فصل ۲

مثلثات

علم مثلثات متداول امروز، مبتنی بر جیب و ظل است. جیب را به زبان فرانسوی سینوس (sinus) و ظل را تانژانت (Tangente) گویند که اساس آن از علمای اسلام است.

پیش از اسلام یونانیان برای حلّ مسائل نجومی که احتیاج شدید به مثلثات داشتند، شکل دیگری معروف به شکل «قطّاع» را به‌کار می‌بردند که هم در مسطّحات به‌کار می‌آید هم در کره و کتابی که در این زمینه نوشته شده است کتاب اُکَر منلائوس است. منلائوس (Menelaus) اهل اسکندریه و از ریاضی‌دانان نامور یونان است که قبل از میلاد مسیح می‌زیست.

برگرفته شده از مقالهٔ زیر :

بنای مسجد مدینه و قواعد ریاضی مستنبط از آن، که توسط علّامهٔ حسن‌زاده آملی نوشته شده است.[۱]

نگاه کلی به فصل

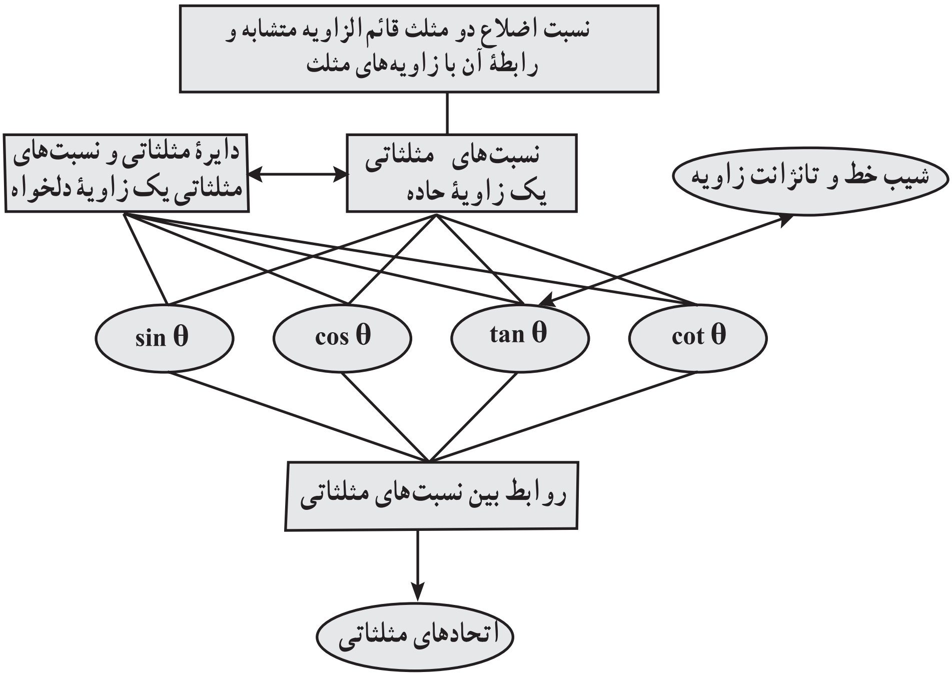
در این فصل، دانش‌آموزان برای اولین بار با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی آشنا می‌شوند. در سال‌های گذشته دانش‌آموزان با مفهوم تشابه و نسبت بین اضلاع، مفاهیم هندسی مثلث، زاویه، مثلث قائم‌الزاویه، رابطهٔ فیثاغورس و همچنین شیب خط آشنا شده‌اند که در این فصل برای درک مفاهیم جدید به آنها نیاز دارند.

در درس اوّل، دانش‌آموزان با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حاده و محاسبهٔ آنها به کمک مثلث‌های قائم‌الزاویه آشنا می‌شوند. محاسبهٔ تقریبی نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با استفاده از رسم آن به کمک خط‌کش و نقّاله و تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه، یکی دیگر از مفاهیم این درس است. در درس دوم، دانش‌آموزان با دایرهٔ مثلثاتی و نحوهٔ محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ دلخواه بین ۳۶۰- تا ۳۶۰ درجه روی این دایره آشنا می‌شوند. در ادامه، رابطهٔ بین شیب خط که در سال نهم با آن آشنا شده‌اند و تانژانت زاویهٔ بین خط و جهت مثبت محور طول‌ها آموزش داده می‌شود.

در درس سوم این فصل، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی معرفی شده است و دانش‌آموزان با کسب مهارت در استفاده از این روابط به اثبات اتحادهای مثلثاتی و یافتن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با داشتن یکی از نسبت‌های آن اقدام می‌کنند.

۱ــ حسن حسن‌زاده آملی، بنای مسجد مدینه و قواعد ریاضی مستنبط از آن، وقف میراث جاویدان، شماره ۱۵ و ۱۶ (۱۳۷۵) ۱۶ــ۷.

نقشهٔ مفهومی


نسبت اضلاع دو مثلث قائم الزاویه متشابه و رابطهٔ آن با زاویه‌های مثلث
دایرهٔ مثلثاتی و نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ دلخواه
نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ حاده
شیب خط و تانژانت زاویه
sin θ
cos θ
tan θ
cot θ
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
اتحادهای مثلثاتی

درس اوّل

نسبت‌های مثلثاتی

اهداف

❑ آشنایی با نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه، از طریق محاسبهٔ مستقیم.

❑ محاسبهٔ تقریبی نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با استفاده از رسم آن به کمک خط‌کش و نقّاله و تشکیل مثلث قائم‌الزاویه.

❑ ایجاد مهارت در استفاده از نسبت‌های مثلثاتی در حلّ مسئلهٔ مربوط در زندگی روزمرّه و کار با مقادیر تقریبی.

❑ آشنایی با استفاده از ماشین حساب در محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه.

❑ آشنایی با روش محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۴۵° و ۶۰°.

❑ درک این مفهوم که در مثلث‌های متشابه قائم‌الزاویه نسبت اضلاع ثابت است.

ابزارهای مورد نیاز

خط‌کش و نقّاله و ماشین حساب

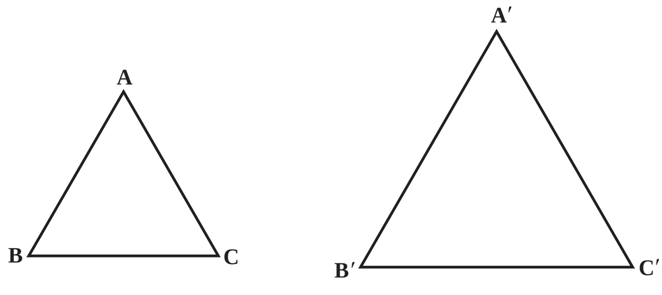
روش تدریس

فصل با یک پیش سازمان‌دهنده شروع می‌شود که اهمیت مثلثات را برای دانش‌آموزان یادآور می‌شود. در اینجا نکتهٔ بسیار مهم این است که چرا باید مثلثات بخوانیم و قبل از هر چیز، لازم است اهمیت موضوع برای دانش‌آموزان به‌خوبی بیان شود. کاربردهایی که در این درس به آن اشاره شده است در علوم مهندسی،

عمران، نجوم و یادآوری کاربردهای دیگر، می‌تواند برای مهم جلوه دادن اهمیت موضوع بیان شود. به‌عنوان یک مسئله مهم می‌توان به جهت قبله و زاویه مربوطه پرداخته شود که در آن اهمیت زاویهٔ نسبت‌های مثلثاتی به‌خوبی قابل مشاهده است.

