

# بخش اول

## فصل سوم

### تابع

#### هدف کلی

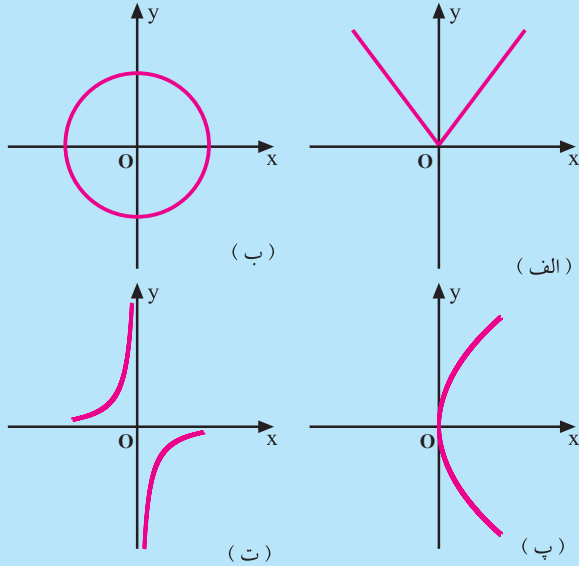
تعمیق مفهوم تابع و ویژگی‌های مربوط به آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

- ۱- تابع را تعریف کند.
- ۲- تابع را با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهد.
- ۳- تابع را از روی نمودار تشخیص دهد.
- ۴- دامنه‌ی تابع را تعیین کند.
- ۵- برد تابع را از روی نمودار آن تعیین کند.
- ۶- نمودار تابع‌های مثلثاتی  $\sin x$  و  $\cos x$  را رسم کند.

## پیش‌آزمون (۳)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۱-۴۸

۱- کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

الف)  $f = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

ب)  $g = \{(1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$

پ)  $h = \{(-1, 2), (-2, 3), (-3, 4), (5, 1)\}$

۲- کدام یک از شکل‌های روبه‌رو نمایش یک تابع است؟

(شکل ۱-۴۸).

۳- تابع  $f$  با ضابطه‌ی زیر در  $\mathbb{R}$  تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) مقدارهای  $f(-2)$ ،  $f(3)$  و  $f(0)$  را حساب کنید.

۴- اگر  $f(-1) = 0$ ،  $f(-2) = -1$ ،  $f(-3) = -2$  و

$f(0) = -1$ ، تابع  $f$  را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

۵- تابع  $f$  به صورت زیر داده شده است.

$$f = \{(-1, 0), (2, 3), (1, -1), (3, 2)\}$$

مطلوب است تعیین  $f(-1)$ ،  $f(2)$  و  $f(3)$ .

۶- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 + x + 1$  داده شده است.

مطلوب است محاسبه‌ی:

$$f(2), f(-x), f(3x)$$

$$f(\sqrt{x}), f(x-1)$$

۷- تابع  $f(x) = 2 \sin x$  و نقطه‌ی  $m \left| \frac{\pi}{6} \right|$  داده شده

است. مقدار  $a$  را چنان بیابید که این نقطه روی نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد.

۸- تابع  $y = a \sin x + b \cos x$  داده شده است. مقدار

$a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که نمودار این تابع از دو نقطه‌ی  $A \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right|$

و  $B \left| \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ 2 \end{matrix} \right|$  بگذرد.

۹- کدام یک از رابطه‌های زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

الف)  $2x + y = 7$

ب)  $x + y^2 - 2 = 0$

پ)  $y + 2x^2 - x = 1$

۱۰- اطلاعات جدول زیر را به صورت مجموعه‌ای از

زوج‌های مرتب بنویسید. آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

x	۳	۴	۵	۶	۷
y	۲	۵	-۱	۲	۲

۱۱- مقدار هریک از تابع‌های زیر را به ازای  $x$ های

مشخص شده تعیین کنید (شکل ۴۹-۱).

الف)  $f(x) = -2x^2 + x + 3$ ,  $x = -1, \frac{1}{4}, 2$

ب)  $g(x) = \frac{3x}{x-2}$ ,  $x = -1, \frac{1}{4}, 3$

پ)  $h(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ,  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \pi$ .

الف)

x	-1	$\frac{1}{4}$	2
f(x)			

ب)

x	-1	$\frac{1}{4}$	3
g(x)			

پ)

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi$
h(x)			

شکل ۴۹-۱

## خواندنی

ظاهراً واژه‌ی تابع<sup>۱</sup> را اولین بار لایب نیتز<sup>۲</sup>، در سال ۱۶۹۴ به‌عنوان کمیتی وابسته به یک نمودار به کار برده است. در سال ۱۷۱۸ یوهان برنولی<sup>۳</sup> یک تابع را به‌صورت عبارتهایی متشکل از چند ثابت و یک متغیر در نظر گرفت. بعداً در همین قرن اوایل<sup>۴</sup> تابع را به‌عنوان معادله‌ای تشکیل یافته از ثابت‌ها و متغیرها بررسی کرد. اوایل به‌طور وسیعی از نماد بسیار پراهمیت  $f(x)$  استفاده می‌کرد.

