درس چهارم

کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

اهداف درس چهارم

۱ دانش‌آموز بتواند به کمک قضیهٔ تالس ثابت کند که در هر مثلث نیمساز هر زاویهٔ داخلی، قاعدهٔ مقابل به آن زاویه را به نسبت ضلع های آن زاویه تقسیم می کند.

۲ دانش‌آموز به کمک تشابه مثلث‌ها ثابت کند در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازهای متناظر برابر نسبت تشابه است و نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت تشابه و نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه است.

روش تدریس درس چهارم

❑ بهتر است برای شروع این درس، معلم برای دانش‌آموزان بیان کند که حال‌که در درس‌های قبلی با قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها آشنا گشته‌ایم می‌خواهیم چند کاربرد از این مطالب را در درس جدید بیان کنیم.

❑ یکی از کاربردهای قضیه تالس در قضیه نیمسازهای زوایای داخلی مثلث است. سپس صورت قضیه صفحه ۴۵ بیان شود، و اثبات آن به کمک دانش‌آموزان مطابق کتاب انجام پذیرد.

❑ مثال صفحه ۴۵ و کار در کلاس صفحه ۴۶ برای درک بهتر قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی می‌باشند.

❑ در ادامه معلم بیان کند که حال می‌خواهیم کاربردی از تشابه مثلث‌ها را بیان کنیم.

❑ با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توان نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها و مساحت‌های متناظر دو مثلث را به‌دست آورد.

❑ سپس قضیه صفحه ۴۶ بیان و اثبات گردد.

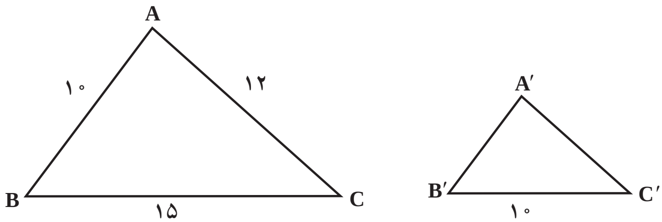
❑ سپس از دانش‌آموزان سؤال شود که نتایج به‌دست آمده برای نسبت محیط و مساحت دو مثلث متشابه آیا قابل تعمیم برای چند ضلعی‌ها نیز می‌باشد؟

❑ پس از بحث در مورد آن، کار در کلاس بالای صفحه ۴۸ انجام شود و نتیجه آن به‌طور واضح بیان گردد.

❑ سپس در مورد متشابه بودن دو nضلعی منتظم بحث شود.

حل تمرین‌های درس چهارم

۱



بزرگ‌ترین ضلع مثلث $A'B'C'$ نظیر بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC است پس مطابق شکل $B'C'$ نظیر BC که طول آن ۱۵ است می‌باشد.

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}$$ نسبت تناسب

بنابراین

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط } A'B'C'}{\text{محیط } ABC}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط } A'B'C'}{۱۵+۱۰+۱۲}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{محیط } A'B'C' = \frac{۷۴}{۳}$$

۲ دو مثلث AMN و ABC متشابه هستند و نسبت تشابه برابر $k=\frac{AB}{AM}$ است. بنابراین :

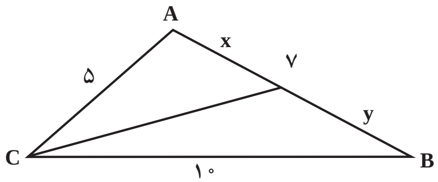
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=k^۲ \Rightarrow \frac{S_{ABC}-S_{AMN}}{S_{AMN}}=k^۲-۱ \Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}}=k^۲-۱$$

$$\Rightarrow k^۲-۱=۸ \rightarrow k=۳$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM}=۳ \Rightarrow \frac{AB-AM}{AM}=۳-۱$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA}=۲$$

۳ می‌دانیم که هر نیمساز، قاعده وارد بر آن را به نسبت دو ضلع آن تقسیم می‌کند. بنابراین :

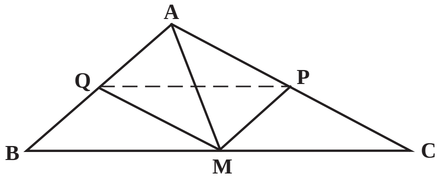


$$\frac{x}{۵}=\frac{y}{۱۰} \text{ و } x+y=۷$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۵}=\frac{y}{۱۰}=\frac{x+y}{۱۵}=\frac{۷}{۱۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{۵}=\frac{۷}{۱۵} \Rightarrow x=\frac{۷}{۳} \\ \frac{y}{۱۰}=\frac{۷}{۱۵} \Rightarrow y=\frac{۱۴}{۳} \end{cases}$$

۴ در مثلث AMB، MQ نیمساز است. بنابراین :



$$\frac{AQ}{QB}=\frac{AM}{MB} \qquad (۱)$$

در مثلث AMC، MP نیمساز است. بنابراین :

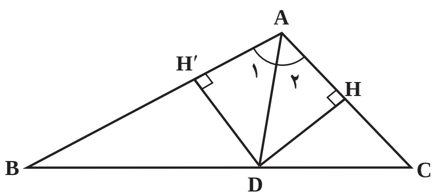
$$\frac{AP}{PC}=\frac{AM}{MC} \qquad (۲)$$

چون MB=MC از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB}$$

بنابراین طبق عکس قضیه تالس داریم : PQ||BC

۵ الف) طبق نتیجه ۲ درس اول نسبت مساحت دو مثلث ABD و ACD برابر نسبت اضلاع روبه‌روی زاویه $A_۱$ و $A_۲$ در آنهاست پس :



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC} \qquad (۱)$$

ب) چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد پس فاصله آن از دو ضلع زاویه A یکسان است بنابراین DH=DH′.