پس از بیان اهمیت موضوع و درک این مطلب که چرا به مثلثات نیاز داریم، مسئلهٔ اصلی چگونگی ورود به این موضوع است. آنچه دانش‌آموزان تا سال نهم با آن آشنا هستند، مفهوم زاویه و تشابه است که در سال نهم با مفهوم تشابه دو n ضلعی و در حالت خاص، تشابه دو مثلث آشنا شده‌اند. از آنجا که این کتاب مشترک بین دانش‌آموزان علوم ریاضی و تجربی است و دانش‌آموزان پایهٔ دهم علوم تجربی کتابی مربوط به هندسه ندارند، لذا سعی شده است که از مطالب اضافی صرف‌نظر گردد و با حفظ رابطهٔ طولی با مطالب سال‌های قبل و با توجه به اطلاعات علمی دانش‌آموزان این پایه، مطالب به‌صورتی کاملاً ساده و قابل فهم برای هر دو گروه از دانش‌آموزان بیان شود. موضوع مهم در این قسمت این است که دانش‌آموزان رابطهٔ تالس را نمی‌دانند و نباید در این فصل به آن پرداخته شود و تنها از تشابه که در سال نهم با آن آشنا شده‌اند استفاده شود. بنابراین، در اینجا سعی بر این است که با استفاده از تشابه، نسبت‌های مورد نیاز بین اضلاع دو مثلث داده شده را به‌دست آوریم بدون اینکه از رابطهٔ تالس نامی بیاوریم. یکی از مواردی که دانش‌آموزان در مورد تشابه می‌دانند این است که «دو مثلث متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز باهم برابرند.»

با توجه به این نکته برای دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ در شکل زیر داریم :



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \quad \text{و} \quad \hat{A}=\hat{A'}\ ,\ \hat{B}=\hat{B'}\ ,\ \hat{C}=\hat{C'}$$

اکنون به سادگی می‌توان دید که اگر به‌عنوان مثال : $\hat{A}=\hat{A'}$ و $\hat{B}=\hat{B'}$، آن‌گاه $\hat{C}=\hat{C'}$؛ زیرا

$$\hat{C}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{B})$$
$$=۱۸۰-(\hat{A'}+\hat{B'})=\hat{C'}$$

بنابراین، هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر با هم برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث بنا به حالت سه زاویه برابر با هم متشابه‌اند. یکی از کاربردهای مهم این مطلب در مثلث‌های قائم‌الزاویه است؛ یعنی اگر ΔABC و $\Delta A'B'C'$ قائم‌الزاویه باشند و $\hat{B} = \hat{B'} = 90^\circ$ ، در این صورت اگر $\hat{A} = \hat{A'}$ ، آن‌گاه $\hat{C} = \hat{C'}$ و از این‌رو، دو مثلث با هم متشابه‌اند.

هدف فعالیت صفحهٔ ۳۵

۱ استفاده از نکته بالا در پیدا کردن موارد خواسته شده است. به‌عبارت دیگر چون $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ قائم‌الزاویه‌اند و $\hat{A} = \hat{A'}$ پس دو مثلث متشابه‌اند و برابری نسبت اضلاع نظیر به‌صورت زیر است :

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ هدف این فعالیت، استفاده از روابط موجود در فعالیت ۱ و نوشتن تساوی نسبت‌ها در یک مثلث است. به‌عبارت دیگر، از اینکه $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ می توان نتیجه گرفت $AC.A'B' = AB.A'C'$ (زیرا اندازهٔ اضلاع ناصفر هستند). در نتیجه به سادگی چون اندازه‌ها غیر صفر هستند، داریم :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

یا اینکه می‌توان نتیجه گرفت : $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$ یا $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$.

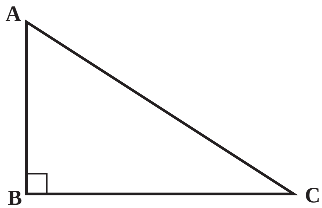
هدف این تساوی‌ها با این ترتیب گفته شده، تعریف نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت است. بنابراین، هدف فعالیت ۲ معرفی مفهوم تانژانت است.

هدف کار در کلاس نیز تعمیق و تثبیت فعالیت بالاست و در این قسمت ثابت می‌شود که نسبت‌های اندازه‌گیری شده (در مثلث قائم‌الزاویه) همگی ثابت هستند و این نسبت را تانژانت می‌نامیم.

قابل توجه است که با هدایت فعالیت ۲ می‌توانستیم ابتدا سینوس یا کسینوس را تعریف کنیم و اگر چه از نظر تاریخی تانژانت زودتر از بقیه نسبت‌ها کاربرد داشته است، ولی انتخاب تانژانت کاملاً سلیقه‌ای بوده است و آنچه اهمیت دارد این است که برای تعریف سینوس و کسینوس می‌بایست کار در کلاس ۲ به‌کار گرفته شود. با توجه به اینکه در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ ،

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ } A} = \frac{BC}{AB}$$

می‌توان کتانژانت را هم تعریف کرد و از این رو $\frac{AB}{BC} = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ A}} = \cot A$.



به سادگی می‌توان دید،

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{\frac{BC}{AB}} = \frac{۱}{\tan A}$$

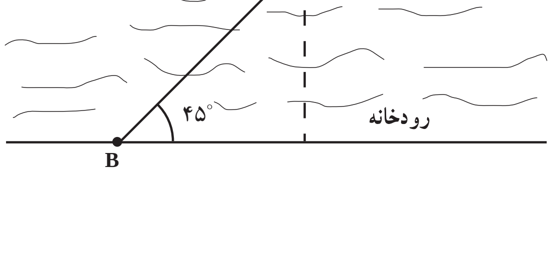
یا به‌طور معادل $\tan A . \cot A=۱$.

توضیح این مطلب که در چه مواقعی $\tan A=۰$ است، بسیار مهم است و از دبیران محترم تقاضا می‌شود که تا معرفی نسبت‌های مثلثاتی و حلّ مثال صفحه ۷۰ شکیبا باشند.

