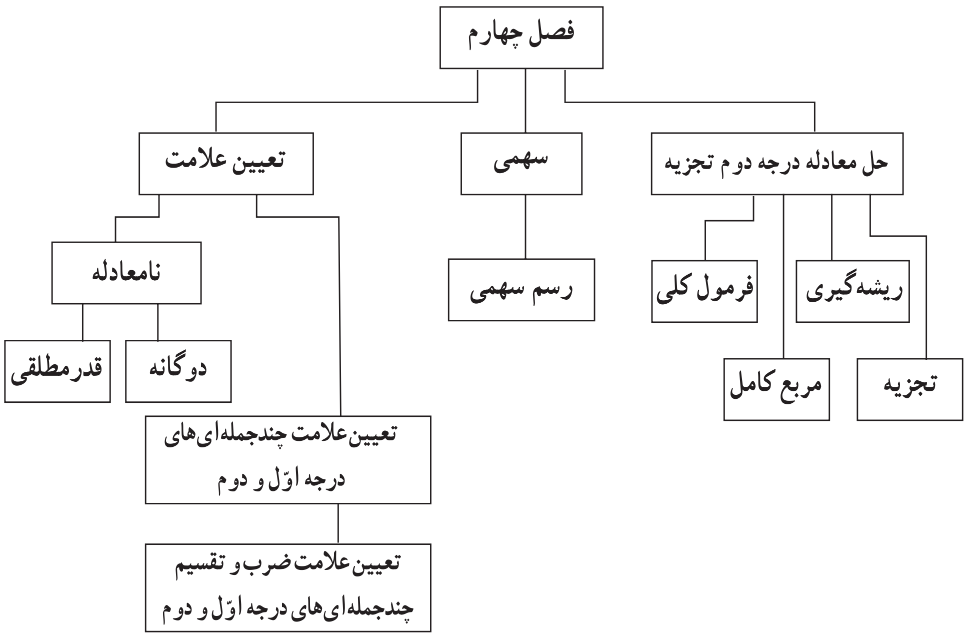
فصل ۴

معادله‌ها و نامعادله‌ها

نگاه کلی به فصل

این فصل، شامل سه درس است. ابتدا مفهوم معادلهٔ درجه دوم را بیان می‌کند و سپس روش‌های حلّ معادلهٔ درجه دوم را به چهار روش (تجزیه، ریشه‌گیری، مربع کامل، فرمول کلی) بررسی کرده است و در درس دوم روش رسم سهمی را ارائه می‌کند. در درس سوم تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها از درجهٔ ۱ و ۲ را آموزش می‌دهد. در روند یادگیری این درس دانش‌آموز باید با حلّ معادلهٔ درجه دوم و درجه اوّل کاملاً آشنایی داشته باشد و در ادامه حلّ نامعادلات پرداخته می‌شود. سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده است. در ادامه به حلّ نامعادلات دوگانه و قدر مطلقی پرداخته می‌شود.

نقشهٔ مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

جبر از شاخه‌های اصلی علم ریاضیات است که تاریخی بیش از ۳۰۰۰ سال دارد. این علم در طول تاریخ سؤالات بسیار داشته و در حال حاضر شامل شاخه‌های زیادی است.

این علم به بیش از ۳۰۰۰ سال پیش در مصر و بابل برمی‌گردد و در آنجا در مورد حلّ برخی از معادلات خطی بحث شده است. در هند و یونان باستان نیز، حدود یک قرن پیش از میلاد از روش‌های هندسی برای حل برخی از معادلات جبری استفاده می‌کردند. در قرن اوّل میلادی نیز بحث در مورد برخی از معادلات جبری در آثار «دیوفانتوس» یونانی و «برهماگوپتای» هندی دیده می‌شود.

کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی اوّلین اثر کلاسیک در جبر می‌باشد که کلمهٔ جبر یا Algebra از آن آمده است. «خیام» دیگر ریاضی‌دان مشهور ایرانی است که در آثار خود جبر را از حساب تمیز داد. گامی بزرگ را در تجربه و پیشرفت این علم برداشت. در قرن ۱۶ میلادی روش حلّ معادلات درجه سوم توسط «دل مرو» و معادلات درجه چهارم توسط «فراری» کشف گردید.

«اواریست گالوا» ریاضی‌دان فرانسوی که در بیست سالگی در جریان انقلاب فرانسه در یکی از جنگ‌ها کشته شد، بیشترین سهم را در پیشرفت و تجربهٔ این علم داشت که نوشته‌های او سال‌ها پیش از مرگش، پس از مطالعه و بررسی توسط دیگر ریاضی‌دانان موجب تحوّل عظیم در این علم گردید.

معادلات همراه با اعداد، از اوّلین دستاوردهای ریاضی شدند. آنها در قدیمی‌ترین اسناد ریاضی مکتوب، فی‌المثل،در متون میخی بابلی‌های باستان که به هزارهٔ قبل از میلاد برمی‌گردند، پاپیروس‌های مصری باستان که به امپراطوری میانه در حدود ۱۸۰۰ ق.م. بازگشت دارند، آمده‌اند.

بنا به ساختار جامعهٔ بابلی مسائل مربوط به تقسیم ارث از اهمیت بسیار برخوردار بودند. اوّلین پسر همواره سهم بیشتری را دریافت می‌کرد، دومی بیشتر از سومی و به همین ترتیب. درحالی‌که مسائل مطرح در بابل، مجهول نسبتاً واضح توصیف شده است. در پاپیروس‌های مصری با علامت «h» نمایش داده شده است.

علامت برابری «=» که امروزه متداول است، توسط «روبرت رکورد» پزشک دربار سلطنتی مطرح شد. اما زمان قابل ملاحظه‌ای طول نکشید تا این علامت مقبولیت عام یافت.