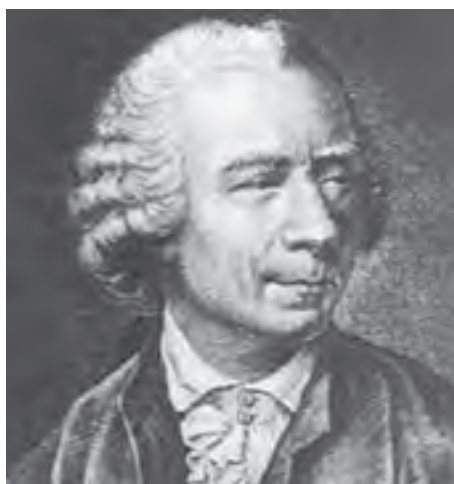
تعریف تابع که تا به امروز مورد استفاده قرار می‌گیرد توسط دیریکله<sup>۵</sup> (۱۸۰۵-۱۸۵۹) فرمول‌بندی شده است. او می‌گوید: اگر دو متغیر  $x$  و  $y$  چنان به هم مربوط باشند که برای هر مقدار  $x$  فقط یک مقدار  $y$  به دست آید آنگاه  $y$  تابعی از  $x$  نامیده می‌شود. او  $x$  را متغیر مستقل و  $y$  را متغیر وابسته نامید، مقادیر  $y$  به مقادیری که به  $x$  نسبت داده می‌شود وابسته است. او مقادیر  $x$  را دامنه‌ی تابع و مقادیر  $y$  متناظر با آن‌ها را برد تابع نامید. پس از بیان مفهوم مجموعه، تابع با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب<sup>۶</sup> نیز بیان شد. [۲]



گاتفرید لایب نیتز (۱۷۱۶-۱۶۴۶)



یوهان برنولی (۱۷۴۸-۱۶۶۷)



اوایلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷)



گوستاو دیریکله (۱۸۵۹-۱۸۰۵)

۱) Function

۲) Leibnitz

۳) Johann Bernoulli

۴) Euler

۵) Dirichlet

۶) Ordered pairs

### ۱-۳-۱ تابع

یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات، مفهوم تابع است. در اکثر امور روزمره با تابع سر و کار داریم. در این بخش ضمن معرفی چند تابع، مشخص نمودن تابع با ضابطه، با جدول و با نمودار، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

#### ۱-۳-۱-۱ تابع با ضابطه: برای تغییر ولتاژ (اختلاف

پتانسیل) از ترانسفورمر استفاده می‌شود.

ارتباط بین  $V_1$  و  $V_2$  با رابطه‌ی (۱) بیان می‌شود که در آن  $a$  عددی ثابت است. رابطه‌ی (۱) نشان می‌دهد که ولتاژ خروجی تابع ولتاژ ورودی است. رابطه‌ی (۱) را ضابطه‌ی این تابع می‌گویند. در رابطه‌ی (۱) ثابت  $a$  به نوع ترانسفورمر بستگی دارد. با داشتن مقدار ولتاژ ورودی ( $V_1$ ) و مقدار ولتاژ خروجی ( $V_2$ ) می‌توان  $a$  را به دست آورد.

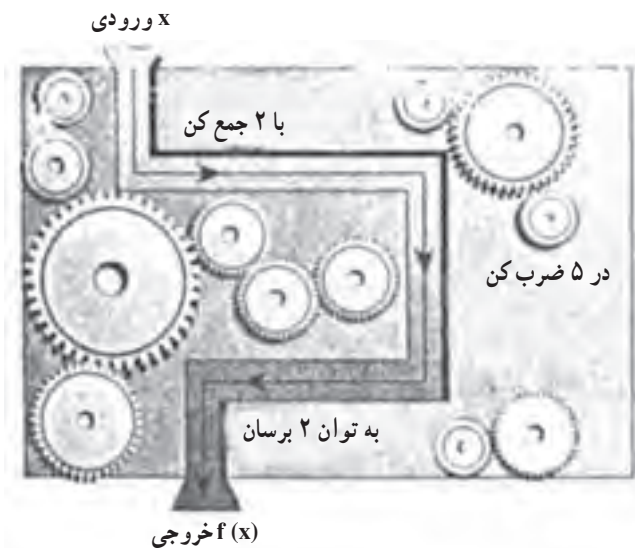
مثلاً، اگر  $a = 0.05$  و  $V_1$  مساوی  $230^\circ$  ولت باشد

داریم:

$$V_2 = aV_1 \Rightarrow V_2 = 0.05 \times 230 = 11.5$$

و اگر  $V_2$  مساوی  $10^\circ$  ولت باشد آنگاه:

$$10 = 0.05 \times V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{10}{0.05} = 200$$



شکل ۱-۵۰

ولتاژ خروجی  $V_2 \Rightarrow$  ترانسفورمر  $\Rightarrow V_1$  ولتاژ ورودی

$$(1) \quad V_2 = aV_1$$

جدول ۱-۱

$V_1$	۱۹۰	۲۰۰	۲۲۰	۲۴۰
$V_2$	۱۹		۲۳	۲۴

### کار در کلاس ۱-۵

(۱) جدول ۱-۱ برای یک ترانسفورمر داده شده است.