توصیه‌های آموزشی

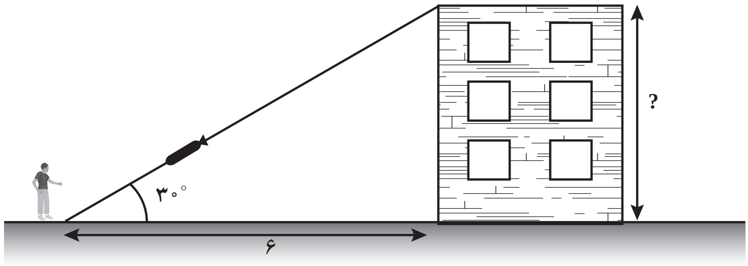
پیشنهاد می‌شود قبل از انجام فعالیت صفحهٔ ۳۱، کاربردهایی از تانژانت ارائه شود. مطالبی که در ابتدای این فصل در صفحهٔ تصویر عنوانی در مورد بنای تاریخی مسجد مدینه آمده است یا هر بنای تاریخی دیگر می‌تواند جالب باشد. همچنین توضیحی برای حلّ مسئله زیر نیز می‌تواند جالب باشد. طنابی به‌صورت زیر از یک طرف رودخانه به طرف دیگر طوری متصل شده است که طناب AB با سطح زمین زاویهٔ ۴۵° تشکیل داده است.

چگونه می‌توان عرض رودخانه را محاسبه کرد؟



یا مسئلهٔ زیر :

فاصلهٔ علی تا پای یک ساختمان ۶ متر است. او با استفاده از یک دستگاه لیزر، با زاویهٔ ۳۰ درجه نوک ساختمان را مورد هدف قرار داده است، چگونه می‌توان ارتفاع ساختمان را اندازه‌گیری کرد؟

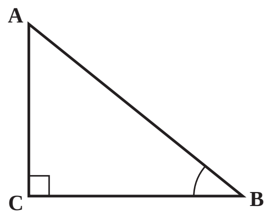


یکی دیگر از مسائلی که در اینجا می‌توان به آن اشاره کرد مسئلهٔ محل فرود هواپیماست که با استفاده از اندازه‌گیری تانژانت زاویه هواپیما با افق قابل حل است.

هدف فعالیت صفحهٔ ۳۱

۱ هدف، اندازه‌گیری تانژانت و کتانژانت زوایای داده شده به‌طور مستقیم و با اندازه‌گیری طول اضلاع است. نکتهٔ قابل توجه اینکه، چون هنوز روابطی برای اندازه‌گیری تانژانت و کتانژانت بیان نشده است، طول اضلاع همهٔ مثلث‌ها واقعی‌اند و به‌عنوان یک فعالیت می‌توان مسئله زیر را هم اضافه کرد.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC در شکل زیر با اندازه‌گیری طول اضلاع مربوطه، تانژانت و کتانژانت زاویه B را به‌دست آورید.

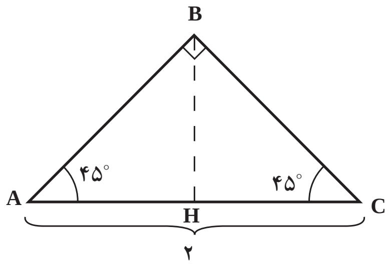


در فعالیت ۲ هدف، پیدا کردن تانژانت و کتانژانت زوایای °۳۰، °۶۰ و °۴۵ است. نکتهٔ قابل توجه اینکه، شما می‌توانید از یک مثلث قائم‌الزاویه برای حلّ این مسئله استفاده کنید، ولی کارکردن با مثلث متساوی‌الاضلاع هم برخی از ویژگی‌های این مثلث را یادآوری می‌کند و هم دانش‌آموز با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، خود، طول اضلاع لازم را به‌دست می‌آورد.

برای حلّ قسمت (پ) از فعالیت ۲ از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین کمک گرفته می‌شود، ولی دانش‌آموزان در مثال حل‌شده صفحهٔ ۳۲ با استفاده از روابط موجود در یک مربع، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵° را محاسبه خواهند کرد. برای حلّ قسمت (پ) مطابق زیر عمل می کنیم :

ابتدا یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، به‌صورت زیر با وتری به طول ۲ واحد رسم می‌کنیم، از آنجایی که ارتفاع BH همان میانه ضلع ACاست، پس AH=۱ و چون مثلث ABH، متساوی‌الساقین است، پس AH=BH=۱. اکنون با استفاده از تعریف تانژانت داریم :

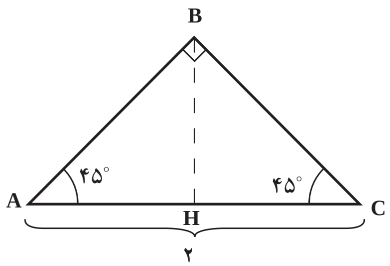
$$\tan ۴۵^\circ = \tan A = \frac{BH}{AH} = \frac{۱}{۱} = ۱$$



اشتباهات رایج

یکی از بدفهمی‌های رایج در بین دانش‌آموزان این مقطع، این است که دانش‌آموز، تعاریف را به‌خوبی درک نکرده است. به مثال زیر توجه کنید.

معلم : با توجه به شکل، تانژانت و کتانژانت زاویه ۴۵° را محاسبه کنید.



راه حلّ محمدمهدی :

ابتدا ارتفاع BH را رسم کرده و چون BH میانه $\overset{\Delta}{ABC}$ نیز هست پس، AH=BH و از این‌رو :

$$\tan ۴۵^\circ = \tan A = \frac{BH}{AH} = ۱$$

راه حلّ علی :

$$\tan ۴۵^\circ = \tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}} = \frac{BC}{AC}$$

اکنون چون ارتفاع BH میانه است پس AH=BH و از این رو :

$$BC^۲ = AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ = ۲AH^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۲}AH$$

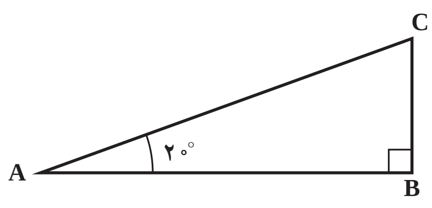
$$\Rightarrow \tan ۴۵^\circ = \tan A = \frac{\sqrt{۲}AH}{AC} = \frac{\sqrt{۲}AH}{۲AH} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}.$$

به سادگی می‌توان دید پاسخ علی به این دلیل غلط است که مفهوم ضلع مقابل و ضلع مجاور به زاویهٔ A را درک نکرده است.

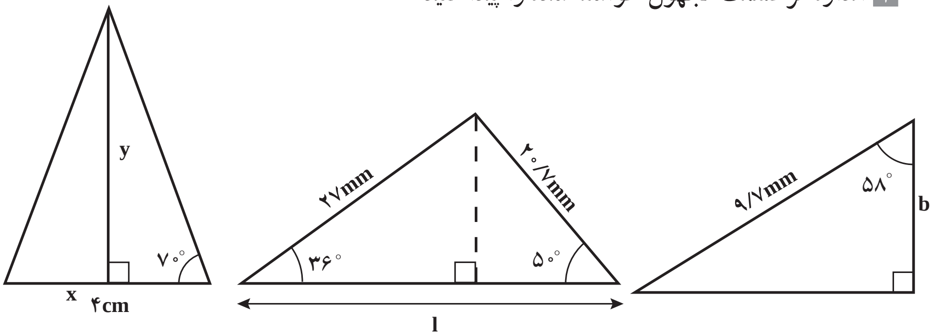
در ادامهٔ مطالب صفحهٔ ۳۱ مفاهیم سینوس و کسینوس تعریف شده‌اند و همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، در این قسمت باید فعالیت صفحهٔ ۳۰ تکرار شود. در ادامه نسبت‌های مثلثاتی تعریف می‌شوند.

