بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (۱)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

کتاب معلم
(راهنمای تدریس)

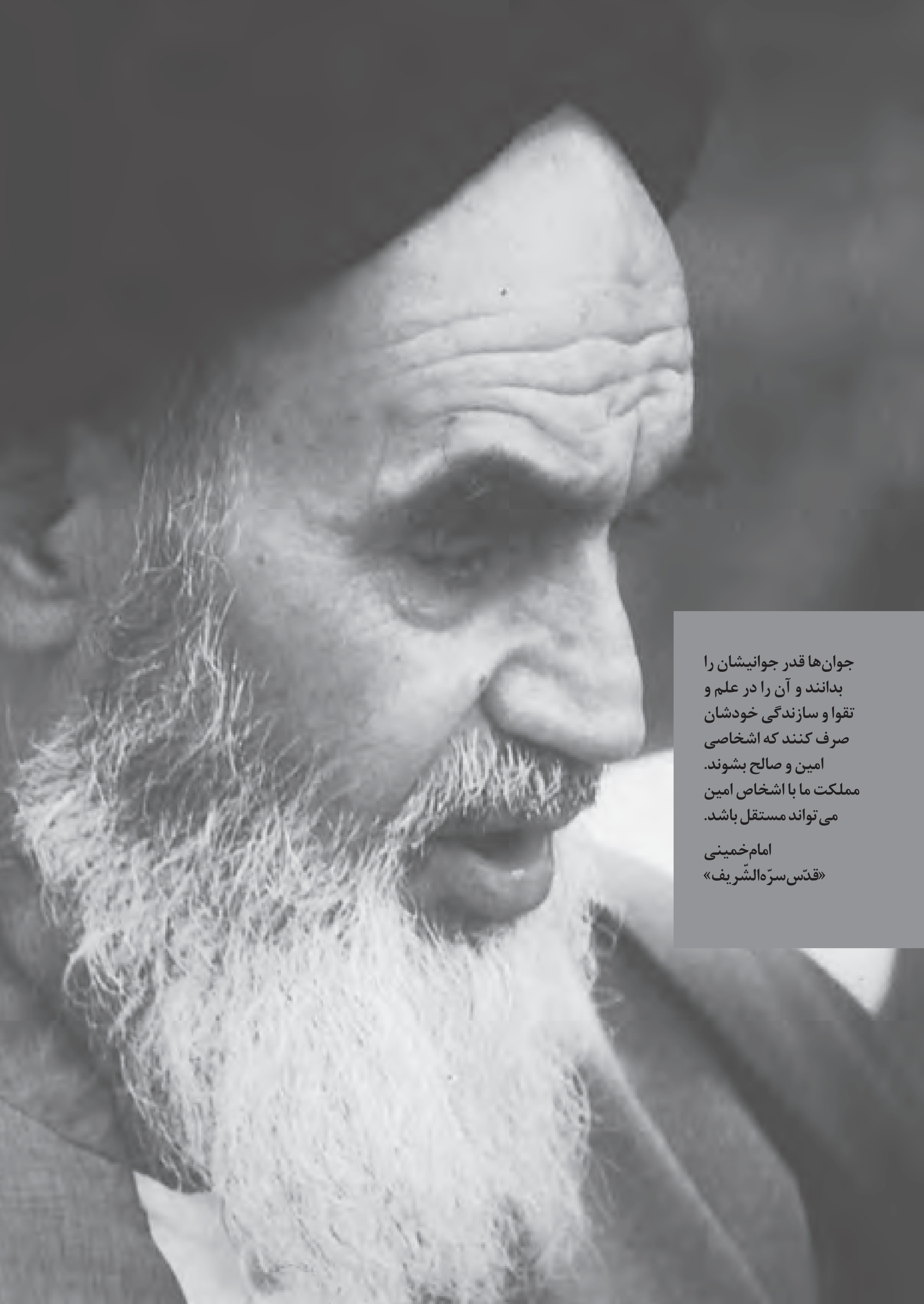
پایهٔ دهم
دورهٔ دوم متوسطه

۱۳۹۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: کتاب معلم هندسه پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۰۳۶۵
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: میلاد افشین‌منش، طاهره اسدی، زهرا رحیمی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی، اسماعیل طاهری مقدم، مرتضی علیشاهی و محمود نصیری (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ فاطمه باقری‌مهر، علیرضا کاهه، علیرضا ملکان، سپیده ملک‌ایزدی، حمید ثابت کلاچاهی و احمدرضا امینی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۵

شابک ۹ـ۲۶۶۹ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-2669-9



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی
«قدّس‌سرّه‌الشّریف»

فهرست

مقدمه

هندسه به عنوان یک مهارت پایه‌ای ریاضی، در برنامه درسی ریاضی بسیاری از کشورها، مورد تأیید و توجه قرار گرفته و تفکر هندسی و آموزش هندسه، در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. از همین رو در تألیف کتاب درسی سعی بر آن بوده است که نخست حوزهٔ هندسه و اندازه‌گیری و چگونگی آموزش آن، مورد بازاندیشی قرار گیرد و سپس محتوای کتاب با تکیه بر آخرین دستاوردهای پژوهشی در این حوزه و با تبعیت از اسناد بالا دستی از جمله سند برنامه درسی ملی، تنظیم و پیشنهاد شود.

بدین ترتیب برخی اصول و رویکردهای کلی، هدایتگر مؤلفین این کتاب بوده است. ازجمله اینکه در تنظیم و تدوین محتوای کتاب، متوسط هوش و توان یادگیری دانش‌آموزان مد نظر می‌باشد. روند آموزش در این کتاب به آرامی از شهود آغاز شده و به سمت تجرید پیش می‌رود و مشابه با سایر کتاب‌های درسی جدیدالتألیف، با اخذ توجه بیشتر به فعالیت دانش‌آموزان، سعی بر آن است که شیوهٔ آموزش از معلم محوری فاصله گرفته و طالب مشارکت بین معلم و دانش‌آموزان باشد. نگاه کاربردی و برقراری ارتباط هندسه با زندگی روزمره، رویکرد دیگری است که در تدوین کتاب مورد توجه قرار گرفته و تلاش شده که تلفیقی از هندسه با سایر حوزه‌های مطالعاتی نظیر معماری، هنر و زیبایی‌شناسی ارائه شود.

در این کتاب تلاش شده است با زمینه‌سازی برای آشنایی دانش‌آموزان با انواع استدلال و تقویت توانمندی تشخیص اثبات‌های معتبر از اثبات‌های نامعتبر ــ همسو با آرمان‌های سند برنامه درسی ملی ــ بستر لازم برای تربیت و پرورش انسان‌هایی که در برخورد با مسائل می‌توانند به طور منطقی استدلال کنند و قدرت تجزیه و انتزاع بیشتری دارند، فراهم شود.

همچنین سعی بر آن بوده است که بر تقویت و توسعهٔ روحیه پرسشگری، پژوهشگری و خلاقیت در دانش‌آموز تأکید شود. بدین ترتیب با زمینه‌سازی برای

ایجاد نظم فکری با توجه به سلسله مراتب اصول و قضایا و تشخیص روابط منطقی بین مفاهیم و زمینه‌سازی برای دست‌یابی به علم نسبت به پدیده‌ها، روابط، رویدادها و قوانین جهان آفرینش، به دانش‌آموز کمک می‌شود که به درک قانونمندی‌های طبیعت نائل آید.

بیان دقیق ایده‌های هندسی با به‌کارگیری زبان هندسی و تقویت گفتمان ریاضی، پرورش ذهن خلاق و بالا بردن درک فضایی دانش‌آموزان، شناسایی و تحلیل ویژگی‌ها و مشخصه‌های اشکال هندسی در صفحه و فضا اهداف دیگری است که در راستای تقویت تفکر تجسمی ــ که مورد تأکید برنامه درسی ملی است ــ هدایتگر تنظیم محتوای این کتاب بوده است. بدین ترتیب در این قسمت سعی شده است که بدون ورود به حیطهٔ محاسبات و استدلال و تنها به کمک درک شهودی، دانش‌آموزان با مهم‌ترین سازه‌های ساختمان هندسه آشنا شده و به زبان تصاویر و اشکال هندسی گفت و گو خواهد کردند.

فصل ۱

ترسیم هندسی و استدلال

تصویر عنوانی

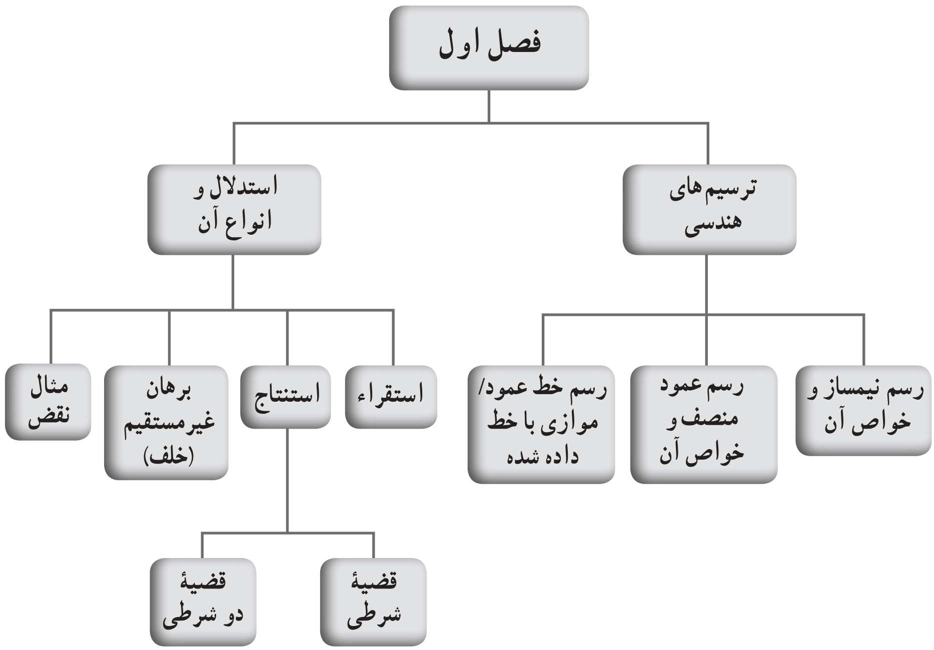
مسئلهٔ تقسیم‌بندی زمین‌های قابل زراعت برای مصارف کشاورزی و گذران زندگی، قدمتی به طول تاریخ بشری دارد.

برخی بر این باورند که شکل‌گیری هندسه به‌طور رسمی به زمانی برمی‌گردد که بر اثر طغیان رود نیل در مصر مرز میان زمین‌های کشاورزی شسته شده و از بین می‌رفت و بازسازی و تقسیم‌بندی مجدد زمین‌ها، مسئله‌ای مناقشه‌برانگیز میان کشاورزان بود.

واژهٔ «هندسه» یا معادل آن «Geometry» که از ترکیب Geo+metry به معنای اندازه‌گیری زمین به‌وجود آمده است، اشاره به این پیدایش تاریخی دارد.

لذا شاید بی‌مناسبت نباشد اگر هندسهٔ دهم با ترسیم‌های هندسی آغاز شده و با روند تاریخی شکل‌گیری این علم، ارتباطی تنگاتنگ یابد.

نقشهٔ مفهومی



نگاه کلی به فصل

ترسیم‌های هندسی بر پایهٔ مفهوم «مکان هندسی» بنا شده است و منظور از آن مجموعه تمام نقاطی از صفحه است که دارای ویژگی مشخصی باشند و هر نقطه از صفحه که دارای آن ویژگی است در مجموعه فوق قرار داشته باشد.

در بخش اول این فصل، بر پایه مفهوم مکان هندسی مجموعه تمام نقاطی که از یک یا دو نقطه و یا یک خط دارای فاصله یکسانی باشند، تعریف شده و این تعاریف، پله نخستین در تعریف نیمساز یک زاویه و عمود منصف یک پاره‌خط و همچنین عکس خاصیت نیمساز و عمود منصف قرار گرفته است.

شروع گام به گام پیشروی با حوصله کتاب درسی در این بخش، زمینه را برای آموزش رسم خط عمود بر یک خط و خط موازی با یک خط فراهم کرده است و با ایجاد فعالیت‌هایی مرحله‌بندی شده مقدمات کشف ویژگی‌های چهارضلعی‌های معروف را توسط دانش‌آموزان در این فصل و ادامه آن در فصل سوم به‌وجود آورده است.

از آنجا که پرداختن به اثبات بدون داشتن درک درستی از روش‌های پذیرفته شده استدلال در ریاضیات و هندسه؛ آموزشی عقیم و نیمه‌کاره است، در بخش دوم این فصل، کتاب درسی با شیب ملایمی به آشناسازی دانش‌آموزان با انواع استدلال و برهان در ریاضی پرداخته و با معرفی مثال نقض به عنوان ابطال‌کننده یک اثبات، پایه‌ای برای آموزش استدلال‌ها در هر کجای هندسه یا ریاضی فراهم آورده است.

درس اول

ترسیم‌های هندسی

اهداف درس اول

۱ آشنایی با روش یافتن مجموعه نقاطی که از یک یا دو نقطه به فاصله مشخصی باشند.
۲ آشنایی با نیمساز یک زاویه به عنوان مجموعه نقاطی که از دو ضلع زاویه به فاصله یکسانی هستند.
۳ مهارت در رسم نیمساز یک زاویه داده شده و درک عکس خاصیت نیمساز
۴ آشنایی با عمودمنصف یک پاره‌خط به عنوان مجموعه نقاطی که از دو سر پاره‌خط به فاصله یکسانی است.
۵ مهارت در رسم عمود منصف یک پاره‌خط دلخواه و و درک عکس خاصیت عمود منصف
۶ روش رسم خطی عمود بر یک خط در نقطه‌ای روی خط یا بیرون خط و تسلط بر آن
۷ روش رسم خطی موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن خط و تسلط بر آن
۸ مهارت در رسم چندضلعی‌ها و یافتن مرکز دایره با داشتن کمانی از دایره

روش تدریس درس اول

پیش از شروع درس مطمئن شوید که تمام دانش‌آموزان ابزار پرگار و خط‌کش به همراه داشته باشند تا از کاسته شدن سرعت تدریس جلوگیری شود.

فعالیت صفحه ۱۰ در سؤال ۱ دایره را به عنوان مجموعه تمام نقاطی که از مرکز دایره به فاصله ثابتی هستند، معرفی می‌کند. برای عمق‌بخشی بیشتر می‌توانید مربعی به مرکز O رسم کنید و این سؤال را مطرح کنید که «چرا پاسخ سؤال۱ این فعالیت، نمی‌تواند این مربع باشد؟»

سؤال۲ پیش‌زمینه‌ای برای آموزش رسم عمود منصف در ادامه این بخش خواهد بود.

سؤال ۳ دو نقطه روی خط d باید به دست آید که این کار با کمان زدن انجام خواهد شد.

حل صحیح این سؤال لازمه اجرای روش رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای بیرون آن خط است.

مقایسه سؤال ۴ با ۲ توسط دانش‌آموزان می‌تواند نتیجه‌ای مفید به همراه داشته باشد. چرا که حاصل انجام هر دو سؤال این فعالیت، خطی عمود بر پاره‌خط ABاست. اما این خط عمود در سؤال ۲، از هر دو طرف پاره‌خط به فاصله یکسان و در سؤال ۴ به یک طرف پاره‌خط نزدیک‌تر است. ادامه پاسخ‌گویی به سؤال ۴، پیش‌زمینه روش رسم مثلثی با داشتن اندازه ۳ ضلع است.

کار در کلاس صفحه ۱۱، مروری بر سؤالات مطرح شده در فعالیت صفحه ۱۰ را دارد. در انجام سؤال ۳ که یک مسئله باز پاسخ (چند جوابی) است، می‌توانید از سطح عددگذاری ساده فراتر رفته و از دانش‌آموزان بخواهید مسئله را به طور جبری و با قرار دادن شرط‌های مناسب برای عبارات جبری، پاسخ دهند. انجام فعالیت پایین صفحه ۱۱، به درک نتیجه «خاصیت نیمساز» می‌رسد و ادامه این فعالیت در صفحه ۱۲ «عکس خاصیت نیمساز» را آموزش می‌دهد. نتیجه دومی که در صفحه ۱۲ قرار دارد، ترکیب خاصیت و عکس خاصیت نیمساز در صورت یک قضیه دو شرطی است. بکوشید این نتیجه با جمله‌بندی صحیح خود دانش‌آموزان تکمیل شود.

فعالیت پایین صفحه ۱۲ روش رسم نیمساز را آموزش می‌دهد. می‌توانید بعد از انجام مرحله به مرحله این فعالیت از یک یا چند دانش‌آموز بخواهید تا روش رسم نیمساز یک زاویه را به طور کلی برای کل کلاس توضیح دهند و جمع‌بندی کنند. برای توسعه این فعالیت می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید تا دهانه پرگار را به قدری باز کنندکه کمان‌های رسم شده با مرکز A و B، یکدیگر را پشت زاویه O قطع کنند و سپس از رأس زاویه و نقطه به وجود آمده خطی بگذرانند و بررسی کنند که آیا باز هم نیمساز زاویه O خواهد بود یا نه و دلیلش را ذکر کنند.

در انجام فعالیت صفحه ۱۳ سؤال ۱ خاصیت عمود منصف را آموزش می‌دهد. می‌توانید قبل از استدلال رسمی، از دانش‌آموزان بخواهید نقطه W را روی عمودمنصف بالا و پایین ببرند و با خط‌کش فاصله آن تا دو سر A و B را اندازه بگیرند.

سؤال ۲ این فعالیت، عکس خاصیت عمود منصف را بیان خواهد کرد و نتیجه ۲ آن را در قالب یک جمله شسته رفته ارائه می‌دهد.

نتیجه‌ای که بعد از این دو نتیجه آمده ترکیب خاصیت عمودمنصف و عکس خاصیت عمود منصف در قالب یک قضیه دو شرطی است.

فعالیت پایین صفحه ۱۳ با رسیدن به این نتیجه که برای مشخص کردن یک خط داشتن ۲ نقطه از آن لازم است، ضرورت داشتن دو نقطه برای رسم عمود منصف یک پاره‌خط را در فعالیت صفحه ۱۴ فراهم می‌کند.

فعالیت بالای صفحه ۱۴ روش رسم عمود منصف پاره‌خط AB را بیان می‌کند. بهتر است کار در کلاسی که بعد از آن آمده است را ابتدا دانش‌آموزان به صورت تک نفری یا در گروه‌های ۳–۴ نفره پاسخ

دهند و سپس از هر گروه یک نماینده، نظر گروه را بیان کرده و در نهایت شما با کمک دانش‌آموزان بر روی نظر کامل‌تر و صحیح‌تر توافق کنید.

کار در کلاس انتهای این صفحه می‌تواند مشابه کار در کلاس قبلی اجرا و حل شود. در فعالیت بالای صفحه ۱۵، برای پاسخ‌گویی به سؤال ۱ می‌توانید نگاهی به سؤال ۳ فعالیت صفحه ۱۰ داشته باشید و یادآوری صورت گیرد.

اجرای دقیق مراحل رسم کمان‌ها، لازمه پاسخ‌گویی صحیح به این فعالیت است. کار در کلاسِ پس از آن، می‌تواند در قالب یک کار گروهی یا انفرادی انجام شود و پس از آن توافق کلی صورت پذیرد.

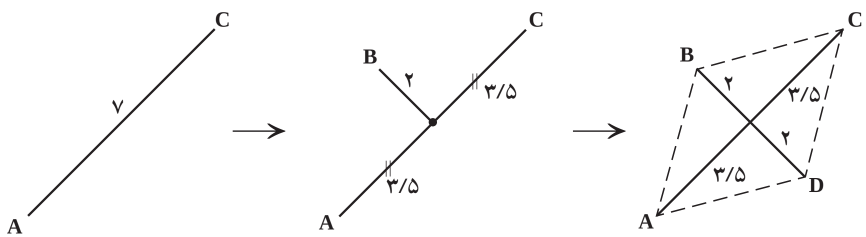
فعالیت وسط صفحه ۱۵، با هدف آموزش رسم خطی موازی با خط d طراحی شده است و روش آن، استفاده از دو عمود متوالی می‌باشد. با توجه به وقت‌گیر بودن این فعالیت، زمان مناسب برای اجرای آن در کلاس را در نظر داشته باشید. کار در کلاس پس از آن می‌تواند با توجه به آنکه دانش‌آموزان روش رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای داده شده روی آن را قبلاً یاد گرفته‌اند به صورت خلاصه‌تر و با پرهیز از بیان جزئیات، حل شود.

فعالیت پایین صفحه ۱۵ که در صفحه ۱۶ نیز ادامه می‌یابد، ترکیبی از مهارت‌های آموخته شده توسط دانش‌آموزان در این فصل را به کار می‌گیرد تا روش رسم مربعی با قطر داده شده را آموزش دهد.

کار در کلاس انتهایی این فصل، با حل گروهی یا انفرادی در کلاس قابل انجام است.

حل تمرین‌های صفحه ۱۶

۱ ابتدا پاره‌خط AC به طول ۷cm را رسم می‌کنیم. سپس از وسط AC و در راستایی غیر از راستای AC، به اندازه ۲cm پاره‌خطی رسم می‌کنیم تا نقطهٔ B به‌دست آید. پاره‌خط رسم شده را از سمت دیگر به اندازه ۲cm امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D به دست آید و شکل کامل شود.



۳ متوازی‌الاضلاع است. زیرا رأس D روی کمانی به مرکز A و شعاع a واقع شده است. پس AD=a و رأس C روی کمانی به مرکز B و شعاع a واقع شده است. پس BC=a همچنین رأس D روی کمانی به مرکز B واقع شده است. پس BD=b و رأس C روی کمانی به مرکز A و شعاع b واقع شده است پس AC=b و چون AD=BC=a و AC=BD=b یعنی اضلاع روبه‌رو دو به دو مساوی‌اند.

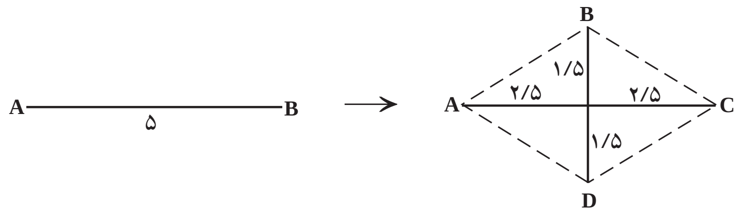
بنابراین داریم :

$$\left.\begin{array}{ll} & BD = AC = b \\ & AD = BC = a \\ \text{مشترک} & AB = AB \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ضضض}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ABC}$$

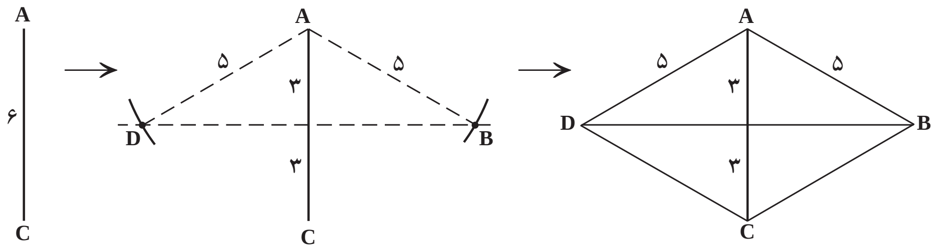
$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 \quad \text{تساوی اجزای متناظر}$$

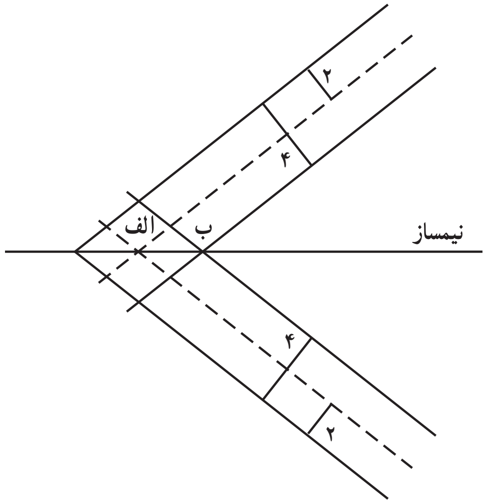
چون $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ ، طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب BD||AC و به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که AD||BC. پس شکل متوازی‌الاضلاع است.

۴ الف) پاره‌خط AC به طول ۵cm را رسم می‌کنیم و از وسط AC و عمود بر آن، به اندازه ۱/۵ cm در دو طرف امتداد می‌دهیم تا نقاط B، D به دست آمده و شکل کامل شود.



ب) ابتدا پاره‌خط AC به طول ۶cm را رسم می‌کنیم. بر وسط AC خط دلخواهی، عمود می‌کنیم. (عمود منصف AC را رسم می‌کنیم) از نقطه A (یا C) به اندازه ۵cm کمان می‌زنیم تا عمود منصف AC را در دو نقطه B و D قطع کند و شکل کامل شود.





۶ الف) خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله ۲cm از آنها رسم می‌کنیم. محل تقاطع آنها پاسخ مسئله است.

ب) خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله ۴cm از آنها رسم می‌کنیم. محل تقاطع آنها پاسخ مسئله است.

پ) خطی از دو نقطه به دست آمده در قسمت (الف) و (ب) می‌گذرد. زاویه را نصف می‌کند.

۷ AB وتر دایره است. بنابراین A و B روی محیط دایره‌اند. پس فاصله آنها تا مرکز دایره یعنی OA و OB یکسان است. طبق عکس خاصیت عمود منصف، چون O از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است، پس روی عمود منصف AB واقع شده است.

