشته باشند و قاعده را کشف نمایند.

## فعالیت ۲: (صفحه ۳۳)

هدف از این فعالیت که در قالب حل مسئله می‌باشد، آموزش تقسیم کسرها با مخرج‌های نامساوی است. در این فعالیت از مطلب آموخته شده در فعالیت قبل یعنی تقسیم کسرها با مخرج‌های مساوی به‌عنوان پیش‌سازمان‌دهنده استفاده می‌شود و تقسیم کسرها با مخرج‌های نامساوی آموزش داده می‌شود. برای اجرای این فعالیت در کلاس، معلم بهتر است بدون رجوع به کتاب درسی، مسئله را روی تخته بنویسد و از دانش‌آموزان بخواهد به مسئله پاسخ دهند. چه خوب است که دانش‌آموزان بدون راهنمایی معلم از راهبرد رسم شکل برای حل مسئله کمک بگیرند. در غیر این صورت معلم می‌تواند آنها را به استفاده از این راهبرد تشویق کند. انتظار می‌رود قسمت «الف» این مسئله برای دانش‌آموزان با کمک قاعده تقسیم کسرها با مخرج‌های مساوی به راحتی قابل حل باشد. در قسمت «ب» این مسئله که هدف اصلی است، انتظار می‌رود دانش‌آموزان با کمک رسم شکل یا محور اعداد و یکی کردن مخرج‌ها و استفاده از قاعده آموخته شده در فعالیت قبلی به حل مسئله نائل شوند و قاعده

درست را با بحث و گفتمان کلاسی مناسب کشف کنند. در غیر این صورت معلم نقش راهنما دارد و با مطرح کردن پرسش‌هایی نظیر «آیا قاعدهٔ آموخته شده برای تقسیم کسرها با مخرج‌های مساوی به شما کمکی می‌کند؟»، «برای استفاده از این قاعده باید کسرها چه ویژگی داشته باشند؟» و ... می‌تواند دانش‌آموزان را به مسیر درست و کشف قاعده رهنمون سازد. پس از بررسی این مسئله در کتاب درسی و تکمیل جاهای خالی، دانش‌آموزان سؤال ۲ همین فعالیت که برای تثبیت قاعدهٔ آموخته شده ارائه شده است را پاسخ می‌دهند.

### فعالیت ۳: (صفحهٔ ۳۴)

هدف از این فعالیت، ارائهٔ روشی دیگر برای تقسیم کسرها با مخرج‌های نامساوی است. دانش‌آموزان در کلاس پنجم، تقسیم عدد صحیح بر عدد صحیح، کسر بر عدد صحیح و عدد صحیح بر کسر را آموزش دیده‌اند. از این پیش‌دانستهٔ دانش‌آموزان و آموختهٔ آنها در درس ضرب کسرها در پایهٔ ششم یعنی «معکوس یک عدد» استفاده می‌شود تا روش دیگری برای تقسیم کسرها ارائه گردد. در این فعالیت گفتمان بین معلم و دانش‌آموزان و دانش‌آموزان با یکدیگر نقش بسزایی دارد. معلم تقسیم‌های مختلفی از تقسیم عدد صحیح بر عدد صحیح، کسر بر عدد صحیح و عدد صحیح بر کسر را روی تخته می‌نویسد و از دانش‌آموزان می‌خواهد تا به آنها پاسخ دهند. معلم برای اینکه دانش‌آموزان را به مسیر درست هدایت کند سؤالاتی را مطرح می‌نماید.

— معلم: تقسیم‌ها را چگونه انجام دادید؟

— دانش‌آموزان: عدد اول را نوشته، تقسیم به ضرب تبدیل می‌شود و عدد دوم معکوس می‌شود.

— معلم: در مورد تقسیم روبه‌رو چه حدسی می‌زنید؟  

$$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} =$$
 (پس از انجام گفتمان ما بین دانش‌آموزان)

— دانش‌آموزان: همانند تقسیم‌های قبلی، عدد اول را نوشته، تقسیم به ضرب تبدیل می‌شود و عدد دوم معکوس می‌شود.

— معلم: می‌توانید درستی حدس خود را بررسی نمایید؟ (راهنمایی: از روش مساوی کردن مخرج‌ها در تقسیم با مخرج‌های مساوی و خاصیت جابه‌جایی در ضرب کسرها کمک بگیرید).

### بررسی بعضی از سؤالاتی که در کلاس

هدف از سه کار در کلاس این درس، تثبیت قاعدهٔ آموخته شده در فعالیت پیش از آن است.



## فعالیت‌های پیشنهادی

### فعالیت ۱:

برای آموزش تقسیم کسرها با مخرج‌های مساوی می‌توان از این فعالیت بهره برد. معلم از دانش‌آموزان می‌خواهد نوار کاغذی درست کنند. سپس این نوار را به ۷ قسمت مساوی تقسیم و ۶ قسمت از آن را رنگ کنند.