در ابتدای صفحهٔ ۳۲ یک مثال حل شده داریم که نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵° به‌دست آمده است و در کار در کلاس بعدی، از دانش‌آموز خواسته شده است تا نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° را به‌دست آورند. نکتهٔ مهم این است که این کار در کلاس دقیقاً باید همانند فعالیت حل شود و از پر کردن جدول بدون کارورزی لازم اجتناب شود. حفظ کردن اعداد جدول وقتی ارزشمند است که دانش‌آموز خود این اعداد را به‌دست آورد. حلّ مثال‌های زیر می‌توانند مفید باشند :

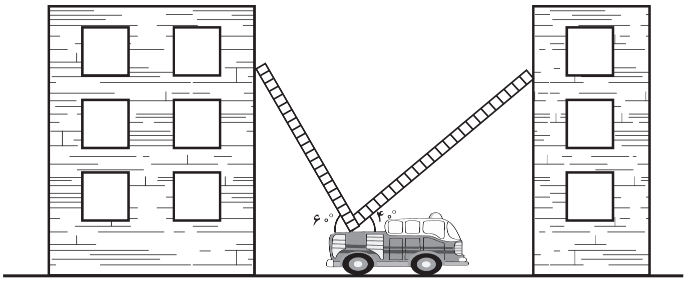
۱ یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه چنان رسم کنید که $\hat{A} = ۲۰^\circ$. با محاسبهٔ طول اضلاع مثلث نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۰° را (با استفاده از ماشین حساب) به‌دست آورید.



۲ اندازهٔ هر قسمت مجهول خواسته شده را پیدا کنید.



۳ دو نردبان ۱۰ متری به‌صورت زیر به دو ساختمان مطابق شکل، تکیه داده‌اند. این دو ساختمان با هم چقدر فاصله دارند؟

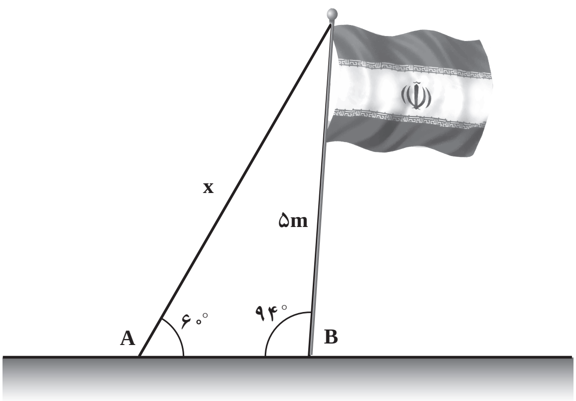


۴ زاویهٔ میلهٔ پنج متری پرچم جمهوری اسلامی ایران با زمین °۹۴ است. طنابی به بالای میله بسته شده و آن را در نقطهٔ A به زمین متصل می‌کند.

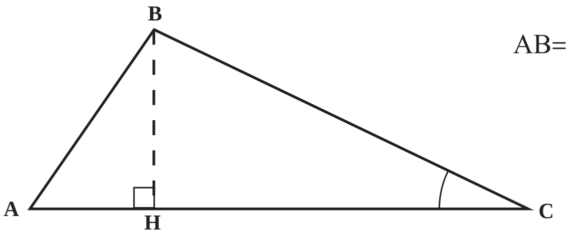
الف) طناب با زمین زاویهٔ °۶۰ می‌سازد. طول آن را حساب کنید.

ب) فاصلهٔ بین A و B را پیدا کنید.

ج) اگر پرچم را به زمین عمود کنیم طول طناب چقدر خواهد شد؟



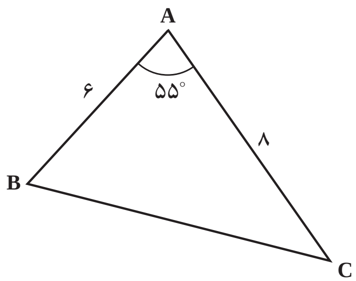
۵ در شکل زیر BC=۲BH و AB=۲AH

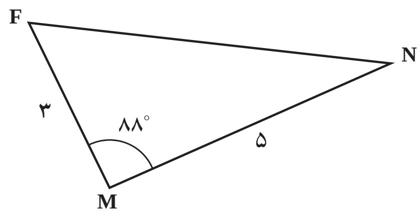


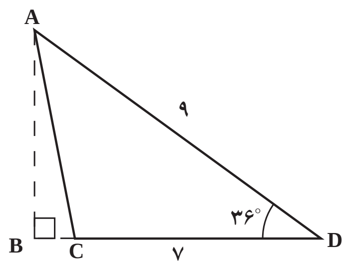
اندازهٔ زاویه‌های A، B و C را به‌دست آورید.

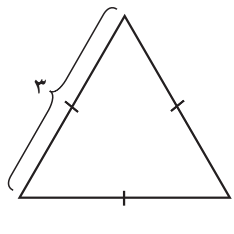
هدف مثال‌های صفحهٔ ۳۳ در راستای تعمیق و تثبیت مفاهیم نسبت‌های مثلثاتی و استفاده از آنها در حلّ مسائل واقعی است. یکی از این کاربردها، پیدا کردن مساحت یک مثلث دلخواه با داشتن دو ضلع از یک مثلث و اندازه زاویهٔ بین آنهاست که این مطلب در کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۳۴ نشان داده شده است. شما می‌توانید فعالیت‌های زیر را نیز اضافه کنید:

۱ **مساحت هر مثلث را به‌دست آورید (تا ۲ رقم اعشار).**









درس دوم

دایرهٔ مثلثاتی

اهداف

- ❑ آشنایی با دایرهٔ مثلثاتی.
- ❑ آشنایی با زاویه‌های مثبت و منفی در بازهٔ -360° تا 360°.
- ❑ محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی زاویه‌های منفرجه به کمک دایرهٔ مثلثاتی.
- ❑ محاسبهٔ سایر نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با داشتن اندازهٔ سینوس یا کسینوس آن زاویه.
- ❑ ایجاد مهارت در استفاده از دایرهٔ مثلثاتی در تعیین محل یک زاویهٔ مشخص در نواحی چهارگانه.
- ❑ آشنایی با رابطهٔ بین شیب‌خط با تانژانت زاویه.

این درس بدون یک مسئلهٔ کاربردی شروع شده است، ولی می‌توان با مثال‌هایی مثل چرخش زمین، چرخ و فلک یا چرخش هستهٔ اتم ذهن دانش‌آموز را برای لزوم آشنایی با زاویه‌های علامت‌دار و زاویه‌های بیش از ۱۸۰ درجه آماده کرد.