۸ دو وتر در قوس جلوی محوطه هجده قدم رسم می‌کند و عمود منصف آن دو وتر را ترسیم می‌نماید. محل برخورد دو عمود منصف، مرکز دایره و همان نقطه پنالتی است.

درس دوم

استدلال

اهداف درس دوم

۱ درک اهمیت استدلال و آشنایی با برخی از انواع استدلال‌ها
۲ آشنایی با استدلال استقرایی (صرفاً به منظور حدسیه سازی)
۳ مهارت در استدلال استنتاجی با بررسی اثبات چندین قضیه هندسی شرطی و دوشرطی
۴ آشنایی با گزاره، نقیض گزاره، گزاره شرطی، قضیه‌های شرطی و دو شرطی، عکس قضیه
۵ مهارت در برهان غیرمستقیم (برهان خلف) و مثال نقض با بررسی چندین قضیه و مثال

روش تدریس درس دوم

پیش از ورود به تدریس، درباره اهمیت استدلال در زندگی و قضاوت عادلانه با دانش‌آموزان سخن بگویید و ریاضیات و هندسه را به عنوان علمی بنا شده بر پایه استدلال و منطق، به آنها معرفی کنید.

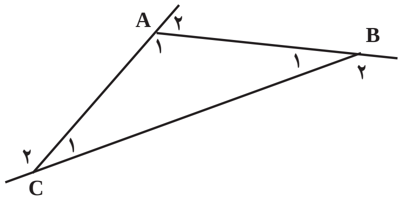
معرفی استدلال استقرایی در صفحه ۱۸ با یادآوری آموخته‌ها در سال‌های گذشته و مرور آنها،انجام شده است. از آنجا که استدلال استقرایی در علوم انسانی و تجربی(مانند پزشکی) کاربرد داشته و بهره‌گیری از آن در ریاضیات صرفاً یه منظور حدسیه‌سازی می‌باشد. می‌توانید چندین مثال پذیرفته شده و صحیح را در کلاس مطرح کنید تا روند شکل‌گیری یک «حدس» در ریاضیات برای دانش‌آموزان آشکار شود. مثلاً :

ــ علی با اندازه‌گیری زوایای درونی مثلث و محاسبه مجموع آنها در ۱۰ مثلث به این نتیجه (حدس) رسید که مجموع زوایای درونی هر مثلث (ممکن است) 180° باشد.

ــ مریم با یافتن نقطه همرسی عمود منصف‌ها در ۱۵ مثلث به این نتیجه (حدس) رسید که نقطه همرسی عمود منصف‌ها (ممکن است) داخل، خارج یا روی مثلث واقع شود.

در ادامه صفحه ۱۸ معرفی استدلال استنتاجی انجام شده است.

به عنوان مثال بیشتر در استدلال استنتاجی نمادین می‌توانید از نمونه زیر استفاده کنید.
قضیه : مجموع زوایای خارجی هر مثلث ۳۶۰° است.
اثبات :



$$\underbrace{\hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}}_{۱۸۰}+\underbrace{\hat{B}_{۱}+\hat{B}_{۲}}_{۱۸۰}+\underbrace{\hat{C}_{۱}+\hat{C}_{۲}}_{۱۸۰}=۳\times ۱۸۰^\circ=۵۴۰^\circ$$

$$\underbrace{\hat{A}_{۱}+\hat{B}_{۱}+\hat{C}_{۱}}_{\text{مجموع زوایای درونی}=۱۸۰}+\underbrace{\hat{A}_{۲}+\hat{B}_{۲}+\hat{C}_{۲}}_{?}=۵۴۰^\circ$$

$$\hat{A}_{۲}+\hat{B}_{۲}+\hat{C}=۵۴۰^\circ-۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

فعالیت صفحه ۱۹، شامل دو نوع استدلال برای اثبات یک قضیه است.

استدلال پژمان که با بررسی تعدادی چهارضلعی حکم کلی صادر کرده است، از نوع استقرایی و البته غیرقابل تعمیم برای هر چهار ضلعی و لذا غیر قابل اعتماد است.

اما استدلال پیمان از نوع استنتاجی و قابل تعمیم برای هر چهار ضلعی دلخواه است.

مثال پایین صفحه ۱۹ نیازمند درک کامل خاصیت عمود منصف و عکس خاصیت عمود منصف در درس اول همین فصل است. در این مثال، دانش‌آموزان با استدلال استنتاجی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث دلخواه را ثابت می‌کنند.

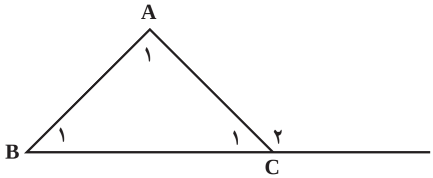
مثال وسط صفحه ۲۰، همرسی ارتفاع‌ها در هر مثلث دلخواه را با کمک تبدیل ارتفاع‌ها به عمود منصف اضلاع مثلث بزرگ‌تری که اضلاع آن دو برابر اضلاع مثلث اولیه است، ثابت می‌کند.

مثال پایین همین صفحه که ادامه آن در صفحه ۲۱ می‌باشد با استفاده از پیش‌دانسته‌های دانش‌آموزان در موضوع خاصیت نیمساز و عکس خاصیت نیمساز، همرسی نیمسازها در هر مثلث دلخواه را ثابت می‌کند.

در هر سه مثال گفته شده، نتیجه به دست‌آمده برای سایر مباحث هندسی دارای اهمیت است. بکوشید این اهمیت را به دانش‌آموزان گوشزد کنید.

فعالیت صفحه ۲۱ همان‌طور که قبلاً اشاره شد استدلال استقرایی را به منظور حدسیه‌سازی به کار برده است و به طرح قضیه‌ای پرداخته که در غالب کتب غیررسمی هندسه به قضیه «ضلع برتر ــ زاویه برتر» معروف است. توجه داریم که عکس این قضیه نیز برقرار می‌باشد. دانش‌آموزان با جداسازی مفروضات و حکم قضیه از میان نوشتار مسئله، در صفحه ۲۲ به اثبات آن می‌پردازند.

دو پیش‌دانسته لازم برای اثبات این قضیه در صفحه ۲۲ آمده است. اولین پیش‌دانسته در مورد مثلث متساوی‌الساقین برای اکثر دانش‌آموزان بدیهی است. دومین پیش‌دانسته می‌تواند به صورت زیر اثبات و



یادآوری گردد :

$C_2=A_1+B_1$

و می‌دانیم اندازه زوایای A_1 و B_1 هر دو عددی مثبت است.

و می‌دانیم اگر از یک طرف تساوی عدد مثبتی را برداریم، آن طرف، کوچک‌تر از طرف دیگر خواهد شد، بنابراین :

$$C_2 = A_1 + B_1 \xrightarrow{A_1 > 0} C_2 > B_1$$

$$C_2 = A_1 + B_1 \xrightarrow{B_1 > 0} C_2 > A_1$$

و اثبات تمام است.

روند اثبات در صفحه ۲۲ به این پرسش ختم می‌شود که «چرا می‌توان این موضوع را درباره تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟» پاسخ‌گویی به این پرسش نیازمند توجه دادن دانش‌آموزان به جمله‌ای است که در صفحه قبل، پیش از آغاز استدلال نمادین آورده شده است : «مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.»

توجه به این نکته که در استدلال‌های استنتاجی، اشکال هندسی صرفاً ویژگی بیان شده در مسئله را داشته و غیر از آن ویژگی اضافی دیگری بر آنها تحمیل نشده باشد، جان‌مایه قابلیت تعمیم‌یافتن استدلال‌های استنتاجی می‌باشد.

ذیل همین اثبات کلمه «قضیه» برای اولین بار مطرح می‌شود. بکوشید استفاده مکرر از این واژه، آن را برای دانش‌آموزان کلاس، مأنوس کند.

پاراگراف انتهای صفحه ۲۲ روند شکل‌گیری یک استدلال ریاضی را بیان می‌کند و الگوریتم مهمّی برای سایر نمونه‌های بعدی می‌باشد.

صفحه ۲۳ با تعریف «عکس یک قضیه» و ارائه چند مثال، درس را ادامه می‌دهد.

صرف وقت در این موضوع برای رسیدن به تسلط حداکثری در کلاس حائز اهمیت است. لازم است دانش‌آموزان بتوانند فرض و حکم مسئله را یافته و با جابه‌جایی آنها، عکس قضیه را به وجود آورند. ضمناً عکس قضیه ۱ در صفحه ۲۵ با برهان غیرمستقیم اثبات خواهد شد. صفحه ۲۴ با معرفی گزاره به عنوان «صرفاً و فقط یک جمله خبری» آغاز می‌شود که می‌تواند خبری درست یا نادرست را بدهد. اگرچه تشخیص درستی یا نادرستی آن برای خواننده ممکن نباشد. مثلاً : «در مریخ موجود زنده وجود دارد.»

گزاره مرکب از ترکیب دو یا چند گزاره ساده به وجود می‌آید.

نقیض یک گزاره از نظر درستی یا نادرستی دقیقاً مخالف با گزاره اصلی است. درنگ لازم در این قسمت برای کسب مهارت کافی، الزامی است. نمونه مناسبی که می‌توانید برای تفهیم بیشتر به کار ببرید

گزاره زیر است :

$a \leq 0 \Longrightarrow a \not> 0$: نقیض گزاره $a > 0 \rightarrow$: گزاره

بعضی گزاره‌ها به جای آنکه خبری را به طور مستقیم بیان کنند آن را وابسته به یک شرط می‌کنند که گزاره‌های شرطی نام دارند. مثال‌های بیشتر برای گزاره شرطی (که ممکن است درست یا نادرست باشند) در زیر آمده است.

- اگر $a > 0$ آنگاه $2a > 0$ (درست)
- اگر $a < b$ آنگاه $a^2 < b^2$ (نادرست)
- اگر $a < 0$ آنگاه $a+1 < 1$ (درست)

استدلال غیر مستقیم یا برهان خلف، نوعی از استدلال است که با فرض نادرست بودن حکم آغاز می‌شود و به تناقض با یکی از فرض‌های مسئله یا حقایق دانسته شده ریاضی می‌رسد. دانش‌آموزان در سال‌های آینده به این نوع استدلال، نیاز خواهند داشت. مثال‌هایی که در این قسمت مطرح شده است هر دو مورد تناقض را پوشش داده است. مثال اول به تناقض با این حقیقت که «مجموع زوایای درونی هر مثلث 180° است» می‌رسد و مثال دوم به تناقض با یکی از مفروضات قضیه می‌رسد.

پیشنهاد می‌شود بعد از پایان اثبات قضیه ۱، دانش‌آموزان برای یک بار هم که شده قضیه ۱ و عکس قضیه۱ و اثبات آنها را در کنار هم دیده و مرور کنند.

صفحه ۲۶ را می‌توان جمع‌بندی یک قضیه شرطی و عکس آن، در قالب «قضیه دو شرطی» دانست. قضیه‌های دو شرطی با نماد «$\leftrightarrow$» نوشته شده و اصطلاح‌های «اگر و تنها اگر» یا «اگر و فقط اگر» برای بیان کلامی آن استفاده می‌شود.

نمونه‌هایی از قضایای دوشرطی به صورت زیر است :

- $a > b \quad \leftrightarrow \quad a+2 > b+2$
- $a > 0 \quad \leftrightarrow \quad a^3 > 0$
- $0 < a < b \quad \leftrightarrow \quad -b < -a < 0$

مثال گفته شده در پایان این قسمت را می‌توانید از طریق برابری مساحت مثلث در هر دو حالت اثبات کنید. برای این کار یک بار مساحت مثلث را از طریق نصف حاصل‌ضرب ارتفاع اولی در ضلع اولی بیابید و بار دیگر از طریق نصف حاصل‌ضرب ارتفاع دومی در ضلع دومی. با توجه به برابری مساحت در هر دو حالت و ایجاد یک تساوی بین دو رابطه، حکم نتیجه خواهد شد.

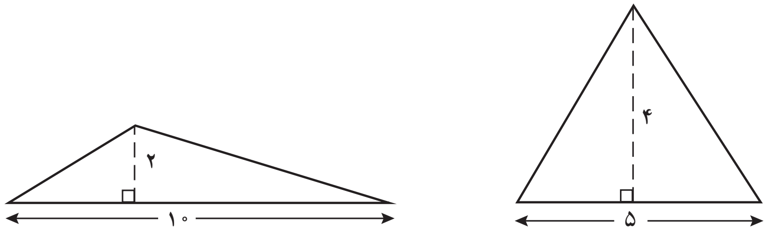
مثال نقض، مثالی است که یک حکم کلی را باطل می‌کند. گاهی اوقات مثال نقض نشان می‌دهد حدسیه‌ای که از طریق استدلال استقرایی به آن رسیده‌ایم نادرست و دارای نمونه‌ای است که در آن حدس کلی صدق نمی‌کند.

حتماً دانش‌آموزان را به این نکته توجه دهید که اگر برای یک حدس یا حکم کلی نتوانستیم مثال نقض بیاوریم دلیل بر درستی آن حدس نیست. ممکن است تلاش بیشتر، ما را به مثال نقض برساند. ضمن آنکه برای اثبات حکم کلی نیازمند استدلال استنتاجی هستیم.

کار در کلاس صفحه ۲۷ با ارائه چند مثال نقض قابل حل است.

سؤال ۱ بدیهی است. برای سؤال ۲، مورد (الف) می‌توانید دو مجموعه نامساوی را مثال بزنید؛ مثلاً A={۱,۲,۳}، B={۳,۴,۵}

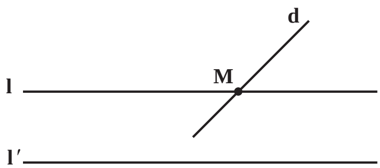
برای مورد (ب) می‌توانید مثلث‌های زیر را در نظر بگیرید :



در هر دو مثلث، مساحت برابر ۱۰ می‌باشد اما واضح است که همنهشت نیستند.

حل تمرین‌های صفحه ۲۷

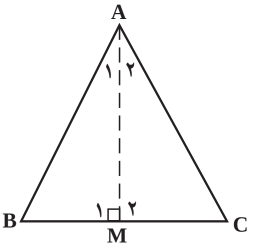
۱ فرض کنیم خط d و دو خط موازی l و ´l را داریم، به طوری که خط d خط l را قطع کرده است. می‌خواهیم ثابت کنیم خط d خط ´l را نیز قطع می‌کند.



با برهان خلف، فرض می‌کنیم خط d خط ´l را قطع نکند. محل تقاطع خطوط d و l را M می‌نامیم. می‌بینیم از نقطه M دو خط d و l عبور کرده‌اند که ´l را قطع نکرده‌اند. یعنی هر دو خط d و l به موازات ´l از نقطه M رسم شده‌اند که این تناقض می‌باشد.

لذا فرض خلف باطل است و حکم ثابت است.

۲ فرض خلف را $\hat{B} = \hat{C}$ در نظر می‌گیریم. اگر نیمساز زاویه A را رسم کنیم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ می‌باشد. لذا در دو مثلث AMB و AMC خواهیم داشت :



$$\left.\begin{array}{l} A_1 + B + M_1 = 180^\circ \\ A_2 + C + M_2 = 180^\circ \\ A_1 = A_2 \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

اکنون با دانستن اینکه $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ است داریم :

$$\left.\begin{array}{rl} : & \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \text{نیمساز است } AM: & \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \text{مشترک}: & AM = AM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زض‌ز}} \overset{\Delta}{AMB} \cong \overset{\Delta}{AMC}$$

$$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزاء}} AB=AC$$

که با فرض مسئله که $AB \neq AC$ در تناقض است و لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۳ الف) نادرست : مثلث قائم‌الزاویه با زوایای 90° و 70° و 20° را در نظر بگیرید.

ب) نادرست : در مثلث قائم‌الزاویه ، از میان ۳ ارتفاع، دو تا از آنها با دو ضلع مثلث برابرند.

۴ هر n ضلعی را با رسم قطرهایش از یکی از رأس‌ها، می‌توان به $n-2$ مثلث تقسیم کرد. چون مجموع زوایای درونی هر مثلث نیز 180° می‌باشد. مجموع زوایای درونی هر n ضلعی، $(n-2) \times 180^\circ$ خواهد شد.

۵ الف) وجود دارد لوزی که مربع نیست.

ب) هر مستطیل یک مربع است.

پ) وجود دارد مثلثی که بیش از یک زاویه قائمه دارد.

ت) چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.

۶ الف) در هر مثلث اگر دو زاویه برابر باشند، دو ضلع روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

$\leftarrow$ در هر مثلث، دو زاویه با هم برابر است اگر و تنها اگر دو ضلع روبه‌رو به آنها با هم برابر باشند.

ب) اگر یک چهارضلعی، قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشند، لوزی است.

$\leftarrow$ یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشد.

پ) در هر مثلث اگر سه زاویه با هم برابر باشد، آنگاه سه ضلع نیز با هم برابرند.

$\leftarrow$ در هر مثلث، سه زاویه باهم برابرند اگر و تنها اگر سه ضلع با هم برابر باشند.

ت) اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند، آنگاه شعاع‌های برابر نیز دارند.

$\leftarrow$ دو دایره، مساحت‌های برابر دارند اگر و تنها اگر شعاع‌های برابر داشته باشند.

فصل ۲

قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

توصیه‌های آموزشی

❑ در برخی از کتاب‌های هندسه یک پاره‌خط را به صورت $\overline{AB}$ و طول آن را به صورت $|AB|$ نمایش می‌دهند. ولی در کتاب هندسهٔ ۱، هم خود پاره‌خط و هم طول آن (برای سادگی کار) به‌صورت AB نمایش داده می‌شوند. در صورت احساس نیاز، معلم می‌تواند اشارهٔ کوتاهی به این موضوع در کلاس نماید.

❑ حتی‌الامکان از گچ یا ماژیک‌های رنگی برای ترسیم شکل‌ها استفاده شود.

❑ مطابق روندی که در کتاب هندسه پیش گرفته شده است، برای تعریف یک موضوع (مثلاً واسطهٔ هندسی) یا بیان برخی از قضایا (مثلاً قضیهٔ تالس یا تعمیم آن) توصیه می‌شود ابتدا طرحی از آن تعریف یا اثبات قضیه، به کمک مطالبی که در درس‌های قبلی فراگرفته شده، بیان شود و سپس آن تعریف یا قضیه به‌طور رسمی بیان و اثبات شوند. این روش باعث می‌شود که دانش‌آموز آن تعریف یا قضیه را راحت‌تر بپذیرد و ابهت و سختی که ممکن است به واسطهٔ اسم آن تعریف یا قضیه برای دانش‌آموز پیش بیاید، کم‌رنگ شود.

❑ اگر شروع یک درس با بیان یک سؤال کاربردی ملموس از آن درس باشد تا احساس نیاز به دانستن مطالب جدید را در دانش‌آموز احیا کند، بسیار مثمرثمر خواهد بود. به‌عنوان مثال برای شروع این فصل می‌توان مسئله محاسبهٔ ارتفاع یک درخت با کمک یک میلهٔ یک متری در یک روز آفتابی را بیان کرد. جواب دادن به این سؤال با ابزار موجود، در دانش‌آموز برای فراگیری مطالب و جواب دادن به این سؤال ایجاد انگیزه می‌کند.

نگاه کلی به فصل

❑ هدف اصلی این فصل آموزش قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها می‌باشد.

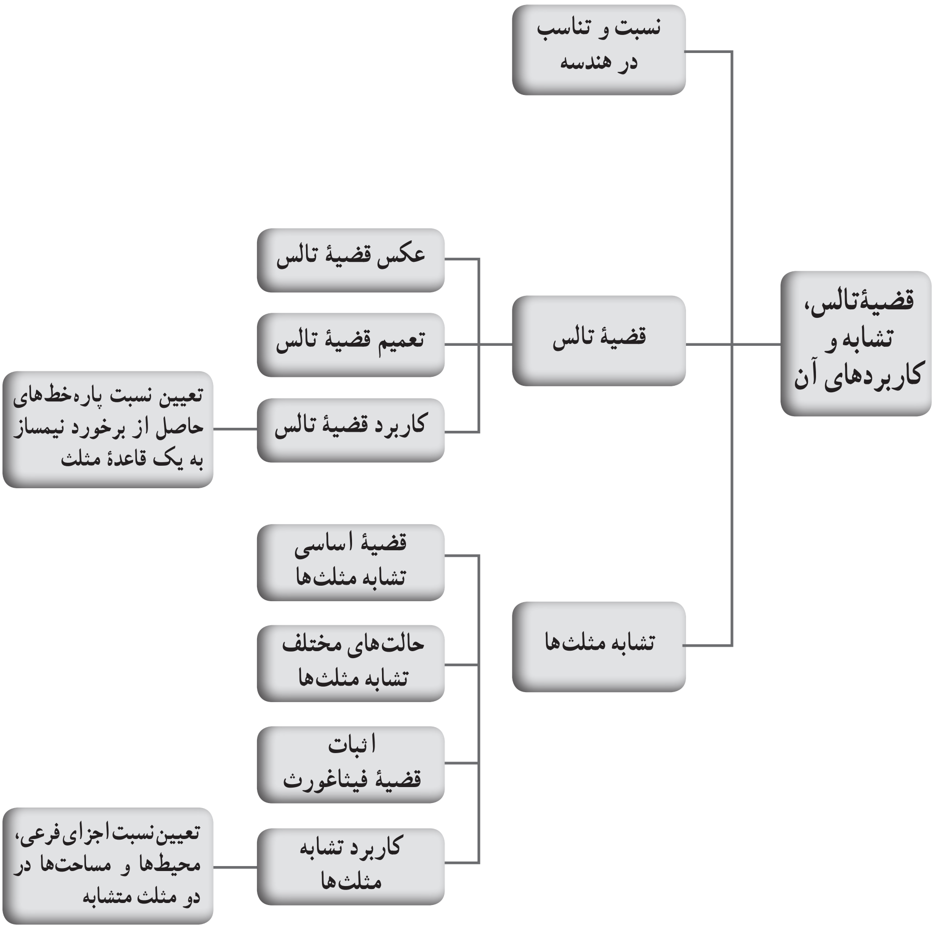
چون قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها مستلزم آشنایی با نسبت‌ها و تناسب می‌باشد، درس اول این فصل به آموزش تناسب و ویژگی‌های آن اختصاص یافته است تا دانش‌آموز مقدمات مواجهه با قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها را فرا گرفته باشد. در همین راستا سعی شده است تناسب‌ها در مثلث‌های خاص مثلاً مثلث‌هایی که در یک رأس مشترک هستند و قاعدهٔ مقابل به رأس مشترک آنها روی یک خط راست قرار گرفته، بیان شوند. پس از فراگیری تناسب، در درس دوم قضیهٔ تالس بیان می‌شود و فعالیت‌ها و تمرین‌هایی برای درک بهتر قضیهٔ تالس ارائه می‌شود سپس تعمیم و عکس قضیهٔ تالس بیان و اثبات می‌گردد.

❑ درس سوم اختصاص به تشابه مثلث‌ها دارد. بعد از تعریف تشابه در مثلث، قضیهٔ اسامی تشابه مثلث‌ها و حالت‌های تشابه دو مثلث در قالب سه قضیهٔ متوالی بیان شده است. در بخش انتهایی درس سوم اثبات قضیهٔ فیثاغورث به کمک تشابه مثلث‌ها آورده شده است. در اثبات تشابه دو مثلث در بسیاری از موارد

قضیهٔ تالس هم استفاده می‌شود. بنابراین درس دوم این فصل را می‌توان به نوعی پیش‌نیاز درس سوم دانست. پس از فراگیری قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها، در درس چهارم کاربردهایی از این دو موضوع بیان می‌گردد.

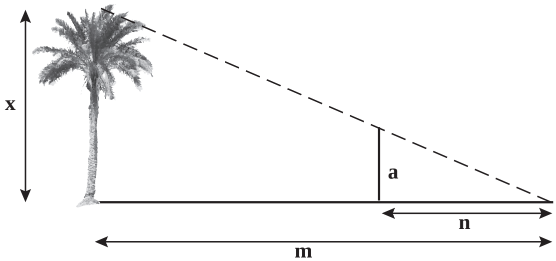
ابتدا به کمک قضیهٔ تالس ثابت می‌شود که نیمساز هر زاویهٔ داخلی مثلث ضلع روبه‌روی آن زاویه را به نسبت اندازه‌های اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند. سپس به‌عنوان کاربردی از تشابه مثلث‌ها، نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه بحث می‌شود.

نقشهٔ مفهومی



تصویر عنوانی

در تصویر ابتدای فصل دوم درختی با ارتفاع زیاد نمایش داده شده است که محاسبهٔ ارتفاع آن به‌طور مستقیم امکان‌پذیر نیست. برای محاسبهٔ ارتفاع آن از سایهٔ آن و یک میله با طول مشخص استفاده شده است. بدین صورت که میله روی سایهٔ درخت در ناحیه‌ای قرار داده شده است که انتهای سایهٔ میله و درخت یکسان باشند. با اندازه‌گیری فاصلهٔ انتهای سایه‌ها از میله و درخت و استفاده از قضیهٔ تالس، ارتفاع درخت محاسبه می‌شود.



$$\frac{n}{m} = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ma}{n}$$

دانستنی‌هایی برای معلم

تالس (Thales) فیلسوف و دانشمند یونانی بود که حدود ۲۶۰۰ سال پیش در شهر میلیتوس یونان (غرب ترکیهٔ امروزی) به دنیا آمد. تالس هم‌عصر کوروش کبیر بوده است. او را به‌عنوان آغازگر فلسفه و علم می‌دانند.