با توجه به نتیجه ۱ درس اول چون در دو مثلث ABD و ACD ارتفاع‌های DH و ´DH برابرند، نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر نسبت قاعده‌های آنهاست یعنی :

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB}{AC} \qquad (۲)$$

ج) با توجه به روابط (۱) و (۲) درستی قضیه نیمسازها اثبات می‌شود یعنی :

$$(۱) \text{ و } (۲) \qquad \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

۶ چون BE دو برابر ED است پس $\frac{BE}{BC}=\frac{۲}{۳}$. از طرف دیگر داریم :

$$\frac{AB}{CD}=\frac{۲a}{۳a}=\frac{۲}{۳}$$
$$\frac{AE}{CB}=\frac{۴b}{۶b}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین :

$$\frac{BE}{BD}=\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{CB}$$

پس دو مثلث ABE و CBD به حالت تناسب سه ضلع متشابه هستند.

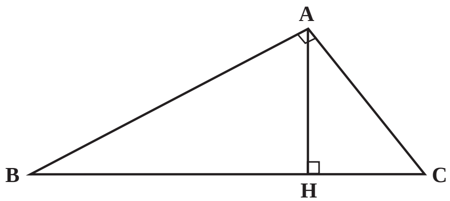
بنابراین زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع متناسب در دو مثلث با هم برابرند پس :

$$\begin{cases} ۲x-۱=y+۱۵ \\ ۲x-۷=x+y \end{cases} \Rightarrow \quad x=۹ \qquad y=۲$$

چون نسبت اضلاع متناظر مثلث BCD به مثلث ABE برابر $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد بنابراین :

$$\frac{S_{BCD}}{S_{ABE}}=(\frac{۳}{۲})^{۲}=\frac{۹}{۴}$$

۷ الف) مثلث‌های ABH و ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها $\frac{AB}{BC}$ است :



بنابراین :

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=(\frac{AB}{BC})^{۲}$$

به همین ترتیب مثلث‌های ACH و ABC با نسبت تشابه $\frac{AC}{BC}$ متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=(\frac{AC}{BC})^{۲}$$

ب) با جمع دو طرف قسمت الف داریم :

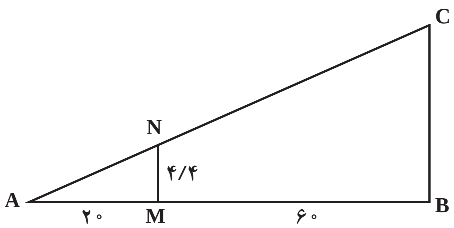
$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}+\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=(\frac{AB}{BC})^۲+(\frac{AC}{BC})^۲ \Rightarrow \frac{S_{ABH}+S_{ACH}}{S_{ABC}}=\frac{AB^۲}{BC^۲}+\frac{AC^۲}{BC^۲}$$

چون $S_{ABH}+S_{ACH}=S_{ABC}$ داریم :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=\frac{AB^۲+AC^۲}{BC^۲}\Rightarrow \frac{AB^۲+AC^۲}{BC^۲}=۱$$

$$\Rightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲$$

۸ از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم می‌کنیم شکل زیر حاصل می‌شود :



طبق قضیه تالس با توجه به موازی بودن MN و BC داریم :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۲۰}{۸۰}=\frac{۴/۴}{BC}$$

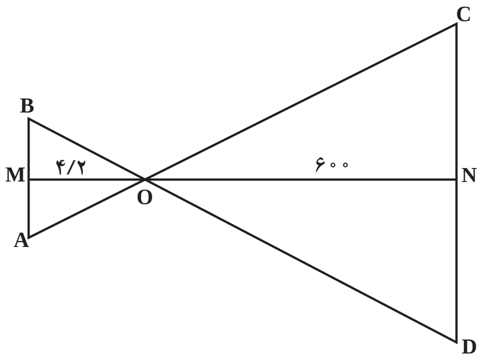
$$\Rightarrow BC=۱۷/۶m$$

بنابراین فاصله عمودی چشمان ناظر از نوک آنتن برابر ۱۷/۶ متر می‌باشد :

پس :

ارتفاع ساختمان = ۱۷/۶−۳/۲+۱/۶ = ۱۶ m

۹ واحد همه طول‌های موجود را به cm تبدیل می‌کنیم.



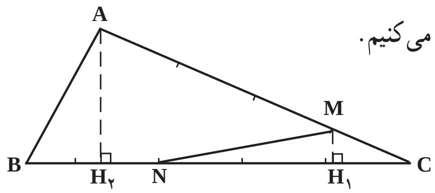
بنابراین CD∥AB :

$$\left.\begin{matrix}\hat{B}=\hat{D}\\ \hat{A}=\hat{C}\end{matrix}\right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{C}D$$

بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث نیز برابر نسبت تشابه می‌باشد پس :

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OM}{ON} \Rightarrow \frac{۳/۵}{CD}=\frac{۴/۲}{۶۰۰} \Rightarrow CD=۵۰۰cm=۵m$$

حل برخی از نمونه سؤال‌های ارزشیابی



پاسخ سؤال ۱۹) ارتفاع‌های $AH_۲$ و $MH_۱$ را رسم می‌کنیم.

در مثلث $ACH_۲$ داریم $AH_۲ \| MH_۱$ پس :

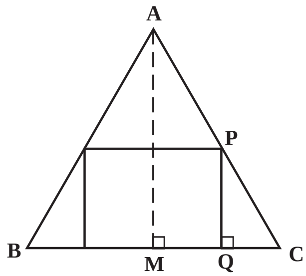
$$\frac{MH_۱}{AH_۲} = \frac{CM}{CA} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \frac{\frac{۱}{۲}\ BC\ .\ AH_۲}{\frac{۱}{۲}\ NC\ .\ MH_۱} = \frac{BC}{NC} \cdot \frac{AH_۲}{MH_۱} = \frac{۴}{۳} \cdot \frac{۴}{۱} = \frac{۱۶}{۳}$$

$$S_{ABNM} = S_{ABC} - S_{MNC} = S_{ABC} - \frac{۳}{۱۶} S_{ABC} = \frac{۱۳}{۱۶} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABNM}} = \frac{۱۶}{۳}$$