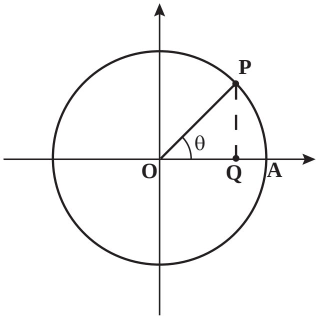
توصیه‌های آموزشی

در این قسمت می‌توان یک زاویهٔ حادّهٔ دلخواه رسم کرد و بعد با ثابت نگه‌داشتن یک ضلع و چرخش ضلع دیگر زاویهٔ حول آن، دایره‌ای ایجاد کرد که ابتدا لزومی ندارد شعاع آن یک باشد. بعد به تعریف کتاب مراجعه کنید و به شکل استاندارد برای این دایره، شعاع یک را تعریف نمایید.

بعد از تعریف یک زاویه با اندازه‌های مثبت و منفی، در فعالیت، سؤال‌هایی برای درک بهتر و ایجاد مهارت آورده شده است.

اشتباهات رایج

در ابتدای این درس، دایره مثلثاتی معرفی می‌شود. اکنون فرض کنید $P(x , y)$ نقطه‌ای دلخواه، غیر از مبدأ روی این دایره دلخواه انتخاب شود و زاویهٔ AOP مساوی θ باشد. به سادگی می‌توان دید :



$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = PQ$$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = OQ$$

از آنجایی که اندازهٔ PQ و OQ به‌ترتیب با y و x برابرند؛ بنابراین داریم :

$x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$

و از این‌رو $P(x , y) = (\cos\theta , \sin\theta)$، بنابراین، هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی را می‌توان با $\cos\theta$ و $\sin\theta$ متناظر کرد.

هدف فعالیت، مهم جلوه کردن این موضوع است و کار در کلاس در راستای همین موضوع طراحی شده است. در کار در کلاس ۲ توضیح داده می‌شود : وقتی که می‌گوییم زاویهٔ α در ناحیهٔ مثلثاتی اوّل، دوم، سوم یا چهارم قرار دارد، در واقع انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α در یکی از نواحی بالا قرار دارد.

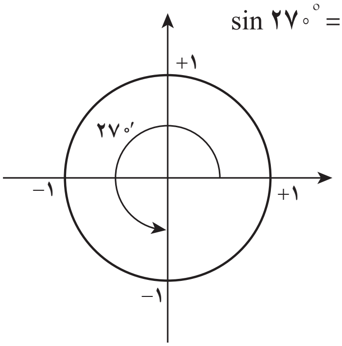
هدف از مثال صفحهٔ ۳۷، معرفی نسبت‌های مثلثاتی ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰° است. دقت کنید که در مواردی مثل $\cot ۰^\circ$ که حاصل کسر $\frac{\text{عدد}}{۰}$ تعریف نشده است، نسبت مثلثاتی مربوطه تعریف نشده است.

بنابراین، با حل کار در کلاس صفحهٔ ۳۸ جدول به‌صورت زیر کامل می‌شود :

مقدار	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	۱	۰	۱ −	۰
$\cos\theta$	۱	۰	۱ −	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

به‌عنوان مثال، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۷۰° به‌صورت زیر محاسبه شده‌اند :

$\sin ۲۷۰^\circ = y = -۱$ و $\cos ۲۷۰^\circ = x = ۰$



بنابراین :

تعریف نشده $= \frac{-۱}{۰} = \frac{\sin ۲۷۰}{\cos ۲۷۰} = \tan ۲۷۰^\circ$ و $\cot ۲۷۰^\circ = \frac{\cos ۲۷۰}{\sin ۲۷۰} = \frac{۰}{-۱} = ۰$.

هدف فعالیت صفحهٔ ۳۸

اگر زاویهٔ θ به غیر از ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰° باشد، آن‌گاه علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ در چهار ربع به‌صورت زیر است :

مقدار	ربع اوّل	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

هدف از مثال صفحهٔ ۳۸ این است که اگر یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ و ناحیه‌ای که θ در آن قرار دارد را بدانیم، آن‌گاه می‌توانیم سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنیم. به‌عنوان مثال، اگر $\sin\theta = \frac{۲}{۷}$ ، آن‌گاه چون علامت $\sin\theta$ مثبت است پس با توجه به جدول بالا θ در ربع اوّل یا دوم قرار دارد، بسته به اینکه θ در کدام ربع باشد، علامت سایر نسبت‌های مثلثاتی فرق خواهند کرد. اگر در مثال حل‌شدهٔ کتاب θ در ربع اوّل قرار گیرد، آن‌گاه نسبت‌های مثلثاتی θ به‌صورت زیر قابل محاسبه‌اند :

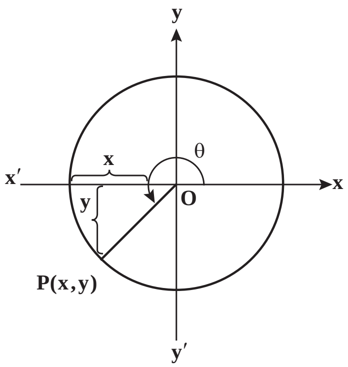
$$\sin\theta = \frac{۲}{۷} = y \Rightarrow y = \frac{۲}{۷}$$

از طرفی می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی $x^۲ + y^۲ = ۱$ پس $x^۲ = ۱ - \frac{۴}{۴۹} = \frac{۴۵}{۴۹}$ یعنی $x = \frac{۳\sqrt{۵}}{۷}$ ؛ زیرا در ناحیهٔ اوّل $x > ۰$. پس $\cos\theta = x = \frac{۳\sqrt{۵}}{۷}$ و در نتیجه داریم :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۲}{۷}}{\frac{۳\sqrt{۵}}{۷}} = \frac{۲}{۳\sqrt{۵}} \quad و \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{۳\sqrt{۵}}{۷}}{\frac{۲}{۷}} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

حلّ فعالیت ۱ صفحهٔ ۳۹

۱ فرض کنیم نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری که $\cos\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد؛ بنابراین، چون $x^۲ + y^۲ = ۱$، پس $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + y^۲ = ۱$ و از این‌رو $\frac{۱}{۲} + y^۲ = ۱$ و در نتیجه $y^۲ = \frac{۱}{۲}$. چون در ناحیهٔ سوم y منفی است، پس $y = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ و از این‌رو $\sin\theta = y = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$.



الف) مختصات نقطهٔ P برابر است با : $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{-\sqrt{۲}}{۲})$.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ به‌صورت زیر قابل محاسبه است :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱ \quad و \quad \cot\theta = \frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱$$

۲ اگر $\cos\alpha = \frac{-۲}{۵}$ ، آن‌گاه چون کسینوس زاویهٔ α منفی است، طبق جدول علامت نواحی مثلثاتی α می‌تواند در ربع دوم یا سوم قرار بگیرد.

۳ زاویه‌ای که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت است یک زاویه در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس مسئله یک مسئلهٔ باز پاسخ است و جواب‌های متعددی دارد.