معلم: چه کسری از نوار شما رنگی است؟

دانش‌آموزان:  $\frac{6}{7}$

معلم: حالا شما نوارتان را  $\frac{2}{7}$ ،  $\frac{2}{7}$  تقسیم نمایید و با قیچی ببرید. چه حدسی می‌زنید؟ هدف چیست؟

دانش‌آموزان: می‌خواهیم ببینیم در  $\frac{6}{7}$  چند تا  $\frac{2}{7}$  وجود دارد؟



معلم: بچه‌ها وقتی  $\frac{6}{7}$  را تقسیم کردید چند تا  $\frac{2}{7}$  به وجود آمد؟

دانش‌آموزان: ۳ تا

معلم: کاری که انجام دادید را به ریاضی بنویسید.

دانش‌آموزان:  $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = 3$

### فعالیت ۲:

برای آموزش تقسیم کسرها با مخرج‌های نامساوی می‌توان از این فعالیت پیشنهادی نیز استفاده کرد. معلم به هر دانش‌آموز یک کلوچه می‌دهد و آنها را در گروه‌های ۵ نفره تقسیم می‌کند. سپس از آنها می‌خواهد  $4\frac{1}{3}$  کلوچه را برای خود نگه دارند و باقی را در بشقاب روی میز معلم قرار دهند.



معلم:  $4\frac{1}{3}$  کلوچه یعنی چند تا کلوچه؟

دانش‌آموزان: یعنی ۴ کلوچه و نصف یک کلوچه

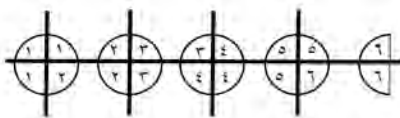
معلم: اگر بخواهیم، این کلوچه‌ها را بین چند نفر تقسیم کنیم که به هر نفر  $\frac{3}{4}$  کلوچه برسد، به

چند نفر کلوچه می‌رسد؟

– دانش‌آموزان: در واقع می‌خواهیم ببینیم در  $4\frac{1}{4}$  چند تا  $\frac{3}{4}$  وجود دارد؟  
 – معلم: درسته، حالا باید چکار کنیم؟  
 – دانش‌آموزان: باید هر کلوچه را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنیم و ببینیم چند تا  $\frac{3}{4}$  کلوچه داریم.

– معلم: حالا که هر کلوچه را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کردید چه کسری دارید؟

– دانش‌آموزان:  $\frac{18}{4}$



– معلم: چند تا  $\frac{3}{4}$  کلوچه دارید و به چند نفر کلوچه می‌رسد؟

– دانش‌آموزان: ۶ تا و به ۶ نفر

– معلم: کاری که انجام داده‌اید را به ریاضی بنویسید.

– دانش‌آموزان:  $4\frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{18}{4} \div \frac{3}{4} = 6$

### حل بعضی از تمرینات کتاب: (صفحه ۳۵)

در سؤال‌های ۲، ۴، ۵ و ۶ که مسائلی از دنیای واقعی هستند، دانش‌آموزان می‌توانند کاربرد انواع تقسیم کسرها (عدد صحیح بر کسر، کسر بر عدد صحیح و کسر بر کسر) را در پیرامون و دنیای اطراف خود ببینند و ریاضی را با زندگی واقعی خود پیوند زنند.

سؤال‌های ۳ و ۹ این تمرین سؤال‌های باز پاسخی‌اند که با مبحث تقسیم در ارتباط هستند. این سؤال‌ها بی‌شمار جواب درست دارند. در سؤال ۳ دانش‌آموزان با یک تساوی و در سؤال ۹ با یک نامساوی سروکار دارند. بهتر است پاسخ‌های متفاوت در کلاس مطرح شود و روی تخته کلاس نوشته شود و دانش‌آموزان در رابطه با درستی و احیاناً نادرستی پاسخ‌های دوستان‌شان بحث کنند و بدفهمی و خطاهای احتمالی دانش‌آموزان در جریان این گفت‌وگو مرتفع گردد. دانش‌آموزان می‌توانند برای حل این سؤال‌ها از راهبرد حدس و آزمایش استفاده کنند. در این سؤال‌ها دانش‌آموزان باید به علامت تقسیم توجه داشته باشند. برای راحتی کار می‌توانند از ضرب استفاده کنند و پس از زدن حدس،