استفاده از ابزار فناورانه

دانش‌آموزان می‌توانند برای به‌دست آوردن جواب‌هایی که به‌صورت اعشاری از معادلهٔ درجه دوم به‌دست می‌آیند از ماشین‌حساب استفاده کنند. برای رسم منحنی سهمی انواع نرم‌افزارها وجود دارند که با وارد کردن معادله می‌توان نمودار را رسم کرد و می‌توان اشکال مختلف سهمی را مشاهده کرد. نرم‌افزاری مانند FXDraw و... ، با چنین نرم‌افزارهایی می‌توان فعالیت‌ها، کاردرکلاس، تمرینات را شبیه‌سازی کرد تا دانش‌آموزان درک بهتری نسبت به مفاهیم معادلات و نامعادلات پیدا کنند.

معرّفی منابع برای معلمان

۱ جبر و مقابله / محمّدبن موسی خوارزمی ترجمه حسین خدیوجم / انتشارات اطلاعات

۲ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر / انتشارات مدرسه

۳ عبارت‌ها و معادله‌های جبری / علی حسن‌زاده ماکویی / انتشارات مدرسه

۴ تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $16x(x-2) = 8x-25$

ب) $(2x-3)^2+1 = 10$

ج) $x^2+\sqrt{5}x+1=0$

۲ دو برابر یک عدد مثبت، از ثلث مربع آن، ۹ واحد کمتر است؛ این عدد را به‌دست آورید.

۳ مجموع سنّ پدر و پسری ۵۰ سال و حاصل‌ضرب سنّ آنها ۳۳۶ است. سنّ هرکدام را به‌دست آورید.

۴ اگر معادلهٔ $x^2+(a-1)x+1 = 0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، a را یافته و سپس ریشه‌های مضاعف را تعیین کنید.

۵ یک رشته سیم به طول ۸ متر در اختیار داریم. می‌خواهیم آن را به دو قسمت تقسیم کنیم و سپس با هرکدام یک مربع بسازیم. اگر مجموع مساحت این مربع‌ها، ۲۰ مترمربع باشد، طول هرکدام را به‌دست آورید.

۶ معادلهٔ زیر، رابطهٔ بین سنّ یک زن (A) و فشارخون سیستولیک نرمال آن، P (میلی‌متر جیوه) است:

$$P= 0/01A^2 + 0/05A +107$$

الف) فشارخون نرمال را برای یک زن ۶۰ساله به‌دست آورید.

ب) اگر فشارخون نرمال یک زن، ۱۳۰ میلی‌لیتر جیوه باشد، سنّ تقریبی او را به‌دست آورید.

۷ نمودار هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=۱-x^۲$

ب) $y=-x^۲+۴x+۱$

ج) $y=۱+۴x-۲x^۲$

۸ نمودار چندجمله‌ای $P(x)=ax^۲+bx+c$، محور تقارنی به معادلهٔ $x=۴$ دارد. اگر خط $y=۱$ این سهمی را در دو نقطه قطع کند و یکی از این نقاط، نقطهٔ $A(-۲و۱)$ باشد، نقطهٔ دیگر برخورد را تعیین کنید.

۹ یک موشک از روی زمین با معادلهٔ $y=-۲x^۲+۲۰۰x$ به هوا پرتاب می‌شود، که در آن، x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع آن در لحظات مختلف است.

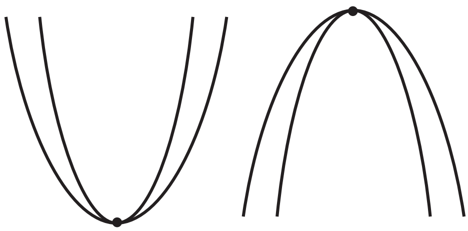
الف) بیشترین ارتفاع موشک چقدر است؟ در این لحظه، مسافت افقی طی شده را نیز به‌دست آورید.

ب) بُرد این موشک را به‌دست آورید.

ج) نمودار حرکت این سهمی را در یک دستگاه مختصات، رسم کنید و جواب‌های به‌دست آمده در قسمت‌های قبل را روی آن نشان دهید.

۱۰ شکل‌های زیر، نمودار چند سهمی با معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ می‌باشد. برای ضریب $x^۲$ی آنها کدام‌یک از اعداد زیر را پیشنهاد می‌کنید.

$a=-۲\ ,\ a=-۱\ ,\ a=۱\ ,\ a=۲$



۱۱ هریک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعهٔ جواب به‌دست آمده را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.

الف) $-۱\le ۲x-۵\le ۷$

ب) $\frac{x}{۳}-۱\le \frac{۲}{۳}x+۱<x$

ج) $(۲-x)(x^۲-۹)\ge ۰$

د) $\frac{x^۳-۱}{x^۲+x-۶}<۰$

هـ) $|x-۲| \leq ۳$

و) $|۲x+۵| > ۱$

ز) $|۳x+۱|+۲ < ۱$

۱۲ بازه‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی رسم کنید و سپس برای هرکدام یک نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسید که مجموعهٔ جواب آن، این بازه باشد.

الف) $[۰,۴]$

ب) $(-\infty,-۳)\cup(۵,+\infty)$

۱۳ اگر عبارت $y=(a-۱)x^۲+(a-۱)x+۱$ برای هر مقدار x، منفی باشد، حدود مقادیر a را به‌دست آورید.

۱۴ در بررسی رابطهٔ بین ساعت خواب در شبانه‌روز و نرخ مرگ در سال (برابر هر یک‌صد هزار نفر انسان بالغ) اطلاعات زیر به‌دست آمده است:

y (نرخ مرگ در سال)	x (ساعت خواب)
۱۶۸۲	۴
۶۲۸	۷
۹۶۸	۹

می‌توانیم این اطلاعات را به‌صورت معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ مدل‌سازی کنیم و سهمی زیر را به‌دست آوریم:

$$y=۱۰۴/۵x^۲-۱۵۰۱/۵x+۶۰۱۶$$

الف) نرخ مرگ در سال را برای افراد بالغی که در شبانه‌روز، ۶ ساعت می‌خوابند، به‌دست آورید.

ب) پایین‌ترین میزان نرخ مرگ در سال، به ازای چند ساعت خواب در شبانه‌روز، به‌دست می‌آید.