پاسخ سؤال ۲۰) در مثلث AMC طبق قضیه فیثاغورس داریم :

$$AC^۲ = AM^۲ + MC^۲$$

$$\Rightarrow ۲^۲ = AM^۲ + ۱^۲ \Rightarrow AM = \sqrt{۳}$$

طول ضلع مربع محاط شده را برابر a در نظر می‌گیریم، بنابراین :

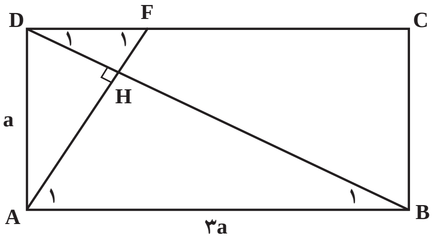
$PQ = a$ و $CQ = ۱ - \frac{a}{۲}$

چون $PQ \| AM$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{CQ}{MC} = \frac{PQ}{AM} \Rightarrow \frac{۱-\frac{a}{۲}}{۱} = \frac{a}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{۳}(۱-\frac{a}{۲}) \Rightarrow a = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}(۲-\sqrt{۳})}{۴-۳} = ۴\sqrt{۳} - ۶$$

پاسخ سؤال ۲۱) طول ضلع AD را برابر a در نظر می‌گیریم بنابراین $AB = ۳a$.
طبق رابطه فیثاغورس در مثلث ABD داریم :



$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = a^۲ + (۳a)^۲ = ۱۰a^۲ \Rightarrow BD = \sqrt{۱۰}\,a$$

در مثلث ABD پاره‌خط AH ارتفاع وارد بر وتر است، بنابراین طبق روابط طولی داریم :

$$AD^۲ = DH.DB \Rightarrow a^۲ = DH.\sqrt{۱۰}\,a \Rightarrow DH = \frac{}{\sqrt{۱۰}}$$

$$DF \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{F}_۱ = \hat{A}_۱ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{DFH} \sim \overset{\Delta}{ABH}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{HB}{HD} \qquad \Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{DB - DH}{HD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{\sqrt{۱۰}\,a - \frac{a}{\sqrt{۱۰}}}{\frac{a}{\sqrt{۱۰}}} = ۹$$

چون AB=DC بنابراین DC، ۹ برابر DF است. $\Leftarrow$

فصل ۳

چندضلعی‌ها

نگاه کلی به فصل

در دوره ابتدایی در مورد چندضلعی‌های معروف مانند مثلث، مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، لوزی و ذوزنقه و برخی ویژگی‌ها و نیز روش محاسبهٔ مساحت آنها مطالبی ارائه گردید. در دورهٔ متوسطه اول در کتاب ریاضی هشتم در مورد این چندضلعی‌ها و چندضلعی‌های منتظم و ویژگی آنها و نیز تعداد قطرها و اندازهٔ زاویه‌های داخلی و خارجی آنها مطالبی گسترده‌تر از دوره ابتدایی ارائه گردید.

در کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه اول روش‌هایی برای تشخیص چندضلعی‌های محدب و مقعر مطرح گردید.

در ریاضی هشتم و نهم با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها برخی از ویژگی‌های این چندضلعی‌ها به‌صورت ضمنی اثبات گردید، هر چند که هدف، آموزش اثبات آن ویژگی‌ها نبوده است بلکه به‌کارگیری حالت‌های مختلف هم‌نهشتی مثلث‌ها بوده است. در این فصل در ابتدا مفاهیم پایه و اساسی مانند نقطه، پاره‌خط، ضلع و رأس یادآوری می‌شوند و سپس به تعریف چندضلعی، قطر و چندضلعی محدب و مقعر پرداخته شده است. سپس انواع چهارضلعی‌های مهم و برخی از ویژگی آنها معرفی، بررسی و اثبات می‌گردند.

در طی این مراحل سعی می‌شود دانش‌آموز به‌صورت فعالیت محور با مراحل و روش‌های استدلال در هندسه آشنا شده و روش‌های استدلال را بیاموزد. در قسمت دوم این فصل مساحت چندضلعی‌های مهم یادآوری می‌گردند و برخی از ویژگی‌های پرکاربرد در مساحت مورد بررسی و اثبات قرار می‌گیرند و سپس کاربردهایی از مساحت مطرح می‌گردد و در نهایت نقاط شبکه‌ای و روش محاسبهٔ مساحت شکل‌های گوناگون در صفحهٔ شبکه‌بندی شده مطرح و آموزش داده می‌شود.

نقشه مفهومی

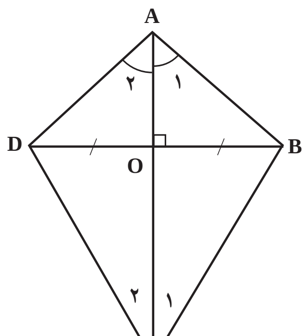
- چند ضلعی‌ها
  - چندضلعی‌ها و ویژگی‌های آنها
    - یادآوری مفاهیم اساسی
      - ضلع و رأس
      - قطر و محاسبه تعداد آن
      - چندضلعی محدب و مقعر
    - معرفی چهارضلعی‌ها و ویژگی‌های آنها
      - متوازی‌الاضلاع
      - مستطیل
      - لوزی
      - مربع
      - ذوزنقه
  - مساحت و کاربردهای آن
    - یادآوری مساحت چندضلعی‌های مهم
      - مثلث
      - مربع
      - مستطیل
      - متوازی‌الاضلاع
      - لوزی
      - ذوزنقه
    - کاربردهایی از مساحت و برخی ویژگی‌های مهم
    - نقاط شبکه‌ای و مساحت