بررسی آن و یافتن جواب درست، معکوس کسر دوم را در جای خالی بنویسند. البته فاصله این راهکار پیشنهادی نباید توسط معلم در کلاس درس ارائه شود. باید به دانش‌آموزان فرصت تفکر داد تا راهکارها توسط آنان مطرح شود. در این سؤال‌ها ممکن است دانش‌آموزان از یک رویه غیر معمول در تقسیم کسرها استفاده کنند. به عبارتی ممکن است صورت‌ها و مخرج‌ها را جداگانه بر هم تقسیم نمایند. مثلاً در تقسیم داده شده این‌گونه عمل کنند:  $\frac{8}{9} \div \frac{4}{3} = \frac{8 \div 4}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$ . این رویه، غیر معمول و در عین حال درست می‌باشد. پر کردن دو تا از جاهای خالی کاملاً اختیاری است ولی دو جای خالی دیگر باید با حدس‌های منطقی و سپس بررسی و آزمایش جواب‌ها تکمیل گردد تا آنها به سمت پاسخ‌های صحیح هدایت شوند. معلم می‌تواند با پرسیدن اینکه «تعداد پاسخ‌های ممکن برای این سؤال چند تا است؟» دانش‌آموزان را به چالش بکشاند و پاسخ‌های بیشتری را از آنان جویا شود.

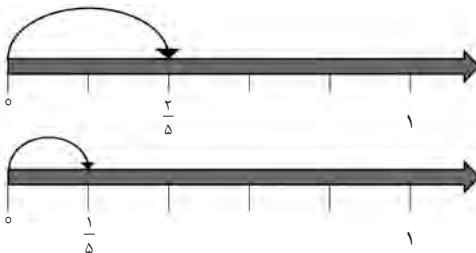
در سؤال ۷، تقسیم کسر بر عدد صحیح ( $\frac{2}{5} \div 2$ ) داده شده و از دانش‌آموزان خواسته شده است، برای آن شکل بکشند. در این سؤال هم از شکل و هم از محور می‌توان استفاده کرد. دانش‌آموزان باید نصف  $\frac{2}{5}$  را بیابند که همان کسر  $\frac{1}{5}$  است. نمونه‌ای از شکل‌های کشیده شده توسط دانش‌آموزان در اینجا ارائه می‌شود.  
نمونه ۱، با شکل:



$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

نمونه ۲، با محور:



$$\frac{2}{5} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

در سؤال ۸ این تمرین دانش‌آموزان باید برای تقسیم داده شده، مسئله طرح کنند. طرح مسئله ایده جدیدی در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی است. این ایده به افزایش خلاقیت در دانش‌آموزان کمک می‌نماید. از طرفی معلم می‌تواند بفهمد که دانش‌آموزان مفهوم تقسیم را به درستی درک کرده‌اند یا نه. همچنین بدفهمی‌ها و مشکلات دانش‌آموزان در خلال طرح مسئله به خوبی آشکار می‌گردد. معلم باید اجازه دهد دانش‌آموزان در کلاس مسائل طرح کرده را بخوانند و در خلال بحث‌های کلاسی، دانش‌آموزان نظرات خود را در رابطه با درستی یا نادرستی مسائل مطرح کنند و بدفهمی‌های احتمالی آنها در این روند مرتفع گردد. نمونه‌ای از مسائل مطرح شده توسط دانش‌آموزان در اینجا ذکر می‌گردد.

نمونه ۱: اگر نیم کیلوگرم پسته را میان ۵ نفر تقسیم نمایم به هر نفر چه کسری از یک کیلوگرم، پسته می‌رسد؟

نمونه ۲: خانم فاتح نیمی از باغچه خود را به کاشت سبزی ریحان، تره، شاهی، جعفری و پیازچه، اختصاص داده است. او می‌خواهد در ۵ ردیف این سبزی‌ها را بکارد. سهم هر ردیف چه کسری از باغچه است؟

نمونه ۳: سبحان نیمی از کتاب داستان خود را خوانده است. او قصد دارد بقیه کتاب داستان را در ۵ روز آینده بخواند. او در هر روز باید چه کسری از کل کتاب داستان را بخواند؟

## توصیه‌های آموزشی

۱- در این درس توجه به پیش دانسته‌های دانش‌آموزان در شکل‌گیری مفهوم تقسیم و ارتباط آن با دانش جدید بسیار اساسی است. در عین حال مفهوم جدید می‌تواند خود پیش‌سازمان‌دهنده‌ای برای ارائه مطلب جدید باشد. مثلاً در ارائه مفهوم تقسیم کسرها با مخرج‌های مساوی از پیش‌سازمان‌دهنده ضرب عدد صحیح در کسر استفاده شده است. در عین حال یکی از پیش‌دانسته‌های دانش‌آموزان برای تقسیم کسرها با مخرج‌های نامساوی، رویه تقسیم کسرها با مخرج‌های مساوی است. معلمان باید به ارتباط میان مفاهیم آموزشی مختلف و نقش آنها در شکل‌گیری مفاهیم جدید توجه ویژه‌ای داشته باشند.

