

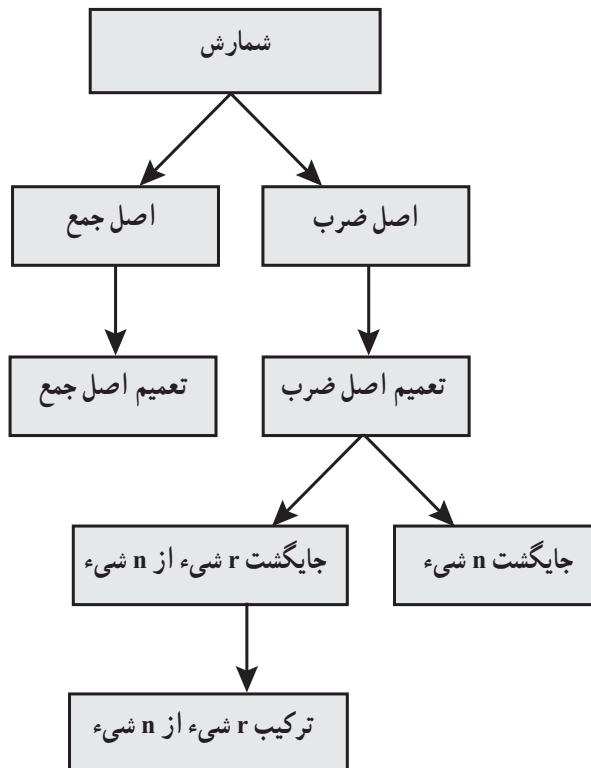
## فصل ۶

شمارش، بدون شمردن

## نگاه کلی به فصل

ترکیبات یکی از شاخه‌های مهم و جذاب ریاضیات است و شمارش یکی از اصلی‌ترین موضوعات آن می‌باشد. شمارش به صورت یک به یک فرایندی است که دانش‌آموز در ابتدای آشنایی با ریاضیات با آن مواجه می‌شود، ولی با آشنایی فرد با مسائل پیچیده‌تر به نظر می‌رسد که شمارش یک به یک در بسیاری موارد کافی نیست و نیاز به تکنیک‌ها و مهارت‌های بیشتری از شمارش وجود دارد. فصل ۶ کتاب ریاضی پایه دهم به این مبحث اختصاص یافته است. این فصل، شامل سه درس است. در درس اول اصول جمع و ضرب مطرح می‌شوند که از مهم‌ترین پایه‌ها برای به دست آوردن تکنیک‌های شمارش می‌باشند. در واقع با درک این دو اصل و بدون دانستن مفاهیم پیشرفته‌ای از ریاضیات، بسیاری سؤال‌های نه چندان ساده شمارش قابل حل‌اند. در درس دوم با استفاده از مفهوم اصل ضرب، مفهوم جایگشت  $n$  شیء و جایگشت  $r$  شیء بیان و تشریح می‌گردد و در درس سوم مفهوم ترکیب و مسائل مربوط به آن مطرح می‌شود.

## نقشه مفهومی



## تصویر عنوانی

مسئله معروف «چهار رنگ» می‌گوید؛ هر نقشه را می‌توان با چهار رنگ به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیه هم مرزی دارای رنگ یکسان نباشند که مسئله معادل آن در گراف‌ها به این صورت است که؛ هر گراف مسطح، چهار رنگ‌پذیر است. (برای کسب اطلاعات بیشتر به کتاب نظریه گراف باندی - مورتی مراجعه شود). مطرح کردن چنین سؤالی با دانش‌آموزان صرفاً جهت وادار کردن دانش‌آموزان به تفکر و تأمل در اینکه مسائل مربوط به شمارش صرفاً با روش‌های ابتدایی که از قبل می‌شناسد حل نمی‌شوند.