(الف) با استفاده از جدول، عدد ثابت  $a$  را، از رابطه‌ی

(۱)، به دست آورید.

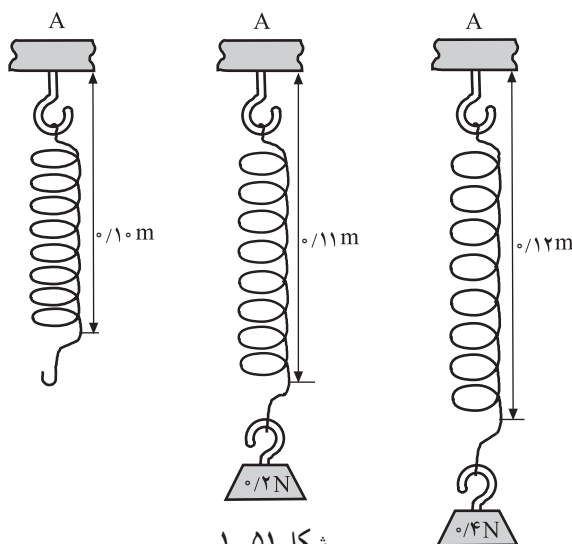
(ب) با استفاده از قسمت (الف) جدول را کامل کنید.

(۲) یک سَر فنری به طول  $0.10$  متر به نقطه‌ی  $A$  بسته

شده است (شکل ۱-۵۱). با آویختن وزنه‌های متفاوت به انتهای

فنر، طول فنر مطابق جدول ۱-۲، تغییر کرده است. وزن وزنه را

با  $W$  و طول فنر را با  $L$  نشان می‌دهیم.



شکل ۱-۵۱

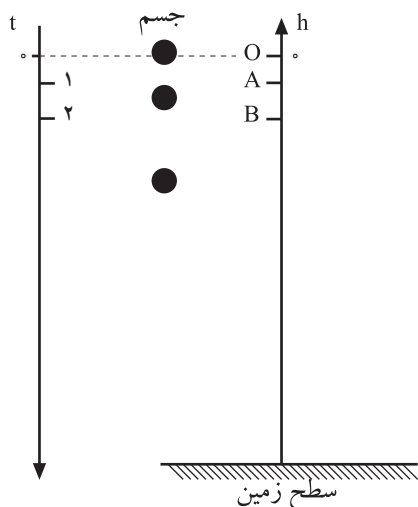
جدول ۱-۲

W	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۰/۹	۱
L	۰/۱۰	۰/۱۱	۰/۱۲		۰/۱۴		۰/۱۵

$$L = 0/10 + 0/05W$$

الف) با توجه به شکل ۱-۵۱ یا جدول ۱-۲، ملاحظه می‌کنید که L تابع W است. آیا ضابطه‌ی این تابع به صورت روبه‌رو است؟ تحقیق کنید.

ب) با توجه به این ضابطه، جدول ۱-۲ را کامل کنید.



شکل ۱-۵۲

۳) گلوله‌ای از ارتفاع ۱۲۵ متری رها می‌شود (سقوط آزاد) (شکل ۱-۵۲). می‌دانید اگر فاصله‌ی یک نقطه از سطح زمین را با h و لحظه‌ی رسیدن به آن نقطه را با t نشان دهیم، رابطه‌ی زیر بین h و t برقرار است.

$$h = -\frac{1}{2}gt^2$$

در این رابطه نقطه‌ی آغاز حرکت را مبدأ مختصات

گرفته‌ایم ( $t=0, h=0$ ) و  $g \cong 10 \frac{m}{s^2}$  است.

جدول ۱-۳ مکان جسم را در لحظه‌های متفاوت نشان

می‌دهد. شکل ۱-۵۲ نیز راهنمای جدول ۱-۳ است.

جدول ۱-۳

نقطه	t	h
O	۰	۰
A	۱	-۵
B	۲	-۲۰
C	۳	
D	۴	
E	۵	-۱۲۵

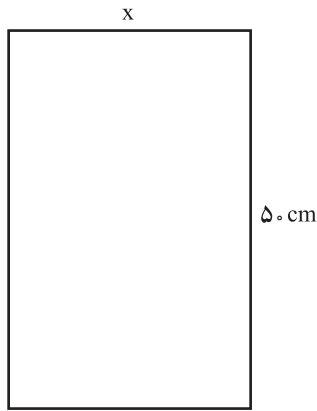
الف) جدول و شکل را کامل کنید.

