فصل ۵

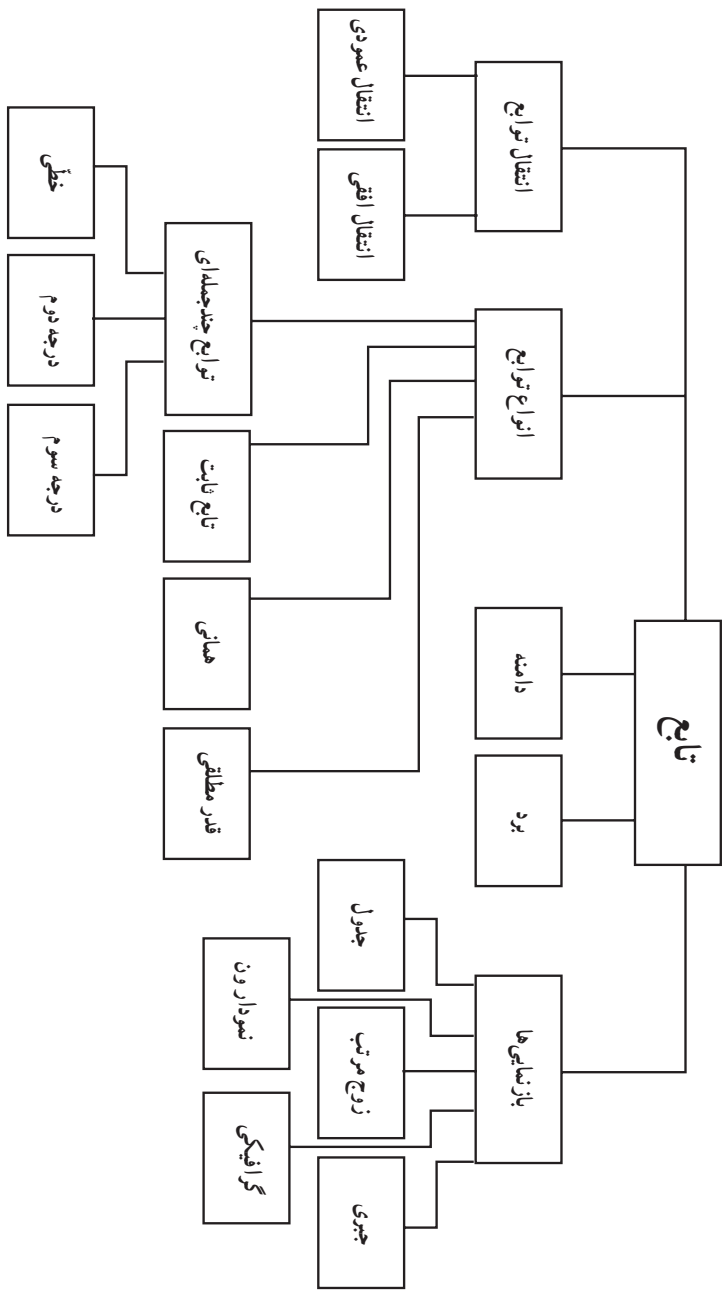
تابع

نگاه کلّی به فصل

فصل ۵ از سه درس تشکیل شده است. درس اوّل به مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن اختصاص دارد. درس دوم به دامنه و برد توابع می‌پردازد و در درس سوم انواع توابع مورد بررسی قرار می‌گیرند. معرفی ایده‌های مجرد بدون فراهم نمودن زمینه‌ای طبیعی و مناسب برای آنها و نیز بدون تکیه بر دانش و تجربهٔ قبلی دانش‌آموزان بر دشواری‌های یادگیری می‌افزاید و گاهی دسترسی فراگیران را به این ایده‌ها ناممکن می‌سازد و علاوه بر این، باعث بروز پدیده‌ای به نام مقاومت در برابر یادگیری در دانش‌آموزان می‌شود. رویکرد منطقی تعریف تابع با زوج مرتب در مدرسه شروع مناسبی نمی‌باشد و بسیاری از دانش‌آموزان را به‌جای تفکّر و مشاهدهٔ دقیق و کشف رمزها و نظام‌های نهفته در پدیده‌های پیرامونی، به حفظ کردن طوطی‌وار و اعمال مکانیکی وادار می‌کند. دانش‌آموز پی‌نمی‌برد که تعاریف از کجا سرچشمه می‌گیرند و ارائهٔ چنین تعریفی را شبیه شعبده‌بازی می‌پندارد. نمی‌توان از دانش‌آموزان انتظار داشت که مفهومی مجرّد مانند تابع را به یکباره و پس از یک معرفی صریح و بدون فراهم کردن پیش‌نیازهای لازم درک کنند. در این فصل سعی شده است هنگام آموزش تابع موارد زیر مدّنظر قرار گیرد :

- انجام فعالیت توسط دانش‌آموزان برای کسب مفهوم.
- فراهم کردن موقعیت‌های یادگیری متنوع.
- تکیه بر دانش قبلی دانش‌آموزان.
- حرکت از شهود به تجرید.
- ایجاد یک جریان استقرایی و فراهم کردن فرصت کشف.
- استفاده از سطح تجرید مناسب با دانش‌آموزان.
- توانایی نشان دادن ارتباطات بین مفاهیم ارائه شده.
- پرهیز از تکیهٔ صرف بر دانش رویه‌ای.
- استفاده از مثال‌های واقعی مبتنی بر تجربیات عینی دانش‌آموزان.