## توصیه‌های آموزشی

در مباحث و مسائل ترکیباتی باید توجه شود که سطح دشواری سؤال‌ها می‌تواند با کوچک‌ترین تغییر در سؤال بسیار تغییر کند، تا آنجا که بدون نیاز به دانستن مفاهیم پیشرفته در این موضوع، و فقط با دانستن چند رابطه ساده اولیه در ترکیبات، برای برخی مسائل پیچیده ترکیباتی که بعضاً در آزمون‌های المپیاد نیز مطرح شده‌اند، می‌توان حل ارائه نمود. لذا بهتر است معلم همواره سطح سختی سؤال‌ها را کنترل نماید و مسائلی طرح کند که دانش‌آموزان برای حل آن با چالشی مواجه شوند که با توجه به مفاهیم آموزش داده شده و با کمی تفکر قابل حل باشند و حل آنها برای دانش‌آموزان غیر قابل دسترس نباشد.

## اهداف

- آشنایی با برخی روش‌های شمارش بدون شمردن مستقیم
- آشنایی با اصل جمع و تعمیم آن
- آشنایی با اصل ضرب و تعمیم آن
- تشخیص مسائلی که با اصل جمع یا اصل ضرب حل می‌شوند.
- به‌کارگیری اصل جمع در حل مسائل
- به‌کارگیری اصل ضرب در حل مسائل
- طرح مسائلی که با اصل جمع یا اصل ضرب حل می‌شوند.

## روش تدریس

یکی از مواردی که برای شروع درس بسیار حائز اهمیت می‌باشد، ایجاد انگیزه برای یادگیری و بازگو کردن اهمیت موضوع درس در به‌کارگیری آن در مسائل مختلف است. این کار را می‌توان با گفت‌وگوی اولیه و مطرح کردن پرسش‌هایی نظیر آنچه در مورد پلاک ماشین‌ها در ابتدای درس آمده است انجام داد. در ارائه درس که از طریق انجام و پیگیری فعالیت صورت می‌پذیرد، باید توجه داشته باشیم یکی از مواردی که بسیار حائز اهمیت است دقت و توجه به درک مفهوم‌های اصل جمع و اصل ضرب در دانش‌آموزان می‌باشد و برای این کار پس از ارائه فعالیت و بازگو کردن مثال، به تعداد لازم، درخواست طرح سؤال‌هایی که با اصل جمع یا با اصل ضرب حل شوند محک بسیار خوبی است که می‌توان با آن درک دانش‌آموزان را نسبت به موضوع درس بسنجیم.

حل تمرین‌های برگزیده صفحه ۱۲۴

۱- الف) چون گزینه موردنظر یا یک عدد، یا یک حرف است، لذا با استفاده از اصل جمع خواهیم داشت:  $۱۰+۳۲=۴۲$

ب) چون در رمز موردنظر هم یک حرف و هم یک عدد وجود دارد، لذا با توجه به اصل ضرب داریم:  $۱۰ \times ۳۲ = ۳۲۰$

پ) در این حالت اگر گزینه اول عدد باشد، با توجه به آنچه در قسمت (ب) گفته شد  $۳۲۰$  حالت امکان دارد و در صورتی که حرف دوم عدد باشد نیز همین تعداد حالت وجود دارد، لذا در کل  $۶۴۰$  حالت وجود دارد.

ت) اگر هر دو گزینه عدد باشند، تعداد  $۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰$  حالت و اگر هر دو حرف انگلیسی باشند، تعداد  $۲۶ \times ۲۶ = ۶۷۶$  حالت وجود دارد؛ لذا در کل  $۷۷۶$  حالت وجود دارد. (اصل ضرب و اصل جمع)

ث) برای دو گزینه اول با توجه به اصل ضرب  $۱۰ \times ۹ = ۹۰$  حالت و برای دو گزینه دوم نیز با توجه به اصل ضرب تعداد  $۲۶ \times ۲۵ = ۶۵۰$  حالت امکان دارد؛ لذا با توجه به اصل ضرب در کل تعداد  $۹۰ \times ۶۵۰ = ۵۸۵۰۰$  حالت امکان دارد.

۳- الف)  $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

ب) اگر اولین رأس را آبی (قرمز) کنیم، رأس دوم باید قرمز (آبی) شود و لذا برای رأس سوم هیچ رنگی باقی نمی‌ماند لذا این کار امکان پذیر نیست.