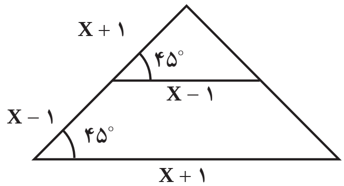
تالس اخترشناس قابلی نیز بوده و توانست خورشیدگرفتگی سال ۵۸۵ قبل از میلاد را پیش‌بینی کند. او توانست با قضیهٔ تالس ارتفاع اهرام مصر را نیز اندازه‌گیری کند. قضایای زیر را به تالس نسبت می‌دهند:

- ❑ قطر دایره آن را نصف می‌کند.
- ❑ زوایای مجاور قاعده در مثلث متساوی‌الساقین برابراند.
- ❑ زوایای متقابل به رأس برابراند.
- ❑ زاویه‌ای که در نیم‌دایره محاط شود، قائمه است.
- ❑ اگر اندازهٔ یک قاعده و زوایای آن داده شده باشند می‌توان مثلث را رسم کرد.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ اگر $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۵}$ باشد حاصل $\frac{۲b-۵}{۲a-۳}$ را به کمک ویژگی‌های تناسب بیابید.

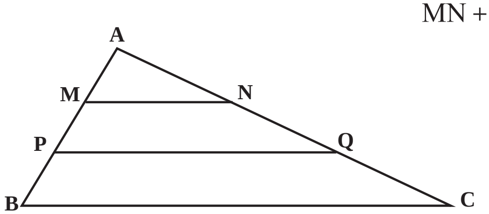
۲ در شکل مقابل مقدار x را بیابید.



۳ نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر ۹ می‌باشد. نسبت محیط مثلث کوچک‌تر به محیط مثلث بزرگ‌تر چقدر است؟

۴ در شکل زیر AM=MP=PB و AN = NQ = QC

ثابت کنید MN + PQ = BC



۵ میانگین هندسی دو عدد برابر ۷ می‌باشد. حاصل‌ضرب آنها چقدر است؟

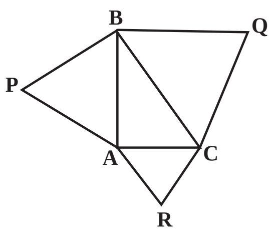
۶ در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر ایجاد می‌کند ۳/۶ و ۶/۴ است. محیط این مثلث را بیابید.

۷ مثلثی به طول اضلاع ۳ و ۵ و ۷ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و x و y متشابه است. اگر ۵ < y و x باشند حاصل x+ y را بیابید.

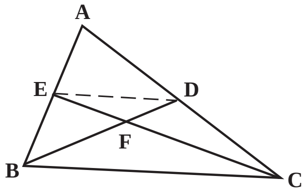
۸ در یک مثلث قائم‌الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر مساحت مثلث جدید است؟

۹ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر بگیرید. اگر سه مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع‌های مثلث ABC مطابق شکل روبه‌رو در نظر بگیریم ثابت کنید :

$$S_{QBC}=S_{PAB}+S_{RAC}$$



۱۰ در شکل روبه‌رو BD و CE دو میانهٔ مثلث هستند.
نسبت مساحت مثلث FBC به FED را بیابید.



۱۱ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه برابر ۱۵ و ۸ می‌باشد. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۲۵ باشد مساحت مثلث کوچک‌تر چقدر است؟

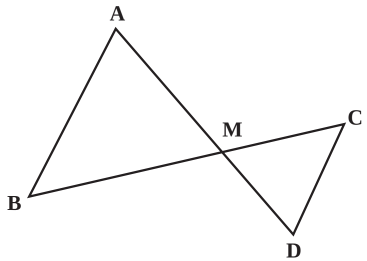
۱۲ وسط اضلاع روبه‌رو در یک چهارضلعی دلخواه را به هم وصل می‌کنیم. ثابت کنید این دو پاره‌خط همدیگر را نصف می‌کنند.

۱۳ زاویه‌های خارجی مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب‌اند، اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی مثلث چقدر است؟

۱۴ در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ داریم $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = ۲$. اگر AM و $A'M'$ به ترتیب میانه‌های رأس A و A' باشند، نسبت $\frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}}$ چقدر است؟

۱۵ در دو مثلث متشابه نسبت بین دو ارتفاع متناظر برابر $\frac{۱}{۴}$ است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۵ باشد مساحت مثلث بزرگ‌تر چقدر است؟

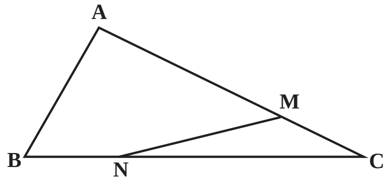
۱۶ در شکل روبه‌رو AB||CD و — $\frac{AM}{AD}$ ، نسبت مساحت مثلث AMB به مثلث CMD چقدر است؟



۱۷ مثلثی با طول اضلاع ۴ و ۶ و $۲\sqrt{۳}$ و مثلث دیگری با طول اضلاع ۹ و $۳\sqrt{۳}$ و ۶ مفروض‌اند. نسبت مساحت مثلث کوچک‌تر به مثلث بزرگ‌تر چقدر است؟

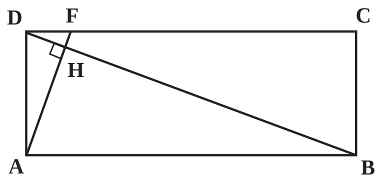
۱۸ یک مثلث را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم کرده‌ایم، محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت می‌باشد؟

۱۹ در شکل مقابل $\frac{CM}{MA} = \frac{BN}{NC} = \frac{۱}{۳}$. نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت چهارضلعی AMNB چقدر است؟



۲۰ در مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲ یک مربع محاط کرده‌ایم. طول ضلع مربع چقدر است؟

۲۱ چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. F نقطه‌ای از ضلع DC است که $AF \perp DB$. اگر AB=۳DA باشد آن گاه DC چند برابر DF است؟



درس اول

نسبت و تناسب در هندسه

اهداف درس اول

۱ درک دقیق و روشن تناسب و ویژگی‌های آن.
۲ فراگیری رابطه بین نسبت طول دو ضلع از مثلث با نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع.
۳ توانایی یافتن نسبت مساحت‌های دو مثلث که دارای یک ارتفاع مساوی هستند.
۴ توانایی تعیین نسبت‌های مساحت‌های دو مثلث که در یک رأس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل آن رأس مشترک در هر دو مثلث روی یک خط مشترک واقع باشند.
۵ درک تساوی مساحت دو مثلث که دارای یک قاعدهٔ مشترک هستند و رأس مقابل به این قاعده در هر دو مثلث، روی خطی موازی قاعدهٔ مشترک واقع باشد.
۶ تعریف واسطهٔ هندسی و توانایی محاسبهٔ آن.

روش تدریس درس اول

❑ هدف فعالیت ۱ این درس بیان کاربردی تناسب می باشد تا دانش‌آموز به اهمیت تناسب در مسائل ریاضی پی ببرد.

❑ در فعالیت ۲ و کار در کلاس‌های صفحهٔ ۳۱ و ۳۲ حالت خاصی از فعالیت ۱ در نظر گرفته شده است که منجر به نتایج جالبی (نتیجهٔ ۱و ۲ و ۳) شده است.

❑ در فعالیت ۲ و کار در کلاس‌های صفحهٔ ۳۱ و ۳۲ نسبت مساحت مثلث‌هایی که ارتفاع‌های یکسان دارند در حالت‌های مختلف به‌دست آمده است.

❑ در فعالیت ۲ وقتی ارتفاع‌ها مساوی‌اند نسبت مساحت‌ها به‌دست آمده است و در کار در کلاس صفحهٔ ۳۱ وقتی ارتفاع‌ها مشترک هستند نسبت مساحت‌ها به‌دست آمده است.

❑ در کار در کلاس صفحهٔ ۳۲ وقتی ارتفاع‌ها مساوی‌اند و قاعده‌ای که ارتفاع‌ها بر آن وارد شده‌اند مشترک هستند نسبت مساحت‌ها به‌دست آمده است.

❑ حال که تناسب تعریف شده است و اهمیت آن در مسائل ریاضی و هندسه مشخص گردیده است لازم است، دانش‌آموزان مهارت محاسبات با تناسب را فراگیرند. در این رابطه معلم می‌تواند با بیان مثال‌ها و تمرین‌های مناسب، ویژگی‌های تناسب را که در صفحهٔ ۳۲ آمده است برای دانش‌آموزان بیان کند.

❑ برای تعریف واسطهٔ هندسی بهتر است معلم قبل از اینکه نامی از واسطهٔ هندسی ببرد، بیان کند که در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ اگر $a=d$ یا $c=b$ باشد چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟ مثلاً فرض کنید $a=d$ پس $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$ که با طرفین وسطین نتیجه می‌شود $a^۲=bc$. در این لحظه بیان کند که «a را واسطهٔ هندسی b و c» می‌نامند.

حل تمرین‌های درس اول

۱

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵} \rightarrow \frac{x+y+z}{۲+۳+۶}=\frac{۳}{۵} \rightarrow x+y+z=\frac{۳۳}{۵}$$

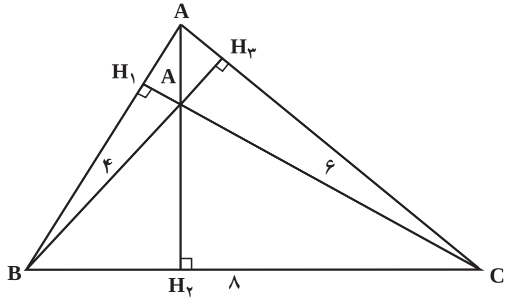
۲ $b=۸$ و $c=۱۰$ و a واسطهٔ هندسی b و c است.

$$a^۲=bc \rightarrow a^۲=۸۰ \rightarrow a=\sqrt{۸۰}$$

۳ چون در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آنها برابر است بنابراین بلندترین ارتفاع مثلث به کوتاه‌ترین ضلع مثلث یعنی ضلع AB که طول آن ۴ است وارد می‌شود. بنابراین :

$$\frac{AH_۲}{CH_۱}=\frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{AH_۲}{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}}=\frac{۴}{۸} \rightarrow AH_۲=\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$\frac{BH_۳}{CH_۱}=\frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{BH_۳}{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}}=\frac{۴}{۶} \rightarrow BH_۳=\sqrt{۱۵}$$



۴ رأس A در سه مثلث ACE و ADE و ABD مشترک است و ضلع مقابل رأس A در هر سه مثلث روی یک خط قرار دارد، بنابراین مساحت این سه مثلث متناسب با طول ضلع مقابل به رأس A در آنها می‌باشد پس :

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}}=\frac{EC}{DE} \Rightarrow \frac{۳}{۱}=\frac{EC}{DE} \Rightarrow DE=\frac{۱}{۳}EC$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}}=\frac{EC}{BD} \Rightarrow \frac{۲}{۱}=\frac{EC}{BD} \Rightarrow BD=\frac{۱}{۲}EC$$

بنابراین :

$$\frac{DE}{BD}=\frac{\frac{۱}{۳}EC}{\frac{۱}{۲}EC}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{BC}{DE}=\frac{BD+DE+EC}{\frac{۱}{۳}EC}=\frac{\frac{۱}{۲}EC+\frac{۱}{۳}EC+EC}{\frac{۱}{۳}EC}=\frac{\frac{۱۱}{۶}EC}{\frac{۱}{۳}EC}=\frac{۱۱}{۲}$$

۵ پای ارتفاع وارد بر ضلع BD در مثلث DBC را H می‌نامیم.

چون خط d با پاره‌خط BC موازی است پس مساحت دو مثلث ABC و DBC برابرند.

بنابراین $S_{DBC}=۸^{cm^۲}$

اما داریم :

$$S_{DBC}=\frac{۱}{۲}CH\times BD \Rightarrow ۸=\frac{۱}{۲}CH\times ۶ \Rightarrow CH=\frac{۸}{۳}$$

درس دوم

قضیه تالس

اهداف درس دوم

۱ درک قضیهٔ تالس و توانایی بیان و اثبات آن به کمک تناسب توسط دانش‌آموز
۲ درک تعمیم قضیهٔ تالس و رابطهٔ آن با قضیه تالس
۳ آشنایی دانش‌آموزان با عکس قضیهٔ تالس و روش اثبات آن

روش تدریس درس دوم

مطابق الگوی بیان‌شده در صفحهٔ ۳۴، لازم است که معلم ابتدا تناسب $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ را با استفاده از مطالب درس اول و با همکاری دانش‌آموزان نتیجه بگیرد و بعد قضیه تالس را بیان کند.

کار در کلاس ۱ بیانگر کاربرد قضیهٔ تالس در محاسبه طول برخی از اضلاع مثلث‌ها می‌باشد و در واقع مهارت به‌کار بردن قضیهٔ تالس را بالا می‌برد.

فعالیت ۱ نیز با همین روند ابتدا تعمیم قضیهٔ تالس را بدون ذکر نامی از آن و با کمک دانش‌آموزان اثبات می‌کند و سپس صورت قضیه را بیان می‌دارد. کار در کلاس صفحهٔ ۳۵ نیز برای جا افتادن تعمیم قضیه تالس برای دانش‌آموز بیان شده است. در این لحظه از دانش‌آموز سؤال شود که به نظر شما عکس قضیه تالس درست است؟ و از آنها بخواهیم تا عکس قضیه تالس را بیان کنند و در مورد درستی یا نادرستی آن بحث کنند. سپس عکس قضیه و اثبات آن ارائه شود.

حل تمرین‌های درس دوم

۱ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۲}{DB}=\frac{۱}{۰/۵} \rightarrow DB=۱$$

$$\Rightarrow AB=AD+DB=۲+۱=۳$$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۱/۵}=\frac{DE}{۴} \Rightarrow DE=\frac{۴}{۱/۵}=\frac{۸}{۳}$$

۲ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{۱}{x}=\frac{۲}{x+۲} \rightarrow ۲x=x+۲ \rightarrow x=۲$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۱+x}=\frac{x-۰/۵}{BC} \overset{x=۲}{\Longrightarrow} \frac{۱}{۳}=\frac{۱/۵}{BC}$$

$$\Rightarrow BC=۴/۵$$

۳ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{۹}{x}=\frac{x}{۴} \Rightarrow x^۲=۳۶ \Rightarrow x=۶$$

$$\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۹+x}=\frac{۲y-۱}{x+۲} \overset{x=۶}{\Longrightarrow} \frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}$$

$$\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۷۲}{۱۵} \Rightarrow y=\frac{۸۷}{۳۰}$$

۴ در مثلث $OA'B'$ چون $AB \| A'B'$ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{OA}{OA'} \qquad (۱)$$

در مثلث $OB'C'$ چون $BC \| B'C'$ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{OA}{OA'}=\frac{OC}{OC'} \qquad (۳)$$

در مثلث $OA'C'$ با توجه به رابطهٔ (۳) و عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود $AC \| A'C'$

۵ در مثلث ADE چون $BC \| DE$ طبق قضیه تالس داریم :

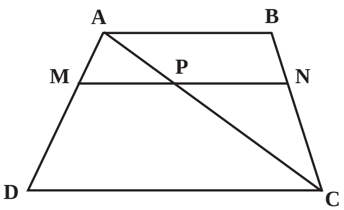
$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \qquad (۱)$$

در مثلث ADF چون $BE \| DF$ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^{۲} = AC \cdot AF$$

۷ یکی از قطرهای ذوزنقهٔ ABCD مثلاً قطر AC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با پاره‌خط MN را P می‌نامیم. در مثلث ADC چون $MP \| DC$ طبق قضیه تالس داریم :



$$\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PC} \qquad (۱)$$

در مثلث ABC چون $PN \| AB$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AP}{PC} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

۸ فرض کنید فاصله توپ از زمین مسابقه برابر x باشد.
طبق اطلاعات صورت مسئله شکل زیر را خواهیم داشت :
چون $DE \| BC$ طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۹۰۰}{۱۱۰۰} = \frac{۲۴۳}{x} \Rightarrow x = ۲۹۷cm$$

قد این بازیکن ۱۸۰cm است و توپ هم ۳۰cm بالای سر اوست، بنابراین

میزان پرش بازیکن $= ۲۹۷ - ۱۸۰ - ۳۰ = ۸۷cm$

درس سوم

تشابه مثلث‌ها

اهداف درس سوم

۱ دانش‌آموز با مفهوم تشابه دو مثلث و رابطه بین زاویه‌ها و اضلاع دو مثلث متشابه آشنا شود.

۲ آشنایی با قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها و فراگیری حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها و تسلط بر آنها با ارائه مثال‌های مناسب.

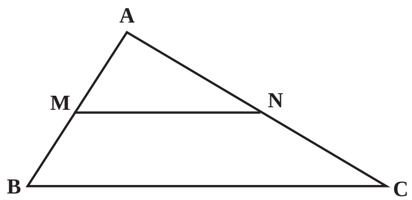
۳ دانش‌آموز بتواند قضیهٔ معروف فیثاغورس را که در گذشته بارها آن را به‌کار برده است به کمک تشابه مثلث‌ها اثبات کند.

۴ دانش‌آموز بتواند رابطه‌های طولی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه و پاره‌خط‌هایی که توسط ارتفاع وارد بر وتر آن مثلث حاصل می‌شوند را درک و بیان کند.

روش تدریس درس سوم

❑ چون دانش‌آموزان در سال گذشته با مفهوم تشابه آشنا شده‌اند در ابتدای این درس از دانش‌آموزان سؤال شود که تشابه و ویژگی‌های آن چیست؟

پس از بحثی مختصر، تعریف تشابه دو مثلث بیان شود و برای مثال مثلث ABC و پاره‌خط MN که $MN \parallel BC$ رسم شود.



و بررسی شود که دو مثلث AMN و ABC تمام شرایط تعریف تشابه دو مثلث را دارند، بنابراین متشابه هستند سپس صورت قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها بیان شود.

❑ سپس از دانش‌آموزان سؤال شود که آیا برای بیان بررسی تشابه دو مثلث لازم است که هر شش شرط تشابه (یعنی تساوی زاویه‌های متناظر و متناسب بودن اضلاع متناظر) بررسی شود یا برخی از آنها می‌توانند باقی را نتیجه دهند.

❑ سپس بیان شود که جواب مثبت است و در برخی موارد نیاز به بررسی هر شش شرط نیست. مثلاً اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشد آن دو مثلث متشابه هستند و چهار شرط دیگر برقرار خواهند بود، سپس صورت قضیه ۱ بیان شود.

❑ قضایای ۲ و ۳ نیز به همین صورت بیان و اثبات شوند.

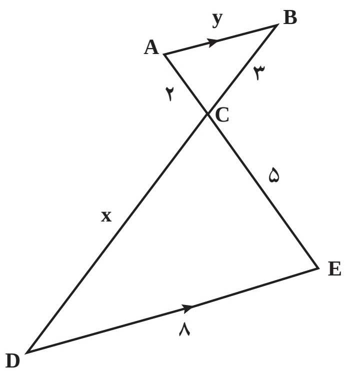
مثال صفحه ۴۰ بیانگر یک کاربرد عملی از تشابه مثلث‌ها می‌باشد. و دو مثال صفحه ۴۱ برای افزایش مهارت دانش‌آموزان در به‌کارگیری تشابه مثلث‌ها هستند.

در این لحظه از دانش‌آموزان سؤال شود که آیا رابطه فیثاغورس را که یکی از روابط مهم ریاضی است را به خاطر دارند. و از آنها خواسته شود تا صورت آن را بیان کنند سپس سؤال شود که آیا در مورد اثبات آن تا به حال فکر کرده‌اید. اینک با استفاده از تشابه مثلث‌ها قادر به اثبات این قضیه می‌باشیم. سپس اثبات قضیه با کمک دانش‌آموزان و مرحله به مرحله مطابق کتاب انجام گیرد.

نتیجه وسط صفحه ۴۲ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه هستند که بررسی آنها به دانش‌آموزان واگذار شود.

حل تمرین‌های درس سوم

۱ شکل اول :



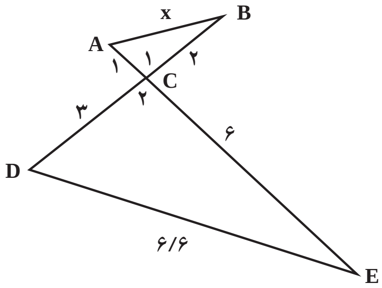
$AB || DE \to \hat{A} = \hat{E}$ و $\hat{B} = \hat{D}$

پس دو مثلث ABC و CDE به حالت دو زاویه با هم متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{y}{۸} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow y = \frac{۱۶}{۵}$$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{x} \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۲}$$

شکل دوم :

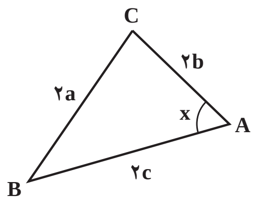


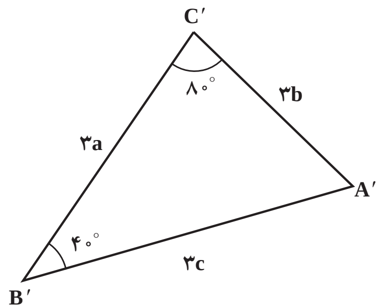
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{۱}{۳}\\ \hat{C}_۱=\hat{C}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$ دو مثلث ABC و DCE

به حالت دو ضلع متناسب و زاویه بین مساوی، متشابه هستند. بنابراین :

$$\frac{AC}{DC}=\frac{AB}{DE}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{۶/۶}\Rightarrow x=۲/۲$$

شکل سوم :





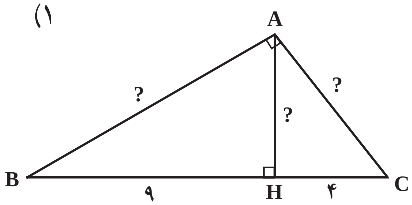
دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت سه ضلع متناسب، $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{۲}{۳}\Rightarrow$

متشابه هستند. بنابراین زاویه‌های مقابل به اضلاع متناسب، برابرند پس :

$$x=\hat{A}=\hat{A}'=۱۸۰-(۸۰+۴۰)=۶۰^\circ$$

۲

۱)

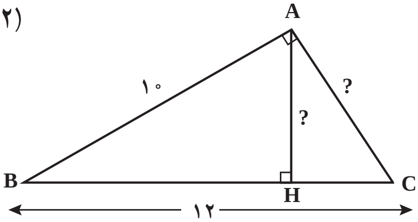


$$AB^۲=BH\times BC\rightarrow AB^۲=۹\times ۱۳=۱۱۷\rightarrow AB=\sqrt{۱۱۷}$$

$$AC^۲=CH\times CB\rightarrow AC^۲=۴\times ۱۳=۵۲\rightarrow AC=\sqrt{۵۲}$$

$$AH^۲=BH\times HC=۹\times ۴=۳۶\Rightarrow AH=۶$$

۲)

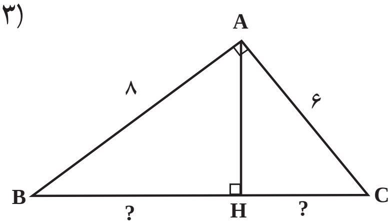


$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۱۰^{۲} = BH \times ۱۲ \Rightarrow BH = \frac{۱۰۰}{۱۲} = \frac{۲۵}{۳} \Rightarrow CH = ۱۲ - \frac{۱۰۰}{۱۲} = \frac{۴۴}{۱۲} = \frac{۱۱}{۳}$

$AC^{۲} = CH \times CB = \frac{۱۱}{۳} \times ۱۲ = ۴۴ \Rightarrow AC = \sqrt{۴۴}$

$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۱۲ = ۱۰ \times \sqrt{۴۴} \Rightarrow AH = \frac{۵\sqrt{۱۱}}{۳}$

۳)

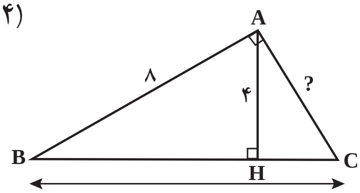


$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \rightarrow BC^{۲} = ۸^{۲} + ۶^{۲} = ۱۰۰ \rightarrow BC = ۱۰$

$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۸^{۲} = BH \times ۱۰ \Rightarrow BH = ۶/۴$

$CH = BC - BH = ۱۰ - ۶/۴ = ۳/۶$

۴)



مثلث ABH قائم‌الزاویه است. $\Rightarrow AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow ۸^{۲} = ۴^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow$

$BH^{۲} = ۴۸ \Rightarrow BH = ۴\sqrt{۳}$

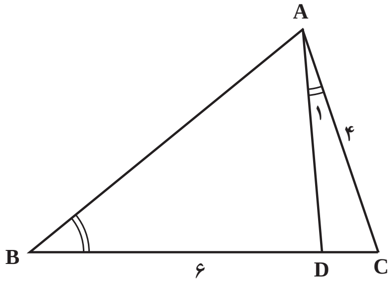
$AH^{۲} = BH \times HC \Rightarrow ۴^{۲} = (۴\sqrt{۳}) \times HC \Rightarrow HC = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

$BC = BH + HC = ۴\sqrt{۳} + \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$

$AC^{۲} = BC^{۲} - AB^{۲} = \frac{۲۵۶}{۳} - ۶۴ = \frac{۶۴}{۳}$

$\Rightarrow AC = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

۳



$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}_{۱}=\hat{B}\\ \text{مشترک}\ \hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\Delta}{C}D\sim A\overset{\Delta}{B}C$$

بنابراین :

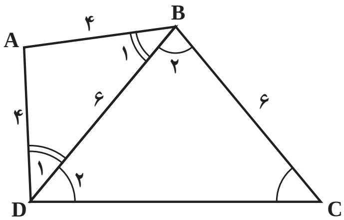
$$\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{DC}{۴}=\frac{۴}{BD+DC}\Rightarrow\frac{DC}{۴}=\frac{۴}{۶+DC}$$

$$\Rightarrow(۶+DC)DC=۱۶\Rightarrow DC^{۲}+۶DC-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow(DC+۸)(DC-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}DC=-۸ & \text{غ ق ق}\\ DC=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow BC=BD+DC=۶+۲=۸$$

۴

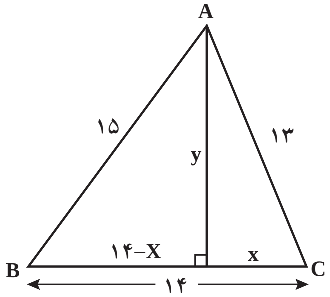


$$\left.\begin{array}{l}BC=BD\Rightarrow\hat{D}_{۲}=\hat{C}\\ AB=AD\Rightarrow\hat{B}_{۱}=\hat{D}_{۱}\\ AB\,||\,DC\Rightarrow\hat{B}_{۱}=\hat{D}_{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{B}_{۱}=\hat{C}=\hat{D}_{۱}=\hat{D}_{۲}$$

بنابراین مثلث‌های ABD و BCD به حالت دو زاویه برابر، متشابه هستند. پس

$$\frac{DC}{BD}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{DC}{۶}=\frac{۶}{۴}\Rightarrow DC=۹$$

۵



در مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم :

$$AC^{۲}=AH^{۲}+HC^{۲}$$

$$۱۳^{۲}=x^{۲}+y^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۱۶۹\qquad(۱)$$

در مثلث قائم‌الزاویه AHB داریم :

$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۱۵^۲ = y^۲ + (۱۴-x)^۲$$

$$\Rightarrow y^۲ + ۱۹۸ - ۲۸x + x^۲ = ۲۲۵$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲۸x = ۲۹$$

با توجه به رابطه (۱) داریم :

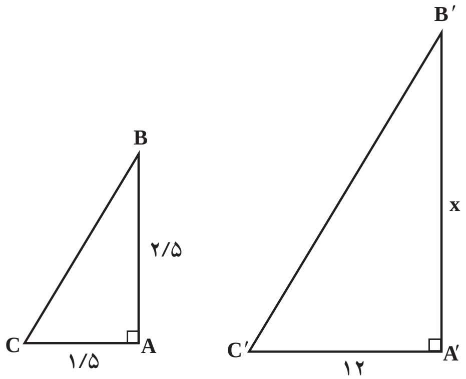
$$۱۶۹ - ۲۸x = ۲۹ \Rightarrow ۲۸x = ۱۴۰ \Rightarrow x = ۵$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow y^۲ = ۱۶۹ - x^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow y = ۱۲$$

$$\text{ABC مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۴ = ۸۴$$

۶ الف) زاویه بین هر جسم عمود بر زمین و شعاع تابشی خورشید در یک لحظه مشخص مقداری ثابت است. بنابراین $\hat{B} = \hat{B'}$ بنابراین دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند.