ب) گلوله پس از چند ثانیه به سطح زمین برخورد می‌کند؟

پ) در چه لحظه‌ای فاصله‌ی گلوله از نقطه‌ی رها شده

۸۰ متر است؟

## تمرین ۵-۱



شکل ۵۳-۱

۱) شکل ۵۳-۱ یک ورق آلومینیوم به شکل مستطیل، به طول  $50^\circ$  سانتی‌متر و عرض  $x$  سانتی‌متر را نشان می‌دهد. واضح است که مساحت و محیط این ورق تابعی از متغیر  $x$  است.

الف) اگر  $S(x)$  مساحت این ورق باشد فرمول  $S(x)$  را بنویسید.

ب) اگر  $p(x)$  محیط این ورق باشد فرمول  $p(x)$  را بنویسید.

پ) با توجه به این که  $x$  اندازه‌ی عرض یک مستطیل است، حدود

تغییرات  $x$  را تعیین کنید.

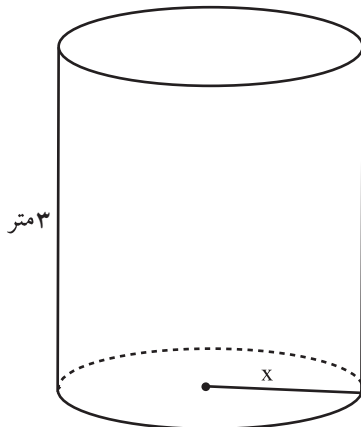


شکل ۵۴-۱

۲) نرخ کرایه‌ی نوعی اتومبیل، برای هر کیلومتر طی مسافت،  $150^\circ$  ریال، به اضافه‌ی ورودی ثابت  $40000^\circ$  ریال است. کرایه‌ی اتومبیل تابعی

از  $x$ ، یعنی مسافت طی شده، برحسب کیلومتر، است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید (شکل ۵۴-۱).

بنویسید (شکل ۵۴-۱).



شکل ۵۵-۱

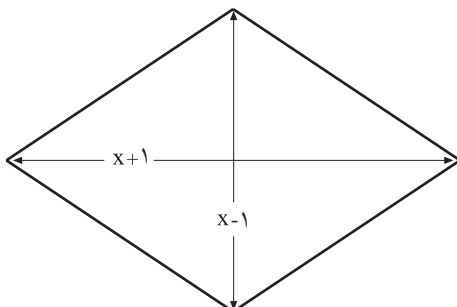
۳) می‌دانید که سطح جانبی و حجم استوانه به شعاع قاعده و ارتفاع

آن بستگی دارد. فرض کنید ارتفاع استوانه‌ای  $3$  متر و شعاع قاعده‌ی آن  $x$  متر باشد (شکل ۵۵-۱).

الف) اگر  $S(x)$  سطح جانبی این استوانه باشد ضابطه‌ی  $S(x)$  را

بنویسید.

ب) اگر  $V(x)$  حجم این استوانه باشد فرمول  $V(x)$  را بنویسید.



شکل ۵۶-۱

۴) قطرهای یک لوزی به ترتیب  $x+1$  و  $x-1$  متر هستند (شکل

۵۶-۱).

الف) اگر  $f(x)$  مساحت این لوزی باشد ضابطه‌ی  $f(x)$  را بنویسید.

ب) با توجه به شکل روبه‌رو، حدود تغییرات  $x$  را تعیین کنید.

پ) نمودار تابع  $y = f(x)$  را رسم کنید.



۲-۳-۱- تابع با جدول: می دانید که دمای بدن بیمار، با توجه به وضع روحی و جسمی او، به زمان بستگی دارد. جدول ۱-۴ دمای بدن بیماری را در ساعت‌های معین نشان می دهد.

جدول ۱-۴

t	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲
$\theta$	۳۸/۵	۳۹	۳۹/۱	۳۹/۴	۳۹	۳۹/۸	۴۰

آیا رابطه‌ای برای بیان دمای بدن ( $\theta$ ) این بیمار در لحظه‌های مختلف ( $t$ ) وجود دارد؟ چرا؟ به عبارت دیگر،  $\theta$  تابعی از  $t$  است، آیا این تابع ضابطه دارد؟ این مثال، نمونه‌ای از یک تابع است که با جدول مشخص شده و ضابطه ندارد (این تابع را با مثال فنر و وزنه مقایسه کنید). جدول ۱-۵ دمای هوای شهری را در ساعت‌های مختلف یک روز نشان می دهد.

جدول ۱-۵

t	۵	۷	۹	۱۱	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
$\theta$	۱۲	۱۴	۲۱/۵	۲۸	۳۰/۵	۳۴/۵	۳۱	۲۷/۵

الف) آیا می توانید بگویید دمای هوای این شهر در ساعت ۲۰ یا ۲۳ چقدر بوده است؟  
ب) آیا می توانید رابطه‌ی بین دما و زمان را با یک فرمول بیان کنید؟ چرا؟  
ج) آیا دمای این شهر در یک لحظه می تواند دو عدد متفاوت باشد؟

### کار در کلاس ۱-۶

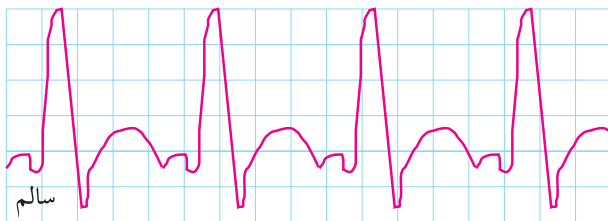
#### معلم گرامی

چنانچه به تفصیل در کتاب راهنمای معلم ریاضی (۳) بودمانی آمده است دانش آموزان را به گروه‌های چند نفری تقسیم کنید سپس با نظارت خود، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌ها را توسط گروه‌ها انجام دهید.