۲- استفاده از بازنمایی‌های مختلف و برقراری ارتباط میان این بازنمایی‌ها جنبه‌های مختلف مفهوم بیچیده‌ای مانند تقسیم کسرها را آشکار ساخته و یادگیری را آسان می‌کند. ارائه رویه تقسیم به تنهایی منجر به سطحی شدن درک دانش‌آموزان، بدفهمی و خطای تقسیم کسرها می‌گردد. در مقابل

ارائه تقسیم کسرها با به کارگیری مدل‌های ملموس، استفاده از شکل و محور، کلام، زبان و نمادهای نوشتاری و پیوند این بازنمایی‌های مختلف با یکدیگر منجر به درک عمیق و مفهومی دانش‌آموزان می‌شود.

### بdfهمی‌های رایج دانش‌آموزان:

۱- بdfهمی‌های مبتنی بر الگوریتم تقسیم: این دسته از اشتباهات از کاربرد نادرست الگوریتم تقسیم کسرها ناشی می‌شود. ممکن است دانش‌آموزان مراحل مختلفی که باید طی کنند را به یاد نیاورند یا ناقص به یاد آورند. مثلاً فراموش کنند که کسر دوم را باید معکوس نمایند، بنابراین به جای تقسیم، عمل ضرب را انجام دهند. دلیل اصلی این دسته از بdfهمی‌ها، عدم درک مفهومی الگوریتم تقسیم است. در این موارد غالباً مراحل الگوریتم به صورت گام‌های بی‌معنی حفظ شده‌اند و اگر یک مرحله فراموش شود، دانش‌آموزان قادر به یادآوری دوباره آن نیستند.

۲- بdfهمی‌های مبتنی بر درک شهودی: درک دانش‌آموزان از اعداد صحیح برای آنها باورهایی ساخته که آنها را به کسرها تعمیم می‌دهند. در اعداد صحیح همیشه حاصل تقسیم (خارج‌قسمت) از مقسوم کوچک‌تر می‌شود. همین باور سبب می‌شود به دست آوردن جوابی بزرگ‌تر از عدد اول برای دانش‌آموزان نامعقول به نظر برسد. همچنین در تقسیم اعداد صحیح همواره مقسوم‌علیه از مقسوم کوچک‌تر است. تعمیم نادرست این مطلب به تقسیم کسرها سبب می‌شود که دانش‌آموزان عدد بزرگ‌تر را به عدد کوچک‌تر تقسیم نمایند.

۳- بdfهمی‌های مبتنی بر دانش رسمی: این بdfهمی‌ها ناشی از درک نادرست مفهوم کسرها و دانش محدود در زمینه خواص عملیات ریاضی است. دانش‌آموزان فکر می‌کنند تقسیم نیز مانند ضرب خاصیت جابه‌جایی دارد.