- طرح مسائل مرتبط با بدفهمی‌های دانش‌آموزان.
- فراهم کردن فرصت‌های طرح مسئله برای دانش‌آموزان.
- توانایی برقراری ارتباط و سازگاری بین بازنمایی‌های متفاوت از تابع.

نقشهٔ مفهومی


تابع
دامنه
برد
انواع توابع
انتقال توابع
انتقال عمودی
انتقال افقی
توابع چندجمله‌ای
خطی
درجه دوم
درجه سوم
تابع ثابت
همانی
قدر مطلقی
بازنمایی‌ها
جدول
نمودار ون
زوج مرتب
گرافیکی
جبری

تصویر عنوانی

تصویر عنوانی فصل پنج به ارائهٔ نمودارهایی مبتنی بر اسناد رسمی در رابطه با کاهش نرخ رشد جمعیت و پیش‌بینی رشد جمعیت کل کشور در چهار وضعیت مختلف اختصاص دارد. تصویر عنوانی فوق، مثالی از برقراری ارتباط بین ریاضیات و دنیای واقعی است. در حقیقت نمودارها یکی از انواع بازنمایی‌های مربوط به تابع را نشان می‌دهند. اگرچه درک کامل و تفسیر این نمودارها پس از آموزش‌های لازم امکان‌پذیر است، با این حال، در اوّلین برخورد نیز نمودارها به کمک توضیحات معلمان تا حدّی گویا هستند. همچنین تصویر عنوانی فوق سعی در فرهنگ‌سازی و طرح یکی از مسائل و مشکلات کشور را دارد. در رابطه با اهمیت فرهنگی موضوع بهترین کار آشنایی با دیدگاه‌ها و نظرات رهبر معظّم انقلاب در این زمینه است[۱] :

مسئلهٔ جمعیت که به جد هم مورد بحث و اختلاف نظر در جامعه است، مسئلهٔ بسیار مهمی است. بلاشک از نظر سیاست کلّی کشور، کشور باید برود به سمت افزایش جمعیت، البته به نحو معقول و معتدل. همهٔ اشکالات و ایرادهایی که وارد می‌شود ــ که بعضی از اشکالاتی را هم که مطرح می‌کنند ما دیده‌ایم ــ قابل برطرف شدن و قابل پاسخ دادن است.

فرهنگ‌سازی در مسئلهٔ جمعیت، مثل خیلی از مسائل دیگر اجتماعی، حرف اوّل را می‌زند؛ باید فرهنگ‌سازی بشود که متأسفانه امروز این فرهنگ‌سازی نیست.