تصویر عنوانی

از دانش هندسه و شکل‌های هندسی به‌طور گسترده‌ای در معماری بناها، سازه‌ها و پل‌ها استفاده می‌شود. در کشور عزیزمان ایران، از دوران کهن تا معاصر، بناها و سازه‌های بسیاری وجود دارند که نشان‌دهندهٔ به‌کارگیری وسیع هندسه در طراحی و ساخت آنها می‌باشد. پل طبیعت تهران یکی از بناهای شاخص و ممتاز ایران و جهان در دوران معاصر است که آشنایی و کاربرد هندسه ــ به‌خصوص چندضلعی‌ها ــ در طراحی و ساخت آن توسط مهندس نابغهٔ زن ایرانی[۱] به‌صورت شایان توجهی به چشم می‌خورد. چندضلعی‌های گوناگون شامل مثلث، مربع، مستطیل، لوزی، متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه در قسمت‌های مختلف این سازهٔ زیبا به وضوح قابل رویت و شناسایی است. برای استحکام بیشتر برخی از قسمت‌های این سازه از اتصال قطرهای این چندضلعی‌ها استفاده شده است. مساحت این پل ۷۰۰۰ متر مربع است که در ارتفاع ۴۰ متری از سطح زمین، با سه ستون و در سه طبقه، اولین پل صرفاً پیاده‌رو در ایران محسوب می‌شود.

دانستنی‌هایی برای معلم

کایت یا شبه لوزی: کایت چهارضلعی، شامل فقط دوجفت متمایز، از ضلع‌های مجاور با اندازه‌های برابر است. در واقع کایت چهارضلعی محدبی است که دارای دو قطر عمود بر هم است و فقط یکی از قطرهای منصف قطر دیگر می‌باشد. قطری که منصف قطر دیگر است محور تقارن کایت و همچنین نیمساز دو زاویهٔ مقابل است. مساحت کایت مانند مساحت لوزی محاسبه می‌شود. در واقع کایت اجتماع دو مثلث متساوی‌الساقین است که قاعده‌های آنها مشترک و دو رأس دیگر دو مثلث در دو طرف خطی باشند که قاعده مشترک روی آن واقع است. سپس قاعده مشترک را حذف کرده باشیم.



$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \quad , \quad \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$$

$$AC \perp BD \quad , \quad OB = OD$$

$$AB = AD \quad , \quad BC = DC$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{۲}$$

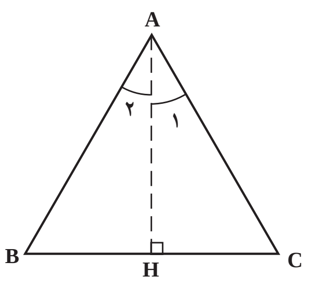
۱ــ لیلا عراقیان

توصیه‌های آموزشی

به همکاران محترم توصیه می‌شود که برای تدریس هر قسمت، قبل از بیان نتیجه‌ها و قضیه‌ها، فعالیت‌های طراحی شده به‌صورت مرحله به مرحله پاسخ داده شود تا یک نظم منطقی برای رسیدن به نتایج و قضایا و اثبات برخی از ویژگی‌ها در ذهن دانش‌آموز شکل گیرد. در مواردی که به جز مراحل طراحی شده در فعالیت‌ها و نتیجه‌گیری‌ها مراحل یا روش دیگری وجود دارد که در کتاب به آن اشاره شده ولی توضیح کاملی ارائه نگردیده است و یا در کتاب به آن اشاره نشده است ولی می‌توان آن را ارائه داد به‌طوری که دانش‌آموز از طریق آن می‌تواند به همان نتایج دست یابد، بهتر است پس از تدریس و ارائه مراحل مطرح شده در کتاب و از طریق راهنمایی و هدایت دانش‌آموز را به‌سوی درک روش یا روش‌های دیگر هدایت نمود. این امر سبب می‌گردد که دانش‌آموز برای حل برخی از مسائل فقط به یک روش وابسته نگردد و بداند که می‌تواند برای حل برخی از مسائل دیدگاه‌های متفاوتی را اتخاذ نماید و نیز می‌تواند بین دو یا چند روش، روشی را که از نظر وی برای درک مفهوم مورد نظر راحت‌تر است، انتخاب نماید.

مسیرهایی برای توسعه : برای افزایش سطح درک دانش‌آموزان و برقراری ارتباط بیشتر دانش‌آموز و کتاب، استدلال‌های این فصل تا حد امکان به‌صورت کلامی مطرح شده‌اند. می‌توان در هر قسمت پس از ارائه آنچه در کتاب مطرح شده است از دانش‌آموزان بخواهیم تا سعی کنند آن را به زبان ریاضی و با نمادهای ریاضی بنویسند.

مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الساقین دارای ویژگی‌هایی هستند که دانش‌آموز بسیاری از آنها را در سال‌های قبل مطالعه نموده و آموزش دیده است. از آنجایی که این مثلث‌ها و ویژگی‌های آنها و نیز برخی پاره‌خط‌ها در این مثلث‌ها مانند نیمساز و ارتفاع و میانه در حل بسیاری از مسائل و یا دستیابی به برخی از نتایج در این فصل استفاده می‌گردند، بنابراین ارائه مسائلی که به اثبات برخی از ویژگی‌های این مثلث‌ها منجر می‌شود قبل از شروع قسمت تعریف چهارضلعی‌های مهم می‌تواند در ارائه کار موجب ساده‌تر شدن امر آموزش گردد. مانند مسئله زیر :



ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، AH ارتفاع است.

ثابت کنید :

الف) $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$

ب) $BH = CH$

ــ در قسمت مساحت برای درک کاربرد مساحت و یا درک بزرگی یا کوچکی مقدار محاسبه شده در برخی موارد می‌توان از دانش‌آموز خواست تا مساحت محاسبه شده در یک شکل را با مساحت شکل‌هایی که با آنها آشنایی دارند مقایسه نمایند. به‌طور مثال می‌توان از دانش‌آموز خواست تا مساحت یک چندضلعی (به‌عنوان مثال

یک قسمت از یک سالن ورزشی که به شکل ذوزنقه است) را با مساحت یک سرامیک یا موزاییک ۳۰ در ۳۰ مقایسه نماید و تعداد کاشی‌ها یا موزاییک مورد نیاز جهت کاشی‌کاری یا موزاییک نمودن آن سطح را محاسبه کند.