درس اوّل

معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حلّ آن

اهداف

❑ معادلهٔ درجه دوم را به‌خوبی تشخیص دهد.
❑ به راحتی بتواند فاکتورگیری از عوامل مشترک را انجام دهد.
❑ از تجزیهٔ عبارت‌های درجه دوم با استفاده از اتحادهای مزدوج و جمله مشترک برای حلّ معادلهٔ درجه دوم استفاده نماید.
❑ ویژگی حاصل‌ضرب صفر را به‌خوبی درک کند و بتواند در مواقع لزوم به‌کار برد.
❑ درک دقیق و کاربردی از ریشه‌گیری داشته باشد.
❑ در صورت امکان بتواند یک عبارت را مربع کامل نماید.
❑ بتواند هر معادلهٔ درجه دوم دلخواه را از فرمول کلّی حل کند.
❑ حالت‌های مختلف جواب‌های یک معادلهٔ درجه دوم را برحسب علامت Δ، تشخیص دهد.
❑ با کاربرد این معادله در عصر حاضر آشنا شود.

روش تدریس

در آغاز این درس، یک مسئله مطرح می‌شود که طی آن، دانش‌آموز با معادلهٔ درجه دوم آشنا می‌شود. سؤالی که در ابتدای درس مطرح می‌شود که آیا می‌توان مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی غیر از ۳ و ۴ و ۵ باشند؟ شما می‌توانید با همین موضوع درس را شروع کرده و دانش‌آموزان را به چالش بکشید، سپس معادلهٔ $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$ را پای تخته نوشته و از آنها بخواهید آن را ساده کنند. سپس معادلهٔ $x^2-2x-3=0$ که به‌دست آمد، معادلهٔ درجه دوم را تعریف کرده و از آنها بخواهید چند معادلهٔ درجه دوم دیگر مثال بزنند و در دفترهایشان بنویسند. فعالیت صفحهٔ ۷۱ را می‌توانید به عهدهٔ دانش‌آموزان

بگذارید. ویژگی حاصل‌ضرب صفر را کامل توضیح داده و چند مثال برایشان بیاورید. فاکتورگیری را نیز می‌توانید با تمرین‌هایی مثل کار در کلاس صفحهٔ ۷۱، قسمت ب در دانش‌آموزان تقویت کنید. مفهوم ریشه‌گیری از عبارات درجه دوم در صفحهٔ ۷۲ را سعی کنید با چند مثال جبری و در صورت امکان مثال‌های کاربردی برای دانش‌آموزان توضیح کامل دهید.

این مفهوم باید با تأکید زیاد، تدریس شود که یکی از نقاط ضعف دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر است.

در قسمت «حلّ معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل» باید دانش‌آموزان این توانایی را پیدا کنند که عباراتی مانند $x^۲+ax$ را به صورت $x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴}$ یا همان $(x+\frac{a}{۲})^۲$ دربیاورند.

مثال‌هایی مانند مثال صفحهٔ ۷۳ این مهارت را در آنها تقویت می‌کند. سپس ریشه‌گیری را در انتهای پاسخ خود به‌صورت کامل انجام دهند و پاسخ را به‌دست آورند. کار در کلاس صفحهٔ ۷۴ نیز می‌تواند یاری‌رسان شما در تفهیم این موضوع به شاگردانتان باشد. حلّ معادلهٔ درجه دوم به روش فرمول کلی که در صفحهٔ ۷۴ بحث آن شروع شده باید به‌عنوان آخرین راه حل به دانش‌آموز ارائه شود. چرا که در بسیاری از مسائل استفاده از تجزیه، مربع کامل و همچنین ریشه‌گیری، سرعت حل را بالا می‌برد. اما دانش‌آموزان باید روش کلّی را نیز به خوبی و با درک فرایند آن به‌طور کامل فراگیرند، تا بتوانند در موقع لزوم از آن استفاده نمایند.

در ادامه تأکید می‌شود که حتماً روی علامت‌های Δ بحث کنید و حالت‌های مختلف حلّ معادله را در حالت‌هایی که دلتا منفی، صفر یا مثبت باشد، بررسی کنید و مثال بزنید. در این زمینه می‌توانند فعالیت صفحهٔ ۷۴ و کار در کلاس شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۷۵ را کامل کنند.

کار در کلاس شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۷۵ و مثال‌هایی شبیه آن می‌توانند به عنوان تمرین این قسمت در کلاس حل شوند. مثال صفحهٔ ۷۶، یک نمونه از مثال‌های کاربردی و جذّاب از معادلات درجهٔ دوم‌اند و می‌توانند برای تنوّع دادن به تدریس به‌کار روند.

برای تمرین‌های صفحه‌های ۷۶ و ۷۷ وقت کافی بدهیم تا دانش‌آموزان با حلّ تمرین‌های ۶ تا ۱۱ به کاربرد این درس مسلّط شوند.

درس دوم

سهمی

اهداف

- ❑ شکل کلی سهمی را با استفاده از ضریب a، قبل از رسم بداند.
- ❑ سهمی را با استفاده از مربع کامل کردن و نقطه‌یابی رسم کند.
- ❑ مختصات رأس سهمی را قبل از رسم بنویسد.
- ❑ معادلهٔ محور تقارن را قبل از رسم بنویسد و آن را رسم کند.
- ❑ سهمی را با استفاده از ضرایب آن و نقطه‌یابی رسم کند.
- ❑ اهمیت رأس سهمی را به‌عنوان نقطه‌ای که می‌توان از آن ماکزیمم یا مینیمم عبارتی را تعیین کرد، درک کرده و از آن استفاده کند.