حل مسائل زیر در این قسمت پیشنهاد می‌شود :

- اگر $\sin\alpha = \frac{-۲}{۳}$ ، انتهای کمان روبه‌روی زاویهٔ α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟
- اگر $\tan^{۳}\alpha = \frac{۲}{۳}$ آن‌گاه α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟
- بیشترین و کمترین مقدار عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

$۳+۲\sin\theta$ $\qquad\qquad$ $۱-۲\cos\theta$

۴ اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم‌علامت باشند θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه

دانش‌آموزان در سال گذشته با مفهوم شیب خط و علامت آن آشنا شده‌اند. هدف فعالیت صفحهٔ ۴۰ این است که نشان دهد اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه $\tan\alpha$= شیب خط.

نکتهٔ مهم در این فعالیت این است که اندازهٔ زاویهٔ مورد نظر ممکن است بیشتر از ۹۰° باشد و از این رو، باید علامت تانژانت نیز در نظر گرفته شود؛ زیرا در ناحیهٔ دوم مثلثاتی علامت تانژانت منفی است.

فعالیت کمکی ۱

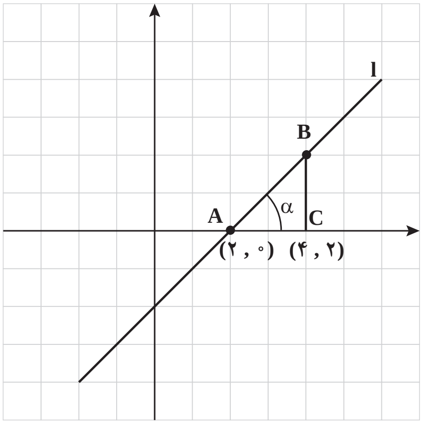
الف) معادله خط را به‌دست آورید.

حل

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{۲-۰}{۴-۰} = ۱$$

اکنون

$$y-۰=۱(x-۲) \Rightarrow y=x-۲$$



ب) تانژانت زاویهٔ α را پیدا کنید. (اندازهٔ زاویه α مهم نیست).

شیب خط $= 1 = \frac{2}{2} = \frac{BC}{AC} = \tan\alpha$

ج) معادلهٔ خط را با توجه به اینکه شیب خط با تانژانت زاویهٔ α برابر است، به‌دست آورید.

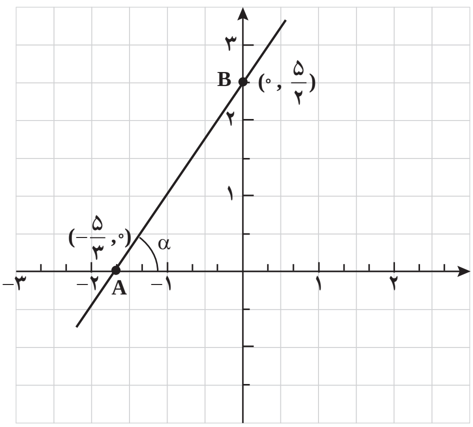
$m=\tan\alpha$ و $y-y_0=m(x-x_0)$

از این رو : $y = 0 + 1(x-2) = x-2$

که همان نتیجهٔ قسمت (الف) به‌دست می‌آید.

حلّ کار در کلاس صفحهٔ ۴۰

فعالیت بالا را برای خط‌های زیر تکرار کنید :



ابتدا نقاط کمکی روی خط به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

الف) $2y - 3x = 5$

$$x = 0 \Rightarrow 2y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow -3x = 5 \rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

پس نقاط $(0, \frac{5}{2})$ و $(\frac{-5}{3}, 0)$ روی خط قرار دارند.

بنابراین، شیب خط برابر است با :

$$m=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{\frac{۵}{۲}-۰}{۰+\frac{۵}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۳}{۲}=m \text{ شیب خط}$$

ب) $x+y=۲$

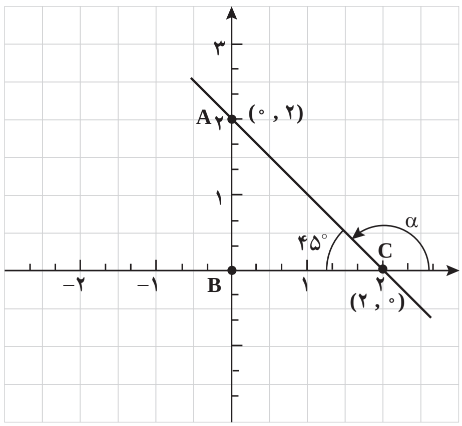
بنابراین، معادله خط برابر است با :

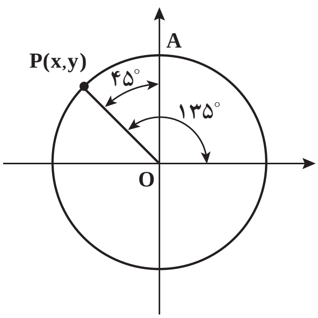
$$y=\frac{۳}{۲}(x+\frac{۵}{۳})$$

و از این‌رو : $۲y=۳x+۵۰$ یا $۲y-۳x=۵۰$

به سادگی می‌توان دید نقاط کمکی روی این خط (۲و۰) و (۰و۲) هستند. پس شیب خط برابر است با :

$$m=\frac{۲-۰}{۰-۲}=-۱$$





از طرفی زاویه‌ای که α با جهت مثبت محور xها می‌سازد یک زاویهٔ منفرجه است. چون $\alpha=۱۳۵^\circ$ در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار دارد، علامت آن منفی است. اکنون مختصات نقطهٔ p(x,y) را روی دایرهٔ مثلثاتی به‌دست می‌آوریم.

ابتدا چون زاویهٔ $OAP=۴۵^\circ$ سپس چون $x=y$ و اینکه $x^۲+y^۲=۱$، نتیجه می‌گیریم.

$$۲x^۲=۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad y=\frac{+۱}{\sqrt{۲}}=\frac{+\sqrt{۲}}{۲}$$

از این رو :

$$\tan\alpha=\frac{\sin۱۳۵}{\cos۱۳۵}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}}{۲}}=-۱$$

در نتیجه $-۱=\tan\alpha=$ شیب خط.

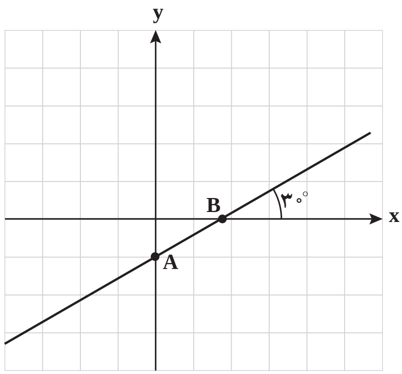
۲ معادلهٔ خطی که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۳۰° است و از نقطهٔ (۰و۱) می‌گذرد.