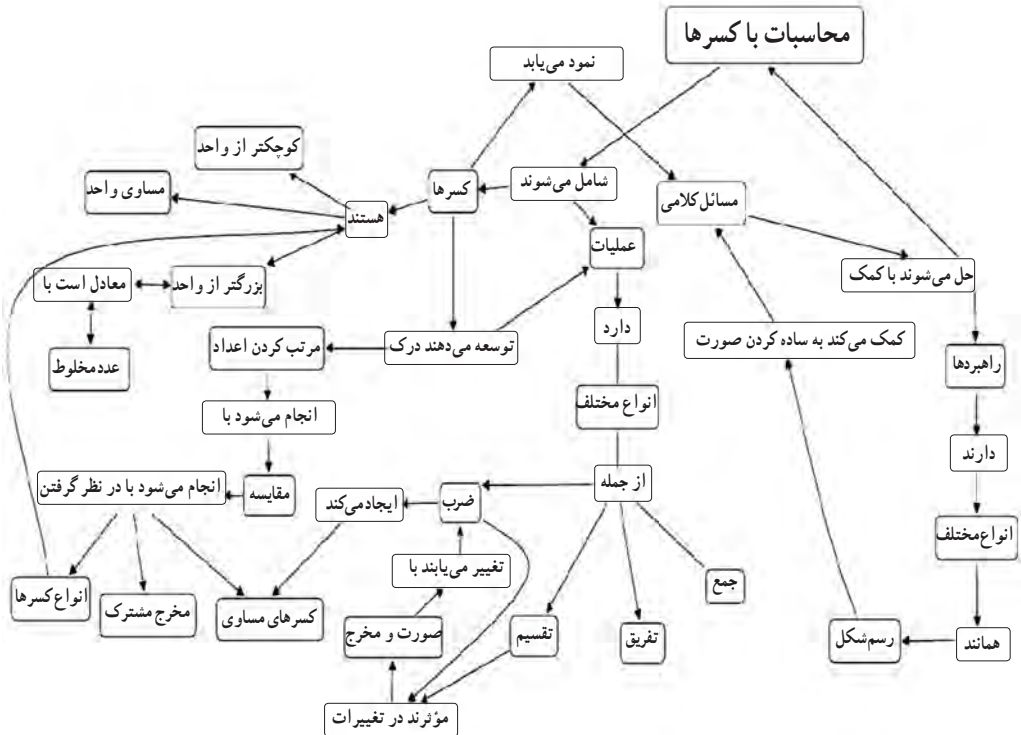


## محاسبات با کسر

### اهداف

- ۱- پیدا کردن حاصل عبارت کسری زمانی که بالا و پایین خط کسری از دو یا چند عمل جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم حاصل شده باشد
- ۲- به کارگیری روش‌های مختلف در مقایسه اعداد
- ۳- استفاده از راهبرد رسم شکل در حل مسائل

### نقشه مفهومی



## روش تدریس

## فعالیت ۱: (صفحه ۳۶)

یکی از اهداف پیگیری شده در درس چهارم، انجام محاسبات پیچیده‌تر با کسرها است. درک مفهوم کسر و انجام عملیات با کسرها زمینه را برای انجام محاسبات با اعداد گویا و به تبع آن، انجام محاسبات جبری در دوره متوسطه آماده می‌سازد. در این فعالیت نیز قرار است انجام این نوع محاسبات مفهوم‌سازی گردد تا الگوریتم محاسبات به صورت گام‌های بی‌معنی حفظ نشوند، تا به کارگیری و یادآوری آنها در آینده برای دانش‌آموزان تسهیل گردد. هدف از این فعالیت که در قالب حل مسئله می‌باشد، مفهوم‌سازی محاسبات با کسرها است. برای اجرای این فعالیت در کلاس، معلم بهتر است بدون رجوع به کتاب درسی، مسئله را روی تخته بنویسد و از دانش‌آموزان بخواهد به مسئله پاسخ دهند. پس از اینکه دانش‌آموزان به مسئله پاسخ دادند و پاسخ‌های آنان در کلاس بررسی شد، دانش‌آموزان خوب است با هدایت معلم به کتاب درسی مراجعه کنند. معلم از آنها می‌خواهد تا در گروه‌ها با هم مشورت کنند و بگویند چرا برای به دست آوردن پاسخ مسئله باید حاصل عبارت  $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{5}$  را به دست آورند. انتظار می‌رود که دانش‌آموزان این ارتباط‌ها را درک کنند و بفهمند

که در این نوع محاسبات باید عبارت‌های صورت و مخرج را جداگانه محاسبه نمایند و در نهایت حاصل صورت را بر مخرج تقسیم نمایند، چرا که خط کسری به منزله تقسیم است.

## فعالیت ۲: (صفحه ۳۷)

مقایسه و مرتب کردن در درک کسرها به عنوان عدد مؤثر است. دانش‌آموزان معمولاً در مقایسه از مخرج مشترک استفاده می‌کنند بدون آنکه درک درستی از کسرها داشته باشند و آنها را به عنوان عدد درک کنند. در این فعالیت سعی شده است بر این مهم تأکید گردد که دانش‌آموزان با درک درست و مفهومی کسرها نیازی به یکسان کردن مخرج تمام کسرها ندارند و به راحتی با روش‌های خلاقانه و مفهومی نیز می‌توانند مقایسه را انجام دهند. معلم خوب است این سؤال را روی تخته بنویسد و از دانش‌آموزان بخواهد اعداد را مرتب کنند. پس از آنکه دانش‌آموزان مسئله را حل کردند، نوبت به بررسی پاسخ‌های آنان است. معلم با دو دسته پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان روبه‌رو است. پاسخ‌های درست از این حیث با اهمیت است که از روش‌های مختلف و خلاقانه‌ای حاصل

شده است. این روش‌ها باید در کلاس بررسی گردند و دانش‌آموزان ارائه‌کننده این روش‌ها مورد تشویق قرار گیرند چرا که ناشی از تفکر خلاقانه آنان است. پاسخ‌های نادرست نیز با ارزش هستند چرا که ناشی از بدفهمی‌ها و عدم درک درست کسرها توسط آنان است. بررسی این نوع پاسخ‌ها و گفتمان پیرامون آنها می‌تواند به اصلاح و رفع این بدفهمی‌ها و پندارهای نادرست منجر شود. پس از اینکه این موارد در کلاس بررسی شد معلم به کتاب درسی رجوع می‌کند و حل این مسئله را با کمک دانش‌آموزان در کتاب دنبال می‌کند. روش ارائه شده در این فعالیت به این صورت است که اعداد صحیح را به‌عنوان مرجع مقایسه در نظر می‌گیرد. این اعداد را در سه دسته اعداد کوچک‌تر از «۱»، اعداد بین «۱» و «۲» و اعداد بزرگ‌تر از «۲» دسته‌بندی می‌کند. سپس با کمک محور اعداد به مقایسه اعداد هر دسته می‌پردازد.