هر گروه با همفکری اعضای خود حداقل دو تابع که با جدول قابل بیان است پیدا کند. (ممکن است گروه‌های متفاوت تابع‌های یکسان به دست آورند). چه نتیجه‌ای از این کار گروهی عاید شد؟



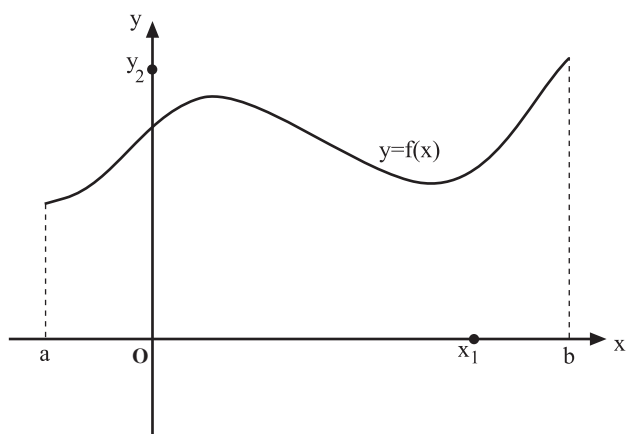


شکل ۵۷-۱

۳-۳-۱- تابع با نمودار: حتماً دیده‌اید که ادارات، وزارتخانه‌ها و نهادهای مختلف برای نشان دادن نتایج فعالیت‌های خود از نمودار استفاده می‌کنند. نمونه‌ای از تابع‌ها که با نمودار نشان داده می‌شوند، عبارت‌اند از:

نمودار مربوط به تولید گندم (برنج، سیب‌زمینی، نفت، گاز و...) در مدتی معین. مثلاً، ضربان قلب تابعی از زمان است و پزشک از روی نمودار به سادگی می‌تواند قلب سالم و ناسالم را مشخص کند (شکل ۵۷-۱). این کار غالباً با نگاه به ضابطه‌ی تابع، عملی نیست!

در شکل ۵۸-۱ نمودار تابع  $y = f(x)$  را ملاحظه می‌کنید.



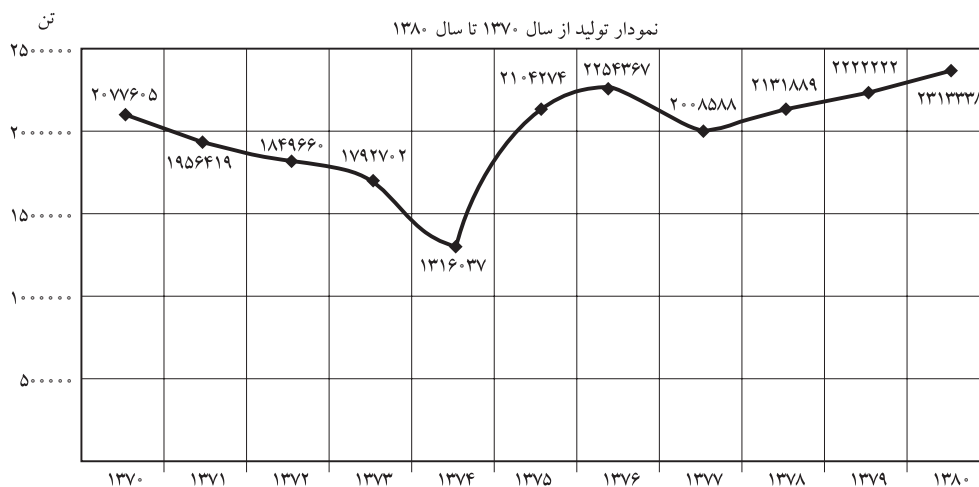
شکل ۵۸-۱

ویژگی اصلی تابع، که نمودار آن نیز باید این ویژگی را داشته باشد، آن است که به ازای هر  $x$  از دامنه‌ی تابع فقط یک  $y$  حاصل شود. یعنی، هر خط موازی محور  $y$ ها نمودار  $y = f(x)$  را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

آیا در مورد نمودار شکل ۵۸-۱ این ویژگی برقرار است؟ توضیح دهید که  $f(x_1)$  چگونه به دست می‌آید. نحوه‌ی به دست آوردن  $x_p$  را، به طوری که  $y_p = f(x_p)$ ، شرح دهید.

کمترین و بیشترین مقدار  $y$  در چه نقاطی اتفاق می‌افتد؟ آیا همیشه همین‌طور است؟ مثال بیاورید.