روش تدریس

در ابتدای درس سهمی، بهتر است با خلاصه‌ای دربارهٔ تاریخچه و کاربردهای سهمی شروع شود: «اسحاق نیوتن از سهمی برای محاسبهٔ مدار شهاب‌سنگ‌ها استفاده می‌کرد. گالیله نشان داد که وقتی جسمی را در هوا پرتاب می‌کنیم، مسیر حرکت آن سهموی است. نیوتن و گرگوری نشان دادند که هنگامی‌که نور به‌صورت موازی به یک آینه سهموی تابانده شود، پس از انعکاس در کانون آن جمع می‌شود. پاسکال سهمی را تصویر یک دایره در نظر گرفت. اقتصادی‌ترین شکل پل کمانی، در اغلب شرایط سهمی است.» همچنین می‌توانید از جلسهٔ قبل به دانش‌آموزان بگویید که یک مخروط کاغذی درست کنند و همراه خودشان بیاورند. و بعد سر کلاس حدس بزنند که در صورت تقاطع یک صفحه با مخروط چه شکلی به‌وجود می‌آید. از مثال های کاربردی مانند مسیر پرش یک اسکی‌باز، یا مسیر حرکت توپ بسکتبال نیز می‌توانید برای

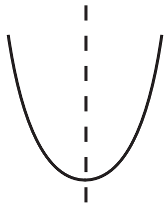
توضیح شکل سهمی و آشنایی دانش‌آموزان با آن استفاده کنید. تقدّم و تأخّر این مقدمات سلیقه‌ای است.

در آغاز درس در صفحهٔ ۷۸ فعالیتی آورده شده است که معادلهٔ $y=x^2-4$ و نمودار آن را بررسی می‌کند. پنج نقطه که طول‌های کوچکی دارند در نظر گرفته و در معادله قرار داده و عرض آنها را به‌دست آورید. سپس نقاط را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و به‌هم وصل کنید. در همین فعالیت، مفهوم رأس سهمی و محور تقارن آن را برای شاگردان توضیح دهید و تذکر دهید که می‌توانند با حداقل سه نقطه، سهمی را رسم کنند.

ارتباط بین نمودار سهمی و معادلهٔ سهمی در صفحهٔ ۷۹ توضیح داده شده است. همچنین ارتباط بین ضریب x^2 یعنی a با شکل سهمی نیز در همان صفحه آورده شده است.

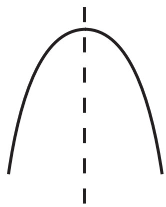
$y=ax^2+bx+c \longrightarrow$

$\longrightarrow a>0 \longrightarrow$ رأس سهمی : پایین‌ترین نقطه



$\mathbf{a}>0$

$\longrightarrow a<0 \longrightarrow$ رأس سهمی : بالاترین نقطه



$\mathbf{a}<0$

توصیه می‌شود : فعالیت صفحهٔ ۷۹، یا مثالی شبیه آن حتماً حل نمایید و حداقل دو سهمی با استفاده از مربع کامل کردن رسم کنید.

«شکل کلی ضابطهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-h)^2+k$, $(a\neq 0)$ است که رأسی به مختصات (h,k) و محور تقارنی با معادلهٔ $x=h$ دارد.»

این تعریف در صفحهٔ ۸۰ آمده که بهتر است در کار درکلاس پس از آن، **مختصات رئوس** را خود دانش‌آموزان به‌دست آورده و سهمی را رسم نمایند. **فعالیت صفحهٔ ۱۲** از نظر مفهومی بسیار مهم بوده و بهتر است دانش‌آموزان سعی کنند معادلهٔ کلی سهمی را که به‌صورت $y=ax^۲+bx+c$ می‌باشد، مربع کامل کنند و به تساوی زیر برسند :

$$y = a(x+\frac{b}{۲a})^۲ + \frac{۴ac-b^۲}{۴a}$$

سپس با استفاده از شکل کلی $y=(x-h)^۲+k$ و رأس سهمی به‌صورت (h,k)، نشان دهند که :

$$-h = \frac{b}{۲a} \to h = -\frac{b}{۲a} \ , \ k = \frac{۴ac-b^۲}{۴a}$$

پس رأس هر سهمی به‌صورت $(\frac{-b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ می‌باشد و معادلهٔ محور تقارن که در شکل کلی به صورت $x=h$ است، به‌صورت $x=-\frac{b}{۲a}$ درمی‌آید.

پس از این فعالیت، دانش‌آموز باید این توانایی را داشته باشد که مثال‌هایی شبیه مثال صفحهٔ ۸۰ را حل کند و با داشتن معادلهٔ سهمی و قبل از رسم آن، مختصات رأس سهمی و معادلهٔ محور تقارن سهمی را نوشته و سپس سهمی را رسم نماید.

فعالیت صفحهٔ ۸۱، قسمتی از درس را بازگو می‌کند و بر این موضوع تأکید می‌کند که ضرایب $x^۲$ اگر بزرگ‌تر از واحد باشند، دهانهٔ سهمی بسته‌تر و اگر کمتر از واحد باشند، دهانهٔ سهمی بازتر خواهد شد. این موضوع حتماً برای دانش‌آموزان شفاف شود. تمرین‌های صفحهٔ ۸۱ و صفحهٔ ۸۲ را برای جلسهٔ آتی در نظر بگیرید.

درس سوم

تعیین علامت

اهداف

❑ چند جمله‌ای‌های درجه اوّل و دوم را تعیین علامت نماید و مشخص کند در چه بازه‌ای مثبت، در چه بازه‌ای منفی و به ازای کدام مقادیر متغیر، صفر است.

❑ عبارت‌های شامل چند جمله‌ای‌های درجه اوّل و دوم را تعیین علامت نماید و مشخص کند در چه بازه‌ای مثبت، در چه بازه‌ای منفی و به ازای کدام مقادیر متغیر، صفر است.

❑ نامعادلهٔ دوگانه را با عبارت خواص جمع و ضرب حل کرده و مجموعه جواب را به‌صورت بازه و روی محور اعداد حقیقی مشخص کند.

❑ نامعادلهٔ با عبارات درجهٔ ۲ را با دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کند و مجموعهٔ جواب را به‌صورت بازه و روی محور اعداد حقیقی مشخص کند.

❑ مفهوم نامعادلهٔ قدرمطلقی (درجهٔ اول) را به‌صورت هندسی بداند و بتواند با خواص جبری، مجموعهٔ جواب را به‌دست آورد.

❑ با مسائل کاربردی که شامل تعیین علامت چند جمله‌ای‌های درجهٔ دوم است، آشنا شود.