حل. چون زاویه α با جهت مثبت محور x مد نظر است، پس

$$\text{شیب خط}=\tan۳۰=\frac{۱/۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

و از این رو :

$$y-۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۱) \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



دقت کنید اگر در حلّ این تمرین جهت مثبت محور xها در نظر گرفته نشود، آن‌گاه نمودار خط به‌صورت زیر است و چون زاویهٔ α در ناحیه دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد، پس

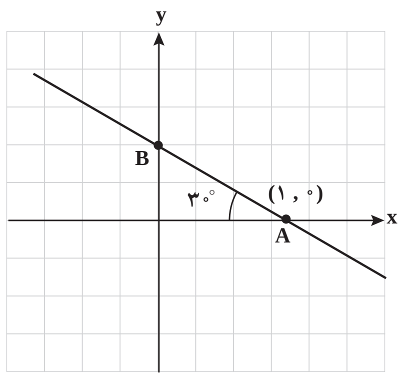
$$\text{شیب خط} = -\tan ۳۰ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

و از این رو، معادلهٔ خط برابر است با :

$$y - ۰ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}(x-۱) = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس

$$y = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۴۰

۸ به سادگی با استفاده از خطوط موازی می‌توان نتیجه گرفت زاویهٔ خط را با جهت مثبت محور xها برابر با °۶۰ است و شیب خط $= \sqrt{۳} = \tan ۶۰$. اکنون چون (۰,۳–) یک نقطهٔ کمکی است، پس داریم :

$$\text{معادله خط} \quad y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y + ۳ = \sqrt{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۳$$

درس سوم

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

اهداف

- آشنایی با روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
- کسب مهارت در محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مانند α با استفاده از روابط مثلثاتی و داشتن یکی از نسبت‌های مثلثاتی
- توانایی استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی در تعیین درستی یا نادرستی یک رابطه مثلثاتی.

روش تدریس

دانش‌آموزان در سال گذشته با چند اتحاد جبری و تعریف کلّی اتحاد آشنا شده‌اند می‌توان درس را با یادآوری مفهوم اتحاد جبری آغاز کرد.

با انجام فعّالیت اوّل، دانش‌آموزان به سمت کشف رابطه $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ هدایت می‌شوند.

در ادامهٔ درس، دانش‌آموزان مهارت استفاده از این رابطه را در محاسبهٔ سایر نسبت‌های مثلثاتی کسب کرده و آن را با انجام کار در کلاس و مثال مربوط به آن فرا می‌گیرند. همچنین، با استفاده از رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$، می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت :

$$\tan^۲\alpha+۱=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \quad \text{و} \quad \cot^۲\alpha+۱=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

اشتباهات رایج

دانش‌آموزان بدون توجه به زاویهٔ α در رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ رابطه‌ای مانند $\sin^۲۳۰+\cos^۲۳۰$ را نیز برابر یک در نظر می‌گیرند.

توصیه‌های آموزشی

می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا رابطهٔ مورد نظر را روی دایرهٔ مثلثاتی به ازای هر زاویهٔ دلخواه نیز اثبات کنند.

این درس با یک فعالیت آغاز می‌شود که این فعالیت یادآوری نسبت‌های مثلثاتی است و در ادامه، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی را مورد بحث قرار می‌دهد. در ابتدا درستی رابطهٔ مهمّ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال حل شدهٔ صفحهٔ ۴۳ تکراری است و در درس قبل مورد بحث قرار گرفت، با این تفاوت که در حلّ این مسئله فقط از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی استفاده شده است و دیگر مستقیماً با دایرهٔ مثلثاتی سروکار نداریم و در کار در کلاس دو رابطهٔ مهمّ دیگر به‌دست می‌آیند. سرانجام رابطهٔ ۳ مشابه فعالیت ۱، صفحهٔ ۳۹ است، ولی در اینجا باید از رابطه‌های ۱ و ۲، صفحهٔ ۴۳ استفاده کنیم. بنابراین، برای حلّ این مسئله داریم :

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha=۱+(\frac{-۳}{۴})^۲=۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۲۵}{۱۶} \quad \text{طبق رابطهٔ ۱، صفحهٔ ۴۳}$$

$$\Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\pm\frac{۴}{۵}$$

از طرفی $۹۰^\circ\leq\alpha\leq۱۸۰^\circ$ بیان می‌کند که α در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار دارد و چون در این ناحیه، کسینوس منفی است، پس $\cos\alpha=\frac{-۴}{۵}$. اکنون می‌دانیم $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ پس

$$\sin^۲\alpha+(\frac{-۴}{۵})^۲=۱\rightarrow\sin^۲\alpha=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{۳}{۵}$$

اکنون چون α در ناحیهٔ دوم است و سینوس در ناحیهٔ دوم مثبت است، پس $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$. سرانجام

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{-۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{-۴}{۳}$$

یا

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{\frac{-۳}{۴}} = \frac{-۴}{۳}$$

در ادامه قرارداد می‌کنیم که هر تساوی درست مثلثاتی را که عبارت‌های تعریف شده با معنا هستند را یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم. به عبارت دیگر، یک اتحاد، گزاره‌ای است که دو مقدار با هم مساوی باشند، به ازای همهٔ مقادیر متغیرها که عبارات را معنادار می‌کنند.

به عنوان مثال، عبارت‌های زیر، اتحادند.

الف) $۳+\sin\theta = \sin\theta + ۳$ ب) $\cos\theta + \theta = \theta + \cos\theta$

ج) $۱ = \sin\theta \times \frac{۱}{\sin\theta}\ (\sin\theta \neq ۰)$ د) $۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}\ (\sin\theta \neq ۰)$

مثال. عبارت $\frac{۱-\cos^۲\theta}{\sin\theta}$ را تا حدّ امکان ساده کنید.

حل. طبق اتحاد مثلثاتی $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ داریم : $۱-\cos^۲\theta = \sin^۲\theta$ و از این رو :

$$\frac{۱-\cos^۲\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^۲\theta}{\sin\theta} \overset{(\sin\theta\neq ۰)}{=\!=} \sin\theta$$

مثال. بررسی کنید که آیا $\frac{\sin\theta\,\cos\theta}{\tan\theta} = \cos^۲\theta$ یک اتحاد است؟

حل.

$$\text{طرف چپ} = \frac{\sin\theta\,\cos\theta}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\,\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\sin\theta . \cos^۲\theta}{\sin\theta} \overset{\sin\theta\neq ۰}{=\!=} \cos^۲\theta = \text{طرف راست}$$

توصیه‌های آموزشی

یک تمرین خوب برای حلّ مسائل این قسمت از کتاب، بررسی این نکته است که آیا رابطهٔ داده شده یک اتحاد است یا نه و اگر نیست چرا؟ اگرچه در کتاب روابطی داده شده‌اند (مثل کار در کلاس (پ) صفحهٔ ۴۵) که در آنها از دانش‌آموز پرسیده می‌شود، کدام رابطه یک اتحاد است؟ اما در حالت کلی، بررسی روابطی که اتحاد نیستند کار دشواری است. به عبارت دیگر، برای آنکه ثابت کنیم یک رابطه اتحاد نیست، باید مثال نقض ارائه کنیم و گاهی اوقات، پیدا کردن یک مثال نقض، بسیار دور از ذهن است. بنابراین، برای عمق بخشیدن به مطالب این بخش، مسائلی باید در این زمینه مطرح شوند و از دانش‌آموزان خواسته شود تا مثال نقض ارائه کنند.