پ)

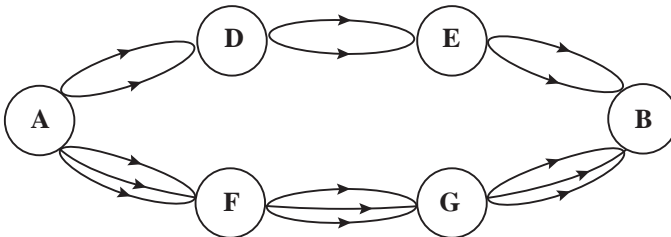
الف)  $۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$

ب) برای رأس اول سه حالت، برای رأس دوم دو حالت و برای رأس سوم یک حالت امکان دارد؛ لذا در کل  $۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$  حالت ممکن است.

۴- با توجه به اصل ضرب تعداد  $۹ \times ۹ \times ۱۳ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۱۳ \times ۹^۶$  حالت امکان پذیر است.

۸- چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت به طوری که از عدد  $۶۰$  بزرگ‌تر یا مساوی آن باشند.

۹- با توجه به شکل زیر به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟



## جایگشت

درس دوم

### اهداف

- به کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم جایگشت
- به کارگیری مفهوم جایگشت در حل مسائل
- آشنایی با نماد فاکتوریل
- تسلط بر محاسباتی که شامل فاکتوریل است.
- به کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء
- آشنایی با مفهوم جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء و فرمول مربوط به آن
- تشخیص مسائلی که با به کارگیری جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء حل می شوند.
- به کارگیری مفهوم جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء در حل مسائل

### روش تدریس

مطالب قبل از فعالیت برای جلب توجه دانش‌آموزان و ایجاد پیش‌زمینه‌ای در ارتباط با موضوع چینش‌های متفاوت اشیا متمایز است. با پیگیری فعالیت‌ها می‌توان مفهوم جایگشت را در ذهن دانش‌آموزان جای داد و درک آنها را از این مفهوم بالا برد. می‌توان با جلب توجه دانش‌آموزان به این مطلب که در بحث جایگشت در واقع موضوع انواع مختلف چینش اشیا متمایز مطرح است، عدم تکراری بودن اشیا در جایگشت را توضیح داد. در معرفی نماد فاکتوریل و تلاش برای تسلط نسبی دانش‌آموزان به استفاده از این نماد بهتر است موارد مطرح شده در کار در کلاس به ترتیب بیان شوند تا از مقایسه منطقی آنها دانش‌آموز نتیجه‌گیری‌های منطقی لازم را بنماید.

در معرفی مفهوم جایگشت  $n$  شیء متمایز و جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز، همان‌گونه که در فعالیت‌های کتاب دیده می‌شود، سعی شده است این مفاهیم براساس اصل ضرب و با استدلال در ذهن دانش‌آموزان جای بگیرد. بدیهی است که بیان روابط آنها بدون استدلال و به صورت رویه‌ای، سطح مطلوبی از یادگیری را در دانش‌آموزان ایجاد نخواهد کرد، هرچند احتمالاً به دستیابی دانش‌آموزان به جواب برخی

سؤالات منجر شود. از طرفی پس از معرفی و بیان مفاهیم مذکور، از آنجا که داشتن راهکارهایی جهت حلّ مسائل الزامی است، سعی در آموزش راهکارهای مطرح شده در مثال‌ها و کار در کلاس‌های درس، می‌تواند بسیار مفید باشد.

### حلّ برخی از تمرین‌ها

۲ فرض کنیم تعداد کتاب‌های مورد نظر  $n$  تا باشد. بنابراین، تعداد حالت‌های چیدن کتاب‌های مورد نظر برابر است با  $p(n, 3)$ ؛ لذا داریم:

$$p(n, 3) = 210 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 210 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 210$$

لذا حاصل ضرب سه عدد متوالی برابر  $210$  است.

با تجزیه عدد  $210$  خواهیم داشت:  $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 5 \times 6 \times 7$

بنابراین  $n=7$

۴ بدترین حالت یعنی انتخاب مورد نظر آخرین انتخاب در بین تمام انتخاب‌های ممکن باشد. اما تعداد تمام انتخاب‌های ممکن برابر است با  $p(20, 3) = \frac{20!}{17!}$ ؛ لذا این تعداد مرتبه باید سه دکمه‌ها فشرده شوند. چون هر بار فشردن سه دکمه، ۲ ثانیه وقت می‌گیرد؛ لذا این عدد باید در ۲ ضرب شود (با فرض اینکه زمان تلف شده‌ای نباشد).