تعیین علامت عبارات جبری در این کتاب به دو قسمت چند جمله‌ای درجه اوّل و چند جمله‌ای درجه دوم تقسیم می‌شود که یکی از اساسی‌ترین قسمت‌های ریاضی پایه است و اهمیت آن ناشی از کاربردش در حلّ نامعادلات وپیدا کردن دامنه و برد توابع است.

بخش اوّل : تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اوّل

تعیین علامت در آغاز درس با مثالی کاربردی شروع می‌شود که در آن می‌خواهد عبارت $5x-200$ را تعیین علامت نماید. اگر تعداد کالای تولید شده را x فرض کنیم، سود حاصل برای شرکت تولیدی مفروض، از این عبارت به‌دست می‌آید.

برای تفهیم این موضوع ابتدا چند مقدار دلخواه برای x را درنظر گرفته و در عبارت p(x) قرار داده و جدولی برای آن می‌کشیم. عدد ۴۰ را نیز در آن قرار داده و دو عدد قبل و دو عدد بعد از آن را می‌نویسیم مشخص است که برای اعداد بزرگ‌تر از ۴۰، مقادیر، علامت مثبت و برای اعداد کوچک‌تر از ۴۰، مقادیر، علامت منفی اختیار خواهند کرد و به ازای عدد ۴۰ مقدار p(x) برابر صفر خواهد بود.

می‌توان برای دانش‌آموزان به این صورت استنباط نمود که اگر این شرکت دقیقاً ۴۰ کالا تولید نماید، هیچ سودی به‌دست نمی‌آورد و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید کند به سوددهی می‌رسد و چنان که کمتر از ۴۰ کالا تولید نماید، این شرکت متضرّر خواهد شد. از جدول تعیین علامت صفحه ۸۳ نیز می‌توان در پایان این مثال بهره برد.

همان‌طور که مشخص است این مثال، نمایانگر عینی از کاربرد تعیین علامت در مسائل اقتصادی است که می‌توان شبیه آن تمرینی طرح کرد که توسط دانش‌آموزان حل شود. در فعالیت صفحهٔ ۱۵ نمودار دو خط $y=2x-6$ و $y=-2x+6$ رسم شده است و با استفاده از آن، y، تعیین علامت شده است. در این فعّالیت سعی شده دانش‌آموز با رویکردی هندسی به تعیین علامت فکر کند. در حالت کلی دو جمله‌ای درجه اوّل را به‌حالت عمومی $y=ax+b$ که در آن $a\neq 0$ نمایش می‌دهیم و هدف از تعیین علامت دو جمله‌ای این است که مقادیری حقیقی برای x بیابیم که به ازای آنها دو جمله‌ای، + یا − یا به ازای یک مقدار x برابر با ۰ شود که به کمک جدول زیر که جدول تعیین علامت نامیده می‌شود این کار را انجام می‌دهیم؛

$$y=ax+b \rightarrow ax+b=0 \rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
y=ax+b	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

در ادامه در صفحهٔ ۸۴ مثال ساده‌ای نیز آورده شده که با رویکرد صرفاً جبری و با استفاده از جدول فوق نوشته شده است. تعیین علامت عبارت‌های شامل عامل‌های درجه اوّل در مثال صفحهٔ ۸۵ نوشته

شده که در آن، هدف تعیین علامت عبارت $A=(2x-1)(3-x)$ است، ابتدا به‌صورت جداگانه هر عبارت را تعیین علامت می‌کنیم و سپس اطلاعات این دو جدول را در یک جدول می‌نویسیم و علامت عبارت A را نیز از حاصل‌ضرب علامت‌های سطر اوّل و دوم به‌دست می‌آوریم. توصیه می‌شود تمرین‌های مشابه این مثال سرکلاس حل شود. کار در کلاس صفحهٔ ۸۵ شامل چهار قسمت می‌باشد که قسمت الف مشابه مثال صفحهٔ ۸۵ است. قسمت ب یک عبارت پرانتزی با درجه دوم است که حتماً باید برای دانش‌آموزان توضیح دهید که عبارات جبری با درجهٔ زوج همراه علامت + دارند و فقط در ریشهٔ عبارت داخل پرانتز، صفر می‌باشند. قسمت ج نیز حاصل‌ضرب x^3 در یک عبارت درجه اوّل است که همانند قبل این موضوع برای شاگردان شفاف شود که عبارات با درجهٔ فرد، دارای علامتی همانند عبارات با درجهٔ ۱ می‌باشند. در نهایت در قسمت د، حاصل تقسیم دو عبارت درجهٔ ۱ است که مفهوم «تعریف نشده» در حاصل تعیین علامت کسر در این مثال مشخص می‌گردد.

بخش دوم : تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

شکل کلی چند جمله‌ای‌های درجه دوم به‌صورت $p(x)=ax^2+bx+c$ است که در آن a، b، c اعداد حقیقی بوده و $a\neq 0$، با توجه به توضیحات همین فصل داریم :

$$P(x)=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=$$

$$a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

که با توجه به علامت Δ، تعداد ریشه‌های $p(x)=0$ متفاوت خواهد بود.

حالت اوّل : $\Delta>0$

$$P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\right]$$

$$=a\left[(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})\right]$$

که با فرض $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ داریم :

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

حال فرض می‌کنیم $x_1 < x_2$ در این‌صورت علامت $P(x)$ برای مقادیر مختلف x، طبق جدول زیر تعیین می‌شود :

x		x_1		x_2	
P(x)	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

زیرا :

۱ اگر $x < x_1$ باشد؛ چون $x_1 < x_2$ بنابراین $x < x_2$ نیز می‌باشد، پس :

$P(x)$ هم‌علامت a خواهد بود. $$P(x) = a(\underbrace{x - x_1}_{<0})(\underbrace{x - x_2}_{<0}) \rightarrow$$

۲ اگر $x_1 < x < x_2$ باشد: $P(x)$ علامتی مخالف علامت a $\leftarrow P(x) = a(\underbrace{x - x_1}_{>0})(\underbrace{x - x_2}_{<0})$ خواهد داشت.