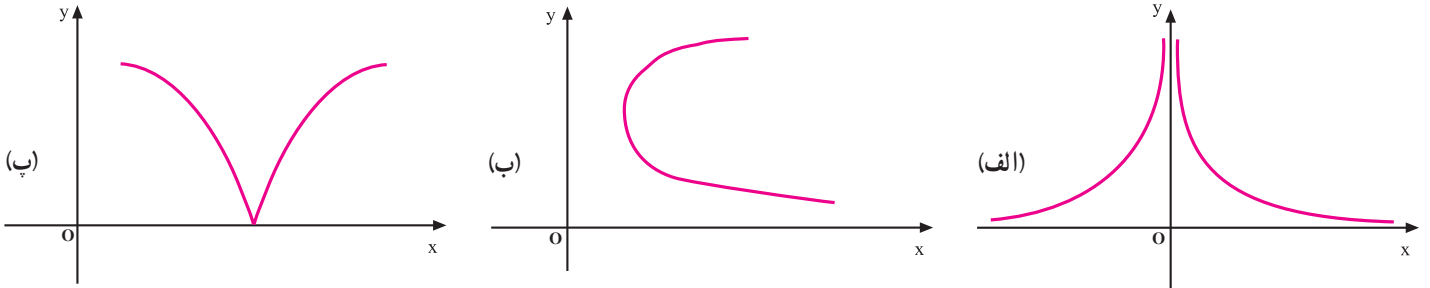
### ذوب آهن اصفهان



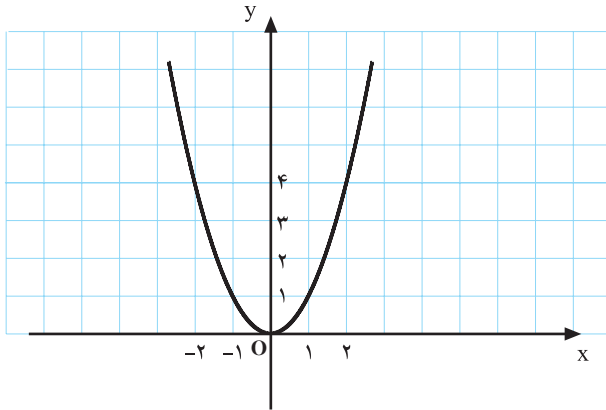
## کار در کلاس ۱-۷

از نمودارهای مقابل، کدام معرف یک تابع است؟ توضیح دهید (شکل ۵۹-۱).

شما نیز چند نمودار که معرف تابع باشند رسم کنید.

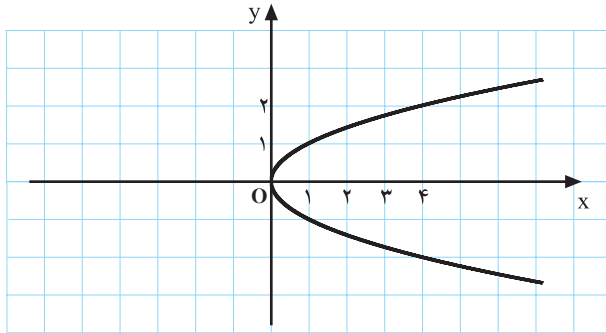


شکل ۵۹-۱

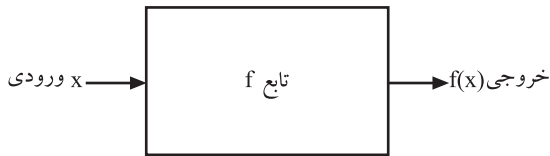


شکل ۶۰-۱ نمودار  $y = x^2$ . این نمودار یک تابع مشخص می‌کند.