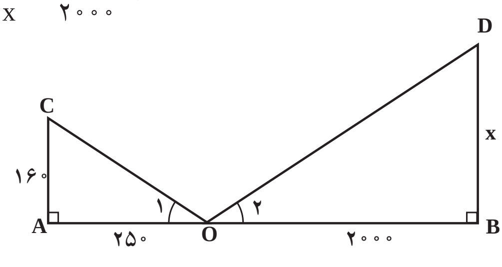


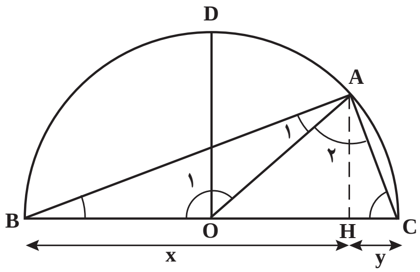
بنابراین :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{۲/۵}{x} = \frac{۱/۵}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۳۰}{۱/۵} = ۲۰m$$

ب) می‌دانیم زاویهٔ تابش و انعکاس یکسان می‌باشند. بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ بنابراین دو مثلث AOC و DOB متشابه هستند (به حالت تساوی دو زاویه) بنابراین :

$$\frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{۱۶۰}{x} = \frac{۲۵۰}{۲۰۰۰} \Rightarrow x = ۱۲۸۰cm = ۱۲/۸m$$





۷ الف) چون زاویهٔ A یک زاویه محاطی مقابل به کمان ۱۸۰° درجه است بنابراین $\hat{A} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$

ب) مطابق شکل واضح است که $OD \geq AH$

پ) در مثلث قائم‌الزاویه ABC طبق روابط طولی داریم :

$$AH^۲ = CH \times HB = xy \Rightarrow AH = \sqrt{xy}$$

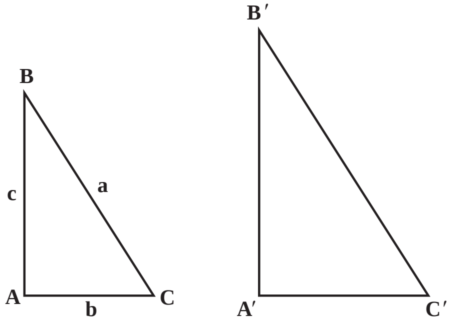
از طرفی OD برابر شعاع دایره است پس BC دو برابر OD است بنابراین

$$x + y = ۲OD \Rightarrow OD = \frac{x+y}{۲}$$

و با توجه به قسمت (ب) داریم :

$$\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$$

ت) بله. مطابق قسمت (پ) این نامساوی صحیح است و بیان می‌دارد که میانگین حسابی دو عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی میانگین هندسی آنها است.



۸ الف) اگر a و b و c طول اضلاع یک مثلث باشند و $a^۲ = b^۲ + c^۲$ باشد آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

ب) دو پاره‌خط $A'B'$ و $A'C'$ را که بر هم عمود هستند و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ هستند را رسم می‌کنیم.

B' و C' را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$ حاصل شود.

طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ داریم :

$$(B'C')^۲ = (A'B')^۲ + (A'C')^۲ = (AB)^۲ + (AC)^۲ = c^۲ + b^۲$$

اما طبق صورت مسئله (قسمت الف) داریم $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بنابراین :

$$B'C'^۲ = a^۲ \Rightarrow B'C' = a \Rightarrow B'C' = BC$$

پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تساوی سه ضلع هم‌نهشت هستند. بنابراین مثلث ABC نیز قائم‌الزاویه است.

ج) یک مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر مربع ضلع بزرگ‌تر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر باشد.

درس چهارم

کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

اهداف درس چهارم

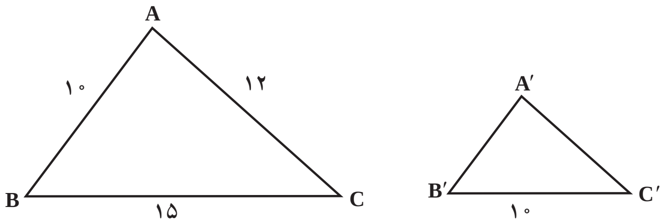
۱ دانش‌آموز بتواند به کمک قضیهٔ تالس ثابت کند که در هر مثلث نیمساز هر زاویهٔ داخلی، قاعدهٔ مقابل به آن زاویه را به نسبت ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.
۲ دانش‌آموز به کمک تشابه مثلث‌ها ثابت کند در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازهای متناظر برابر نسبت تشابه است و نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت تشابه و نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه است.

روش تدریس درس چهارم

❑ بهتر است برای شروع این درس، معلم برای دانش‌آموزان بیان کند که حال‌که در درس‌های قبلی با قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها آشنا گشته‌ایم می‌خواهیم چند کاربرد از این مطالب را در درس جدید بیان کنیم.
❑ یکی از کاربردهای قضیه تالس در قضیه نیمسازهای زوایای داخلی مثلث است. سپس صورت قضیه صفحه ۴۵ بیان شود، و اثبات آن به کمک دانش‌آموزان مطابق کتاب انجام پذیرد.
❑ مثال صفحه ۴۵ و کار در کلاس صفحه ۴۶ برای درک بهتر قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی می‌باشند.
❑ در ادامه معلم بیان کند که حال می‌خواهیم کاربردی از تشابه مثلث‌ها را بیان کنیم.
❑ با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توان نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها و مساحت‌های متناظر دو مثلث را به‌دست آورد.
❑ سپس قضیه صفحه ۴۶ بیان و اثبات گردد.
❑ سپس از دانش‌آموزان سؤال شود که نتایج به‌دست آمده برای نسبت محیط و مساحت دو مثلث متشابه آیا قابل تعمیم برای چند ضلعی‌ها نیز می‌باشد؟
❑ پس از بحث در مورد آن، کار در کلاس بالای صفحه ۴۸ انجام شود و نتیجه آن به‌طور واضح بیان گردد.
❑ سپس در مورد متشابه بودن دو nضلعی منتظم بحث شود.

حل تمرین‌های درس چهارم

۱



بزرگ‌ترین ضلع مثلث $A'B'C'$ نظیر بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC است پس مطابق شکل $B'C'$ نظیر BC که طول آن ۱۵ است می‌باشد.

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}$$ نسبت تناسب

بنابراین

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط } A'B'C'}{\text{محیط } ABC}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط } A'B'C'}{۱۵+۱۰+۱۲}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{محیط } A'B'C' = \frac{۷۴}{۳}$$

۲ دو مثلث AMN و ABC متشابه هستند و نسبت تشابه برابر $k=\frac{AB}{AM}$ است. بنابراین :

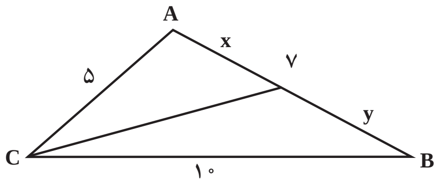
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=k^۲ \Rightarrow \frac{S_{ABC}-S_{AMN}}{S_{AMN}}=k^۲-۱ \Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}}=k^۲-۱$$

$$\Rightarrow k^۲-۱=۸ \rightarrow k=۳$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM}=۳ \Rightarrow \frac{AB-AM}{AM}=۳-۱$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA}=۲$$

۳ می‌دانیم که هر نیمساز، قاعده وارد بر آن را به نسبت دو ضلع آن تقسیم می‌کند. بنابراین :

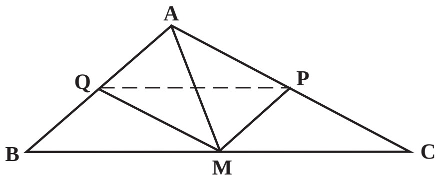


$$\frac{x}{۵}=\frac{y}{۱۰} \text{ و } x+y=۷$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۵}=\frac{y}{۱۰}=\frac{x+y}{۱۵}=\frac{۷}{۱۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{۵}=\frac{۷}{۱۵} \Rightarrow x=\frac{۷}{۳} \\ \frac{y}{۱۰}=\frac{۷}{۱۵} \Rightarrow y=\frac{۱۴}{۳} \end{cases}$$

۴ در مثلث AMB، MQ نیمساز است. بنابراین :



$$\frac{AQ}{QB}=\frac{AM}{MB} \qquad (۱)$$

در مثلث AMC، MP نیمساز است. بنابراین :

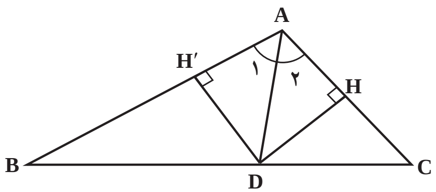
$$\frac{AP}{PC}=\frac{AM}{MC} \qquad (۲)$$

چون MB=MC از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB}$$

بنابراین طبق عکس قضیه تالس داریم : PQ||BC

۵ الف) طبق نتیجه ۲ درس اول نسبت مساحت دو مثلث ABD و ACD برابر نسبت اضلاع روبه‌روی زاویه $A_۱$ و $A_۲$ در آنهاست پس :



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC} \qquad (۱)$$

ب) چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد پس فاصله آن از دو ضلع زاویه A یکسان است بنابراین DH=DH́.

با توجه به نتیجه ۱ درس اول چون در دو مثلث ABD و ACD ارتفاع‌های DH و DH' برابرند، نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر نسبت قاعده‌های آنهاست یعنی :

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB}{AC} \qquad (۲)$$

ج) با توجه به روابط (۱) و (۲) درستی قضیه نیمسازها اثبات می‌شود یعنی :

$$(۱) \text{ و } (۲) \qquad \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

۶ چون BE دو برابر ED است پس $\frac{BE}{BC}=\frac{۲}{۳}$. از طرف دیگر داریم :

$$\frac{AB}{CD}=\frac{۲a}{۳a}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AE}{CB}=\frac{۴b}{۶b}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین :

$$\frac{BE}{BD}=\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{CB}$$

پس دو مثلث ABE و CBD به حالت تناسب سه ضلع متشابه هستند.

بنابراین زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع متناسب در دو مثلث با هم برابرند پس :

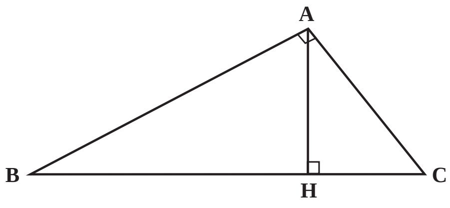
$$\begin{cases}۲x-۱=y+۱۵\\ ۲x-۷=x+y\end{cases} \Rightarrow \quad x=۹ \qquad y=۲$$

چون نسبت اضلاع متناظر مثلث BCD به مثلث ABE برابر $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد بنابراین :

$$\frac{S_{BCD}}{S_{ABE}}=(\frac{۳}{۲})^{۲}=\frac{۹}{۴}$$

۷ الف) مثلث‌های ABH و ABC

متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها $\frac{AB}{BC}$ است :



بنابراین :

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=(\frac{AB}{BC})^{۲}$$

به همین ترتیب مثلث‌های ACH و ABC با نسبت تشابه $\frac{AC}{BC}$ متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=(\frac{AC}{BC})^{۲}$$

ب) با جمع دو طرف قسمت الف داریم :

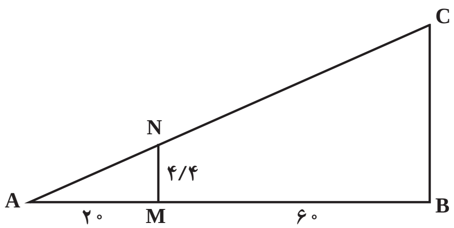
$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}+\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=(\frac{AB}{BC})^{۲}+(\frac{AC}{BC})^{۲} \Rightarrow \frac{S_{ABH}+S_{ACH}}{S_{ABC}}=\frac{AB^{۲}}{BC^{۲}}+\frac{AC^{۲}}{BC^{۲}}$$

چون $S_{ABH}+S_{ACH}=S_{ABC}$ داریم :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=\frac{AB^{۲}+AC^{۲}}{BC^{۲}} \Rightarrow \frac{AB^{۲}+AC^{۲}}{BC^{۲}}=۱$$

$$\Rightarrow AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}$$

۸ از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم می‌کنیم شکل زیر حاصل می‌شود :



طبق قضیه تالس با توجه به موازی بودن MN و BC داریم :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۲۰}{۸۰}=\frac{۴/۴}{BC}$$

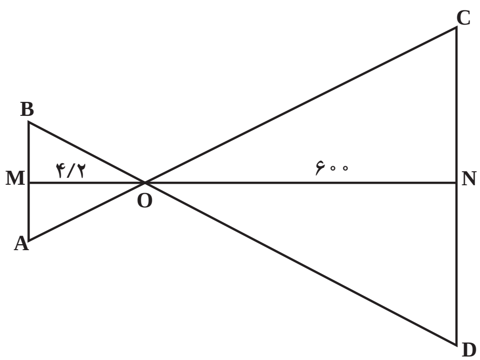
$$\Rightarrow BC=۱۷/۶\,m$$

بنابراین فاصله عمودی چشمان ناظر از نوک آنتن برابر ۱۷/۶ متر می‌باشد :

پس :

ارتفاع ساختمان = ۱۷/۶−۳/۲+۱/۶ = ۱۶ m

۹ واحد همه طول‌های موجود را به cm تبدیل می‌کنیم.



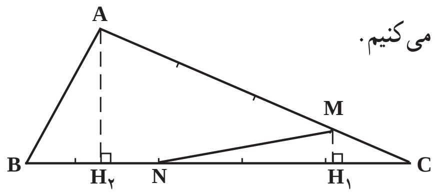
CD∥AB بنابراین :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}\\ \hat{A}=\hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{C}D$$

بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث نیز برابر نسبت تشابه می‌باشد پس :

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OM}{ON} \Rightarrow \frac{۳/۵}{CD}=\frac{۴/۲}{۶۰۰} \Rightarrow CD=۵۰۰cm=۵m$$

حل برخی از نمونه سؤال‌های ارزشیابی



پاسخ سؤال ۱۹) ارتفاع‌های $AH_۲$ و $MH_۱$ را رسم می‌کنیم.

در مثلث $ACH_۲$ داریم $AH_۲ \| MH_۱$ پس :

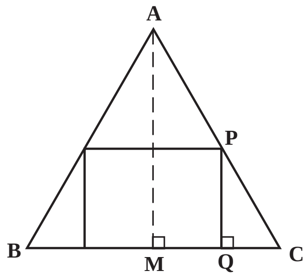
$$\frac{MH_۱}{AH_۲}=\frac{CM}{CA}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}}=\frac{\frac{۱}{۲}\ BC\ .\ AH_۲}{\frac{۱}{۲}\ NC\ .\ MH_۱}=\frac{BC}{NC}\cdot\frac{AH_۲}{MH_۱}=\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۴}{۱}=\frac{۱۶}{۳}$$

$$S_{ABNM}=S_{ABC}-S_{MNC}=S_{ABC}-\frac{۳}{۱۶}S_{ABC}=\frac{۱۳}{۱۶}S_{ABC}$$

$$\Rightarrow\ \frac{S_{ABC}}{S_{ABNM}}=\frac{۱۶}{۳}$$



پاسخ سؤال ۲۰) در مثلث AMC طبق قضیه فیثاغورس داریم :

$$AC^۲=AM^۲+MC^۲$$

$$\Rightarrow\ ۲^۲=AM^۲+۱^۲\ \Rightarrow AM=\sqrt{۳}$$

طول ضلع مربع محاط شده را برابر a در نظر می‌گیریم، بنابراین :

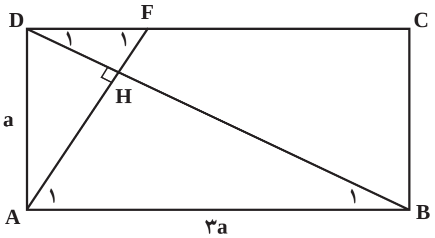
$PQ=a$ و $CQ=۱-\frac{a}{۲}$

چون $PQ\|AM$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{CQ}{MC}=\frac{PQ}{AM}\quad\Rightarrow\quad\frac{۱-\frac{a}{۲}}{۱}=\frac{a}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{۳}(۱-\frac{a}{۲})\Rightarrow a=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}(۲-\sqrt{۳})}{۴-۳}=۴\sqrt{۳}-۶$$

پاسخ سؤال ۲۱) طول ضلع AD را برابر a در نظر می‌گیریم بنابراین AB = ۳a .
طبق رابطه فیثاغورس در مثلث ABD داریم :



$$BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} = a^{۲} + (۳a)^{۲} = ۱۰a^{۲} \Rightarrow BD = \sqrt{۱۰}\,a$$

در مثلث ABD پاره‌خط AH ارتفاع وارد بر وتر است، بنابراین طبق روابط طولی داریم :

$$AD^{۲} = DH.DB \Rightarrow a^{۲} = DH.\sqrt{۱۰}\,a \Rightarrow DH = \frac{}{\sqrt{۱۰}}$$

$$DF \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{F}_۱ = \hat{A}_۱ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{DFH} \sim \overset{\Delta}{ABH}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{HB}{HD} \qquad \Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{DB - DH}{HD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{\sqrt{۱۰}\,a - \frac{a}{\sqrt{۱۰}}}{\frac{a}{\sqrt{۱۰}}} = ۹$$

$\Rightarrow$ چون AB=DC بنابراین DC، ۹ برابر DF است.

فصل ۳

چندضلعی‌ها

نگاه کلی به فصل

در دوره ابتدایی در مورد چندضلعی‌های معروف مانند مثلث، مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، لوزی و ذوزنقه و برخی ویژگی‌ها و نیز روش محاسبهٔ مساحت آنها مطالبی ارائه گردید. در دورهٔ متوسطه اول در کتاب ریاضی هشتم در مورد این چندضلعی‌ها و چندضلعی‌های منتظم و ویژگی آنها و نیز تعداد قطرها و اندازهٔ زاویه‌های داخلی و خارجی آنها مطالبی گسترده‌تر از دوره ابتدایی ارائه گردید.

در کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه اول روش‌هایی برای تشخیص چندضلعی‌های محدب و مقعر مطرح گردید.

در ریاضی هشتم و نهم با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها برخی از ویژگی‌های این چندضلعی‌ها به‌صورت ضمنی اثبات گردید، هر چند که هدف، آموزش اثبات آن ویژگی‌ها نبوده است بلکه به‌کارگیری حالت‌های مختلف هم‌نهشتی مثلث‌ها بوده است. در این فصل در ابتدا مفاهیم پایه و اساسی مانند نقطه، پاره‌خط، ضلع و رأس یادآوری می‌شوند و سپس به تعریف چندضلعی، قطر و چندضلعی محدب و مقعر پرداخته شده است. سپس انواع چهارضلعی‌های مهم و برخی از ویژگی آنها معرفی، بررسی و اثبات می‌گردند.

در طی این مراحل سعی می‌شود دانش‌آموز به‌صورت فعالیت محور با مراحل و روش‌های استدلال در هندسه آشنا شده و روش‌های استدلال را بیاموزد. در قسمت دوم این فصل مساحت چندضلعی‌های مهم یادآوری می‌گردند و برخی از ویژگی‌های پرکاربرد در مساحت مورد بررسی و اثبات قرار می‌گیرند و سپس کاربردهایی از مساحت مطرح می‌گردد و در نهایت نقاط شبکه‌ای و روش محاسبهٔ مساحت شکل‌های گوناگون در صفحهٔ شبکه‌بندی شده مطرح و آموزش داده می‌شود.

نقشه مفهومی

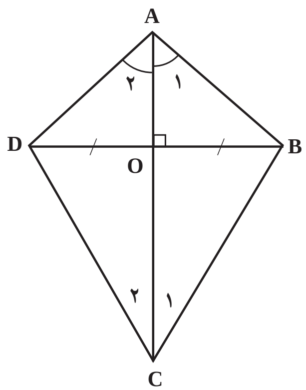

چند ضلعی‌ها
چندضلعی‌ها و ویژگی‌های آنها
یادآوری مفاهیم اساسی
ضلع و رأس
قطر و محاسبه تعداد آن
چندضلعی محدب و مقعر
معرفی چهارضلعی‌ها و ویژگی‌های آنها
متوازی‌الاضلاع
مستطیل
لوزی
مربع
ذوزنقه
مساحت و کاربردهای آن
یادآوری مساحت چندضلعی‌های مهم
مثلث
مربع
مستطیل
متوازی‌الاضلاع
لوزی
ذوزنقه
کاربردهایی از مساحت و برخی ویژگی‌های مهم
نقاط شبکه‌ای و مساحت

تصویر عنوانی

از دانش هندسه و شکل‌های هندسی به‌طور گسترده‌ای در معماری بناها، سازه‌ها و پل‌ها استفاده می‌شود. در کشور عزیزمان ایران، از دوران کهن تا معاصر، بناها و سازه‌های بسیاری وجود دارند که نشان‌دهندهٔ به‌کارگیری وسیع هندسه در طراحی و ساخت آنها می‌باشد. پل طبیعت تهران یکی از بناهای شاخص و ممتاز ایران و جهان در دوران معاصر است که آشنایی و کاربرد هندسه ــ به‌خصوص چندضلعی‌ها ــ در طراحی و ساخت آن توسط مهندس نابغهٔ زن ایرانی[1] به‌صورت شایان توجهی به چشم می‌خورد. چندضلعی‌های گوناگون شامل مثلث، مربع، مستطیل، لوزی، متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه در قسمت‌های مختلف این سازهٔ زیبا به وضوح قابل رویت و شناسایی است. برای استحکام بیشتر برخی از قسمت‌های این سازه از اتصال قطرهای این چندضلعی‌ها استفاده شده است. مساحت این پل ۷۰۰۰ متر مربع است که در ارتفاع ۴۰ متری از سطح زمین، با سه ستون و در سه طبقه، اولین پل صرفاً پیاده‌رو در ایران محسوب می‌شود.

دانستنی‌هایی برای معلم

کایت یا شبه لوزی: کایت چهارضلعی، شامل فقط دوجفت متمایز، از ضلع‌های مجاور با اندازه‌های برابر است. در واقع کایت چهارضلعی محدبی است که دارای دو قطر عمود بر هم است و فقط یکی از قطرهای منصف قطر دیگر می‌باشد. قطری که منصف قطر دیگر است محور تقارن کایت و همچنین نیمساز دو زاویهٔ مقابل است. مساحت کایت مانند مساحت لوزی محاسبه می‌شود. در واقع کایت اجتماع دو مثلث متساوی‌الساقین است که قاعده‌های آنها مشترک و دو رأس دیگر دو مثلث در دو طرف خطی باشند که قاعده مشترک روی آن واقع است. سپس قاعده مشترک را حذف کرده باشیم.