۳ اگر $x > x_2$، چون $x_1 < x_2$ بنابراین $x > x_1$ نیز می‌باشد، پس :

$P(x)$ هم‌علامت a خواهد بود. $$P(x) = a(\underbrace{x - x_1}_{>0})(\underbrace{x - x_2}_{>0}) \rightarrow$$

حالت دوم : $\Delta = 0$: در این حالت خواهیم داشت :

$$P(x) = a(x_1 + \frac{b}{2a})(x_2 + \frac{b}{2a}) = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

در این حالت دو ریشه با مقادیر مساوی یا اصطلاحاً یک ریشهٔ مضاعف داریم. بنابراین، جدول تعیین علامت $P(x)$ به‌صورت زیر خواهد بود :

x		$x_1 = x_2$	
P(x)	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

حالت سوم : $\Delta < 0$: در این حالت، معادلهٔ $P(x) = 0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و از آنجایی که داریم :

$$P(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

و $\Delta < 0$ ، پس عبارت داخل کروشه همواره + خواهد بود و علامت $P(x)$ همان علامت a است.

این مفهوم برای حلّ مسائلی که تعیین پارامترها و حدود آنها را می‌خواهند و شرط P(x) همواره + یا همواره− را دارند به‌کار می‌رود. توجه دانش‌آموزان به این نکته حتماً جلب شود که دو حالت داریم :

۱) $P(x) > ۰ \rightarrow \Delta < ۰ \, , a > ۰$

۲) $P(x) < ۰ \rightarrow \Delta < ۰ \, , a < ۰$

مثال صفحهٔ ۸۷ نیز پس از به‌دست آوردن ریشه‌های معادلهٔ داده شده در حالت $\Delta > ۰$، عبارت A را تعیین علامت می‌نماید.

مثال و کار در کلاس صفحهٔ ۸۷ نیز مثال‌هایی برای تعیین علامت، عباراتی شامل عوامل درجه اول و درجه دوم می‌باشند که کلّ این مسائل و مسائلی شبیه آن توصیه می‌گردد.

نامعادله

نامعادله به‌عنوان آخرین مبحث این فصل قرار گرفته است و از آنجایی که دانش‌آموزان در سال نهم با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اند، ابتدا نحوهٔ خواندن نامعادلات را یادآوری کرده است. سپس خاصیت جمع و خاصیت ضرب در نامعادلات توضیح داده شده است. مثال صفحهٔ ۸۹ یک مثال ساده از نامعادله با عبارات درجه اوّل می‌باشد که با استفاده از خواص جمع و ضرب حل شده و مجموعه جواب این نامعادله به‌صورت مجموعه و بازه و نمایش هندسی نشان داده شده است.

صفحهٔ ۸۹ این فصل با بحث «نامعادلهٔ دوگانه» آغاز می‌شود که یک عبارت جبری به‌صورت مثال آورده شده و در دو نامعادلهٔ جداگانه بین دو عدد قرار داده شده، برای حل، دو راه پیشنهاد داده شده است : راه اوّل : دو نامعادله حل شود و بین جواب‌ها اشتراک گرفته شود. راه دوم : ترکیب دو نامعادله باهم است که به‌صورت یک نامساوی دوگانه نوشته می‌شود و سپس با استفاده از خواص جمع و ضرب، حدود x تعیین می‌شود. همچنین این نکته هم گفته شده که نامعادلهٔ دوگانه را به‌صورت دستگاه نامعادلات نیز می‌توان نشان داد.

کار در کلاس صفحهٔ ۹۰ نیز مثالی برای نامعادلهٔ دوگانه می‌باشد که حلّ آن توصیه می‌گردد. فعالیت صفحه ۹۰ یک چندجمله‌ای درجه دوم مثال زده و نمودار آن را رسم نموده است. سپس با استفاده از نمودار مفهوم منفی بودن را ارائه می‌کند و با جدول تعیین علامت نیز بر این موضوع تأکید می‌نماید. کار در کلاس صفحهٔ ۹۰ نیز چند مثال در همین رابطه آورده که به دو روش هندسی و با جدول تعیین علامت، نامعادله با چندجمله‌ای درجه دوم را حل کرده است. در مثال صفحهٔ ۹۰ یک چندجمله‌ای درجه دوم با پارامتر مجهول به عنوان ضریب x ارائه داده که حدود این پارامتر را با شرط همواره مثبت بودن چندجمله‌ای خواسته و با شرط $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ و حلّ نامعادله $m^۲-۴<۰$، با استفاده از جدول تعیین علامت، آن را حل

نموده است. مثال صفحهٔ ۹۱ یک نامعادله به‌صورت $\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}\geq ۰$ آورده که ترکیبی با عوامل درجه اوّل و دوم می‌باشد و با استفاده از جدول تعیین علامت، عبارت $\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}$ را تعیین علامت نموده است، و در سطر آخر هرجا که کسر بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، در مجموعه جواب نامعادله قرار داده است.

حلّ نامعادلات قدر مطلقی، پس از این مثال به عنوان آخرین مبحث این فصل در صفحهٔ ۹۱ آورده شده که در ابتدا به مفهوم نامعادلهٔ قدر مطلقی با یک نامعادلهٔ ساده به صورت $|x|\leq ۳$ اشاره شده و اعدادی که در این نامعادله صدق می‌کنند، روی محور نشان داده شده است و به‌صورت بازه نیز با جای خالی داده شده است. همچنین نامعادلهٔ $|x|\geq ۳$ نیز به همین اشکال آورده شده است. سپس در ادامهٔ نامعادلات قدر مطلقی به‌صورت نامعادله‌های دوگانه و مجموعه جواب ذکر شده‌اند و در نهایت به‌صورت یک قاعدهٔ کلّی گفته شده است. مثال صفحهٔ ۹۲ نیز با استفاده از همین قاعده دو نامعادله را مثال زده و به‌صورت نامعادلهٔ دوگانه مجموعه جواب را به‌صورت بازه و همچنین روی محور اعداد حقیقی نشان داده است. دقت کنید که قسمت اوّل به روش هندسی نیز حل شده است. کار در کلاس صفحهٔ ۹۳ نیز دارای چهار قسمت است که قسمت‌های الف و ب سؤال ۱ همانند مثال قبل از قاعده مذکور حل می‌شوند و سؤال ۲ و ۳، سؤالات جالبی هستند که در واقع پاسخ آورده شده و صورت سؤال را خواسته است و حلّ این دو قسمت به روش هندسی توصیه می‌شود. تمرین‌های صفحهٔ ۹۳ نیز جهت تمرین بیشتر این مفهوم به‌صورت غیرتکراری از مفاهیم مختلف حل می‌شوند که حل تمامی آنها در کلاس درس لازم است.

حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۷۶

۶ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

حل : دو عدد فرد متوالی را $۲k+۱$ و $۲k+۳$ می‌گیریم. پس :

$$(۲k+۱)^{۲}+(۲k+۳)^{۲}=۲۹۰\Rightarrow ۴k^{۲}+۴k+۱+۴k^{۲}+۱۲k+۹=۲۹۰\Rightarrow$$
$$۸k^{۲}+۱۶k-۲۸۰=۰$$

و با ساده کردن به معادلهٔ $k^{۲}+۲k-۳۵=۰$ می‌رسیم. اکنون این معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم :

$$k^{۲}+۲k-۳۵=۰\Rightarrow (k+۷)(k-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}k+۷=۰\Rightarrow k=-۷\\ k-۵=۰\Rightarrow k=۵\end{cases}$$

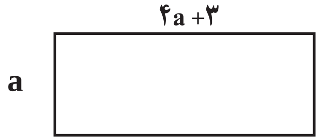
اگر $k=۵$ باشد، دو عدد فرد متوالی، عبارت‌اند از ۱۱ و ۱۳. همچنین اگر $k=-۷$ باشد، این دو عدد فرد متوالی، عبارت‌اند از ۱۱– و ۱۳–.

۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

حل : مساحت این مستطیل، ۴۵ سانتی‌متر مربع است، پس :

$$a(۴a+۳)=۴۵ \Rightarrow ۴a^{۲}+۳a-۴۵=۰ \Rightarrow$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۹-۴(۴)(-۴۵)=۹+۷۲۰=۷۲۹$$



پس معادلهٔ فوق دو ریشه دارد و این دو ریشه عبارت‌اند از :

$$a=\frac{-۳\pm\sqrt{۷۲۹}}{۸}=\frac{-۳\pm ۲۷}{۸}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-۳+۲۷}{۸}=\dfrac{۲۴}{۸}=۳\\[2ex] a=\dfrac{-۳-۲۷}{۸}=\dfrac{-۳۰}{۸}=\dfrac{-۱۵}{۴}\end{cases}$$

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر چهار سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سنّ آنها ۶۰ شود، سنّ هرکدام چقدر است؟

حل : اگر سنّ این دو برادر را با a و b نشان دهیم، سپس $a-b=۴$. از سوی دیگر، بعد از چهار سال رابطهٔ $(a+۴)(b+۴)=۶۰$ برقرار است. بنابراین، با جایگذاری $a=b+۴$ در این رابطه داریم :

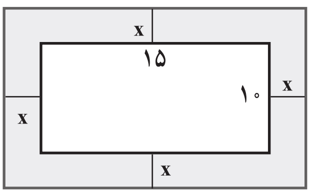
$$(a+۴)(b+۴)=۶۰\Rightarrow(b+۴+۴)(b+۴)=۶۰\Rightarrow$$

$$(b+۸)(b+۴)=۶۰\Rightarrow b^{۲}+۱۲b+۳۲=۶۰$$

که با ساده کردن به معادلهٔ $b^{۲}+۱۲b-۲۸=۰$ می‌رسیم. این معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم :

$$b^{۲}+۱۲b-۲۸=۰\Rightarrow(b+۱۴)(b-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}b+۱۴=۰\Rightarrow b=-۱۴\\ b-۲=۰\Rightarrow b=۲\end{cases}$$

و با توجه به اینکه سنّ انسان منفی نمی‌تواند باشد، جواب $b=-۱۴$ رد می‌شود و $b=۲$ سنّ برادر کوچک‌تر و سنّ برادر بزرگ‌تر، $a=۶$ است.



۹ یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد،ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

حل : مساحت مستطیل بزرگ (قاب عکس به همراه عکس) ۴۵۰ سانتی‌متر مربع است، پس :

$$(۱۵+۲x)(۱۰+۲x) = ۴۵۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۵۰x - ۴۵۰ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲۵x - ۲۲۵ = ۰$$

و این معادله را به روش کلی حل می‌کنیم :

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۲۵)^۲ - ۴(۲)(-۲۲۵) = ۶۲۵ + ۱۸۰۰ = ۲۴۲۵$$

پس معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد و داریم :

$$x = \frac{-۲۵ \pm \sqrt{۲۴۲۵}}{۴} \cong \frac{-۲۵ \pm ۴۹/۲۴}{۴}$$

و با توجه به اینکه x یک عدد مثبت است، جواب زیر به‌دست می‌آید :

$$x \cong \frac{-۲۵ + ۴۹/۲۴}{۴} = ۶/۰۶$$

۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به‌دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به‌دست آورید.

حل : اگر تعداد تیم‌ها، n باشد، تیم اوّل، با n−۱ تیم بازی می‌کند. تیم دوم باید با n−۲ تیم (همهٔ تیم‌ها به جز تیم اوّل) بازی کرده و به همین ترتیب، تیم سوم با n − ۳ تیم و ... و تیم n − ۱ام فقط با یک تیم بازی می‌کند، پس تعداد بازی‌های انجام شده عبارت است از : $(n-۱) + (n-۲) + ... + ۲ + ۱ = \frac{n(n-۱)}{۲}$

و این عدد باید N باشد، پس $N = \frac{n(n-۱)}{۲}$.

اگر ۴۵ بازی در لیگ انجام شده باشد، داریم :

$$\frac{n(n-۱)}{۲} = ۴۵ \Rightarrow n(n-۱) = ۹۰ \Rightarrow n^۲ - n - ۹۰ = ۰$$

پس $(n-۱۰)(n+۹) = ۰$ که جواب‌های $n = ۱۰$ و $n = -۹$ به‌دست می‌آید که تنها $n = ۱۰$ قابل قبول است.

۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر[1]، که برحسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطه $P=۰/۰۰۶s^۲-۰/۰۲s+۱۲۰$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سنّ s است. سنّ شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

حل: در رابطهٔ $P=۰/۰۰۶s^۲-۰/۰۲s+۱۲۰$ قرار می‌دهیم $P=۱۲۵$ و معادله را حل می‌کنیم.

$$۰/۰۰۶s^۲-۰/۰۲s+۱۲۰=۱۲۵ \Rightarrow ۰/۰۰۶s^۲-۰/۰۲s-۵=۰$$

و این معادله را با روش کلی حل می‌کنیم و جواب‌های $x=۳۰/۵۸$ و $x=-۲۷/۲۴$ را به‌دست می‌آوریم. که تنها جواب $x=۳۰/۵۸$ قابل قبول است.

حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۸۱

۲ **حل**: دو نقطهٔ $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ عرض یکسان دارند، پس نقطهٔ میانی آنها، یعنی $(-۱,۵)=(\frac{۰-۲}{۲},\frac{۵+۵}{۲})$ روی خط تقارن قرار دارد، پس معادلهٔ خط تقارن، $x=-۱$ است.

۳ **حل**: محور yها در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع شده است، پس از نقطهٔ $(۰,۲)$ می‌گذرد، همچنین محور xها را در نقاط $(-۱,۰)$ و $(۲,۰)$ قطع کرده است، پس این سه نقطه را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}(۰,۲)\Rightarrow ۲=a(\cancel{۰})+b(\cancel{۰})+c\Rightarrow \boxed{c=۲}\\(-۱,۰)\Rightarrow ۰=a(۱)+b(-۱)+c\Rightarrow a-b=-۲\Rightarrow\begin{cases}۲a-۲b=-۴\\۴a+۲b=-۲\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}\\(۲,۰)\Rightarrow ۰=a(۴)+b(۲)+c\Rightarrow ۴a+۲b=-۲\end{cases}$$

$$۶a=-۶\Rightarrow\boxed{a=-۱}\ ,\ a-b=-۲\Rightarrow -۱-b=-۲\Rightarrow\boxed{b=۱}$$

پس معادلهٔ سهمی عبارت است از: $y=-x^۲+x+۲$

۱ـ منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

۴ **حل :** دو سهمی $y=-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲$ و $y=-۲x^{۲}+۳x+۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. همچنین برای یافتن نقطهٔ فرود و برخورد با زمین، قرار می‌دهیم $y=۰$ و معادلهٔ به‌دست آمده را حل می‌کنیم و تنها جواب‌های مثبت را قبول می‌کنیم.

$$y=-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲$$

$$(\text{رأس})\ x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{۲(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow \text{رأس}=(\frac{۳}{۲},\frac{۲۵}{۸})$$

$$y=۰\Rightarrow -\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲=۰\overset{\times ۲}{\Rightarrow}-x^{۲}+۳x+۴=۰\Rightarrow x^{۲}-۳x-۴=۰\Rightarrow$$

$$(x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۴\quad ,\quad x=-۱$$

$\Rightarrow$

x	۰	$\frac{۳}{۲}$	۳	۴
y	۲	$\frac{۲۵}{۸}$	۲	۰

$$y=-۲x^{۲}+۳x+۲$$

$$(\text{رأس})\ x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳}{۲(-۲)}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow y=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow \text{رأس}=(\frac{۳}{۴},\frac{۲۵}{۸})$$

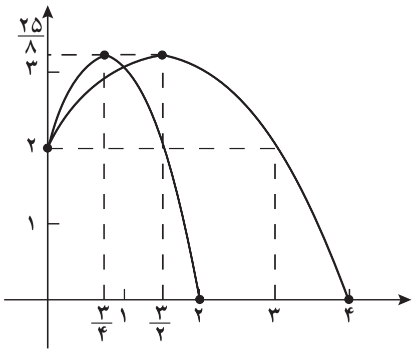
$$y=۰-۲x^{۲}+۳x+۲=۰\Rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=۹=۱۶=۲۵\Rightarrow x=\frac{-۳\pm ۵}{-۴}=۲$$

یا $-\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow$

x	۰	$\frac{۳}{۴}$	۲
y	۲	$\frac{۲۵}{۸}$	۰

و نمودار این دو سهمی در زیر رسم شده است.



حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۸۱

۲ **حل** : قرار دهید $x^۲ + ۳x + k > ۰$. برای اینکه یک چندجمله‌ای درجه دوم همیشه مثبت باشد، باید $\Delta < ۰$. پس $۹ - ۴k < ۰$، بنابراین $k > \frac{۹}{۴}$.

۳ **حل** : قرار دهید $mx^۲ - mx - ۱ < ۰$ ، پس $\Delta < ۰$ و ضریب $x^۲$، یعنی m نیز باید منفی باشد، پس :

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \Rightarrow m^۲ + ۴m < ۰ \Rightarrow m(m+۴) < ۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} m & & -۴ & & ۰ & \\ \hline m^۲ + ۴m & + & \phi & \bigcirc & \phi & + \end{array} \\ m < ۰ \end{cases}$$

پس مجموعه جواب، اشتراک جواب‌های $-۴ < m < ۰$ و $m < ۰$ است که $-۴ < m < ۰$ است.

۴ **حل** : قرار دهید : $-۵t^۲ + ۱۸t + ۱۳ > ۱۳$ و این نامعادله را حل کنید.

۵ **حل** : قرار دهید $\frac{۱۵}{۸}x^۲ - ۳۰x + ۲۰۰ < ۱۱۰$ و این نامعادله را حل کنید. جواب‌های این نامعادله عبارت‌اند از : $x < ۴$ و $x > ۱۲$ که تنها $x < ۴$ قابل قبول است؛ زیرا پس از یک کار سنگین بدنی تا ۴ دقیقه ممکن است ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر باشد و نه بعد از دوازده دقیقه.