من معتقدم که کشور ما با امکاناتی که داریم، می‌تواند صد و پنجاه میلیون نفر جمعیت داشته باشد. من معتقد به کثرت جمعیّتم. هر اقدام و تدبیری که می‌خواهد برای متوقف کردن رشد جمعیت انجام بگیرد، بعد از صد و پنجاه میلیون انجام بگیرد!

آنچه که متخصصین و کارشناسان، با نگاه‌های علمی، با دقّت علمی بررسی کرده‌اند، ما را به این نتیجه می‌رساند که با این روند کنونی، کشور در آینده دچار مشکل فراوان خواهد شد؛ کشور دچار پیری عمومی خواهد شد. این تهدید نسل، چیز بدی است. البته شنیدم در مجلس طرحی در حال بررسی است؛ منتها آن‌طور که برای ما نقل کردند، آن طرح جواب نمی‌دهد؛ این مقداری که در این طرح دیده شده، جوابگو نیست. مسئولین و علاقه‌مندان و آشنایان با مقتضیات این کار در مجلس، باید توجه کنند و درست انجام دهند.

۱ـ این دیدگاه‌ها برگرفته از منبع حاضر است :
http://farsi.khamenei.ir/newspart-index?tid=۲۶۳۰&p=۲

دانستنی‌هایی برای معلم

مفهوم تابع به درستی به عنوان یکی از مهم‌ترین مفاهیم در سراسر ریاضیات درنظر گرفته می شود. توابع در سرتاسر برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه نیز حضور دارند و به تعبیر NCTM یک ایدهٔ متحدکنندهٔ مهم در ریاضیات‌اند. در حساب، توابع به عنوان اعمال روی اعداد ظاهر می‌شوند؛ مثلاً عمل جمع که یک زوج از اعداد را به مجموع آنها نسبت می‌دهد، در جبر، توابع رابطه‌هایی بین متغیرهایی‌اند که اعداد را نمایش می‌دهند. در هندسه، توابع مجموعه‌های نقاط را به تصاویرشان تحت حرکاتی از قبیل انتقال و دوران نسبت می‌دهند و در احتمال توابع، حوادث را به احتمال وقوع آنها نسبت می‌دهند (NCTM ۱۹۸۹). کلاین (۱۹۴۵ــ ۱۹۰۸) عقیده داشت که تابع باید یک مفهوم پایه در ریاضیات مدرسه باشد.

مفهوم تابع و مثال‌هایی خاص از آن را از هزاران سال قبل می‌توان دنبال کرد. به‌طور مثال، شمردن، چهار عمل اصلی (که توابعی از دو متغیرند)، ریشه‌های دوم، مکعب‌ها و ریشه‌های سوم و موارد زیادی از این دست، همگی دربردارندهٔ مفهوم تابع‌اند. اگرچه سیر تکامل تابع به ۴۰۰۰ سال قبل برمی‌گردد. اما ریاضی‌دان‌ها تنها طیّ ۵۰۰ سال گذشته تلاش‌های خود را برای ارائهٔ یک تعریف دقیق از تابع آغاز کرده‌اند. هم‌زمان با تغییر دیدگاه‌های ریاضی‌دانان از ایده‌های هندسی به ایده‌های جبری نماد تابع نیز دستخوش دگرگونی شد.

در سال ۱۷۱۸ برنولی اوّلین تعریف رسمی از تابع را ارائه کرد. برنولی یک تابع از یک متغیر را یک کمیّت ترکیب شده به هر شیوهٔ دلخواه از این متغیر و تعدادی ثابت می‌داند. اگرچه وی توضیح نمی‌دهد «به هر شیوهٔ دلخواه» به چه معنی است. اویلر در سال ۱۷۴۸ تعریف زیر را ارائه کرد. یک تابع از یک کمیّت متغیّر، عبارتی تحلیلی ترکیب شده به شکل دلخواه از آن کمیّت متغیّر و اعداد یا کمیّت‌های ثابت است. اویلر اولین کسی است که نماد $f(x)$ را به‌کار برد. تعریف اویلر تلاشی برای استفاده از جبر در جهت نمایش موضوعات هندسی بود. مشاهدات اویلر به یک دیدگاه وسیع‌تر از تابع منجر شد.