### فعالیت ۳: (صفحه ۳۸)

از آنجا که راهبرد رسم شکل در ساده‌سازی صورت مسئله و برقراری ارتباط بین داده‌ها و مجهول مسئله نقش بسزایی دارد، می‌توان در حل بسیاری از مسائل کسر که برگرفته از دنیای واقعی هستند، از آن بهره برد. هدف این فعالیت نشان دادن تأثیر و کمک بسزای این راهبرد در حل مسائل کسر است. معلم بهتر است بدون رجوع به کتاب، مسئله مطرح شده را روی تابلو بنویسد و از دانش‌آموزان بخواهد تا آن را حل نمایند. حل این مسئله با توجه به ویژگی‌های آن برای دانش‌آموزان دشوار و چالش برانگیز است. بعد از حس دشواری مسئله و درک آن برای دانش‌آموزان، در گام بعدی معلم می‌تواند از آنان بخواهد برای مسئله شکلی رسم کنند و با کمک آن، مسئله را ساده نمایند تا بتوانند آن را حل کنند. انتظار می‌رود دانش‌آموزان با توجه به توصیه استفاده از این راهبرد در سال‌های گذشته، بتوانند شکل مناسب را رسم کنند. در غیر اینصورت معلم با راهنمایی‌هایی که به فراخور کلاس انجام می‌دهد می‌تواند این مهم را تحقق بخشد. انجام گفتمان کلاسی در خلال حل مسئله، میان معلم و دانش‌آموزان و دانش‌آموزان با یکدیگر بهتر می‌تواند تأثیر استفاده از این راهبرد در حل مسائل را برای دانش‌آموزان برجسته نماید.

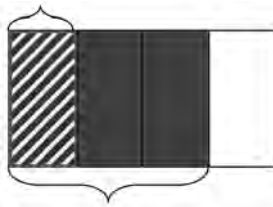
### بررسی بعضی از سؤال‌های کار در کلاس

در کار در کلاس سوم صفحه ۳۸، در راستای هدف فعالیت، دو مسئله مطرح شده است. در مسئله اول، برای ساده‌سازی و ترغیب دانش‌آموزان به استفاده از شکل، شکلی رسم شده که ناقص است. دانش‌آموزان باید آن را تکمیل نمایند و به حل مسئله بپردازند. در مسئله دوم، تنها صورت



مسئله داده شده است و باید دانش‌آموزان خود برای مسئله شکل بکشند و با کمک آن، مسئله را حل کنند. برای این مسئله می‌توان چنین شکلی را رسم کرد.

$\frac{1}{3}$  تعداد دانش‌آموزان شرکت کرده در مسابقات



$4 \times 8 = 32$  = تعداد دانش‌آموزان کلاس

$\frac{3}{4}$  تعداد دانش‌آموزان کل کلاس

## فعالیت‌های پیشنهادی

### بازی مقایسه کسرها:

هدف این بازی درک ارزش عددی کسر و مقایسه کسرها است. این بازی از این حیث مفید است که گفتمان‌هایی که بین بازیکنان در خلال بازی، در رابطه با کوچک‌تری یا بزرگ‌تری یک کسر اتفاق می‌افتد می‌تواند در رفع بدفهمی‌ها و درک بهتر ارزش عددی کسرها مؤثر واقع شود. این بازی دو نفره انجام می‌شود. در جدول زیر خط چین‌ها را برش دهید و  $40^\circ$  کارت موجود در جدول را از هم جدا نمایید. این کارت‌ها را زیر و رو نمایید. سپس  $20^\circ$  تا از کارت‌ها را به بازیکن اول و  $20^\circ$  تای دیگر را به بازیکن دوم بدهید. هر دو بازیکن به دلخواه و هم‌زمان با هم یک کارت را روی میز قرار می‌دهند. بازیکنی برنده است که عدد روی کارت او بزرگ‌تر باشد. هر دو کارت روی میز به بازیکن برنده تعلق می‌گیرد. اگر اعداد روی دو کارتی که بازیکنان ارائه می‌کنند با هم مساوی باشند آن دو کارت روی میز باقی می‌مانند و باید کارت‌های بعدی را روی آنها قرار دهند. تا زمانی که اعداد روی دو کارت متفاوت باشند، این کار ادامه می‌یابد. بازیکن برنده هر چند کارت که روی میز قرار دارد را از آن خود می‌کند. این بازی به همین شکل ادامه می‌یابد تا  $30^\circ$  کارت به یک بازیکن تعلق گیرد. آنگاه او برنده بازی است.