$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad , \quad \hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

$$AC \perp BD \quad , \quad OB = OD$$

$$AB = AD \quad , \quad BC = DC$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{2}$$

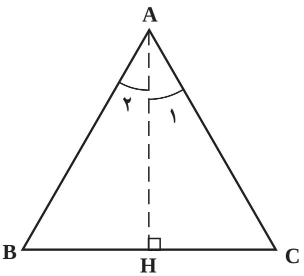
۱ــ لیلا عراقیان

توصیه‌های آموزشی

به همکاران محترم توصیه می‌شود که برای تدریس هر قسمت، قبل از بیان نتیجه‌ها و قضیه‌ها، فعالیت‌های طراحی شده به‌صورت مرحله به مرحله پاسخ داده شود تا یک نظم منطقی برای رسیدن به نتایج و قضایا و اثبات برخی از ویژگی‌ها در ذهن دانش‌آموز شکل گیرد. در مواردی که به جز مراحل طراحی شده در فعالیت‌ها و نتیجه‌گیری‌ها مراحل یا روش دیگری وجود دارد که در کتاب به آن اشاره شده ولی توضیح کاملی ارائه نگردیده است و یا در کتاب به آن اشاره نشده است ولی می‌توان آن را ارائه داد به‌طوری که دانش‌آموز از طریق آن می‌تواند به همان نتایج دست یابد، بهتر است پس از تدریس و ارائه مراحل مطرح شده در کتاب و از طریق راهنمایی و هدایت دانش‌آموز را به‌سوی درک روش یا روش‌های دیگر هدایت نمود. این امر سبب می‌گردد که دانش‌آموز برای حل برخی از مسائل فقط به یک روش وابسته نگردد و بداند که می‌تواند برای حل برخی از مسائل دیدگاه‌های متفاوتی را اتخاذ نماید و نیز می‌تواند بین دو یا چند روش، روشی را که از نظر وی برای درک مفهوم مورد نظر راحت‌تر است، انتخاب نماید.

مسیرهایی برای توسعه : برای افزایش سطح درک دانش‌آموزان و برقراری ارتباط بیشتر دانش‌آموز و کتاب، استدلال‌های این فصل تا حد امکان به‌صورت کلامی مطرح شده‌اند. می‌توان در هر قسمت پس از ارائه آنچه در کتاب مطرح شده است از دانش‌آموزان بخواهیم تا سعی کنند آن را به زبان ریاضی و با نمادهای ریاضی بنویسند.

مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الساقین دارای ویژگی‌هایی هستند که دانش‌آموز بسیاری از آنها را در سال‌های قبل مطالعه نموده و آموزش دیده است. از آنجایی که این مثلث‌ها و ویژگی‌های آنها و نیز برخی پاره‌خط‌ها در این مثلث‌ها مانند نیمساز و ارتفاع و میانه در حل بسیاری از مسائل و یا دستیابی به برخی از نتایج در این فصل استفاده می‌گردند، بنابراین ارائه مسائلی که به اثبات برخی از ویژگی‌های این مثلث‌ها منجر می‌شود قبل از شروع قسمت تعریف چهارضلعی‌های مهم می‌تواند در ارائه کار موجب ساده‌تر شدن امر آموزش گردد. مانند مسئله زیر :



ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، AH ارتفاع است.

ثابت کنید :

الف) $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$

ب) $BH = CH$

ــ در قسمت مساحت برای درک کاربرد مساحت و یا درک بزرگی یا کوچکی مقدار محاسبه شده در برخی موارد می‌توان از دانش‌آموز خواست تا مساحت محاسبه شده در یک شکل را با مساحت شکل‌هایی که با آنها آشنایی دارند مقایسه نمایند. به‌طور مثال می‌توان از دانش‌آموز خواست تا مساحت یک چندضلعی (به‌عنوان مثال

یک قسمت از یک سالن ورزشی که به شکل ذوزنقه است) را با مساحت یک سرامیک یا موزاییک ۳۰ در ۳۰ مقایسه نماید و تعداد کاشی‌ها یا موزاییک مورد نیاز جهت کاشی‌کاری یا موزاییک نمودن آن سطح را محاسبه کند.

نمونه سؤالات ارزشیابی

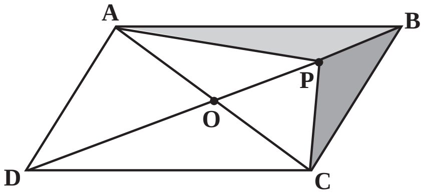
۱ الف) ثابت کنید مستطیلی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، مربع است.

ب) ثابت کنید لوزی که دو زاویه مجاور آن هم‌نهشت باشند، مربع است.

۲ الف) ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای درونی متوازی‌الاضلاع که لوزی نباشد، یک مستطیل پدید می‌آید.

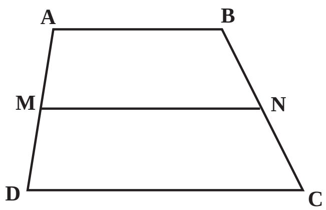
ب) اگر همه اضلاع متوازی‌الاضلاع برابر باشند چه اتفاقی رخ خواهد داد؟

۳ ثابت کنید هر دو رأس مقابل یک متوازی‌الاضلاع از قطر گذرنده از دو رأس مقابل دیگر، به یک فاصله‌اند.



۴ اگر P نقطه‌ای دلخواه روی قطر BD از متوازی‌الاضلاع ABCD باشد، ثابت کنید دو مثلث ABP و BPC هم‌مساحت هستند.

راهنمایی: قطر AC را رسم کرده و از ویژگی میانه در مساحت استفاده کنید. می‌توانید از مسئله (۳) نیز استفاده کنید.

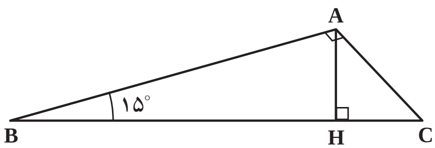


۵ در ذوزنقه مقابل M وسط AD و N وسط BC است. ثابت کنید:

الف) $MN=\frac{AB+CD}{۲}$ (MN را پاره‌خط میانگین می‌گویند)

ب) $MN \parallel AB$ و $MN \parallel CD$

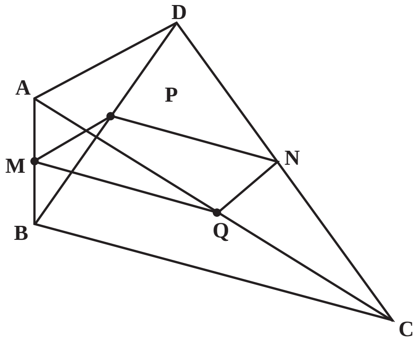
از A به C وصل کرده تلاقی پاره‌خط AC را با پاره‌خط MN نقطه K بنامید سپس از قضیه پاره‌خط میانگین در مثلث استفاده کنید.



۶ ثابت کند اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه °۱۵ یا °۷۵ باشد، اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ وتر است. $(AH=\frac{۱}{۴}BC)$

(**راهنمایی** : از رسم میانه وارد بر وتر و خواص مثلث متساوی‌الساقین و ضلع مقابل به زاویهٔ 30° در مثلث قائم‌الزاویه استفاده نمایید)

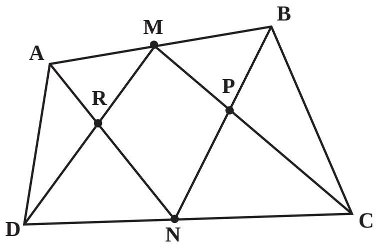
۷ ثابت کنید در هر چهارضلعی دلخواهی مانند ABCD، اگر از به هم وصل نمودن وسط دو ضلع مقابل و وسط دو قطر آن یک چهارضلعی حاصل شود، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



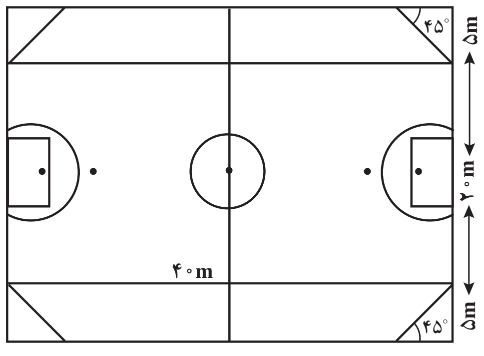
۸ در چهارضلعی محدب ABCD، M وسط AB و N وسط CD است.

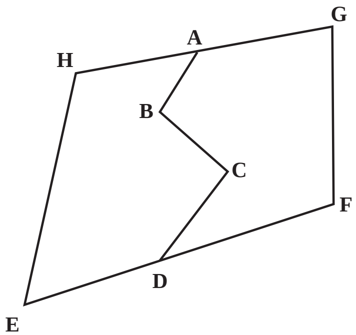
ثابت کنید : $S_{\overset{\Delta}{PBC}} + S_{\overset{\Delta}{ARD}} = S_{MPNR}$

(**راهنمایی** : از M به N وصل نمایید)



۹ سالن فوتسالی از بالا به شکل زیر است. در چهار گوشه آن فضاهای مثلثی برای نصب پروژکتور در نظر گرفته شده است. می‌خواهند فضاهای مشخص شده (ذوزنقه‌ها) برای تماشاچیان را به‌صورتی موزاییک‌کاری کنند که از دید دوربینی که در سقف ورزشگاه قرار دارد به دو رنگ آبی و قرمز دیده شود و دوربینی که در سمت تماشاچیان آبی و یا قرمز قرار دارد، جایگاه تماشاچیان مقابل را جهت القای آرامش سبزرنگ نمایش دهد. اگر در هر جایگاه ۴ پله با ارتفاع ۵۰ سانتی‌متر و عرض‌های برابر درنظر گرفته شود و از موزاییک‌هایی به ضلع ۵۰cm و مربعی استفاده شود. تعداد موزاییک‌های قرمز و آبی و سبز را مشخص نمایید.

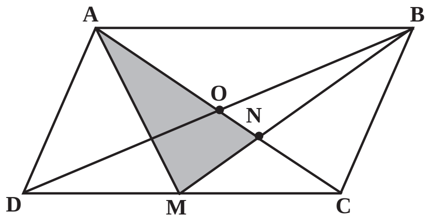




۱۰ زمین I و II به دو کشاورز تعلق دارند. هر یک از این دو کشاورز می‌خواهند برای استفاده بهتر مثلاً فنس‌کشی و استفاده از ماشین‌های کشاورزی، مرز مشترک ABCD بین خود را به یک مرز پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت هیچ‌کدام تغییر نکند. تعیین کنید این مرز چگونه باید رسم شود.

(**راهنمایی**: ابتدا از C خطی موازی EF رسم نمایید و پاره‌خط AC و خط موازی با آن را از نقطه B رسم کنید و . . .)

۱۱ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع CD است. و قطر AC پاره‌خط BM را در N قطع می‌کند. مساحت مثلث AMN چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است؟ (یا مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر مساحت مثلث AMN است؟)



پاسخ برخی از سؤالات ارزشیابی

پاسخ سؤال ۷:

Q وسط AC و M وسط AB است: در مثلث ABC $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MQ \parallel BC$

N وسط DC و P وسط BD است: در مثلث DBC $\Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{DP}{DB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow PN \parallel BC$

$\Rightarrow MQ \quad PN$

و به‌صورت مشابه با استفاده از عکس قضیه تالس در مثلث‌های ABD و ACD می‌توان نتیجه گرفت که $MP \parallel NQ$

پاسخ سؤال ۱۱: قطر BD را رسم می‌کنیم با استفاده از ویژگی (۳) در مساحت، $S_{AMN} = S_{BNC}$. پاره‌خط‌های BM و CO (O نقطه تلاقی دو قطر) دو میانه مثلث BDC می‌باشند در نتیجه،

$$S_{AMN} = S_{BNC} = \frac{۱}{۳}S(BCD) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} S_{ABCD} = \frac{۱}{۶} S_{ABCD}$$

کج‌فهمی‌ها و اشتباهات رایج

برخی از کج فهمی‌ها و اشتباهاتی که دانش‌آموز می‌تواند در این فصل با آنها روبه رو شود عبارت‌اند از :

۱ دانش آموز چهارضلعی‌ها و بسیاری از خواص آنها را در سنوات گذشته خوانده است، پس ممکن است در حل برخی مسائل مربوط به چهارضلعی‌ها با استفاده از دانسته‌های پیشین فرض‌هایی را در نظر بگیرد که هنوز برای آنها استدلالی ارائه نکرده است.

۲ هر چهار ضلعی که همه اضلاع آن با هم برابر است لوزی است که اشتباهاً مربع در نظر گرفته می‌شود.

۳ هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود است الزاماً لوزی نیست که دانش‌آموزان همیشه آن را لوزی در نظر می‌گیرند.

۴ دانش‌آموز مفهوم ارتفاع، میانه و نیمساز را درک نکرده است و آنها را با هم اشتباه می‌گیرد و با فرض‌هایی ناصحیح به حل مسائل می‌پردازد.

۵ در محاسبهٔ مساحت، به واحد اندازه‌گیری اضلاع و پاره‌خط‌ها و تبدیل واحدها دقت نمی‌شود.

معرفی منابع برای معلمان

۱ کتاب هندسه متوسطه، مبانی و مفهوم‌ها، نوشتهٔ محمود نصیری انتشارات مبتکران

۲ دایرةالمعارف هندسه، نوشته محمد هاشم رستمی جلد، انتشارات مدرسه وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

درس اول

چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

اهداف درس اول

۱ یادآوری رأس، ضلع و قطر و اضلاع مجاور و مقابل و زاویه‌های مجاور (اجزای چندضلعی)
۲ آشنایی با مفهوم چندضلعی و تشخیص آن
۳ محاسبه تعداد قطرهای یک n ضلعی
۴ تشخیص چندضلعی‌های محدب و مقعر
۵ تشخیص چهارضلعی‌های مهم و تعریف آنها
۶ آشنایی با برخی از ویژگی‌های چهارضلعی‌های مهم
۷ تشخیص چهارضلعی با استفاده از برخی از ویژگی‌های آن
۸ آشنایی با برخی از روش‌های استدلال برای درک برخی ویژگی‌های چهارضلعی‌ها
۹ آشنایی با نتیجه‌گیری منطقی در استدلال‌های هندسی
۱۰ استفاده از استدلال‌های معتبر و قابل اعتماد برای اثبات برخی از ویژگی‌های چهارضلعی‌ها.

روش تدریس درس اول

در ابتدای این درس مفهوم پاره‌خط و نقاط انتهایی آن یادآوری می‌گردد. دانش‌آموزان در کتاب ریاضی پایه هشتم از متوسطه اول تعریف ساده‌ای از چندضلعی را خوانده‌اند. در این قسمت چندضلعی به شکل دقیق‌تری تعریف می‌شود و برای درک بیشتر این تعریف چند مثال با حالت‌های مختلف برای جلوگیری از اشتباهات رایج و کج‌فهمی دانش‌آموزان ارائه می‌گردد. سپس مفاهیمی مانند ضلع، رأس، اضلاع مجاور و زاویه‌های مجاور و n ضلعی یادآوری می‌گردد. سپس تعریف قطر و تعدادی سؤال مطرح می‌گردد که دانش‌آموز با پاسخ به این سؤالات و مرحله به مرحله به‌صورت فعالیت محور به سمت دستیابی به فرمول محاسهٔ تعداد قطرهای یک n ضلعی هدایت می‌گردد. در کار در کلاس این قسمت تعداد پاره‌خط‌های بین

n نقطه‌ای که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط نباشد مطرح و رابطهٔ بین تعداد اضلاع و تعداد قطرها و تعداد پاره‌خط‌های بین این n نقطه (n رأس چندضلعی) بررسی می‌گردد و رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

تعداد اضلاع + تعداد قطرها = تعداد پاره‌خط‌ها

دانش‌آموز در پایه‌های قبلی با مفهوم چندضلعی‌های محدب و مقعر آشنا شده‌اند. در این قسمت تعریف مجدّدی از چندضلعی محدب و مقعر با روشی دیگر ارائه می‌گردد. در ادامهٔ این مبحث با یادآوری اضلاع مقابل و غیرمجاور با یادآوری تعریف چندضلعی‌های مهم پرداخته می‌شود. دانش‌آموز از دوران ابتدایی با این چهارضلعی‌ها آشنا شده است و برخی از ویژگی‌های آنها را نیز در دوران سه سالهٔ متوسطه اول آموخته است. در کار در کلاس این قسمت هدف این است که دانش‌آموز به‌صورت توضیحی، مانند آنچه در قسمت پ این سؤال ارائه شده است، هر قسمت را توضیح دهد. اما برای توسعه سطح دانش و آگاهی دانش‌آموزان می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا علاوه بر توضیح کلامی و فارسی‌نویسی، هر قسمت را مانند آنچه در کتاب ریاضی نهم دیده‌اند، هر قسمت را با عبارت‌های ریاضی و به‌صورت استدلال استنتاجی (بدون معرفی نام استدلال) و اثبات ریاضی بنویسند.

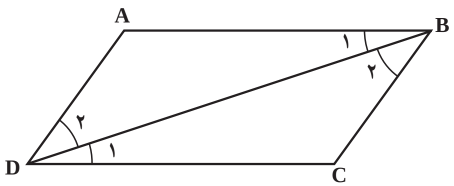
درادامه تعدادی از ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع به‌صورت قضیه و عکس قضیه مطرح می‌شوند که برای درک و فهم هرچه بیشتر این قضایا و اثبات آنها فعالیت‌هایی طراحی شده است که دانش‌آموز به‌صورت مرحله به مرحله، با پاسخ به پرسش‌هایی که قبل از هر قضیه یا عکس قضیه به‌صورتی هدفمند طراحی شده‌اند به نتیجه مطلوب یعنی دریافت مفهوم و مطلب هر قضیه یا عکس آن، خواهد رسید.

در فعالیت ۱، در متوازی‌الاضلاع از هم‌نهشتی دو مثلث به حالت (ز ض ز) و استفاده از قضیهٔ خطوط موازی و مورب که در کتاب ریاضی پایهٔ هشتم ارائه شده است، مطرح می‌گردد.

در کار در کلاس بعد از فعالیت ۱، از هم‌نهشتی مثلث‌ها و عکس قضیه خطوط موازی می‌توان به موازی بودن اضلاع روبه‌رو در چهارضلعی پی‌برد، یعنی :

$$\overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{فرض}}{\cong} \overset{\Delta}{CDB} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{طبق عکس قضیه}} AB \parallel CD \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{طبق عکس قضیه}} DA \parallel BC \end{cases} \Rightarrow$$

چهارضلعی ABCD که اضلاع مقابل آن دوبه‌دو با هم موازی هستند، متوازی‌الاضلاع است.



در فعالیت ۲، از قضیهٔ خطوط موازی و خط مورب $(\hat{B}_۲=\hat{C})$ و نیز زاویه‌های مکمل $(\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ)$ استفاده می‌شود و با ارائه یک سری پرسش‌های متوالی قضیهٔ ۲ به‌صورت نتیجه این فعالیت مطرح می‌شود و سپس با استفاده مجدّد از خطوط موازی و زاویه‌های مکمل عکس این قضیه ارائه می‌گردد. قضیه ۳ نیز می‌تواند دقیقاً مانند عبارت بالای آن به‌صورت مقابل اثبات گردد.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \hat{B}+\hat{A}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{A}\Rightarrow \hat{C}=\hat{A}$$

و عکس قضیه ۳ نیز به‌صورت زیر اثبات می‌گردد.

$$\begin{array}{l}\text{فرض}\\ \hat{A}=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{D}\end{array}\quad \underbrace{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ}_{\text{دانسته‌های قبلی}}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{A}+\hat{B}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۲\hat{A}+۲\hat{B}=۳۶۰^\circ$$

$$\hat{A}=\hat{C}\qquad \hat{B}=\hat{D}$$

$$\Rightarrow ۲(\hat{A}+\hat{B})=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰^\circ$$

بنابراین دو زاویهٔ مجاور مکمل یکدیگرند و به همین صورت ثابت می‌شود که $\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ است.

در فعالیت ۳ دو مثلث به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت هستند و مجدداً دانش‌آموز برای رسیدن به نتیجه فعالیت یعنی قضیه ۴ مرحله به مرحله راهنمایی شده است. در فعالیت ۴ دو مثلث به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند که با انجام این فعالیت و کامل نمودن جاهای خالی به نتیجه مطلوب (عکس قضیه ۴) خواهد رسید.

فعالیت ۵ برای رسیدن به نتیجه‌ای که در ادامهٔ آن آورده شده است، طراحی شده است. حالت هم‌نهشتی مثلث‌های مورد نظر (ض ز ض) می‌باشد. ولی برای رسیدن به این نتیجه دانش‌آموز می‌تواند هرکدام از حالت‌های (ض ض ض) و یا (ز ض ز) را برای هم‌نهشتی مثلث‌ها مطرح نماید. برای توسعهٔ بیشتر می‌توان این مسئله را با هر سه روش برای دانش‌آموزان مطرح نمود و یا از دانش‌آموزان بخواهیم که با توجه به فرض‌های مسئله، روش دیگری را برای هم‌نهشتی مثلث‌ها و رسیدن به نتیجه مطلوب ارائه دهند.

در قسمت ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی ابتدا از دانش‌آموزان می‌خواهیم با توجه به معلومات قبلی، ویژگی‌های خاص مستطیل و مربع را مطرح نمایند که باعث می‌شود این چهارضلعی‌ها از متوازی‌الاضلاع قابل شناسایی باشند. مانند برابری قطرها و زاویه‌های قائمه، که در ادامه این ویژگی‌ها به‌صورت پاسخ و پرسش‌های متوالی مطرح می‌گردند و برای توسعه بیشتر مطالب در این قسمت می‌توان هر کدام را به‌صورت جداگانه مطرح و استدلال نمود.

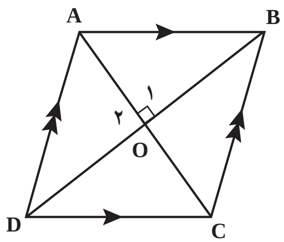
فعالیت ۶ یکی از فعالیت‌های مهم و پرکاربردی است که با پاسخ مرحله به مرحله به پرسش‌های آن، نتیجه

مهم مطلوب ارائه می گردد. در عکس ویژگی با توجه به اینکه AD=BC است و قطرها منصف یکدیگرند پس چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاعی از نوع مستطیل است. بنابراین زاویه A قائمه می‌باشد.

ویژگی‌هایی که فقط در لوزی و مربع برقرار هستند و باعث تشخیص آنها از متوازی‌الاضلاع و مستطیل می‌شوند عبارت‌اند از برابری اضلاع و عمود منصف بودن قطرهای آنها.

برای استدلال آوردن جهت اثبات ویژگی‌های لوزی استفاده از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین بسیار مؤثر است و می‌توان قبل از این قسمت جهت یادآوری از دانش‌آموزان پرسیده و یا برای آنها توضیح داده شود. ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین که در این قسمت مد نظر است عبارت است از اینکه، در این مثلث ارتفاع، میانه و نیمساز زاویه رأس روی یک خط واقع‌اند.

سؤال ۱ کار در کلاس :



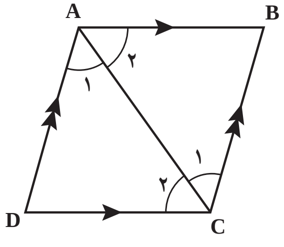
$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \ \text{فرض} \\ AD = BC \ \text{فرض} \\ AB = AD \end{array}\right\} \Rightarrow AB = BC = CD = AD$$

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ & \text{فرض} \\ OA = OA & \text{مشترک} \\ OB = OD & \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \underset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{OAD} \xRightarrow{\text{تساوی اجزا}}$$

بنابراین

چهارضلعی ABCD که دارای دو قطر عمود بر هم و چهار ضلع برابر است، لوزی می‌باشد.

سؤال ۲ کار در کلاس : فرض می‌کنیم قطر AC فقط نیمساز زاویه A باشد پس :



$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \underset{\text{(ض ض ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{ADC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزا}} \hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \ \text{فرض سؤال} \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_2 \ \text{فرض متوازی‌الاضلاع} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین}\ \overset{\Delta}{ADC} : AD = CD \\ \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین}\ \overset{\Delta}{ABC} : AB = BC \\ AB = CD \ \text{فرض متوازی‌الاضلاع} \end{array}\right\}$$

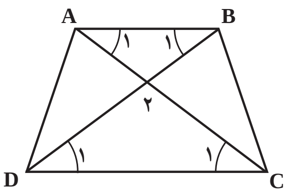
در نتیجه AB=BC=CD=AD بنابراین متوازی‌الاضلاعی که دارای چهار ضلع برابر باشد لوزی می‌باشد.

دانش‌آموز می‌تواند این استدلال‌ها را به‌صورت کلامی نیز بنویسد. هدف از این کار در کلاس دست‌ورزی و آوردن استدلال معتبر و قابل اعتماد برای اثبات برخی از ویژگی‌های لوزی می‌باشد.

سپس ذوزنقه با بیانی متفاوت از متوازی‌الاضلاع تعریف می‌شود و سپس اجزای ذوزنقه شامل قاعده‌ها و ساق‌ها معرفی می‌گردند سپس ذوزنقه متساوی‌الساقین و ذوزنقه قائم‌الزاویه مطرح و معرفی می‌گردند.

در فعالیت ۷ به اثبات برابری زاویه‌های مجاور به یک قاعده در ذوزنقه متساوی‌الساقین پرداخته می‌شود و سپس این مطلب به‌صورت نتیجه فعالیت مطرح می‌گردد و در ادامه مجدداً با استفاده از عکس روش بیان شده به نتیجه‌ای برعکس نتیجه قبلی خواهد رسید و سپس می‌توان به روش زیر ثابت نمود که در هر ذوزنقه متساوی‌الساقین قطرها اندازه‌های مساوی دارند.