تعریف اویلر شبیه تعریف برنولی است. اضافه شدن اصطلاح «عبارت تحلیلی» با اهمیت است؛ زیرا اندیشه را از هندسه به جبر تغییر می‌دهد، گرچه اویلر به صراحت عبارت تحلیلی را تعریف نمی‌کند، ولی ازنظر وی، عبارت تحلیلی قابل قبول شامل چهار عمل جبری، ریشه‌ها، نماها، لگاریتم‌ها، توابع مثلثاتی، مشتق‌ها و انتگرال‌هاست.

به هرحال، روشن است که اویلر عبارت زیر را به‌عنوان دو تابع و نه یک تابع درنظر می‌گرفته است.

$$f(x)=\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

در سال ۱۸۲۹ دیریکله مثالی از یک تابع ارائه کرد که در آن، یک مقدار به همهٔ اعداد گویا و مقداری دیگر به‌همهٔ اعداد گنگ نسبت داده می‌شد. این اوّلین مثال صریح از یک تابع بود که نه قابل نمایش به وسیلهٔ یک عبارت تحلیلی بود و نه یک منحنی قابل رسم بدون ابزار بود. این اوّلین مثال از یک تابع همه‌جا ناپیوسته بود. ریاضی‌دان‌ها مقارن با پایان قرن نوزدهم، برای صورت‌بندی همهٔ ریاضیات با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها تلاشی به کار بردند. دیریکله (۱۸۵۹ ــ ۱۸۰۵) در سال ۱۸۳۷ چارچوب تعریف یک تابع را برحسب یک تناظر قراردادی بین متغیرهایی که با مجموعه‌های عددی نمایش داده شده‌اند، پی‌ریزی کرد. کلینر (۱۹۸۹) به نقل از لوزین، تعریف دیریکله را چنین ذکر می‌کند : y تابعی از متغیر x تعریف شده روی بازهٔ $a< x < b$ است، هرگاه به هر مقدار متغیّر x از این بازه یک مقدار معیّن از متغیر y نظیر شود. دیریکله اوّلین کسی بود که به‌صورت جدّی مفهوم تابع را به‌عنوان یک تناظر دلخواه درنظر گرفت.

در سال ۱۹۳۹ یک گروه از ریاضی‌دانان با نام مستعار بورباکی تابع را به شیوهٔ زیر تعریف کردند : فرض کنید که E و F دو مجموعه باشند که ممکن است مجزا یا غیرمجزا باشند. یک رابطه بین یک متغیّر x از E و یک متغیّر y از F یک رابطه تابع گونه در y نامیده می‌شود. هرگاه برای هر x در E، یک y یکتا در F وجود داشته باشد که در رابطهٔ داده شده با x باشد. بورباکی بعداً همچنین تعریف تابع را به عنوان یک زیرمجموعه خاص از حاصل‌ضرب دکارتی E و F داد. تعریف بورباکی اولین تعریف تابع به‌عنوان یک مجموعه از زوج‌های مرتب است. این دوره را می‌توان حضور یک دیدگاه جدید، یعنی مفهوم منطقی (مجرّد، ترکیبی، اصل موضوعی) جدید از تابع در برابر مفهوم جبری (محسوس، تحلیلی و ساختنی) قبلی از تابع تلقی کرد (کلینر ۱۹۸۹). در حقیقت مفهوم تابع یکی از خصیصه‌های متمایز کننده ریاضیات «مدرن» در برابر ریاضیات کلاسیک است (کلینر ۱۹۸۹).