مثال. نشان دهید $\sin\alpha+\cos\alpha=۱$ یک اتحاد مثلثاتی نیست.

حل. اگرچه این عبارت برای برخی از زوایا مثل $\alpha=۰$ و $\alpha=۹۰^\circ$ درست است، ولی یک اتحاد نیست؛ زیرا اگر $\alpha=۳۰^\circ$، آن‌گاه

$$\sin ۳۰+\cos ۳۰=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}\neq ۱۰$$

مثال. نشان دهید $۲-\sin^۲\theta=۲\cos\theta$ یک اتحاد نیست.

حل. اگرچه به ازای $\theta=۰^\circ$، رابطه درست است، ولی برای $\theta=۹۰^\circ$ داریم :

$$۲-۱^۲=۲\times ۰\Longrightarrow ۱=۰$$

که یک تناقض است.

مثال. بررسی کنیدکه آیا $\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\cot^۲\theta=۱$ $(\sin\theta\neq ۰)$

حل.

$$\text{طرف چپ}=\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{۱-\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}$$

$$=\frac{\sin^۲\theta}{\sin^۲\theta}=۱=\text{طرف راست}$$

پس این عبارت، یک اتحاد است.

حلّ تمرین صفحهٔ ۴۶ قسمت (ث)

$$\text{طرف چپ}=\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{۱}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}$$

اکنون چون $۱-\sin^۲x=(۱-\sin x)(۱+\sin x)=\cos^۲x$، پس با ضرب صورت و مخرج رابطه در $۱+\sin x$ داریم :

$$\text{طرف راست}=\frac{\cos x}{۱+\sin x}\overset{\cos x\neq ۰}{=\!=}\frac{\cos^۲ x}{\cos x(۱+\sin x)}=\frac{۱-\sin^۲ x}{\cos x(۱+\sin x)}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}$$

حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۴۵ قسمت (ت)

$$\text{طرف سمت چپ}:۱-\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin x}\overset{\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x}{=\!=\!=}۱-\frac{۱-\sin^۲ x}{۱+\sin x}\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=\!=}۱-\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱+\sin x}$$

$$\overset{۱+\sin\neq ۰}{=\!=\!=}\cancel{۱}-(\cancel{۱}-\sin x)=\sin x=\text{طرف راست}$$

مثال. بررسی کنید که آیا $\frac{۱}{\sin\beta}-\sin\beta=\cot\beta\cos\beta$ یک اتحاد است.

حل.

$$\text{طرف چپ}:\frac{۱}{\sin\beta}-\sin\beta\overset{\text{مخرج مشترک}}{=\!=\!=}\frac{۱-\sin^۲\beta}{\sin\beta}\overset{\sin^۲\beta+\cos^۲\beta=۱}{=\!=\!=}\frac{\cos^۲\beta}{\sin\beta}$$

$$=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\times\cos\beta=\cot\beta\times\cos\beta=\text{طرف راست}$$

پس این عبارت یک اتحاد است.

دو خطای رایج

۱ با توجه به اینکه در این قسمت، دانش‌آموزان گاهی در اثبات درستی یک رابطه، اغلب نیاز به کمی ذکاوت و در مسائل پیچیده‌تر نیاز به مقداری خلاقیت دارند، ممکن است تشخیص ندهند از کدام طرف تساوی باید حل را شروع کنند؛ چون اغلب درمسائل قسمت‌های دیگر، یک طرف تساوی داده شده و طرف دیگر تساوی از دانش‌آموز خواسته می‌شود و این سردرگمی که این تساوی کامل است و چطور نیاز به حل دارد برای برخی از دانش‌آموزان باقی می‌ماند.

۲ نشان دهید $(\sin\theta+\cos\theta)^۲=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta$ یک اتحاد نیست.

حل. بسیار رایج است که دانش‌آموزان معمولاً $(a+b)^۲$ را با $a^۲+b^۲$ اشتباه می‌گیرند.

برای اینکه نشان دهیم گزاره بالا یک اتحاد نیست باید θ را طوری انتخاب کنیم که سینوس و کسینوس آن صفر نباشند؛ مثلاً فرض کنیم $\theta=۳۰^\circ$، پس داریم :

$$\text{طرف چپ}=(\sin\theta+\cos\theta)^۲=(\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{طرف راست}=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=۱\neq ۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس گزارهٔ بالا یک اتحاد نیست.

توصیه‌های آموزشی

بهتر است اولین ارزشیابی این قسمت، چند سؤال جدید و حل نشده باشد، ولی برای حل به دانش‌آموزان اجازه استفاده از کتاب و رجوع به فرمول‌های مربوطه داده شود.

مسائل کمکی

۱ عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید

الف) $\frac{\cos\theta}{۱-\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}$ ب) $\cos\theta\,(۱+\tan^۲\theta)$ ج) $(\cot\alpha+\frac{۱}{\sin\alpha})(\cot\alpha-\frac{۱}{\sin\alpha})$

مخرج مشترک   ضرب   اتحاد مزدوج

۲ بررسی کنید که آیا گزاره‌های زیر، اتحادند.

الف) $\frac{۱}{\sin x}-\sin x=\frac{\cos^۲ x}{\sin x}$ $\frac{۱-\sin^۲ n}{\sin x}=\frac{\cos^۲ n}{\sin x}$

ب) $(\frac{۱}{\cos\beta}+\tan\beta)^۲=\frac{۱+\sin\beta}{۱-\sin\beta}$

$$(\frac{۱+\cos\beta\tan\beta}{\cos\beta})^۲=(\frac{۱+\sin\beta}{\cos\beta})^۲=\frac{۱+\sin^۲\beta+۲\sin\beta}{\cos^۲\beta}=\frac{۱+\sin^۲\beta+۲\sin\beta}{(۱-\sin\beta)(۱+\sin\beta)}$$

پ) $\sin^{۲}\alpha - \cos^{۲}\alpha = \dfrac{\tan\alpha - \cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}$

$$\frac{\tan\alpha - \cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\dfrac{\sin^{۲}\alpha - \cos^{۲}\alpha}{\cancel{\sin\alpha\cos\alpha}}}{\dfrac{\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha}{\cancel{\sin\alpha\cos\alpha}}} = \sin^{۲}\alpha - \cos^{۲}\alpha$$

ت) $\dfrac{۱}{\cos\theta} = \sqrt{۱ + \tan^{۲}\theta}\ \ (۰ \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{۲})$

ث) $\tan\theta . \sin\theta = \dfrac{۱}{\cos\theta} - \cos\theta$

ج) $\tan^{۲}\theta \,.\, \sin^{۲}\theta = \tan^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta$

چ) $(\sin\theta + \cos\theta)^{۲} + (\sin\theta - \cos\theta)^{۲} = ۲$

ح) $\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta = ۱ - ۲\sin^{۲}\theta$

خ) $\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta = ۲\cos^{۲}\theta - ۱$