دو مثلث ACD و BCD را در نظر می‌گیریم :

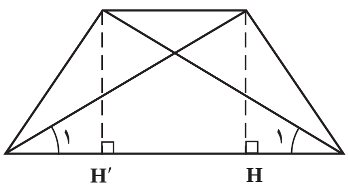


$$\left.\begin{array}{l} BC = AD \quad \text{فرض} \\ \hat{C} = \hat{D} \quad \text{فرض} \\ DC = DC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACD} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{BCD} \Rightarrow \text{تساوی اجزای متناظر } AC = BD \rightarrow \text{قطرها باهم مساوی‌اند}$$

و برای عکس آن ابتدا دو ارتفاع AH' و BH متناظر را رسم می‌کنیم و سپس :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AC = BD \\ AH' = BH \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{BHD} \overset{\text{(و ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{AH'C} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \\ DC = DC \\ AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADC} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{BDC} \Rightarrow \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{array} \Rightarrow$$

ذوزنقه متساوی‌الساقین است



درس دوم

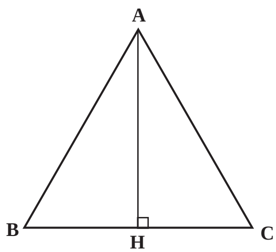
مساحت و کاربردهای آن

اهداف درس دوم

۱ یادآوری روش محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌ها شامل مثلث، مربع و مستطیل و … .
۲ آشنایی با روش محاسبهٔ مساحت چهارضلعی‌های دارای دو قطر عمود برهم.
۳ آشنایی با برخی ویژگی‌ها و نکات در مقایسهٔ مساحت دو یا چند مثلث و یا چهارضلعی.
۴ استفاده از ویژگی‌ها و نکات و شکل‌های هم‌مساحت برای محاسبهٔ مساحت برخی شکل‌ها و حل مسائل.
۵ استفاده از مساحت جهت استدلال برای اثبات برخی از ویژگی‌ها و نکات.
۶ آشنایی با نقاط و چندضلعی‌های شبکه‌ای.
۷ آشنایی با روش محاسبهٔ چندضلعی‌های شبکه‌ای.
۸ آشنایی با فرمول پیک برای محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای و شکل‌های نامنظم هندسی

روش تدریس درس دوم

درس دوم با یادآوری روش محاسبهٔ مساحت مثلث و چهارضلعی‌های مطرح شده در درس اول شامل مربع، مستطیل و متوازی‌الاضلاع و لوزی و ذوزنقه آغاز می‌شود. دانش‌آموز در دوره ابتدایی و دوره متوسطه اول با این مطالب آشنا شده است. کار در کلاس این صفحه نیز به نوعی یادآوری مطالبی است که دانش‌آموز در پایه نهم آن را خوانده است که قسمت اول آن مجدداً استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها در اثبات برخی از ویژگی‌هاست. مانند :



$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABH} \cong \overset{\Delta}{ACH}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BH = CH \rightarrow & \text{در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع همان میانه است} \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \rightarrow & \text{در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع همان نیمساز است.} \end{cases}$$

ــ و سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث رابطهٔ $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ و قراردادن آن در فرمول مساحت مثلث رابطهٔ $S=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ به‌راحتی به‌دست می‌آید.

در فعالیت اول این درس داریم :

$$\left.\begin{aligned} S_{ADB}&=\frac{۱}{۲}BD\times AH\\ S_{DBC}&=\frac{۱}{۲}BD\times CH\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_{ABCD}=S_{ADB}+S_{DBC}=\frac{۱}{۲}BD\times AH+\frac{۱}{۲}BD\times CH=$$

$$=\frac{۱}{۲}BD(AH+CH)=\frac{۱}{۲}BD\times AC=\text{نصف حاصل ضرب قطرها}$$

و نتیجه مطلوب برای تأکید در کادر رنگی زیر فعالیت مطرح می‌گردد.

ــ قسمت کاربردهایی از مساحت با یادآوری دو ویژگی که در فصل دوم (قضیه تالس) مطرح شده بود آغاز می‌گردد و کار در کلاس زیر آن نیز به نوعی دست‌ورزی برای استفاده از این ویژگی‌ها برای اثبات برابری مساحت‌های دو مثلث ایجاد شده با رسم یکی از میانه‌های هر مثلث دلخواه می‌باشد. برای حل این کار در کلاس کافی است ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را رسم کنیم. AH ارتفاع هر دو مثلث ABM و ACM است و چون $BM=CM$ است پس دو مثلث دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند پس مساحت‌های برابری دارند. برای هر نقطه دلخواه مانند F روی میانهٔ AM نیز می‌توان به همین شیوه استدلال نمود.

ــ فعالیت دوم این درس با استفاده از عکس قضیه تالس و ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع که در فصل دوم و نیز در درس قبلی بیان شده‌اند به ارائه یک مطلب از کاربردهای مساحت می‌پردازد. می‌توان از روش زیر استفاده نمود :

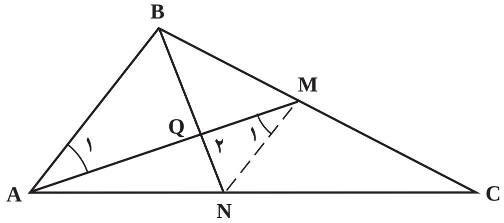
$$\frac{AP}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow[\text{قضیه تالس}]{\text{طبق عکس}}PN\parallel BC$$

و به همین شیوه می‌توان ثابت نمود که $PM\parallel AC$ و $MN\parallel AB$ است.

ــ بنابراین چهارضلعی‌های APMN و BPNM و PNCM متوازی‌الاضلاع هستند و در درس گذشته و سال‌های قبل دیدیم که قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند. بنابراین با انجام این فعالیت نتیجه متعاقب آن به راحتی قابل درک خواهد شد.

ــ فعالیت سوم این درس با استفاده از ویژگی میانه‌ها و استفاده از قضیه تالس با پرسش‌های متوالی و توسعه سطح آگاهی‌ها و اطلاعات قبلی دانش‌آموز به ارائه مطلبی مهم می‌پردازد که لازم است چرایی مرحله به مرحلهٔ این فعالیت برای دانش‌آموزان توضیح داده شود تا دانش‌آموز به جای حفظ و به‌خاطرسپاری ویژگی، آن را درک

نماید. روش اول به آسانی با پیگیری فعالیت قابل درک است و روش دوم به‌صورت زیر می‌باشد.



$$\frac{CM}{CB}=\frac{CN}{CA}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow MN\parallel BC \qquad \begin{cases}\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \text{مورب}\quad AM\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{M}_{۱}=\hat{A}_{۱}\\ \hat{G}_{۱}=\hat{G}_{۲}\end{matrix}\right\}\Rightarrow C\overset{\Delta}{M}N\cong A\overset{\Delta}{B}G\Rightarrow\frac{GM}{AG}=\frac{GN}{BG}=\frac{MN}{AB}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{GM}{AM}=\frac{GN}{BN}=\frac{۱}{۳}$$

در مورد میانهٔ وارد بر ضلع AB نیز می‌توان به همین شیوه عمل نمود.

و بعد از نتیجه‌گیری بیان شده، دانش‌آموز با استفاده از آنچه در کار در کلاس اول این درس آموخته است و با یک نام‌گذاری سادهٔ x و y و z و مساوی قرار دادن مساحت‌های دو مثلث هم‌نهشت به این نتیجه خواهد رسید که وقتی میانه‌های وارد بر اضلاع هر مثلث دلخواهی را رسم کند مثلث به ۶ مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌شود. یعنی ۶ مثلث ایجاد شده، هم‌مساحت هستند.

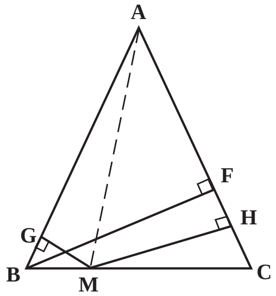
ــ در ویژگی ۳ با استفاده از این نکته که فاصلهٔ بین دو خط موازی همیشه ثابت است می‌توان دو ارتفاع AH و BH' را رسم نمود به‌طوری که :

$$AH=BH'\rightarrow\begin{cases}S_{ADC}=\frac{۱}{۲}DC\times AH\Rightarrow S_{AOD}=S_{ADC}-S_{DOC}\\ S_{BDC}=\frac{۱}{۲}DC\times BH'\Rightarrow S_{BOC}=S_{BDC}-S_{DOC}\end{cases}$$

درنتیجه‌چون $S_{ADC}=S_{BDC}$ پس $S_{ADC}-S_{DOC}=S_{BDC}-S_{DOC}$ بنابراین $S_{AOD}=S_{BOC}$

و به همین شکل می‌توان مسئله دو مزرعهٔ I و II را حل نمود به‌طوری که :

$$S_{AFC}=S_{ABC}\Rightarrow S_{AFC}-S_{AOC}=S_{ABC}-S_{AOC}\Rightarrow S_{OFC}=S_{OAB}$$

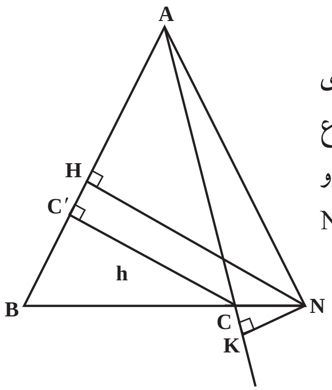


قسمت اول فعالیت چهارم این درس به روش زیر قابل توضیح می‌باشد.

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BF \qquad S_{AMB}=\frac{۱}{۲}AB\times MG=\frac{۱}{۲}AC\times MG$$

$$S_{AMC}=\frac{۱}{۲}AC\times MH \rightarrow S_{ABC}=S_{AMB}+S_{AMC}\Rightarrow$$

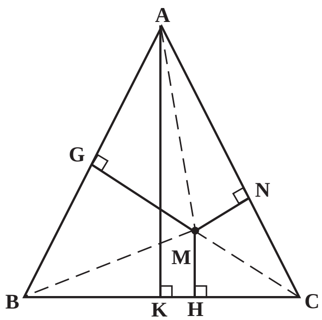
$$\frac{۱}{۲}AC\times BF=\frac{۱}{۲}AC\times(MG+MH)\Rightarrow BF=MG+MH$$



ـ پس می‌توان نتیجه گرفت که مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر است با اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق. در قسمت دوم این فعالیت با استفاده از شکل روبه‌رو می‌خواهیم ثابت کنیم که $|NH-NK|=h$ ابتدا رأس A را به نقطه N وصل می‌کنیم و سپس داریم :

$$S_{ANB}=S_{ABC}+S_{ANC}\Rightarrow S_{ABC}=S_{ANB}-S_{ANC}$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{۱}{۲}AB\times NH=\frac{۱}{۲}AB\times h+\frac{۱}{۲}AC\times NK\\ AB=AC\end{array}\right\}\Rightarrow NH=h+NK\Rightarrow |NH-NK|=h$$



در فعالیت پنجم همان‌طور که بیان شده است با اتصال نقطه M به سه رأس مثلث، سه مثلث ایجاد می‌گردد که جمع مساحت آنها برابر با مساحت کل مثلث است پس : $AB=BC=AC$ فرض

$$\left.\begin{array}{l}S_{AMB}=\frac{۱}{۲}AB\times MG\\ S_{AMC}=\frac{۱}{۲}AC\times MN\\ S_{BMC}=\frac{۱}{۲}BC\times MH\end{array}\right\}\Rightarrow S_{AMB}+S_{AMC}+S_{BMC}=S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times MG+\frac{۱}{۲}AC\times MN+\frac{۱}{۲}BC\times MH=\frac{۱}{۲}BC\times AK$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB(MG+MN+MH)=\frac{۱}{۲}AB\times AK \Rightarrow MG+MN+MH=AK$$

و نتیجه زیر فعالیت حاصل می‌گردد. البته در ابتدای همین درس در کار در کلاس اول یادآوری نمودیم که $AK=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و در ادامهٔ این فعالیت سؤالی برای دست‌ورزی مطرح شده است که در آن :

$$AK=۲+۴+۶=۱۲\Rightarrow \frac{a\sqrt{۳}}{۲}=۱۲\Rightarrow a=\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲۴\sqrt{۳}}{۳}=۸\sqrt{۳}$$

در نقاط شبکه‌ای و مساحت ابتدا تعریفی از نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌های شبکه‌ای ارائه می‌گردد و سپس نقاط مرزی و نقاط درونی شبکه‌ای معرفی می‌گردند و سپس در فعالیت ششم با توجه به تعریف چندضلعی که در ابتدای این فصل ارائه گردید حداقل نقاط مرزی (یعنی ۳) و حداقل نقاط درونی (یعنی صفر) مورد سؤال قرار می‌گیرد و سپس مجموعه جدول‌ها و سؤالاتی جهت محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای با ترتیب نقاط درونی صفر و یک و دو و ... به‌صورت مرحله به مرحله طراحی شده‌اند که دانش‌آموز با پاسخ به آنها می‌تواند به رابطهٔ $S=\frac{b}{۲}-۱+i$ دست یابد که از این رابطه به‌طور گسترده‌ای برای محاسبهٔ شکل‌های نامنظم هندسی استفاده می‌شود.

در کار در کلاس اول که زیر همین فعالیت قرار دارد دانش‌آموز با محاسبهٔ مساحت هر چندضلعی با دو روش (استفاده از فرمول پیک b و c و استفاده از فرمول محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌ها) عملاً به دست‌ورزی استفاده از این رابطه می‌پردازد و به برابری مساحت محاسبه شده در هر دو روش پی‌خواهد برد و در کار در کلاس آخر هدف این است که علاوه بر دست‌ورزی، دانش‌آموز به کاربرد این رابطه برای محاسبه مساحت شکل‌های نامنظم پی‌ببرد و بفهمد که هرچه واحدها را کوچک‌تر درنظر بگیرد تعریف دقیق‌تری محاسبه می‌شود.

حل تمرین‌های فصل سوم (درس اول)

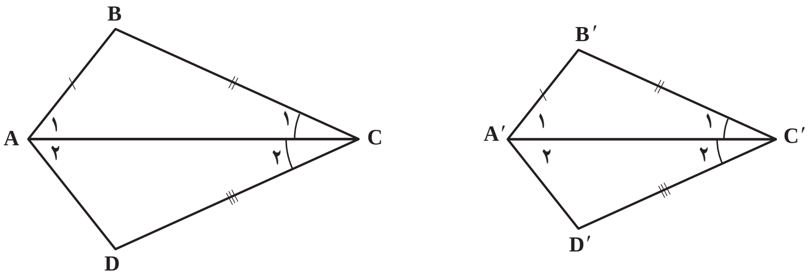
تمرین ص ۶۳

۱

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = n \rightarrow n(n-۳) = ۲n \rightarrow n^{۲} - ۳n - ۲n = ۰$$

$$\rightarrow n^{۲} - ۵n = ۰ \rightarrow n(n-۵) = ۰ \rightarrow \begin{cases} n = ۰ & \text{غ‌قق} \\ n-۵ = ۰ \rightarrow \boxed{n = ۵} \rightarrow & \text{در پنج‌ضلعی} \end{cases}$$

۲ الف)



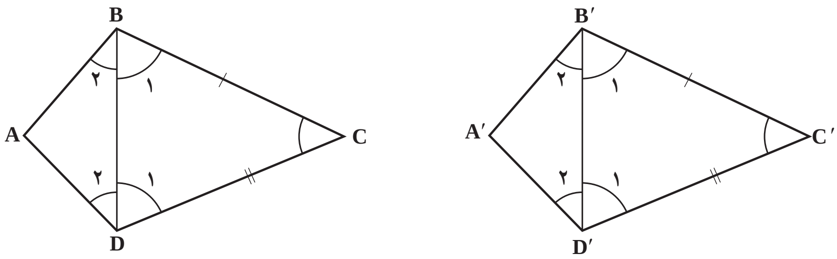
$$①\begin{cases} \hat{C} = \hat{C}' \\ \downarrow \\ \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = \hat{C}'_۱ + \hat{C}'_۲ \xrightarrow{\hat{C}_۱ = \hat{C}'_۱} \hat{C}_۲ = \hat{C}'_۲ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \begin{cases} AC = A'C' \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}'_۱ & \rightarrow \\ \hat{C}_۱ = \hat{C}'_۱ & \overset{①}{\rightarrow} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} CD = C'D' \\ AC = A'C' \\ \hat{C}_۲ = \hat{C}'_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACD} \cong \overset{\Delta}{A'C'D'} \Rightarrow$$

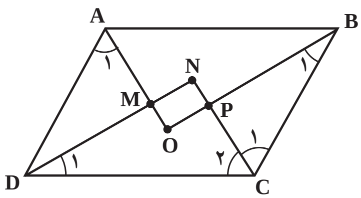
$$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \begin{cases} AD = A'D' \\ \hat{D} = \hat{D}' \\ \hat{A}_۲ = \hat{A}'_۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}'_۱ \\ \hat{A}_۲ = \hat{A}'_۲ \\ \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{A}'_۱ + \hat{A}'_۲ \Rightarrow \boxed{\hat{A} = \hat{A}'} \end{cases}$$

ب)



قطرهای BD و B′D′ را در دو چهار ضلعی رسم می‌کنیم. دو مثلث BDC و B′D′C′ بنابر، ض‌ـز‌ـض هم‌نهشت پس $\angle B_{۱} = \angle B'_{۱}$ و $\angle D_{۱} = \angle D'_{۱}$ چون $\angle D$ و $\angle D'$ اندازه‌های مساوی دارند پس $\angle B'_{۲} = \angle B_{۲}$ و $\angle D'_{۲} = \angle D_{۲}$ و $BD=B'D'$ چرا؟ در نتیجه، دو مثلث ABD و A′B′D′ بنابر، ز‌ـض‌ـز هم‌نهشت‌اند و در نتیجه $AB=A'B'$، $AD=A'D'$ و $\angle A = \angle A'$.

۳



$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_{۱}+\hat{C}_{۱}=۹۰^\circ \Rightarrow B\overset{\Delta}{P}C : \hat{P}=۹۰^\circ$$

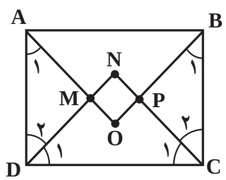
و به صورت مشابه ثابت می‌شود که $\hat{M}=۹۰^\circ$ است.

$$\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{۲}+\frac{\hat{D}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_{۱}+\hat{C}_{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow D\overset{\Delta}{N}C : \hat{N}=۹۰^\circ$$

و به صورت مشابه ثابت می‌شود که $\hat{O}=۹۰^\circ$ است.

بنابراین در چهارضلعی MNPO همهٔ زاویه‌ها قائمه هستند پس این چهارضلعی یک مستطیل است.

ــ طبق قسمت بالا می‌توان ثابت کرد که در مستطیل مقابل $\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}=\hat{O}=۹۰^\circ$ است.



$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = ۴۵^\circ \\ \hat{D}_۲ = \hat{C}_۲ = ۴۵^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{D}_۱ + \hat{C}_۱ = ۴۵^\circ \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \Delta DNC \Rightarrow DN = NC \\ \overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{BPC} \longrightarrow DM = PC \end{array}\right\} \Rightarrow DN - DM = NC - PC \Rightarrow \Rightarrow \boxed{MN = NP} \quad ①$$

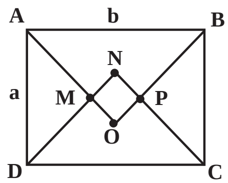
دو مثلث AOB و DNC نیز به حالت (زض ز) باهم، هم‌نهشت هستند پس $DN = AO$ می‌باشد و از طرفی مثلث AMD متساوی‌الساقین است پس $AM = DM$ پس می‌توان نوشت :

$$AO - AM = DN - DM \Rightarrow \boxed{OM = MN} \quad ②$$

③

و به‌صورت مشابه می‌توان ثابت نمود که $PN = PO$ است.

ـ بنابراین طبق ۱ و ۲ و ۳ می‌توان گفت چهارضلعی MNPO چهار زاویهٔ قائمه دارد و چهار ضلع آن باهم برابر است پس این چهارضلعی یک مربع است.

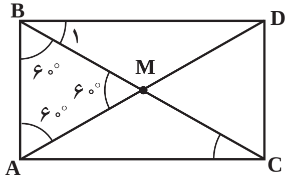


۴ مثلث‌های AMD و AOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند پس :

$$\left.\begin{array}{l} AM = DM \Rightarrow AM^۲ + DM^۲ = AD^۲ \Rightarrow ۲AM^۲ = a^۲ \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a \\ AO = BO \Rightarrow AO^۲ + BO^۲ = AB^۲ \Rightarrow ۲AO^۲ = b^۲ \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{۲}}{۲}b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$OM = AO - AM \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}b - \frac{\sqrt{۲}}{۲}a \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(b-a)$$

بنابراین اندازهٔ اضلاع مربع حاصل از برخورد نیمسازهای درونی مستطیل به طول b و عرض a برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(b-a)$ است با



۵ **روش اول :** پاره‌خط AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه D مشخص شود چون $AM = MD$ و $BM = MC$، بنابراین چهارضلعی ABDC که قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع مذکور اگر BC خط

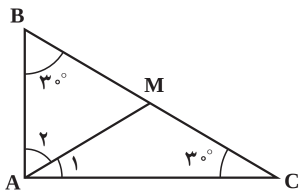
مورب باشد، $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = ۳۰^\circ$ و $\hat{B}_۲ = \hat{C}_۲ = ۶۰^\circ$. بنابراین $\hat{B} = \hat{C} = ۹۰^\circ$ و متوازی‌الاضلاعی که یک زاویهٔ ۹۰ درجه داشته باشد مستطیل است. بنابراین در مستطیل ABDC قطرها باهم برابر و منصف یکدیگرند یعنی $AD = BC$ و $BM = MC = AM = MD$ و در مثلث متساوی‌الاضلاع ABM داریم و $AB = BM = AM$ (مثلث ABM دارای سه زاویهٔ ۶۰° می‌باشد) پس :

$$BC = BM + MC \xrightarrow{BM=MC} BC = ۲BM \Rightarrow \boxed{BM = \frac{BC}{۲}}$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است.

$$\left.\begin{array}{l} BM = \dfrac{BC}{۲} \\ AP = BM \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{AB = \frac{BC}{۲}}$$

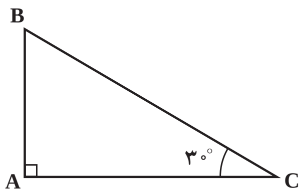
روش دوم :



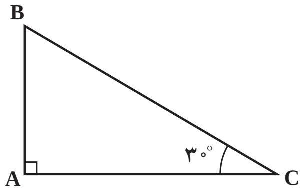
$$\left.\begin{array}{r}\text{میانه وارد بر وتر} \\ \text{نصف وتر است.}\end{array}\right\} \Rightarrow AM = MC \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_۱ = ۳۰^\circ \\ \hat{A}_۲ = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \end{cases}$$

$$\text{متساوی‌الاضلاع است} \Rightarrow AB = BM = \frac{BC}{۲}$$

روش سوم : قرینه مثلث ABC را نسبت به ضلع AC رسم می‌کنیم. در مثلث $BB'C$ چون $\hat{B} - \hat{B'} = ۶۰^\circ$ پس $\hat{C} = ۶۰^\circ$ بنابراین مثلث $BB'C$ متساوی‌الاضلاع است. یعنی $BB' = BC$ و در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع CA میانهٔ BB' نیز هست پس $AB = \frac{BB'}{۲} = \frac{BC}{۲}$

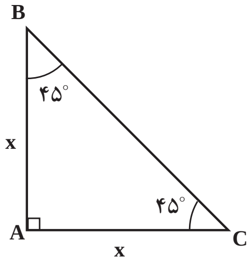


رابطه فیثاغورس $BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow AC^۲ = BC^۲ - AB^۲ = BC^۲ - (\frac{BC}{۲})^۲ =$
$BC^۲ - \frac{BC^۲}{۴} = \frac{۳BC^۲}{۴}$



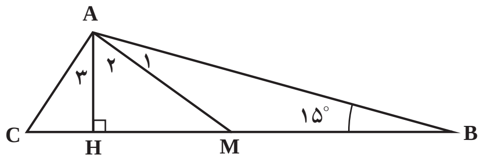
$$AC=\sqrt{\frac{۳BC^{۲}}{۴}}\Rightarrow \boxed{AC=\frac{\sqrt{۲}}{۲}BC}$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های آن ۴۵° باشد، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس :



رابطه فیثاغورس $x^{۲}+x^{۲}=BC^{۲}\Rightarrow ۲x^{۲}=BC^{۲}\Rightarrow x^{۲}=\frac{BC^{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{BC}{\sqrt{۲}}\Rightarrow \boxed{x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}BC}$

۶ با توجه به پاسخ سؤال ۵ می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است یعنی $AM=\frac{۱}{۲}BC$



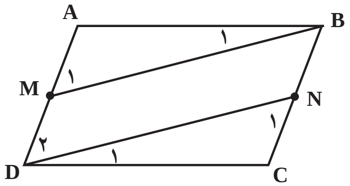
$$AM=BM\Rightarrow \hat{A}_{۱}=۱۵^\circ$$

ضلع مقابل به زاویه ۳۰°

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=۹۰^\circ\\ B=۱۵^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=۷۵^\circ\Rightarrow \hat{A}_{۳}=۱۵^\circ\ \Bigg\}\Rightarrow \hat{A}_{۲}=۶۰^\circ\Rightarrow \hat{M}_{۱}=۳۰^\circ\Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}AM$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}AM\\ AM=\frac{۱}{۲}BC\end{array}\right\}\Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}BC)\Rightarrow \boxed{AH=\frac{۱}{۴}BC}$$

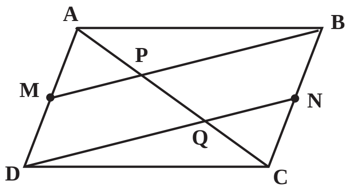
۷



$$AD = BC \rightarrow \frac{۱}{۲}AD = \frac{۱}{۲}BC \Rightarrow$$

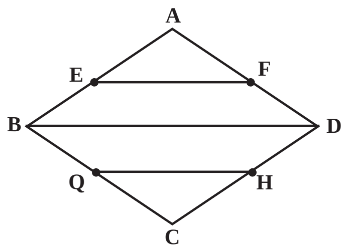
$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AM = CN \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overset{(\text{ض ز ض})}{\Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{CND}} \Rightarrow \\ AD \| BC \xrightarrow{\text{خط مورب } DN} \end{array} \left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ \\ \hat{N}_۱ = \hat{D}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{D}_۲$$

بنابراین طبق عکس قضیه خطوط موازی نتیجه می‌گیریم که : $MB \| DN$



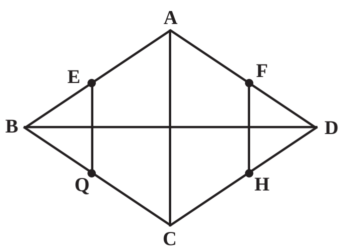
$$DN \| BM \left\{\begin{array}{l} \Rightarrow QN \| BP \xrightarrow[\text{در مثلث } BPC]{\text{طبق قضیه تالس}} \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{QC}{PQ} = ۱ \Rightarrow PQ = QC \\ \Rightarrow MP \| DQ \xrightarrow[\text{در مثلث } ADQ]{\text{طبق قضیه تالس}} \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{AP}{PQ} = ۱ \Rightarrow AP = PQ \end{array}\right.$$

و در نتیجه $AP = PQ = QC$



۸ چهارضلعی دلخواه ABCD را درنظر می‌گیریم و نقاط E و F و G و H را وسط اضلاع آن اختیار می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{lll}AB & \text{وسط} & E\\ AD & \text{وسط} & F\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} EF\parallel BD\\ \left.\begin{array}{lll}CD & \text{وسط} & H\\ BC & \text{وسط} & G\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{CH}{CD}=\dfrac{CG}{CB}=\dfrac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} GH\parallel BD\end{array}\right\}\Rightarrow EF\parallel GH$$



و به‌طور مشابه و با درنظر گرفتن شکل مقابل می‌توان ثابت نمود که $EG\parallel FH$ بنابراین در چهارضلعی EFHG اضلاع مقابل باهم موازی‌اند. پس چهارضلعی EFHG متوازی الاضلاع است.