درس اوّل

مفهوم تابع

اهداف

- آشنایی با مفهوم تابع
- درک بازنمایی‌های مختلف تابع
- ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف تابع و تبدیل آنها به یکدیگر

روش تدریس

در آموزش مفهوم تابع دو موضوع پایه‌ای و اساسی به حساب می‌آیند و برخی موضوعات دیگر می‌توانند قراردادی باشند. اوّلین موضوع اساسی نحوهٔ تناظر و ارتباط بین مجموعه‌هایی است که تابع به کمک آنها تعریف می‌شود. به عبارت دیگر «یکتایی» تناظر یک شرط اساسی برای تابع بودن رابطه‌هاست و در فعالیت‌های طراحی شده در ابتدای درس به این موضوع پرداخته شده است. نکتهٔ مهمّ دیگر این است که اعضای مجموعه‌ها «آزاد» و «دلخواه» هستند و لزوماً به اعداد محدود نمی‌شوند. در ادامه دانش‌آموزان با مقایسهٔ روابطی که تابع نیستند به تمایز و تفاوت‌های آنها پی‌می‌برند. باید توجه داشت که معلمان محترم نقش هدایت کننده و راهنما را دارند و باید با استفاده از موقعیت‌هایی که در درس فراهم شده‌اند (یا مشابه آنها) فرصت‌های یادگیری را برای دانش‌آموزان فراهم نمایند. ارائهٔ بحث و گفت‌وگوهای کلاسی بسیار مفید و ارزشمند خواهد بود. به‌طور طبیعی در حین اجرای فعالیت‌ها پاسخ‌های متفاوتی از سوی دانش‌آموزان (درست یا نادرست) ارائه می‌شود.

بررسی این پاسخ‌ها و قضاوت در مورد آنها به کمک دانش‌آموزان و اصلاح و پالایش ایده‌های مطرح شده به درک بهتر مفهوم توسط دانش‌آموزان کمک می‌نماید. در این درس، دانش‌آموزان با بازنمایی‌های مختلف تابع شامل «نمودار ون»، «زوج مرتبی»، «جدول»، و نمایش «هندسی» یا «گرافیکی» تابع آشنا می‌شوند. باید

به دانش‌آموزان کمک کرد تا برای توابع مشخص و معیّن انواع بازنمایی‌های آن را ارائه نمایند و با مقایسهٔ آنها به جوهر «مفهوم تابع» پی‌ببرند. در این درس، فرصت‌هایی فراهم شده است تا دانش‌آموزان خود به ارائهٔ مثال از تابع بپردازند، اصلاح و ویرایش تکمیل مثال‌ها با مشارکت دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

توصیه‌های آموزشی

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، در کتاب حاضر دامنهٔ تابع f برابر مجموعهٔ A در نظر گرفته می‌شود. همان طور که می‌دانید این یک موضوع قراردادی است که در حال حاضر در بیشتر کتاب‌های آموزشی در سطح دنیا رعایت می‌شود و البته در برخی متون زیر مجموعه‌ای از A را به عنوان دامنه در نظر می‌گیرند. توصیه می‌شود که دانش‌آموزان را درگیر مسائل حاشیه‌ای نکنیم و از طرح مسائل غیر ضروری در این ارتباط پرهیز نماییم؛ همچنین توصیه می‌شود که به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل دشوار و پیچیده که فاقد ارزش آموزشی‌اند اجتناب شود. درک مفهوم تابع کار آسانی نیست و قبل از اینکه این مفهوم درک شود مواجه کردن دانش‌آموزان با مسائلی تکنیکی دشوار و بی‌فایده یک اشتباه به حساب می‌آید.

اشتباهات رایج

ممکن است برخی از دانش‌آموزان برای درک مفهوم «زوج مرتب» با دشواری مواجه باشند و تفاوتی برای ترتیب مؤلفه‌ها قائل نباشند. همچنین ممکن است یکتایی مطرح شده در تعریف تابع با مفهوم «یک به یک بودن» جابه‌جا در نظر گرفته شود.