نمونه سؤالات ارزشیابی

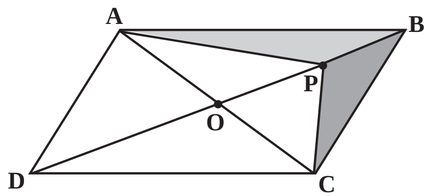
۱ الف) ثابت کنید مستطیلی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، مربع است.

ب) ثابت کنید لوزی که دو زاویه مجاور آن هم‌نهشت باشند، مربع است.

۲ الف) ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای درونی متوازی‌الاضلاع که لوزی نباشد، یک مستطیل پدید می‌آید.

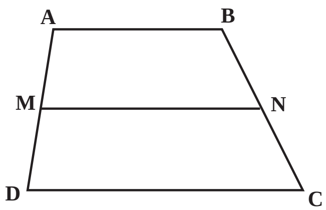
ب) اگر همه اضلاع متوازی‌الاضلاع برابر باشند چه اتفاقی رخ خواهد داد؟

۳ ثابت کنید هر دو رأس مقابل یک متوازی‌الاضلاع از قطر گذرنده از دو رأس مقابل دیگر، به یک فاصله‌اند.



۴ اگر P نقطه‌ای دلخواه روی قطر BD از متوازی‌الاضلاع ABCD باشد، ثابت کنید دو مثلث ABP و BPC هم‌مساحت هستند.

راهنمایی: قطر AC را رسم کرده و از ویژگی میانه در مساحت استفاده کنید. می‌توانید از مسئله (۳) نیز استفاده کنید.

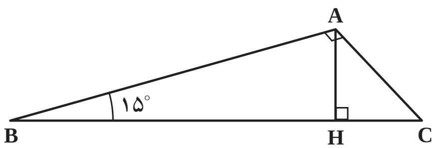


۵ در ذوزنقه مقابل M وسط AD و N وسط BC است. ثابت کنید:

الف) $MN=\frac{AB+CD}{۲}$ (MN را پاره‌خط میانگین می‌گویند)

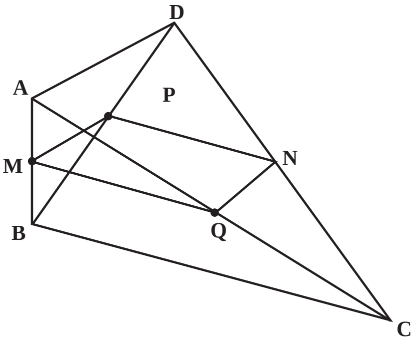
ب) $MN \parallel AB$ و $MN \parallel CD$

از A به C وصل کرده تلاقی پاره‌خط AC را با پاره‌خط MN نقطه K بنامید سپس از قضیه پاره‌خط میانگین در مثلث استفاده کنید.

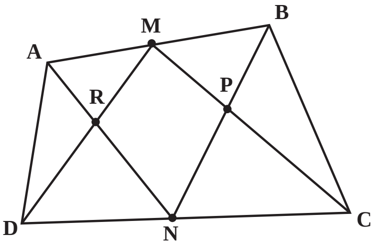


۶ ثابت کند اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه ۱۵° یا ۷۵° باشد، اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ وتر است. $(AH=\frac{۱}{۴}BC)$

(**راهنمایی** : از رسم میانه وارد بر وتر و خواص مثلث متساوی‌الساقین و ضلع مقابل به زاویهٔ 30° در مثلث قائم‌الزاویه استفاده نمایید)



۷ ثابت کنید در هر چهارضلعی دلخواهی مانند ABCD، اگر از به هم وصل نمودن وسط دو ضلع مقابل و وسط دو قطر آن یک چهارضلعی حاصل شود، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

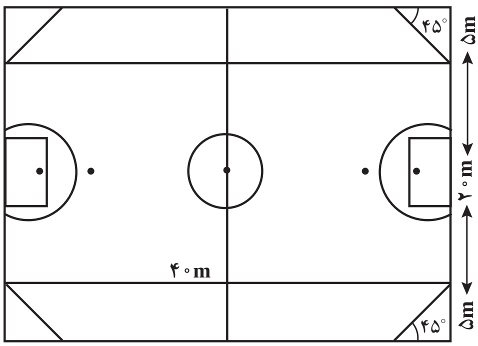


۸ در چهارضلعی محدب ABCD، M وسط AB و N وسط CD است.

ثابت کنید : $S_{MPNR} = S_{\overset{\Delta}{ARD}} + S_{\overset{\Delta}{PBC}}$

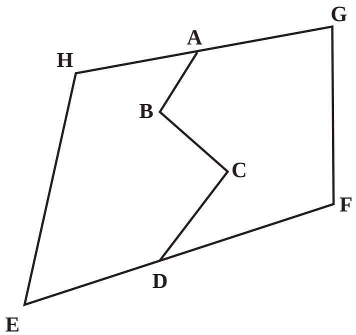
(**راهنمایی** : از M به N وصل نمایید)

۹ سالن فوتسالی از بالا به شکل زیر است. در چهار گوشه آن فضاهای مثلثی برای نصب پروژکتور در نظر گرفته شده است. می‌خواهند فضاهای مشخص شده (ذوزنقه‌ها) برای تماشاچیان را به‌صورتی موزاییک‌کاری کنند که از دید دوربینی که در سقف ورزشگاه قرار دارد به دو رنگ آبی و قرمز دیده شود



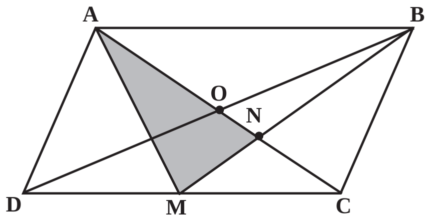
و دوربینی که در سمت تماشاچیان آبی و یا قرمز قرار دارد، جایگاه تماشاچیان مقابل را جهت القای آرامش سبزرنگ نمایش دهد. اگر در هر جایگاه ۴ پله با ارتفاع ۵۰ سانتی‌متر و عرض‌های برابر درنظر گرفته شود و از موزاییک‌هایی به ضلع ۵۰cm و مربعی استفاده شود. تعداد موزاییک‌های قرمز و آبی و سبز را مشخص نمایید.