ـ اگر دوقطر چهارضلعی ABCD هم‌اندازه باشند، چهارضلعی حاصل لوزی است.

ـ اگر دو قطر چهارضلعی ABCD برهم عمود باشند، چهارضلعی حاصل مستطیل است.

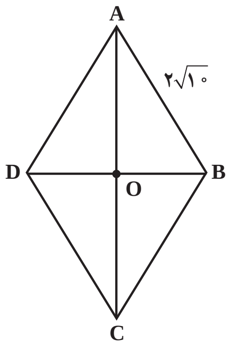
ـ محیط متوازی‌الاضلاع حاصل برابر است با مجموع اندازه قطرهای چهارضلعی اصلی چون طبق قضیه تالس و عکس آن می‌توان نوشت :

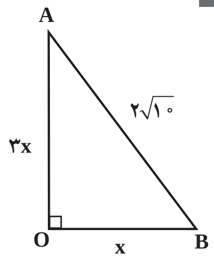
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{EG}{AC}=\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{FH}{AC}\Rightarrow EG+FH=AC\\ \dfrac{EF}{BD}=\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{GH}{BD}\Rightarrow EF+GH=BD\end{array}\right\}\Rightarrow EG+FH+EF+GH=AC=BD$$

حل تمرین‌های فصل سوم (درس دوم)

تمرین ص ۷۲

۱



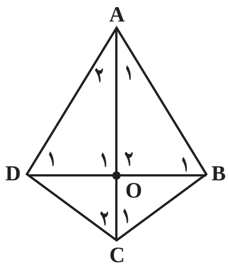


$$\frac{BD}{AC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}BD}{\frac{۱}{۲}AC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{OB}{OA}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow$$

$$x^{۲}+(۳x)^{۲}=(۲\sqrt{۱۰})^{۲}\Rightarrow x^{۲}+۹x^{۲}=۴۰\Rightarrow ۱۰x^{۲}=۴۰\Rightarrow x^{۲}=\frac{۴۰}{۱۰}=۴\Rightarrow x=۲$$

$OA=۳x=۳\times۲=۶\rightarrow AC=۱۲$ و $BD=۲\times۲=۴\Rightarrow S=\frac{AC\times BD}{۲}=\frac{۱۲\times۴}{۲}=۲۴$

۲



$\left.\begin{array}{l}AB=AD\\BC=DC\\AC=AC\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{ADC}$ (ض ض ض) $\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\\hat{C}_۱=\hat{C}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow$ AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است

AD=AB → متساوی‌الساقین است $\overset{\Delta}{ABD}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\\hat{B}_۱=\hat{D}_۱\\AB=AD\end{array}\right\}\Rightarrow\overset{\Delta}{OAB}\cong\overset{\Delta}{OAD}\Rightarrow$ (ز ض ز)

$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\Rightarrow\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\hat{O}_۱=۱۸۰^\circ\\\Rightarrow\hat{O}_۲=\hat{O}_۱=۹۰^\circ\\OB=OD\Rightarrow\end{array}\right.$ AC عمودمنصف BD است

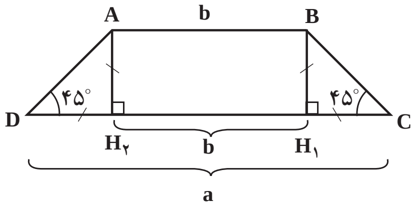
پس $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \hat{O}_۳ = \hat{O}_۴ = ۹۰^\circ$ یعنی دو قطر AC و BD بر هم عموداند. پس :

$$S = \frac{AC \times BD}{۲} = \frac{۶ \times ۸}{۲} = ۲۴$$

۳ چون در هر دو متوازی‌الاضلاع قاعده‌ها برابر AB و ارتفاع‌ها برابر با فاصلهٔ دو خط موازی است بنابراین

$S_۱ = S_۲ = AB \times h = S$

۴

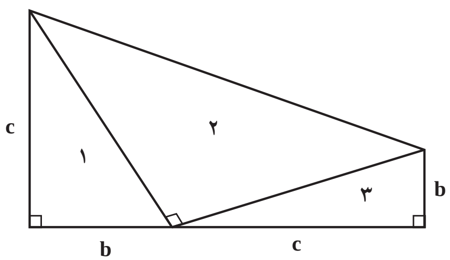


$AD=BC$ و $AH_۱=AH_۲=CH_۲=DH_۱= \dfrac{a-b}{۲}$

$$S = \frac{(DC+AB)AH_۱}{۲} = \frac{(a+b)(\frac{a-b}{۲})}{۲} = \frac{\frac{۱}{۲}(a+b)(a-b)}{۲}$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۴}(a^۲ - b^۲)$$

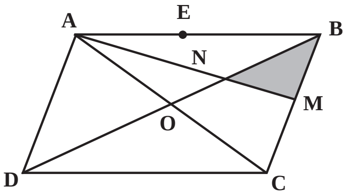
۵



$$S_{ذوزنقه} = S_{\Delta_۱} + S_{\Delta_۲} + S_{\Delta_۳} = \frac{۱}{۲}bc + \frac{۱}{۲}a^۲ + \frac{۱}{۲}bc = \frac{۱}{۲}(a^۲ + ۲bc)$$

$$S_{ذوزنقه} = \frac{۱}{۲}(b+c)(b+c) = \frac{۱}{۲}(b^۲ + c^۲ + ۲bc)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(a^۲ + ۲bc) = \frac{۱}{۲}(b^۲ + c^۲ + ۲bc) \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow$$ قضیه فیثاغورس



۶ از C به N وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا AB را در E قطع کند. چون نقطه N محل همرسی میانه‌هاست پس :

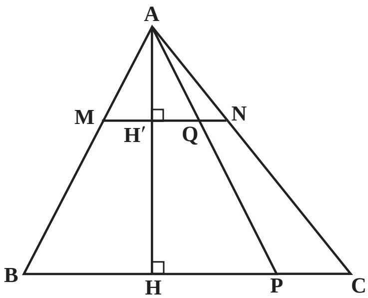
O میانهٔ AC است

M میانهٔ BC است.

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{BMN}}=\frac{۱}{۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD} \end{array}\right\}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BMN}}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}S_{ABCD}=\frac{۱}{۱۲}S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{BMN}}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۱۲}$$

۷



$$\frac{AM}{BM}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{QN}{PC}=\frac{AH'}{AH}=\frac{MQ}{BP}=\frac{۱}{۳}$$

اگر QN=x درنظر بگیریم آنگاه داریم : AH′=x و AH=۳x و PC=۳x

$$\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{QN}{MQ}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\begin{cases} QN=x\Rightarrow MQ=۳x \\ PC=۳x\Rightarrow PB=۹x \end{cases}$$

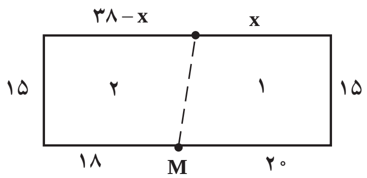
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AQN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}QN.AH'}{\frac{۱}{۲}BC.AH}=\frac{\frac{۱}{۲}x.x}{\frac{۱}{۲}\underbrace{(۳x+۹x)}_{۱۲x}.۳x}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\cancel{x}^{۲}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}۳۶\cancel{x}^{۲}}=\frac{۱}{۳۶}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{\overset{\Delta}{ABP}} &= \frac{۱}{۲}BP.AH = \frac{۱}{۲}۹x.۳x = \frac{۱}{۲}(۲۷x^{۲}) \\ S_{\overset{\Delta}{AMQ}} &= \frac{۱}{۲}MQ.AH' = \frac{۱}{۲}۳x.x = \frac{۱}{۲}(۳x^{۲}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{MQPB} = S_{APB} - S_{AMQ}$$

$$\Rightarrow S_{MQPB} = \frac{۱}{۲}(۲۷x^{۲}) - \frac{۱}{۲}(۳x^{۲}) = \frac{۱}{۲}(۲۴x^{۲})$$

$$\frac{S_{MQPB}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}(۲۴\cancel{x^{۲}})}{\cancel{\frac{۱}{۲}}(۳۶\cancel{x^{۲}})} = \frac{۲۴}{۳۶} = \frac{۲}{۳}$$

۸



$$S_{۱} = \frac{۱}{۲}(۲۰ + x) \times ۱۵$$

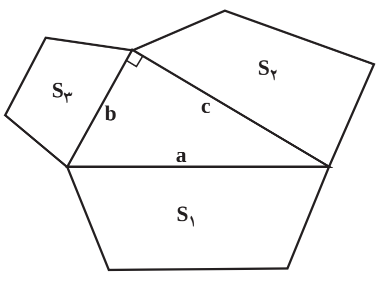
$$S_{۲} = \frac{۱}{۲}(\overset{۵۶-x}{-۳۸ - x} + ۱۸) \times ۱۵$$

$$S_{۱} = S_{۲} \Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}}(۳۰۰ + ۱۵x) = \cancel{\frac{۱}{۲}}(۸۴۰ - ۱۵x)$$

$$\Rightarrow ۳۰۰ + ۱۵x = ۸۴۰ - ۱۵x \Rightarrow \overset{۳۰x}{۱۵x + ۱۵x} = ۸۴۰ - ۳۰۰ = ۵۴۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۵۴۰}{۳۰} = ۱۸$$

۹ در هر مثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ فیثاغورث برقرار است یعنی داریم : $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$



فرض کنیم سه چندضلعی متشابه ساخته شده به مساحت‌های $S_{۱}$ و $S_{۲}$ و $S_{۳}$ باشند. می‌دانیم نسبت مساحت دو چند ضلعی متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن است پس $\frac{S_{۲}}{S_{۱}} = \frac{c^{۲}}{a^{۲}}$ و $\frac{S_{۳}}{S_{۱}} = \frac{b^{۲}}{a^{۲}}$ در نتیجه،

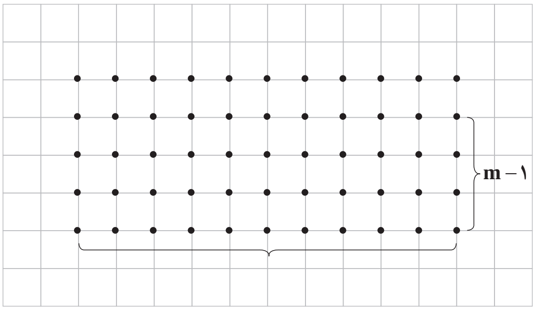
$$\frac{S_۳}{S_۱}+\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{b^۲}{a^۲}+\frac{c^۲}{a^۲}\Rightarrow\frac{S_۳+S_۲}{S_۱}=\frac{b^۲+c^۲}{a^۲}=۱\Rightarrow S_۱=S_۲+S_۳$$

۱۰ چند ضلعی بزرگ‌تر $S=\frac{۹}{۲}-۱+۱۳=\frac{۷}{۲}+۱۳$ $\qquad$ $S=\frac{b}{۲}-۱+i$

چند ضلعی کوچک‌تر $S=\frac{۵}{۲}-۱+۳=\frac{۳}{۲}+۳$

مساحت قسمت سایه زده شده= S چند ضلعی بزرگ‌تر − S چند ضلعی کوچک‌تر $=\frac{۷}{۲}+۱۳-\frac{۳}{۲}-۳=\frac{۴}{۲}+۱۰=۲+۱۰=۱۲$

۱۱



اندازه طول مستطیل n واحد است پس روی هر طول مستطیل n+۱ نقطه داریم، در عرض نیز همین‌گونه است یعنی m+۱ نقطه روی هر عرض داریم اما دو نقطه آن قبلاً در هر قسمت محاسبه شده است پس m−۱ نقطه روی عرض می‌ماند در نتیجه تعداد نقاط مرزی مستطیل برابر است با

b=۲(n+۱)+۲(m−۱)=۲n+۲m اما برای محاسبه نقطه‌های درونی ستون اول و آخر را کنار می‌گذاریم n−۱ ستون داریم که روی هر یک m−۱ نقطه است پس، i=(n−۱)(m−۱) پس

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۲n+۲m}{۲}+(n-۱)(m-۱)-۱=n+m+mn-n-m+۱-۱=mn=S_{\text{مستطیل}}$$

۱۲

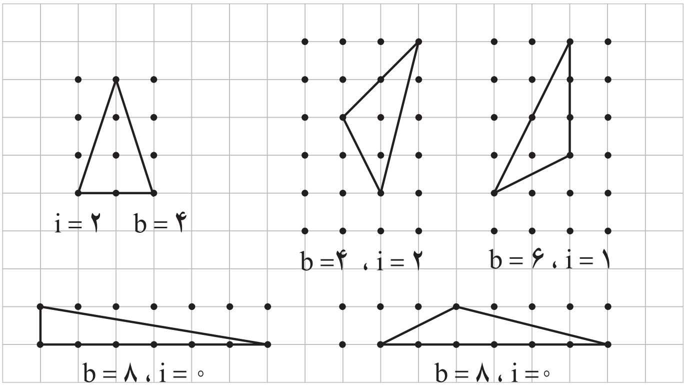
$$\frac{b}{۲}+i-۱=۳\Rightarrow b+۲i=۸$$

پس $b\geq ۳$ و $i\geq ۰$ در نتیجه، $۸-b\geq ۰$ بنابراین $۳\leq b\leq ۸$ چون $b=۲(۴-i)$ پس باید b زوج نیز باشد در نتیجه b فقط می‌تواند سه مقدار ۸، ۶، ۴ را اختیار کند.

پس i نیز محاسبه می‌شود.

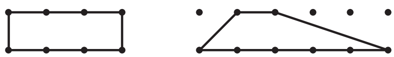
b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰

می‌توانیم تعدادی را رسم کنیم مثلاً سه ضلعی‌ها به‌صورت زیر می‌توانند باشند.

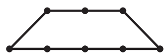


می‌توانید رأس بالا را روی هر یک از نقاط بالایی ضلع قرار دهید

وقتی نقاط مرزی بیشترین مقدار را دارد که b=۸ و i=۰، سه چهارضلعی نظیر آن به‌صورت زیر است.



با تغییر دو نقطه بالایی می‌توانید ذوزنقه‌های دیگری نیز رسم کنید.



فصل ۴

تجسم فضایی

نگاه کلی به فصل

آشنایی با شکل‌های فضایی از کتاب ریاضی پنجم ابتدایی با طرح دستور محاسبهٔ حجم مکعب مستطیل آغاز شده و دانش‌آموزان به تدریج نسبت به انواع شکل‌های فضایی هندسی مثل حجم‌های منشوری، حجم‌های کروی و حجم‌های هرمی شناخت پیدا کرده‌اند و دستور محاسبهٔ مساحت جانبی و مساحت کل و حجم آنها را آموخته‌اند.

همچنین رابطه بین سطح و حجم و دوران حول محور سطح را که منجر به ساخته شدن یک حجم فضایی می گردد فرا گرفته‌اند، گسترده یک شکل فضایی را می‌شناسند و با تشخیص نماهای مختلف یک جسم هندسی آشنا هستند.

در کتاب ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه تعریف کره، استوانه، هرم و مخروط بیان شده و دانش‌آموزان کمابیش دستور محاسبه حجم و مساحت جانبی و مساحت کل این شکل‌ها را به‌صورت تجربی فرا گرفته‌اند. همچنین بحث گسترده شکل‌های فضایی مطرح شده و دوران حول محور در شکل‌های مختلف تکرار شده و حجم‌های ساخته شده توسط آن موردبررسی قرار گرفته‌است. در پایان مبحث هندسه فضایی نیز بحث برش مقطعی شکل‌های فضایی مطرح گردیده است. در کتاب هندسه پایه دهم دوره دوم متوسطه، هندسه فضایی از مفاهیم تعریف نشده (نقطه، خط، صفحه) به‌عنوان مفاهیمی که ساختمان اصلی هندسه را می‌سازند آغاز شده و طرح مبحث حالت‌های مختلف دو خط، حالت‌های مختلف خط و صفحه و حالت‌های مختلف دو صفحه در فضا ادامه می‌یابد.

در ادامهٔ آن مفهوم تعامد بررسی شده و مفهوم عمود بودن خط بر صفحه،و دو صفحه عمود بر هم مطرح گردیده است. در درس دوم این فصل، برای آشنایی دانش‌آموزان و همچنین تقویت دید فضایی آنها در مراحل بالاتر تحصیلی، به ویژه در دانشجویان رشته‌های فنی و مهندسی، مبحثی با عنوان تفکر تجسمی گنجانده شده است و هدف از آن تقویت تجسم فضایی در دانش‌آموزان می‌باشد.

این درس شامل سه قسمت است. در بخش اول دید از جهات مختلف و رسم نماهای مختلف یک شکل فضایی مطرح شده که دانش‌آموز از پایه هفتم با آن آشنا شده است.

در بخش دوم، برش زدن یک شکل فضایی توسط یک صفحه و سطح مقطع حاصل از این برش‌ها مطرح گردیده و تلاش شده که دانش‌آموزان ضمن تقویت تجسم فضایی بتوانند سطح مقطع حاصل از برش را حدس بزنند.

و در بخش پایانی نیز دوران حول محور و تشکیل شکل‌های فضایی با استفاده از دوران شکل‌های مسطح هندسی یادآوری گردیده است. دانش‌آموزان با این بحث در کتاب هفتم و نهم آشنا شده‌اند. و در این کتاب نیز تلاش شده با دوران شکل‌های هندسی خاصی مثل کره، نیمکره، مثلث، مستطیل و ... حول یک محور یا خط خاص شکل فضایی حاصل معرفی شود.

نقشه مفهومی

- تجسم فضایی
  - خط، نقطه و صفحه
    - حالت‌های مختلف دو خط در صفحه و فضا
      - صفحه
        - موازی
        - متقاطع
        - منطبق
      - فضا
        - موازی
        - متقاطع
        - متنافر
        - منطبق
    - حالت‌های مختلف خط و صفحه
      - موازی
      - متقاطع
      - خط بر صفحه واقع است.
    - حالت‌های مختلف دو صفحه
      - موازی
      - متقاطع
      - منطبق
    - تعامد
      - عمود بودن خط بر صفحه
      - عمود بودن دو صفحه بر هم
  - تفکر تجسمی
    - دید از جهات مختلف (نما)
    - برش
    - دوران حول محور

تصویر عنوانی

از قدیم در ساخت بناها از دانش هندسه استفاده شده است و با دیدن بناهای تاریخی می‌توان به میزان آگاهی و دانش ریاضی‌دانان و معماران ایرانی پی برد. تصویر عنوانی این فصل از کتاب، آرامگاه شیخ الرئیس بوعلی سینا است که در میانه میدانی به همین نام در شهر همدان واقع شده است. شهر همدان حدود ۵۰ سال است که به برج آرامگاه بوعلی، مزین شده است. این بنا ابتدا در زمان قاجاریه ساخته شد. طرح و نقشه بنای فعلی توسط «مهندس هوشنگ سیحون» به سبک معماری قرنی که بوعلی سینا در آن می‌زیسته و از روی قدیمی‌ترین بنای تاریخ دار اسلامی یعنی برج گنبد قابوس در شهر گنبد کاووس اقتباس شده است.

تصویر سمت چپ در تصویر عنوانی، نمای داخلی آرامگاه بوعلی است که به جهت ارتباط آن با درس اول تفکر تجسمی به آن اشاره شده است.

دانستنی‌هایی برای معلم

افلاطون معتقد است که «مطالعه ریاضیات دستگاه ذهنی را توسعه می‌دهد و به‌کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است، زیرا که درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است.»

توسعه آموزش علوم پایه، یک نیاز اساسی در زیرساخت‌های توسعه صنعتی و علوم کاربردی محسوب می‌شود. اشباع حس کنجکاوی جوانان و لذت اندیشه‌ورزی و نوآوری در این سنین سرمایه گران سنگی است که تعمیق آموزش علوم پایه و محض تأمین‌کننده مناسبی برای آن می‌باشد.

هندسه فضایی

بررسی روابط بین خط‌ها و صفحه‌ها و شکل‌های فضایی که از برخورد صفحه‌ها به‌وجود می‌آیند و نیز رویه‌هایی که از دوران خط‌ها یا کمان‌ها به‌وجود می‌آیند و همچنین رویه‌هایی که از حرکت خط‌ها پدید می‌آیند، به کمک مفاهیم اولیه یا تعریف نشده‌ها، تعریف‌ها، اصل‌ها و قضیه‌ها در هندسه فضایی مطرح می‌شود.

ــ **تعریف نشده‌ها یا مفهوم‌های اولیه** : مفاهیمی هستند که به علت فقدان معلومات کافی قابل تعریف نیستند. وجود عناصر نامعین در این مفاهیم یعنی عناصری که قابل تصور در ذهن نیستند از علل قابل تعریف نبودن آنهاست.

تعریف نشده‌های مهم هندسه فضایی که اغلب آنها در هندسه مسطحه نیز تعریف ندارند عبارت‌اند از :

نقطه، خط، صفحه، شکل، مجموعه، سطح و فضا.

ــ **اصل** : گزاره‌ای است که درستی آن بدون اثبات پذیرفته شده است. اصول مهم هندسه فضایی که برخی از آنها در هندسه مسطحه نیز معتبر است عبارت‌اند از :

۱ از دو نقطه متمایز یک و تنها یک خط می‌گذرد و هر خط لااقل دارای دو نقطه است.

۲ اگر دو نقطه از خطی در صفحه‌ای باشد، تمام آن خط در آن صفحه قرار خواهد داشت.

۳ از سه نقطه که روی یک خط راست نباشند یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

۴ لااقل سه نقطه وجود دارد که بر یک خط راست واقع نیستند.

۵ حداقل ۴ نقطه وجود دارد که بر یک صفحه واقع نیستند.

۶ اگر دو صفحهٔ متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند در یک خط راست مشترک خواهند بود.

ــ **اصل پنجم اقلیدس** : از هر نقطه فضا تنها یک خط موازی با خط مفروض می‌گذرد.

ــ **نمایش صفحه** : شکل‌های مختلف نمایش صفحه عبارت‌اند از صورت‌هایی که از اصول هندسه فضایی و تعریف دو خط موازی می‌توان نتیجه گرفت. این صورت‌ها به شرح زیر هستند :

۱ سه نقطه غیرواقع بر یک خط

۲ یک خط و نقطه‌ای در خارج آن

۳ دو خط متقاطع

۴ دو خط موازی

ــ **هندسه ترسیمی** : هندسه ترسیمی عبارت است از نمایش یک نقطه، خط، سطح یا جسم با تصاویر دو بعدی از آن.

وقتی ناظر مثلاً جسم را از روبه‌رو نگاه می‌کند باید تصویر آنچه را می‌بیند روی صفحه رسم کند. از روی این تصاویر دو بعدی می‌توان جسم سه بعدی را تصور کرد.