$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{11}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{8}{3}$

### حل بعضی از تمرینات کتاب

سؤال ۲ تمرین صفحه ۳۹ به بدفهمی رایج دانش آموزان در جمع کسرها اشاره دارد. این بدفهمی از تعمیم نادرست رویه جمع کسرها با منخرج‌های مساوی به جمع کسرها با صورت‌های مساوی نشأت می‌گیرد. در سؤال ۳ که به کسرهای مساوی اشاره دارد، به غیر از کسر  $\frac{15}{35}$  بقیه کسرها با کسر  $\frac{5}{7}$  مساوی هستند. در سؤال ۷ انتظار می‌رود روش‌های مختلف برای مقایسه و مرتب کردن اعداد توسط دانش‌آموزان در کلاس مطرح و بررسی گردد.

در سؤال ۸، کسر به‌عنوان عملگر مطرح شده است که می‌تواند روی یک واحد اعمال شود و مقدار جدیدی را حاصل کند. در این سؤال دو کسر داده شده عملگر هستند که روی واحدی مثل پول عمل می‌کنند. میزان پول در مقایسه اهمیت دارد. اگر مثلاً میزان پول ما ۳۰۰۰۰ تومان و پول دوستان ۱۰۰۰۰ باشد، واضح است که  $\frac{1}{3}$  پول ما ۱۰۰۰۰ تومان و نصف پول دوستان ۵۰۰۰ تومان می‌شود. پس ثلث پول ما از نصف پول دوستان بیشتر است با اینکه ثلث کمتر از نصف است. پس وابسته به میزان پول هر دو نفر، ثلث پول ما می‌تواند مساوی، کمتر یا بیشتر از نصف پول دوستان باشد. در این سؤال از رسم شکل نیز می‌توان برای مقایسه استفاده کرد.

در سؤال ۹ شکل داده و از دانش‌آموزان خواسته شده است با توجه به آن مسئله‌ای طرح کنند. دانش‌آموزان می‌توانند این مستطیل را چیزهای مختلفی مثل تعداد صفحات یک کتاب، مساحت یک باغچه، میزان پول یک نفر، ساعات اوقات فراغت و ... در نظر بگیرند و با توجه به آن مسئله‌ای مناسب برگرفته از دنیای واقعی را طرح نمایند.

## توصیه‌های آموزشی

- ۱- انجام محاسبات با کسر، زمینه را برای انجام محاسبات اعداد گویا در دوره متوسطه آماده می‌سازد. آموزش رویه‌های الگوریتم‌ها، یادآوری آنها را برای دانش‌آموزان در آینده دشوار می‌سازد. بنابراین معلمان باید علاوه بر درک رویه‌ای بر درک مفهومی دانش‌آموزان از انجام محاسبات تأکید داشته باشند و نحوه انجام این محاسبات را در ذهن آنان عمق بخشند و ماندگار نمایند.
- ۲- معلمان باید دانش‌آموزان را بر روش‌های مختلف مقایسه ترغیب نمایند. زیرا این روش‌ها از یک سو حاکی از درک درست کسرها و در نظر گرفتن آنها به عنوان عدد می‌باشد. از طرف دیگر، تفکر، استدلال و خلاقیت دانش‌آموزان در مقایسه و مرتب کردن کسرها را نشان می‌دهد.
- ۳- دانش‌آموزان می‌توانند راهبردهای مختلفی را در حل مسائل ریاضی برگزینند. راهبرد رسم شکل یکی از این راهبردها است که در درک و ساده‌سازی مسائل کسر نقش بسزایی دارد. برای کشیدن شکل به اشکال دقیق و واقعی نیازی نیست؛ کافی است با داده‌ها، اطلاعات و خواسته‌های مسئله ارتباط داشته باشد. این راهبرد به دلیل داشتن مزایای مختلف در آموزش ریاضی و برنامه‌درسی ریاضی دوره ابتدایی از اهمیت بسزایی برخوردار است. این مزایا عبارتند از: ۱- به دانش‌آموزان کمک می‌کند موقعیت را تجسم کنند<sup>۱</sup>. ۲- مدل ساخته شده، تصویری ملموس از یک موقعیت مجرد را فراهم می‌کند. ۳- یادگیری دانش‌آموزان را از طریق دیدن و انجام دادن ارضا می‌کند. ۴- کلمات را به تصاویر قابل تشخیص برای ذهن‌های نارس تبدیل می‌کند.

### بدهمی‌های رایج دانش‌آموزان

$$۱- \text{دانش‌آموزان در محاسباتی مانند } \frac{1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}} \text{ به اشتباه اعداد صورت را با اعداد}$$

مخرج ساده می‌نمایند. این بدهمی ناشی از تعمیم نادرست ساده کردن کسرها در ضرب به جمع یا تفریق کسرها است.