۱۰ زمین I و II به دو کشاورز تعلق دارند. هر یک از این دو کشاورز می‌خواهند برای استفاده بهتر مثلاً فنس‌کشی و استفاده از ماشین‌های کشاورزی، مرز مشترک ABCD بین خود را به یک مرز پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت هیچ‌کدام تغییر نکند. تعیین کنید این مرز چگونه باید رسم شود.



(**راهنمایی** : ابتدا از C خطی موازی EF رسم نمایید و پاره‌خط AC و خط موازی با آن را از نقطه B رسم کنید و ...)

۱۱ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع CD است. و قطر AC پاره‌خط BM را در N قطع می‌کند. مساحت مثلث AMN چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است؟ (یا مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر مساحت مثلث AMN است؟)



پاسخ برخی از سؤالات ارزشیابی

پاسخ سؤال ۷ :

در مثلث ABC : Q وسط AC و M وسط AB است $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MQ \parallel BC$

در مثلث DBC : N وسط DC و P وسط BD است $\Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{DP}{DB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow PN \parallel BC$

$\Rightarrow MQ \quad PN$

و به‌صورت مشابه با استفاده از عکس قضیه تالس در مثلث‌های ABD و ACD می‌توان نتیجه گرفت که $MP \parallel NQ$

پاسخ سؤال ۱۱ : قطر BD را رسم می‌کنیم با استفاده از ویژگی (۳) در مساحت، $S_{AMN} = S_{BNC}$.
پاره‌خط‌های BM و CO (O نقطه تلاقی دو قطر) دو میانه مثلث BDC می‌باشند در نتیجه،

$$S_{AMN} = S_{BNC} = \frac{۱}{۳}S(BCD) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} S_{ABCD} = \frac{۱}{۶} S_{ABCD}$$

کج‌فهمی‌ها و اشتباهات رایج

برخی از کج فهمی‌ها و اشتباهاتی که دانش‌آموز می‌تواند در این فصل با آنها روبه رو شود عبارت‌اند از :

۱ دانش آموز چهارضلعی‌ها و بسیاری از خواص آنها را در سنوات گذشته خوانده است، پس ممکن است در حل برخی مسائل مربوط به چهارضلعی‌ها با استفاده از دانسته‌های پیشین فرض‌هایی را در نظر بگیرد که هنوز برای آنها استدلالی ارائه نکرده است.

۲ هر چهار ضلعی که همه اضلاع آن با هم برابر است لوزی است که اشتباهاً مربع در نظر گرفته می‌شود.

۳ هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود است الزاماً لوزی نیست که دانش‌آموزان همیشه آن را لوزی در نظر می‌گیرند.

۴ دانش‌آموز مفهوم ارتفاع، میانه و نیمساز را درک نکرده است و آنها را با هم اشتباه می‌گیرد و با فرض‌هایی ناصحیح به حل مسائل می‌پردازد.

۵ در محاسبهٔ مساحت، به واحد اندازه‌گیری اضلاع و پاره‌خط‌ها و تبدیل واحدها دقت نمی‌شود.

معرفی منابع برای معلمان

۱ کتاب هندسه متوسطه، مبانی و مفهوم‌ها، نوشتهٔ محمود نصیری انتشارات مبتکران

۲ دایرةالمعارف هندسه، نوشته محمد هاشم رستمی جلد، انتشارات مدرسه وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

درس اول

چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

اهداف درس اول

۱ یادآوری رأس، ضلع و قطر و اضلاع مجاور و مقابل و زاویه‌های مجاور (اجزای چندضلعی)
۲ آشنایی با مفهوم چندضلعی و تشخیص آن
۳ محاسبه تعداد قطرهای یک n ضلعی
۴ تشخیص چندضلعی‌های محدب و مقعر
۵ تشخیص چهارضلعی‌های مهم و تعریف آنها
۶ آشنایی با برخی از ویژگی‌های چهارضلعی‌های مهم
۷ تشخیص چهارضلعی با استفاده از برخی از ویژگی‌های آن
۸ آشنایی با برخی از روش‌های استدلال برای درک برخی ویژگی‌های چهارضلعی‌ها
۹ آشنایی با نتیجه‌گیری منطقی در استدلال‌های هندسی
۱۰ استفاده از استدلال‌های معتبر و قابل اعتماد برای اثبات برخی از ویژگی‌های چهارضلعی‌ها.

روش تدریس درس اول

در ابتدای این درس مفهوم پاره‌خط و نقاط انتهایی آن یادآوری می‌گردد. دانش‌آموزان در کتاب ریاضی پایه هشتم از متوسطه اول تعریف ساده‌ای از چندضلعی را خوانده‌اند. در این قسمت چندضلعی به شکل دقیق‌تری تعریف می‌شود و برای درک بیشتر این تعریف چند مثال با حالت‌های مختلف برای جلوگیری از اشتباهات رایج و کج‌فهمی دانش‌آموزان ارائه می‌گردد. سپس مفاهیمی مانند ضلع، رأس، اضلاع مجاور و زاویه‌های مجاور و n ضلعی یادآوری می‌گردد. سپس تعریف قطر و تعدادی سؤال مطرح می‌گردد که دانش‌آموز با پاسخ به این سؤالات و مرحله به مرحله به‌صورت فعالیت محور به سمت دستیابی به فرمول محاسهٔ تعداد قطرهای یک n ضلعی هدایت می‌گردد. در کار در کلاس این قسمت تعداد پاره‌خط‌های بین

n نقطه‌ای که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط نباشد مطرح و رابطهٔ بین تعداد اضلاع و تعداد قطرها و تعداد پاره‌خط‌های بین این n نقطه (n رأس چندضلعی) بررسی می‌گردد و رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