۵ الف) ۶! و تعداد ۴! از آنها با «گل» شروع می‌شود.

ب)  $p(6, 4)$

پ) دو حرف «پ» و «ر» به دو حالت «پر» و «رپ» می‌توانند کنار هم بیایند. فرض کنیم به حالت «پر» آمده باشند. در این صورت سه حالت زیر امکان دارد:

پر ، ... ، ...

... ، پر ، ...

... ، ... ، پر

که در هر کدام از حالت‌ها با  $4 \times 3$  روش می‌توان جاهای خالی را پر کرد؛ لذا جواب برابر است با:

$$2 \times 3 \times 4 \times 3$$

ت) حروف کلمه «پیرا» چهار تا هستند؛ لذا یک حرف باید اضافه شود که به دو طریق این کار می‌تواند انجام شود. از طرفی خود حروف کلمه «پیرا» به ۴! حالت می‌توانند کنار هم بیایند و حرف اضافه شده هم به دو طریق می‌توانند به آنها اضافه شود (اول یا آخر بیاید) لذا جواب برابر است با:  $2 \times 2 \times 4!$

# ترکیب

## اهداف

- به کارگیری اصل ضرب و جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء برای رسیدن به مفهوم ترکیبی  $r$  شیء از  $n$  شیء
- تشخیص مسائلی که با استفاده از مفهوم ترکیب حل می‌شوند.
- به کارگیری مفهوم ترکیب در حل مسائل

## روش تدریس

با توجه به اینکه جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء به دانش‌آموزان گفته شده است، شروع درس با چند پرسش ساده که نشان‌دهنده تفاوت میان مفهوم جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء و مفهوم ترکیب می‌تواند بسیار مفید باشد. در فعالیت مطرح شده در ابتدای درس هم سعی شده است با تمرکز روی تفاوت این دو مفهوم به درک بهتر آنها کمک شود. برای یادگیری بهتر رابطه‌ها نیز بهتر است با روشی که در فعالیت آورده شده است، یا مشابه آن، نحوه به دست آمدن فرمول را براساس استدلال برای دانش‌آموزان روشن ساخت. بیگیری مثال‌ها و کار در کلاس آورده شده برای جا افتادن هر چه بیشتر مفهوم و تسلط دانش‌آموزان بسیار مفید خواهد بود. فعالیت بعد به توضیح نوعی بدفهمی می‌پردازد. دانش‌آموزان را باید به اهمیت دقت در انتخاب روش شمارش واقف ساخت و توجه آنها را به این نکته معطوف کرد که در شمارش حالت‌ها باید دقت کنند که هر حالت یک، و دقیقاً یک بار شمرده شود. در فعالیت آخر این درس سعی شده برخی از رابطه‌هایی که در ترکیب برقرار است را با استدلال و شمارش چندگانه به دانش‌آموزان آموزش داد.



حل تمرین درس ۳

$$1 \quad \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}$$

۲ فرض کنیم تعداد داوطلبان مورد نظر  $n$  تا باشد، لذا تعداد انتخاب‌ها برابر  $\binom{n}{2}$  می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 \Rightarrow n = 8$$

۵

از آنجا که در کارهای هنری نسبت رنگ‌های ترکیبی می‌تواند خیلی متفاوت انتخاب شود، لذا تعداد رنگ‌هایی که می‌توان ساخت بسیار زیاد است.

$$4 + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

۷ الف)  $\binom{1}{3}$

ب) فرض کنیم دو نوع ادویه‌ای که با هم نمی‌توانند استفاده شوند  $A$  و  $B$  باشند. روش اول:

$$\left. \begin{aligned} \binom{1}{2} &= \text{تعداد ادویه‌هایی که } A \text{ را دارند و } B \text{ را ندارند} \\ \binom{1}{2} &= \text{تعداد ادویه‌هایی که } B \text{ را دارند و } A \text{ را ندارند} \\ \binom{1}{3} &= \text{تعداد ادویه‌هایی که نه } A \text{ را دارند و نه } B \text{ را} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جواب} = \binom{1}{2} + \binom{1}{2} + \binom{1}{3} = 112$$