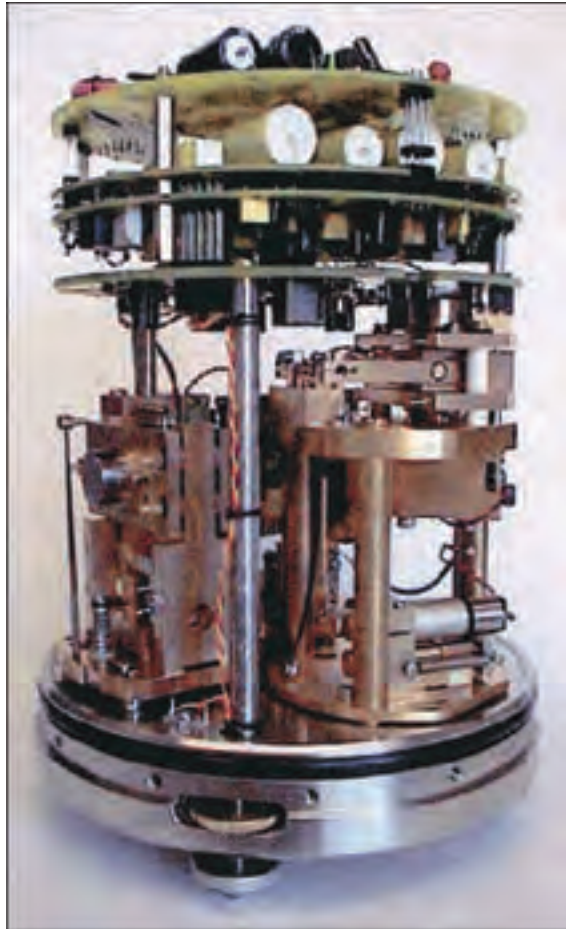
**۴-۳-۱- تعریف تابع:** اگر  $x$  و  $y$  چنان به هم مربوط باشند که برای هر مقدار  $x$  فقط یک مقدار برای  $y$  به دست آید،  $y$  را تابع  $x$  می‌نامیم. طبق این تعریف تنها مقدار متناظر با  $x$  را با  $f(x)$  نشان می‌دهند و این وابستگی را چنین می‌نویسند:  
(بخوانید:  $y$  مساوی اف ایکس است)  $y = f(x)$   
و منظور آن است که « $y$  تابعی از  $x$  است». معمولاً  $x$  را متغیر مستقل و  $y$  را تابع  $x$  می‌نامند. باید توجه داشت که  $f(x)$  معمولاً یک عبارت جبری است که مقدار  $y$  را به ازای  $x$  تعیین می‌کند.  $f(x)$  را فرمول یا ضابطه‌ی تابع نامند. از نماد  $f(x)$  معلوم می‌شود که متغیر،  $x$  و تابع،  $f$  است.



شکل ۶۱-۱ نمودار  $y^2 = x$ . این نمودار یک تابع مشخص نمی‌کند. چرا؟



شکل ۶۲-۱



شکل ۶۳-۱

نکته ۱: در مسائل مختلف ممکن است برحسب ضرورت متغیر  $x$  یا تابع  $y$  با نمادهای دیگری بیان شود. مثلاً،  
 $h(t) = -\frac{1}{4}gt^2$  که در آن  $t$  متغیر است و  $h$  تابع.

نکته ۲: همان طور که می دانید تابع های زیادی وجود دارند که دارای ضابطه نیستند. مثل تابع دمای هوا در لحظه های مختلف روز.

نکته ۳: همچنین می دانید که دستگاه هایی وجود دارند که با تغییر یک متغیر، نمودار تغییرات تابع را ثبت می کنند. برای چنین تابع هایی نیز ممکن است نتوانیم ضابطه ای تعیین کنیم (مثلاً دستگاه زلزله نگار) (شکل ۶۳-۱).

در تابع  $f$  مجموعه ی مقادیر  $x$  را دامنه ی تابع  $f$  ( $D_f$ ) و مجموعه ی مقادیر  $y$  را برد تابع  $f$  ( $R_f$ ) می نامند.

در مثال فنر، دامنه و برد تابع مربوط به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$D_f = \{0, 2, 4, 6, 8, 9, 1\}$$

$$R_f = \{0, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

در حقیقت  $f$  دستگاهی است که  $x$  را به عنوان ورودی دریافت می کند و  $f(x)$  را به عنوان خروجی تحویل می دهد (شکل ۶۴-۱).

به این ترتیب تابع  $f$  را می توان به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب، یعنی،  $(x, f(x))$  نشان داد.

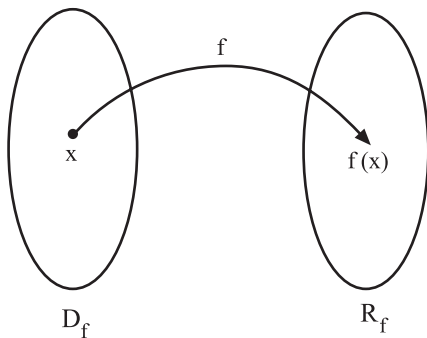
در مثال فنر، تابع مربوط را می توان با مجموعه ی زوج های مرتب زیر نیز نمایش داد.

$$f = \{(0, 10), (2, 11), (4, 12), (6, 13), (8, 14), (9, 14.5), (1, 15)\}.$$

با توجه به آنچه گفته شد می توان نوشت:

$$f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\},$$

$$R_f = \{f(x) : x \in D_f\}.$$



شکل ۶۴-۱

در این کتاب با تابع‌هایی سروکار داریم که به ازای هر  $x$  از دامنه‌ی آن‌ها  $f(x)$  عددی حقیقی است. به عبارت دیگر،  $R_f \subseteq \mathbb{R}$ . در این صورت تابع  $f$  را یک تابع حقیقی می‌گویند.