تعداد اضلاع + تعداد قطرها = تعداد پاره‌خط‌ها

دانش‌آموز در پایه‌های قبلی با مفهوم چندضلعی‌های محدب و مقعر آشنا شده‌اند. در این قسمت تعریف مجدّدی از چندضلعی محدب و مقعر با روشی دیگر ارائه می‌گردد. در ادامهٔ این مبحث با یادآوری اضلاع مقابل و غیرمجاور با یادآوری تعریف چندضلعی‌های مهم پرداخته می‌شود. دانش‌آموز از دوران ابتدایی با این چهارضلعی‌ها آشنا شده است و برخی از ویژگی‌های آنها را نیز در دوران سه سالهٔ متوسطه اول آموخته است. در کار در کلاس این قسمت هدف این است که دانش‌آموز به‌صورت توضیحی، مانند آنچه در قسمت پ این سؤال ارائه شده است، هر قسمت را توضیح دهد. اما برای توسعه سطح دانش و آگاهی دانش‌آموزان می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا علاوه بر توضیح کلامی و فارسی‌نویسی، هر قسمت را مانند آنچه در کتاب ریاضی نهم دیده‌اند، هر قسمت را با عبارت‌های ریاضی و به‌صورت استدلال استنتاجی (بدون معرفی نام استدلال) و اثبات ریاضی بنویسند.

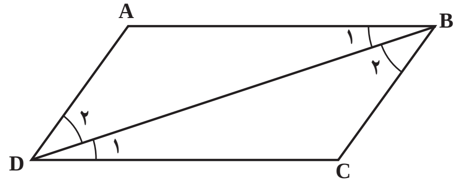
درادامه تعدادی از ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع به‌صورت قضیه و عکس قضیه مطرح می‌شوند که برای درک و فهم هرچه بیشتر این قضایا و اثبات آنها فعالیت‌هایی طراحی شده است که دانش‌آموز به‌صورت مرحله به مرحله، با پاسخ به پرسش‌هایی که قبل از هر قضیه یا عکس قضیه به‌صورتی هدفمند طراحی شده‌اند به نتیجه مطلوب یعنی دریافت مفهوم و مطلب هر قضیه یا عکس آن، خواهد رسید.

در فعالیت ۱، در متوازی‌الاضلاع از هم‌نهشتی دو مثلث به حالت (ز ض ز) و استفاده از قضیهٔ خطوط موازی و مورب که در کتاب ریاضی پایهٔ هشتم ارائه شده است، مطرح می‌گردد.

در کار در کلاس بعد از فعالیت ۱، از هم‌نهشتی مثلث‌ها و عکس قضیه خطوط موازی می‌توان به موازی بودن اضلاع روبه‌رو در چهارضلعی پی‌برد، یعنی :

$$\overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{فرض}}{\cong} \overset{\Delta}{CDB} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{طبق عکس قضیه}} AB \parallel CD \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{طبق عکس قضیه}} DA \parallel BC \end{cases} \Rightarrow$$

چهارضلعی ABCD که اضلاع مقابل آن دوبه‌دو با هم موازی هستند، متوازی‌الاضلاع است.



در فعالیت ۲، از قضیهٔ خطوط موازی و خط مورب $(\hat{B}_{۲}=\hat{C})$ و نیز زاویه‌های مکمل $(\hat{B}_{۱}+\hat{B}_{۲}=۱۸۰^{\circ})$ استفاده می‌شود و با ارائه یک سری پرسش‌های متوالی قضیهٔ ۲ به‌صورت نتیجه این فعالیت مطرح می‌شود و سپس با استفاده مجدّد از خطوط موازی و زاویه‌های مکمل عکس این قضیه ارائه می‌گردد. قضیه ۳ نیز می‌تواند دقیقاً مانند عبارت بالای آن به‌صورت مقابل اثبات گردد.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^{\circ}\\ \hat{B}+\hat{A}=۱۸۰^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{A}\Rightarrow \hat{C}=\hat{A}$$

و عکس قضیه ۳ نیز به‌صورت زیر اثبات می‌گردد.

$$\overset{\text{فرض}}{\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{D}\end{array}}\quad \underbrace{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^{\circ}}_{\text{دانسته‌های قبلی}}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{A}+\hat{B}=۳۶۰^{\circ}\Rightarrow ۲\hat{A}+۲\hat{B}=۳۶۰^{\circ}$$

$$\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{D}\end{array}\qquad \begin{array}{l}\Rightarrow ۲(\hat{A}+\hat{B})=۳۶۰^{\circ}\\ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\dfrac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰^{\circ}\end{array}$$

بنابراین دو زاویهٔ مجاور مکمل یکدیگرند و به همین صورت ثابت می‌شود که $\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^{\circ}$ است.

در فعالیت ۳ دو مثلث به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت هستند و مجدداً دانش‌آموز برای رسیدن به نتیجه فعالیت یعنی قضیه ۴ مرحله به مرحله راهنمایی شده است. در فعالیت ۴ دو مثلث به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند که با انجام این فعالیت و کامل نمودن جاهای خالی به نتیجه مطلوب (عکس قضیه ۴) خواهد رسید.

فعالیت ۵ برای رسیدن به نتیجه‌ای که در ادامهٔ آن آورده شده است، طراحی شده است. حالت هم‌نهشتی مثلث‌های مورد نظر (ض ز ض) می‌باشد. ولی برای رسیدن به این نتیجه دانش‌آموز می‌تواند هرکدام از حالت‌های (ض ض ض) و یا (ز ض ز) را برای هم‌نهشتی مثلث‌ها مطرح نماید. برای توسعهٔ بیشتر می‌توان این مسئله را با هر سه روش برای دانش‌آموزان مطرح نمود و یا از دانش‌آموزان بخواهیم که با توجه به فرض‌های مسئله، روش دیگری را برای هم‌نهشتی مثلث‌ها و رسیدن به نتیجه مطلوب ارائه دهند.