روش دوم:

$$\binom{1}{1} = 8 \Rightarrow \text{جواب} = \binom{1}{3} - 8 = 112$$

پ) یک حالت هست که هر سه ادویه مورد نظر با هم استفاده شده باشند، پس:

$$\text{جواب} = \binom{1}{3} - 1 = 119$$

ت)

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

۸ پنج کتاب ریاضی مختلف و شش کتاب فیزیک مختلف داریم.

الف) به چند طریق می‌توان از بین آنها پنج کتاب انتخاب کرد به طوری که سه تایی آنها ریاضی و دو تایی آنها فیزیک باشند.

ب) به چند طریق می‌توان بسته‌ای از این کتاب‌ها برای هدیه دادن انتخاب کرد به طوری که بسته موردنظر دقیقاً سه کتاب ریاضی باشد، یا دقیقاً دو کتاب فیزیک.

### نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ در منوی یک رستوران برای وعده ناهار هفت نوع مختلف غذای اصلی، چهار نوع مختلف پیش‌غذا و پنج نوع مختلف نوشیدنی وجود دارد. اگر فردی بخواهد یک وعده ناهار کامل همراه با پیش‌غذا و نوشیدنی سفارش دهد، به چند طریق ممکن می‌توان این کار را انجام داد؟

۲ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶

الف) چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد چهار رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد چهار رقمی کمتر از ۴۰۰۰ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ث) چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ج) چند عدد چهار رقمی بیشتر از ۴۰۰۰ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۳ با رنگ سبز، قرمز و آبی به چند حالت ممکن می‌توان خانه‌های جدول زیر را رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو خانه یک رنگ کنار هم قرار نگیرند.

--	--	--	--	--	--

۴ به چند حالت ممکن می‌توان از ده تیم شرکت‌کننده در یک تورنمنت، تیم‌های اول تا پنجم را مشخص کرد؟

۵ به چند طریق می‌توان شش کتاب ریاضی مختلف و پنج کتاب فیزیک مختلف را در یک قفسه کنار هم قرار داد در صورتی که:

الف) هیچ محدودیتی برای کنار هم قرار گرفتن کتاب‌ها نباشد.

ب) کتاب‌های ریاضی کنار هم قرار بگیرند.

پ) کتاب‌های هم‌نوع کنار هم قرار گیرند.

ت) هیچ دو کتاب از یک نوع کنار هم قرار نگیرند.

۶ به چند حالت ممکن می‌توان نام پنج معلم و پنج دانش‌آموز را در یک لیست قرار داد به طوری که هیچ دو معلمی اسمشان کنار هم نباشد؟

۷ از بین پنج مرد و پنج زن داوطلب برای استخدام در یک بانک به چند طریق می توان  
الف) سه نفر صندوق دار انتخاب کرد.

ب) دو مرد و یک زن را انتخاب کرد.

۸ با حروف کلمه «خلیج فارس» به چند طریق می توان یک کلمه هشت حرفی نوشت به طوری که  
الف) چهار حرف «ف»، «ا»، «ر» و «س» کنار هم باشند.

ب) واژه «فارس» بدون تغییر کنار هم قرار گیرند.

۹ به چند حالت ممکن می توان از بین شش زن و پنج مرد  
الف) یک زوج انتخاب کرد.

ب) پنج زوج انتخاب کرد.

۱۰ از بین هفت دانش آموز ریاضی، شش دانش آموز تجربی و پنج دانش آموز انسانی به چند طریق  
می توان یک گروه سه نفره انتخاب کرد به طوری که :

الف) مهم نباشد از چه رشته ای باشند.

ب) فقط از یک رشته باشند.

پ) از هر رشته فقط یک نفر انتخاب شود.

ت) حداقل دو نفر از رشته ریاضی باشند.

ث) از رشته انسانی کسی انتخاب نشود.