هندسه ترسیمی یکی از شاخه‌های علم ریاضی است که به کمک قوانین آن می‌توان اجسام سه بعدی را به‌طور کامل و دقیق روی صفحه دو بعدی ترسیم کرد. پیشرفت هندسه ترسیمی مدیون اصولی است که توسط «گاسپارد مونژ» ملقب به پدر هندسه ترسیمی در رساله‌ای تحت عنوان «مروری بر هندسه ترسیمی» ارائه شده است که مبانی نقشه‌کشی صنعتی و اصول هندسه ترسیم را بنیان نهاد.

هندسه ترسیمی نیازمند تجسم قوی و توانمند می‌باشد و از ضروری‌ترین اصولی است که باید فراگیر به آن تجهیز گردد. به گفته انیشتین : «تجسم از علم و دانش مهم‌تر است.»

یکی از ابزارهای مهم و مؤثر برای تقویت قدرت تجسم، هندسه ترسیمی است و به همین دلیل از مهم‌ترین مباحث آموزشی برای فراگیران می‌باشد.

معرفی منابع برای معلمان

معلمین گرامی برای دانش‌افزایی در خصوص ترسیم‌های هندسی می‌توانند از کتاب های درسی رسم فنی مربوط به دانش‌آموزان فنی و حرفه‌ای کمک بگیرند.

سؤالات ارزشیابی

۱ صفحه P و نقطه O روی آن را درنظر بگیرید. خط d را طوری رسم می‌کنیم که از نقطه O بگذرد. کدام گزینه درمورد وضعیت خط d و صفحه p صحیح است؟

الف) خط d بر صفحه P واقع است.
ج) خط d و صفحه P متقاطع‌اند.
ب) خط d و صفحه P موازی‌اند.

۲ اگر دو صفحه متمایز P و P' در نقطهٔ A مشترک باشند آن دو صفحه نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) P و P' متقاطع‌اند.
ج) P و P' منطبق‌اند.
ب) P و P' موازی‌اند

۳ دو صفحه متمایز P و P' و خط d را که در هر دو صفحه فوق قرار دارد، در نظر بگیرید دو صفحه P و P' نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) منطبق‌اند
ب) متقاطع‌اند
ج) موازی‌اند

۴ دو خط d و d' با هم موازی‌اند. اگر صفحه P و خط d موازی باشند، کدام گزینه درست است؟

الف) خط d' و صفحه P موازیند
ج) خط d' بر صفحه P عمود است.
ب) خط d' و صفحه P متقاطع‌اند
د) الف و ج صحیح است.

۵ خط d صفحه P را قطع نمی‌کند. گزینه صحیح کدام است؟

الف) خط d بر صفحه P عمود است.
ج) خط d و صفحه P موازی‌اند.
ب) خط d بر صفحه P واقع است.
د) ب و ج صحیح است.

۶ عبارت‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر دو صفحه P و P' در نقطه A مشترک باشند نسبت به هم .... یا .... هستند.

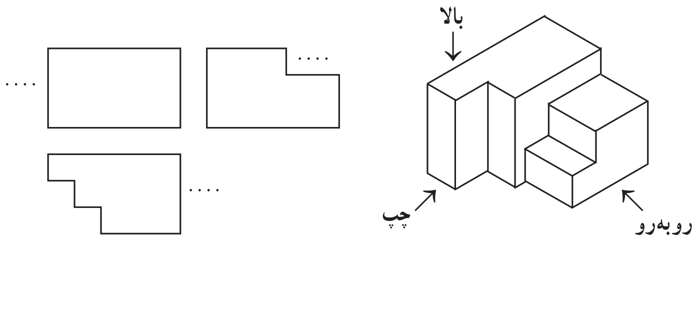
ب) خط d و صفحه P موازی هستند هرگاه ....

ج) از نقطه O خارج صفحه P .... خط موازی با صفحه P می‌توان رسم کرد.

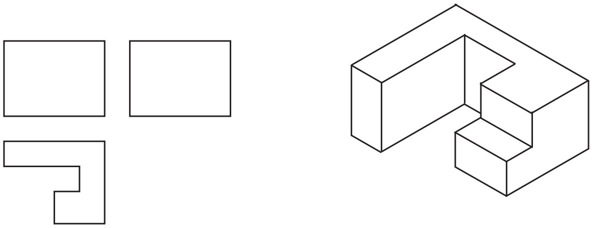
د) از نقطه O خارج خط d .... صفحه موازی با خط d می‌توان رسم کرد.

۷ سه نمای بالا، روبه‌رو و چپ از جسم زیر رسم شده است. مشخص کنید هر تصویر مربوط به کدام نماست؟

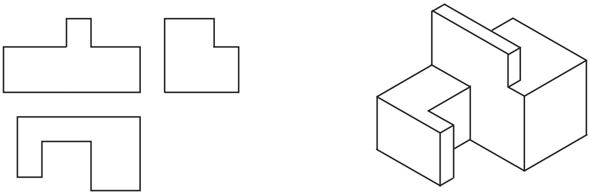
الف)



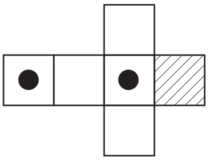
ب)

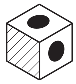
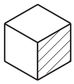
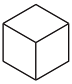
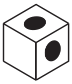


ج)



۸ کدام یک از مکعب‌های زیر مربوط به گسترده شکل روبه‌رو است؟

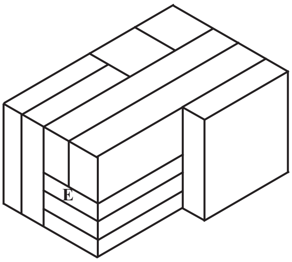


الف)  ب)  ج)  د) 

۹ مکعب E که در بین ده مکعب دیگر قرار گرفته با چند مکعب در تماس است؟

الف) ۱ ب) ۷

ج) ۶ د) ۵



۱۰ برای هر مورد توضیح دهید که چگونه به کمک دوران می‌توان آنها را تجسم کرد؟

الف) مخروط ناقص

ب) دو مخروط یکسان که از قاعده به هم چسبیده‌اند.

ج) استوانه‌ای به شعاع قاعده 1

د) دو مخروط یکسان که از رأس به هم چسبیده‌اند.

درس اول

خط، نقطه و صفحه

اهداف درس اول

۱ آشنایی با نقطه، خط و صفحه و نحوهٔ نمایش و نام‌گذاری هر کدام

۲ شناخت نقاط هم راستا، نقاطی که در یک صفحه هستند ولی در یک راستا نیستند و نقاطی که در یک صفحه نیستند.

۳ شناخت حالت‌های مختلف دو خط در صفحه و در فضا، همچنین حالت‌های مختلف خط و صفحه و دو صفحه.

۴ درک مفهوم تعامد و عمود بودن خط بر صفحه و دو صفحه عمود برهم.

ابزار موردنیاز :

۱ مداد و خط‌کش

۲ صفحه کتاب، میز، نیمکت و صفحه دیوار کلاس

روش تدریس درس اول

هندسه فضایی در این کتاب با مرور مفاهیم تعریف نشده شروع می‌شود و ضمن یادآوری مفهوم نقطه و خط و مفهوم صفحه، روش‌های نام‌گذاری خط و نقطه و صفحه یادآوری می‌شود. در کار در کلاس این صفحه با استفاده از بازی تنیس، مفهوم نقاط هم راستا، نقاطی که در یک صفحه هستند ولی هم‌راستا نیستند و نقاطی که در یک صفحه نیستند، معرفی می‌گردد و به طور شهودی اصول اولیهٔ هندسه فضایی مطرح می‌شود.

سپس حالت‌های مختلف دو خط در صفحه به کمک شکل مطرح می‌شود. در ادامه حالت‌های مختلف دو خط در فضا طی حل فعالیت بیان می‌گردد. در کار در کلاس مربوط به این بخش مفاهیم اساسی خط و صفحه آمده است و به دانش‌آموز کمک می‌کند تا این مفاهیم را در صفحه و فضا مقایسه نموده و نتیجه‌گیری نماید.

در ادامه حالت‌های مختلف خط و صفحه به کمک شکل نمایش داده شده و از دانش‌آموزان خواسته

می‌شود که جملات مربوط به آن را کامل نمایند.

در کار در کلاس صفحه بعدی اصول اساسی مربوط به خط در صفحه و در فضا با شکل‌های مربوطه نشان داده شده و در هر مورد سؤالاتی مطرح می‌شود که پاسخگویی به این سؤال‌ها باعث درک بهتر این مفاهیم می‌شود.

توصیه می‌شود فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها به کمک تصاویری از دنیای واقعی برای درک بهتر شهودی مورد تأمل واقع شود.

در ادامه حالت‌های مختلف دو صفحه همراه با تصاویر مربوط بیان شده و از دانش آموز خواسته شده که جملات ناقص را کامل کند. کار در کلاس این بخش، حالت‌های مختلف دو خط، خط و صفحه، دو صفحه را در یک مکعب تکرار می کند تا یادگیری مطالب عمیق تر شود.

در ادامه بحث، تعامد تعریف شده و با استفاده از شکل مداد و کتاب عمود بودن خط بر صفحه مطرح می گردد و اصول اساسی عمود بودن خط بر صفحه به‌طور شهودی و با استفاده از شکل‌های مربوطه نشان داده شده است.

سپس دو صفحه عمود بر هم تعریف می‌شوند و در کار در کلاس مربوط به آن، مفهوم عمود بودن دو صفحه همراه با طرح سؤالاتی تکرار و تمرین شده است. مفهوم عمود بودن در حالت‌های مختلف دو خط و صفحه، یا دو صفحه و خط، خط و دو صفحه موازی و دو خط موازی که بر صفحه‌ای عمودند مرور می‌شود.

توصیه‌های آموزشی

❑ در انجام فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها فضا و زمان کافی برای تأمل به دانش‌آموزان داده شود تا دانش مورد نیاز خود را شکل دهند.

❑ در این کتاب تمرکز اصلی بر روی مفاهیم شهودی است. لذا از ورود به مباحث استدلالی اجتناب کنید.

❑ در این کتاب پس از مرور پژوهش‌های متعدد و بررسی کتاب‌های درسی کشورهای مختلف، انطباق حالتی از توازی منظور نشده است. لذا انطباق و توازی به شکل دو مفهوم جدا مطرح شده‌اند. در این خصوص ذکر دو نکته ضروری است :

۱ در حالتی که خط بر صفحه واقع است، از عبارت «انطباق» استفاده نمی‌شود. در عوض می‌نویسیم خط بر صفحه واقع است یا خط در صفحه قرار دارد.

۲ در حالتی که دو خط یا دو صفحه بر هم منطبق می‌شوند، در واقع با هم یکی می‌شوند.

❑ استفاده از مواد و کاغذ و ... در نمایش صفحه و خط برای کمک به درک شهودی است و نباید به این بدفهمی منجر شود که خط و صفحه محدود هستند یا صفحه دارای ضخامت است.

درس دوم

تفکر تجسمی

اهداف درس دوم

۱ درک مفهوم دید از جهات مختلف و رسم شکل با نماهای مختلف.
۲ آشنایی با برش‌های یک جسم فضایی و تجسم سطح مقطع ایجاد شده در آن.
۳ شناخت سطح مقطع‌های ایجاد شده در استوانه، کره، منشور و مخروط با برش‌های مختلف عمودی، افق و مایل.
۴ شناخت دوران حول محور و تجسم شکل ایجاد شده توسط آن

ابزار موردنیاز :
۱ اجسام مختلف سه بعدی
۲ دست‌سازه‌های اسفنجی به شکل استوانه، کره، منشور و مخروط یا استفاده از میوه‌هایی با این اشکال

روش تدریس درس دوم

به دلیل تأکید سند برنامه درسی ملی بر تقویت انواع تفکر در دانش‌آموزان از جمله تفکر تجسمی، این درس به بیان مفهوم تفکر تجسمی اختصاص داده شده و در آن به سه مبحث ترسیم نماهای مختلف یک جسم هندسی، برش و دوران طول یک محور پرداخته شده است.

انسان‌ها برای بیان اندیشه‌های خود به دو روش عمل می‌کنند. یا مفهوم موردنظر را در قالب کلمات در ذهن خود پردازش کرده و آن را بیان می‌کنند و یا به کمک بازی تصاویر در ذهن دربارهٔ موضوع مورد نظر خود فکر کرده و سپس آن را بیان می‌کنند. نوع دوم تفکر را تفکر تجسمی می‌نامیم.

توصیه می‌شود در تدریس این درس حتماً فعالیت‌ها در کلاس کار شود و به دانش‌آموزان فرصت کافی برای پردازش تصویر در ذهن داده شود.

در قسمت دوم فعالیت، پیدا کردن تعداد دقیق پرتقال‌ها و ورود به مباحث حجم هرم یا الگوهای عددی

منظور نیست و تنها هدف این است که دانش آموز چینش پرتقال‌ها و چگونگی روند کاهش آن را در ذهن خود مجسم کند. در قسمت چهارم فعالیت، حتماً فرصتی برای رسم کروکی خانه تا مدرسه به دانش‌آموز داده شود و از آنان خواسته شود که در منزل یا کلاس درس طرحی از مسیر خانه تا مدرسه رسم کنند.

در قسمت آخر این فعالیت در حالت فضایی اشاره به هرم مربع القاعده صحیح است و علاوه بر آن این شکل می‌تواند متعلق به مکعب مستطیلی باشد که قطرهای آن رسم شده است.

در ادامهٔ این بحث قبل از ورود به بحث نماها و دیدن دقیق‌تر یک جسم از ابعاد مختلف به کمک تصاویر ارائه شده در بالای صفحه به هنر هنرمندان، عکاسان و نقاشانی اشاره می‌شود که تنها با داشتن نگاهی متفاوت به دنیای اطراف توانسته‌اند اثری ارزشمند از خود به‌جای بگذارند.

توصیه‌های آموزشی

❑ دقت شود که در این درس به علت زمینه‌سازی برای رشته‌های فنی و مهندسی نظیر معماری، الفبای اولیه ترسیم فنی قرار است آموزش داده شود. لذا در رسم نماهای مختلف، لحاظ کردن ارتفاع‌های مختلف و رسم خطوط داخلی نما، مدنظر نیست. فقط در شکل‌هایی که به‌صورت شطرنجی اندازه‌های دقیق داده شده انتظار می‌رود که در رسم نماهای مختلف هم خطوط شطرنجی ترسیم شود.

❑ برای دروس برش و دوران از همکاران انتظار می‌رود که تا حد ممکن از دست‌سازه‌های هندسی و اجسام دنیای واقعی نظیر میوه‌ها و ... در آموزش کمک بگیرند.

❑ به دانش‌آموزان یادآوری کنید که مهارت حل مسأله مستلزم صرف زمان و داشتن مداومت بر کار است و حل هر مسأله می‌تواند در حل مسائل مشابه دیگر به او کمک کند.

❑ تفکر تجسمی در دانش‌آموزان مختلف دارای سطوح متفاوت است. اما با تکرار و تمرین می‌توان این مهارت را در همه تقویت کرد.

❑ در این کتاب دادن نماهای مختلف یک شکل هندسی و سپس خواستن رسم آن جسم هندسی یا تجسم آن مدنظر نیست و تنها به شیوهٔ عکس عمل می‌شود. بدین معنا که شکل هندسی داده شده و نماهای مختلف خواسته می‌شود.

❑ مجله ریاضی صفحه ۹۱ صرفاً برای تعمیق مبحث تجسم هندسی است و مجلات ریاضی در ارزشیابی استفاده نمی‌شوند.

❑ در این درس هدف تقویت تفکر تجسمی است. لذا سعی شده حتی‌الامکان از طرح سؤالات محاسباتی اجتناب شود. لطفاً در ارزشیابی‌ها به این موضوع دقت شود.

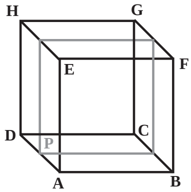
حل بعضی از تمرین‌های فصل چهارم

تمرین صفحه ۸۱

۳ الف) یا با خط دوم موازی است یا خط دوم بر آن واقع است.

ب) یا با خط دیگر موازی است یا هر دو خط بر آن صفحه قرار دارند.

ج) متقاطع.

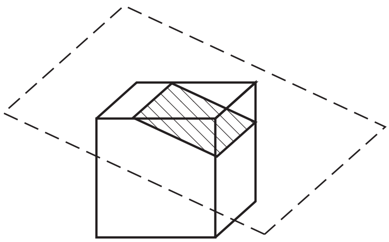


۴ الف) ــ می‌تواند با آن موازی باشد مثل صفحه P و دو خط FB و HG

ــ خط دیگر می‌تواند بر آن واقع باشد. مثل صفحه EFBA که با HG موازی است و FB بر آن قرار دارد.

ــ می‌تواند متقاطع باشد مثل HEAD.

ب) می‌تواند متقاطع باشد مثل صفحه HGFE و می‌تواند موازی باشد مثل صفحه DHGC



ج) ــ می‌تواند شامل خط دیگر باشد مثل صفحهٔ EHGF

ــ می‌تواند موازی باشد مثل صفحه ADCB

ــ می‌تواند مطابق شکل هر دو را قطع کند

حل تمرین‌های فصل

تمرین صفحهٔ ۸۴ درس اول

۱ الف) دو صفحه

ب) نقاط B و C و E

ج) نقاط A و B و C و D

د) متنافر ــ متقاطع

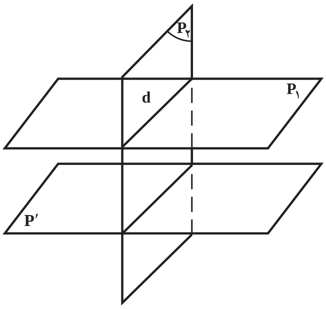
۲ الف) خط‌های d_1 و d_2 صفحه P را قطع کرده‌اند (در نقطه C) ــ یا شامل هر دو خط است و یا یکی از خطوط صفحه را قطع کرده و خط دیگر در صفحه واقع است.

ب) d_1 در صفحه P واقع است و خط d_2 صفحه P را در نقطه C قطع کرده است.

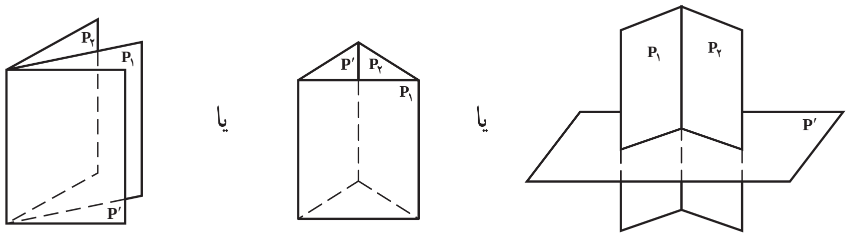
ج) دو خط متقاطع d_1 و d_2 در صفحه P واقع‌اند.

د) دو خط متقاطع d_1 و d_2 در صفحه P واقع‌اند.

۳ الف) متقاطع



ب) متقاطع ولی شکل آن در ۳ حالت قابل رسم است.



۴ الف) صفحات EFIH و FGJI متقاطع‌اند.

هر یک از صفحات EFIH و FGJI با صفحه ABCD منطبق‌اند.

ب) موازی ج) متقاطع د) منطبق هـ) موازی و) خط بر صفحه واقع است.

۵ الف) صفحات با هم متقاطع‌اند. (دوبه‌دو) ب) متقاطع ج) موازی

د) خط EH در صفحه EIKH و ABCD واقع است و با صفحه JFGL موازی است.

هـ) متقاطع و) متنافر ت) متنافر

۶ الف) صفحات EIKH و FJLG موازی‌اند.

هر یک از صفحات EIKH و FJLG با صفحه ABCD متعامد(متقاطع) است.

ب) موازی ج) موازی د) موازی هـ) موازی

۷ الف) (AB و DE) (AC و DF) (BC و EF)

ب) (AC و BE) (EF و AD) (AB و CF)

ج) (AB و BC) (DF و CF) (AD و DE)

د) (AB و BC و BE) (AC و BC و CF) و ....

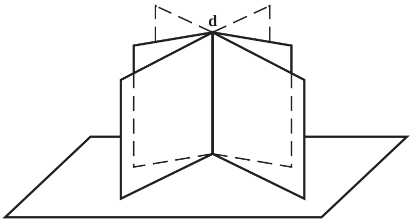
هـ) (خط BE و صفحه ACFD) (خط CF و صفحه ABED) (خط AD و صفحه BCFE)

و) (ABC و DEF)

ز) (ABED و BCFE و ACFD)

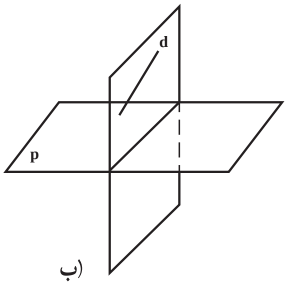
۸ یک خط

۹ الف) بی‌شمار صفحه



الف)

ب) یک صفحه



ب)

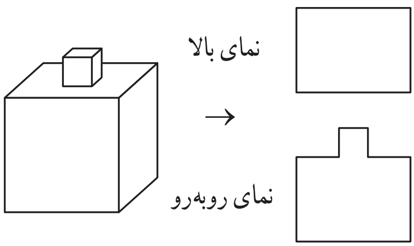
۱۰ موازی

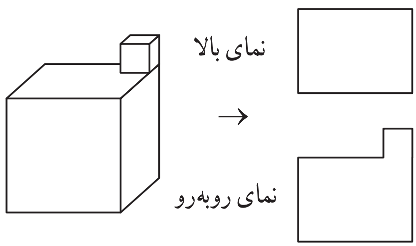
۱۱ عمود

حل تمرین‌های فصل

کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۸۹

این مسئله بی‌شمار جواب دارد که به ذکر ۲ جواب بسنده می‌کنیم.





تمرین صفحهٔ ۹۰ درس دوم

۱ ۵

۲ شکل اول سمت راست به ردیف چهارم   شکل چهارم سمت راست به ردیف دوم

شکل دوم سمت راست به ردیف اول

شکل پنجم سمت راست به ردیف سوم

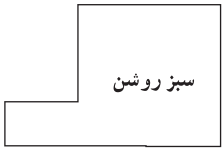
شکل سوم سمت راست به ردیف پنجم

۳ نماهای شکل سمت راست

نمای بالا

نمای چپ

نمای روبه‌رو

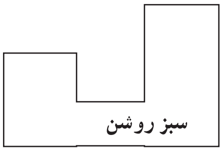


نماهای شکل سمت چپ

نمای بالا

نمای چپ

نمای روبه‌رو



۴

ـ ۶۴ تا

ـ ۸ تا

ـ ۶۴−۸=۵۶

ـ ۲۴ تا

ـ ۸ تا

۵ کل وجه‌ها ۶×۸=۴۸

در ۱۵ وجه حرف A دیده نمی‌شود پس در ۳۳=۱۵−۴۸وجه حرف A دیده می‌شود.

۶ ۴۸=۱۶×۳ مکعب

ـ حداقل ۱۵ تا و حداکثر ۳۷ تا

مجله ریاضی

ـ (۲)

ـ (۱)

ـ (۳)

تمرین صفحهٔ ۹۴ درس دوم

۱ الف) سطح مقطع مثلث است و منشور به دو منشور مثلثی تجزیه می‌شود.

ب) سطح مقطع مثلث است و منشور به دو هرم تجزیه می‌شود. یک هرم مثلثی و یک هرم با قاعده مستطیل

ج) سطح مقطع مستطیل است و منشور به دو منشور مثلثی تجزیه می‌شود.

۲ الف) مستطیل ب) مثلث (متساوی‌الساقین) ج) ذوزنقه (متساوی‌الساقین)

۳

شعاع دایره سطح مقطع $۲۵=۹+r^۲ \rightarrow r^۲=۱۶ \rightarrow r=۴$

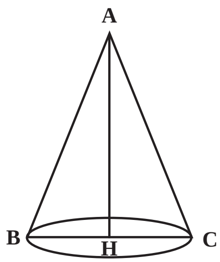
مساحت سطح مقطع $S=۱۶\pi$

۴ دایره ــ مخروط

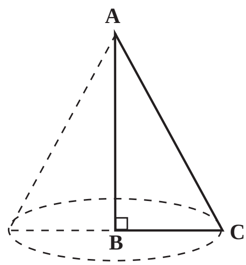
تمرین صفحهٔ ۹۶ درس دوم

۱ جسم حاصل دو مخروط است که از رأس به هم چسبیده‌اند.

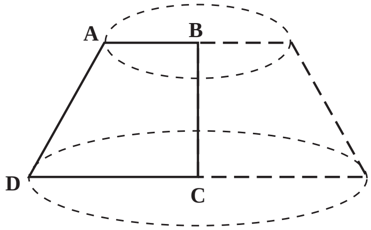
۲ الف) حول ارتفاع وارد بر قاعده تشکیل یک مخروط می‌دهد. (منظور ارتفاع وارد بر قاعده مثلث است)



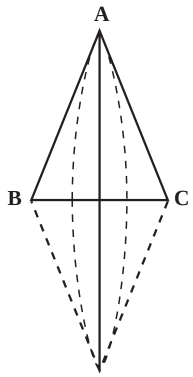
ب) مخروط



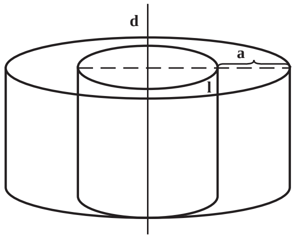
پ) مخروط ناقص



ت) دو مخروط یکسان که از قاعده به هم چسبیده‌اند.



۳ شکل حاصل از این دوران یک استوانه به شعاع قاعده a+l است که در داخل آن استوانه‌ای به شعاع قاعده l خالی است.



۴ دایره ــ بیضی