درس دوم

دامنهٔ برد تابع

اهداف

- آشنایی با مفهوم دامنه و برد
- معرفی توابع خطی
- ارائهٔ نمایش جبری توابع

روش تدریس

در اوّلین فعالیت این درس در صفحهٔ ۱۰۱ دانش‌آموزان با مفهوم دامنه و برد آشنا می‌شوند. انجام فعالیت توسط دانش‌آموزان و بررسی پاسخ‌ها و در صورت لزوم ارائهٔ نمونه‌های بیشتر به درک مفهوم دامنه و برد کمک می‌نماید. در فعالیت دوم، مفهوم برد بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند و دانش‌آموزان پی می‌برند که اگر f تابعی از A به B باشد، برد تابع f لزوماً مجموعهٔ B نخواهد بود. در فعالیت صفحهٔ ۱۰۲ به کمک دنباله‌ها نمایش جبری یک تابع ارائه می‌شود. همچنین مفهوم دامنه و برد به‌طور عمیق‌تری مورد بررسی قرار می‌گیرد و مشخص می‌شود که توابعی با دامنه‌ها و بردهای متفاوت می‌توانند نمایش جبری یکسانی داشته باشند. علاوه بر این، به کمک فعالیت صفحهٔ ۱۰۳ توابع خطی معرفی می‌شوند. برای این کار از مفهوم آشنایی خط و معادله آن استفاده شده است. ضمن اینکه ارتباط مناسبی با دنباله‌ها نیز برقرار شده است.

نمودارهای صفحهٔ ۱۰۳ در راستای برقراری ارتباط بین ریاضیات و دنیای واقعی با تأکید بر مفهوم تابع ارائه شده‌اند. در کار در کلاس صفحهٔ ۱۰۴ برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، معیاری داده شده است. در صورت لزوم می‌توان مثال بیشتری ارائه کرد تا دانش‌آموزان با مقایسهٔ آنها بتوانند معیار را ارائه نمایند.

توصیه‌های آموزشی

مفهوم دامنه و برد از جمله مفاهیم اساسی در بحث تابع‌اند. یک تصور عام در این باره آن است که درک مفهوم صرفاً با محاسبهٔ دامنه و برد توابع پیچیده حاصل می‌شود. تجربه نشان داده است که قبل از درک این مفهوم توسط دانش‌آموزان، به آنها تمرینات مشکل و ترکیبی ارائه می‌شوند که مستلزم دانش و مهارت‌های مختلفی برای محاسبه دامنه و برد هستند. توصیه می‌شود که سطح مسائل در حدّ مسائل مطرح شده در کتاب درسی باشد.

اشتباهات رایج

از جمله اشتباهات رایج دانش‌آموزان در مورد دامنه و برد این است که اگر دو تابع دامنه‌ها و بردهای یکسانی داشته باشند، الزاماً با هم برابرند. در تمرین ۱۶ صفحهٔ ۱۰۸ به این موضوع پرداخته شده است. همچنین ممکن است برخی دانش‌آموزان تصور کنند که اگر ضابطهٔ جبری یک تابع معلوم باشد، نمایش هندسی آن یا دیگر بازنمایی‌های آن منحصر به فرد است. در تمرین ۳ صفحهٔ ۱۰۶ دانش‌آموزان پی می‌برند که تابع‌های متفاوتی (با دامنه‌ها و بردهای متفاوت) می‌توانند نمایش جبری یکسانی داشته باشند.