۲- دانش‌آموزان در مقایسه کسرها، صورت و مخرج کسرها را جداگانه در نظر

می‌گیرند و با هم مقایسه می‌کنند. مثلاً در مقایسه  $\frac{3}{8}$  با  $\frac{1}{2}$  چون فکر می‌کنند ۳ از

۱ بزرگ تر و ۸ از ۲ بزرگ تر است، پس نتیجه می گیرند که  $\frac{۳}{۸}$  از  $\frac{۱}{۲}$  بزرگ تر است. یا در مقایسه فکر می کنند از دو کسر با صورت مساوی کسری بزرگ تر است که مخرج بزرگ تری داشته باشد. مثلاً فکر می کنند  $\frac{۴}{۷}$  کوچک تر از  $\frac{۴}{۵}$  است، چون ۵ از ۷ کوچک تر است. این بدفهمی ها ناشی از عدم درک درست کسرها و عدم درک کسر به عنوان عدد و تعمیم نادرست مقایسه اعداد صحیح به کسرها است.

## مرور فصل

### فرهنگ نوشتن

سؤال ۲ و ۳ این قسمت به بدفهمی های رایج دانش آموزان اشاره دارد. معلم می تواند با زدن مثال های متفاوت و ناقض این بدفهمی ها، این اشتباهات را در ذهن دانش آموزان اصلاح نمایند.

### حل بعضی از تمرین ها

سؤال ۵: به یادآوری محاسبه محیط و مساحت می پردازد که ممکن است دانش آموزان در محاسبه آن همچنان مشکل داشته باشند. معلم می تواند با دست ورزی مناسب، مشکلات احتمالی آنان را برطرف نماید. این دست ورزی مجسم می تواند به دانش آموزان در درک این موضوع که ضلع مشترک مستطیل و مثلث در محاسبه محیط کل شکل تأثیری ندارد، کمک نماید. بنابراین، محیط کل شکل با مجموع محیط های مثلث و مستطیل برابر نیست.

سؤال ۶: این سؤال چگال بودن کسرها و اینکه بین دو عدد صحیح بی شمار عدد کسری وجود دارد را بیان می کند. این مسئله می تواند به دانش آموزان در درک کسرها به عنوان عدد کمک شایانی نماید.

سؤال ۷: در این سؤال بخشی از یک مسئله داده شده و از دانش آموزان خواسته شده است با توجه به آن، مسئله ای طرح کنند. دانش آموزان باید مسائل متفاوت را طرح کنند و در کلاس بخوانند. دانش آموزان با نظارت معلم باید اشکالات احتمالی در مسائل مطرح شده توسط دوستانشان را برطرف نمایند.

سؤال ۸: در این سؤال مجموع سطرها، ستون ها و قطرها باید برابر با  $\frac{۱}{۲}$  یا  $\frac{۱۵}{۳۰}$  شود.

دانش‌آموزان می‌توانند با زدن حدس‌های مختلف و بررسی آنها جواب درست را پیدا کنند.

$\frac{۲}{۳۰}$	$\frac{۹}{۳۰}$	$\frac{۴}{۳۰}$
$\frac{۷}{۳۰}$	$\frac{۵}{۳۰}$	$\frac{۳}{۳۰}$
$\frac{۶}{۳۰}$	$\frac{۱}{۳۰}$	$\frac{۸}{۳۰}$

$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۲}{۱۵}$
$\frac{۷}{۳۰}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۱۰}$
$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۳۰}$	$\frac{۴}{۱۵}$

سؤال ۱۱: چون شکل داده شده  $\frac{۴}{۳}$  واحد یا ۴ تا  $\frac{۱}{۳}$  واحد یا  $\frac{۱}{۳}$  واحد را نشان می‌دهد پس سه قسمت از این شکل یک واحد را می‌سازد.



### معما و سرگرمی

اگر مخزن «ب» از ۱۲ قسمت مساوی، مخزن «آ» از ۴ و مخزن «ج» از ۳ قسمت مساوی تشکیل شده باشد، سه مخزن روی هم از ۱۹ قسمت مساوی ساخته شده‌اند. اگر گنجایش آب کل سه مخزن را بر ۱۹ تقسیم کنیم هر قسمت ۹ لیتر آب می‌گیرد. بنابراین، در مخزن «آ»، «ب» و «ج» به ترتیب ۳۶، ۱۰۸ و ۲۷ لیتر آب جای می‌گیرد.

ب	ب	ب	ب	ب	ب	ب	ب	ب	ب	ب	ب
آ	آ	آ	آ								
ج	ج	ج									

برای حل این معما می‌توان از جدول تناسب زیر نیز بهره برد.

مخزن ج	۳	۲۷
مخزن آ	۴	۳۶
مخزن ب	۱۲	۱۰۸
مخزن آب	۱۹	۱۷۱

×۹

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۱۲}$$

$$\frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۱۲}$$