در قسمت ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی ابتدا از دانش‌آموزان می‌خواهیم با توجه به معلومات قبلی، ویژگی‌های خاص مستطیل و مربع را مطرح نمایند که باعث می‌شود این چهارضلعی‌ها از متوازی‌الاضلاع قابل شناسایی باشند. مانند برابری قطرها و زاویه‌های قائمه، که در ادامه این ویژگی‌ها به‌صورت پاسخ و پرسش‌های متوالی مطرح می‌گردند و برای توسعه بیشتر مطالب در این قسمت می‌توان هر کدام را به‌صورت جداگانه مطرح و استدلال نمود.

فعالیت ۶ یکی از فعالیت‌های مهم و پرکاربردی است که با پاسخ مرحله به مرحله به پرسش‌های آن، نتیجه

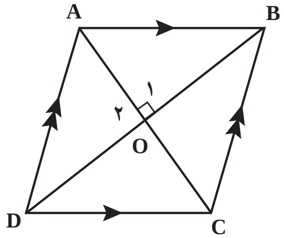
مهم مطلوب ارائه می گردد. در عکس ویژگی با توجه به اینکه AD=BC است و قطرها منصف یکدیگرند پس چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاعی از نوع مستطیل است. بنابراین زاویه A قائمه می‌باشد.

ویژگی‌هایی که فقط در لوزی و مربع برقرار هستند و باعث تشخیص آنها از متوازی‌الاضلاع و مستطیل می‌شوند عبارت‌اند از برابری اضلاع و عمود منصف بودن قطرهای آنها.

برای استدلال آوردن جهت اثبات ویژگی‌های لوزی استفاده از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین بسیار مؤثر است و می‌توان قبل از این قسمت جهت یادآوری از دانش‌آموزان پرسیده و یا برای آنها توضیح داده شود.

ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین که در این قسمت مد نظر است عبارت است از اینکه، در این مثلث ارتفاع، میانه و نیمساز زاویه رأس روی یک خط واقع‌اند.

سؤال ۱ کار در کلاس :



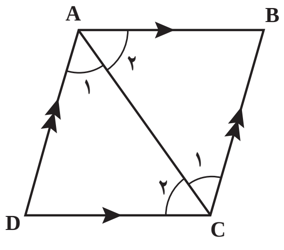
$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \text{ فرض} \\ AD = BC \text{ فرض} \\ AB = AD \end{array}\right\} \Rightarrow AB = BC = CD = AD$$

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ & \text{فرض} \\ OA = OA & \text{مشترک} \\ OB = OD & \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \underset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{OAD} \xRightarrow{\text{تساوی اجزا}}$$

بنابراین

چهارضلعی ABCD که دارای دو قطر عمود بر هم و چهار ضلع برابر است، لوزی می‌باشد.

سؤال ۲ کار در کلاس : فرض می‌کنیم قطر AC فقط نیمساز زاویه A باشد پس :

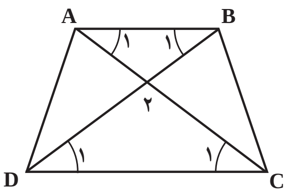


$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \underset{\text{(ض ض ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{ADC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزا}} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \text{فرض سؤال} \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_2 \quad \text{فرض متوازی‌الاضلاع} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین } \overset{\Delta}{ADC} : AD = CD \\ \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین } \overset{\Delta}{ABC} : AB = BC \end{array}\right. \\ AB = CD \quad \text{فرض متوازی‌الاضلاع} \end{array}\right.$$

در نتیجه AB=BC=CD=AD بنابراین متوازی‌الاضلاعی که دارای چهار ضلع برابر باشد لوزی می‌باشد.
دانش‌آموز می‌تواند این استدلال‌ها را به‌صورت کلامی نیز بنویسد. هدف از این کار در کلاس دست‌ورزی و آوردن استدلال معتبر و قابل اعتماد برای اثبات برخی از ویژگی‌های لوزی می‌باشد.
سپس ذوزنقه با بیانی متفاوت از متوازی‌الاضلاع تعریف می‌شود و سپس اجزای ذوزنقه شامل قاعده‌ها و ساق‌ها معرفی می‌گردند سپس ذوزنقه متساوی‌الساقین و ذوزنقه قائم‌الزاویه مطرح و معرفی می‌گردند.
در فعالیت ۷ به اثبات برابری زاویه‌های مجاور به یک قاعده در ذوزنقه متساوی‌الساقین پرداخته می‌شود و سپس این مطلب به‌صورت نتیجه فعالیت مطرح می‌گردد و در ادامه مجدداً با استفاده از عکس روش بیان شده به نتیجه‌ای برعکس نتیجه قبلی خواهد رسید و سپس می‌توان به روش زیر ثابت نمود که در هر ذوزنقه متساوی‌الساقین قطرها اندازه‌های مساوی دارند.

دو مثلث ACD و BCD را در نظر می‌گیریم:



$$\left.\begin{array}{l} BC = AD \quad \text{فرض} \\ \hat{C} = \hat{D} \quad \text{فرض} \\ DC = DC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ACD} \overset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow \text{تساوی اجزای متناظر}\ AC = BD \rightarrow \text{قطرها باهم مساوی‌اند}$$

و برای عکس آن ابتدا دو ارتفاع AH' و BH متناظر را رسم می‌کنیم و سپس:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AC = BD \\ AH' = BH \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{BHD} \overset{(\text{و ض})}{\cong} \overset{\triangle}{AH'C} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad DC = DC \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADC} \overset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \overset{\triangle}{BDC} \Rightarrow \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{array} \Rightarrow$$

ذوزنقه متساوی‌الساقین است