درس سوم

انواع توابع

اهداف

- آشنایی با توابع چند جمله‌ای
- معرفی توابع قدر مطلقی
- رسم توابع به کمک انتقال

روش تدریس

در فعالیت صفحهٔ ۱۰۹ دانش‌آموزان به کمک مفاهیم مساحت و حجم که با آنها آشنا هستند و با استفاده از نمایش جبری توابع، با توابع چند جمله‌ای آشنا می‌شوند. در صورت لزوم، مثال‌های بیشتری توسط معلمان محترم باید ارائه شود. همچنین تابع «همانی»، و تابع «ثابت» با بازنمایی‌های مختلف معرفی می‌شوند. کار درکلاس صفحهٔ ۱۱۰ کمک می‌کند تا درک دانش‌آموزان از توابع فوق کامل‌تر شود. همان‌گونه که در کتاب تأکید شده است. تفاوت‌ها و شباهت‌های توابع داده شده در هر مورد باید استفاده شود تا ایدهٔ اساسی نهفته در هر تابع (همانی و ثابت) درک شود. در کار در کلاس نیز مثال‌هایی توسط دانش‌آموزان ارائه می‌شود و معلمان محترم باید شرایطی را برای ارائه و بررسی و مقایسه مثال‌ها فراهم نمایند. در مورد کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۰ باید فرصت کافی به دانش‌آموزان داده شود تا نمودارها رسم شوند.

البته در فصل‌های قبل دانش‌آموزان با رسم نمودار $y=x^2$ آشنا شده‌اند و هدف کار در کلاس صفحه ۱۱۰ علاوه بر رسم نمودار، تأکید بر دامنه و بردهای متفاوت است. فعالیت صفحه ۱۱۱ به معرفی تابع قدر مطلق می‌پردازد. قدر مطلق یک عدد در سال‌های گذشته برای دانش‌آموزان معرفی شده است و با استفاده از این موضوع، تابع قدر مطلق ارائه شده است. باز هم توجه به دامنه و برد مورد تأکید است. توابع قطعه‌ای

(چند ضابطه‌ای) در صفحهٔ ۱۱۲ ارائه شده‌اند. در فعالیت صفحهٔ ۱۱۲ قسمتی از نمودار توابع قطعه‌ای ارائه شده است. دانش‌آموزان در این فعالیت درگیر حدس زدن، رسم کردن، استدلال، یافتن ارتباطات و مانند آن می‌شوند. به هر حال برای ادعای مطرح شده دانش‌آموزان باید از آنها دلیل خواست و بهتر است در هر مورد نیز سؤالاتی توسط معلم مطرح شود. در کار در کلاس شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۱۳، برای یافتن ضابطهٔ تابع قطعه‌ای داده شده لازم است که معادلات خطوط نشان داده شده به‌دست آید.

فعالیت صفحهٔ ۱۱۳ به رسم نمودار توابع به کمک انتقال عمودی اختصاص دارد. علاوه بر آنچه که در کتاب مطرح شده است می‌توان از دانش‌آموزان خواست که در مورد شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارهای داده شده توضیح دهند. همچنین علاوه بر نمودارهای توابع داده شده، در صورت لزوم توابع دیگری که به کمک انتقال عمودی توابع اوّلیه به‌دست می‌آیند، قابل طرح‌اند. به روش مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۴ به انتقال افقی می‌پردازد. در صورت امکان اگر نمودارها به کمک نرم‌افزارها از قبل تهیه و در کلاس نمایش داده شوند، امکان مقایسهٔ هم‌زمان تعداد بیشتری از توابع و انتقال یافته آنها برای دانش‌آموزان فراهم می‌شود. کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۵ نمونه مناسبی برای ارزشیابی به حساب می‌آید و لازم است دانش‌آموزان دلایل خود برای انتخاب هر نمودار را ارائه نمایند.

توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود که سطح مسائل در یک کلاس معمولی از آنچه که در تمرین‌های کتاب مطرح شده است فراتر نرود. همچنین بازتاب بر حلّ مسائل و تجزیه و تحلیل آنها بسیار مفیدتر از ارائهٔ تعداد زیادی مسئله اضافی و غیرضروری است.

اشتباهات رایج

برخی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان در این درس، جابه‌جایی انتقال عمودی و افقی با یکدیگر است. همچنین برخی تصور می‌کنند که هر تابع باید یک نمایش جبری داشته باشد و یا اینکه هر عبارت، یا معادله لزوماً یک تابع را مشخص می‌کند.