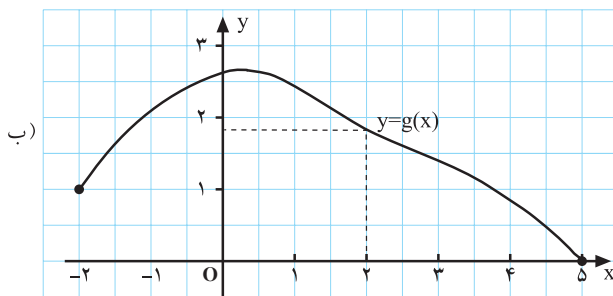
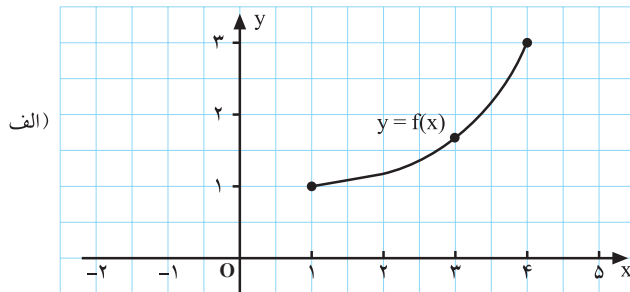
تابع‌ها را می‌توان به چهار شکل مختلف یعنی فرمول (ضابطه)، جدول، مجموعه‌ی زوج‌های مرتب و نمودار، نشان داد. در هر مورد از شکلی که مناسب‌تر است استفاده کنید و بدانید که هر چهار شکل نمایش تابع معتبر است.

جدول ۱-۶

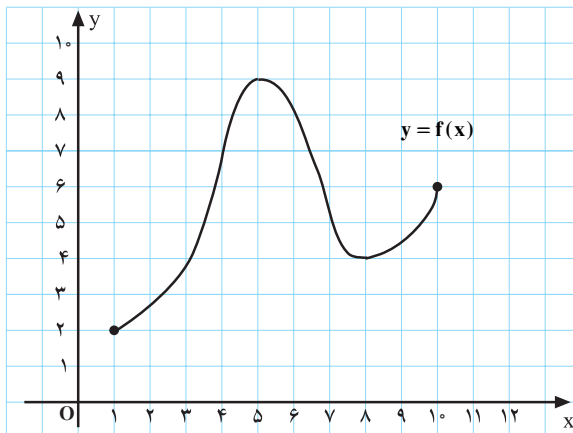
$x$	-۱
$f(x)$	-۸

$$R_f = \{-۸,$$

$$f = \{(-۱, -۸),$$



شکل ۱-۶۵



شکل ۱-۶۶

### کار در کلاس ۱-۸

۱) فرض کنید،  $f(x) = ۶x - ۲$  و

$$D_f = \{-۱, -\frac{1}{۲}, ۰, ۱, ۲\}$$

الف)  $f$  را با جدول مشخص کنید (جدول ۱-۶).

ب)  $R_f$  را بنویسید.

ج)  $f$  را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

راه‌نمایی:  $f(x)$  را به ازای  $x$ های متعلق به  $D_f$  حساب

کنید.

۲) دامنه و برد تابع‌های  $f$  و  $g$  را بنویسید و مقدار تابع را

در نقطه‌ای که مشخص شده، از روی شکل ۱-۶۵، معین کنید.

$$D_f =$$

$$R_f =$$

$$f(۳) =$$

$$D_g =$$

$$R_g =$$

$$g(۲) =$$

۳) تابع  $f$  با نمودار شکل ۱-۶۶ مشخص شده است.

الف)  $D_f$  و  $R_f$  را بنویسید.

ب) با توجه به نمودار  $f(۱)$  و  $f(۵)$  را بنویسید.

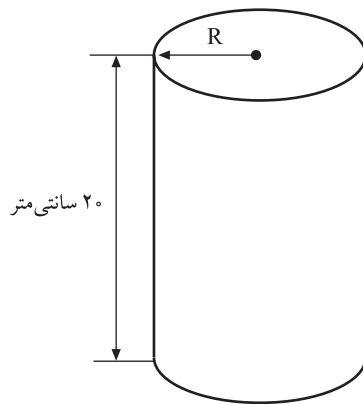
پ) اگر  $f(x) = ۹$  مقدار  $x$  چیست؟

ت) اگر  $f(x) = ۴$  مقدار  $x$  چیست؟

ث) کمترین مقدار تابع در بازه‌ی  $[۱, ۱۰]$  چیست؟

ج) بیشترین مقدار تابع در بازه‌ی  $[۱, ۱۰]$  چیست؟

## تمرین ۶-۱



شکل ۶۷-۱

۱) ارتفاع استوانه‌ای ۲۰ سانتی متر است ( $h = 20 \text{ cm}$ ) (شکل ۶۷-۱). می‌دانید که حجم یک استوانه به ارتفاع  $h$  و شعاع قاعده‌ی  $R$  از رابطه‌ی  $V = \pi R^2 h$  حساب می‌شود. اگر  $R$  بین ۸ تا ۱۲ سانتی متر تغییر کند حجم این استوانه بین چه مقادیری تغییر می‌کند؟

۲) فرض کنید  $h(x) = x^2$  و  $t(x) = x$  و دامنه‌ی هر دو تابع بازه‌ی  $[0, 1]$  باشد.

الف) نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ (شکل ۶۸-۱)؛

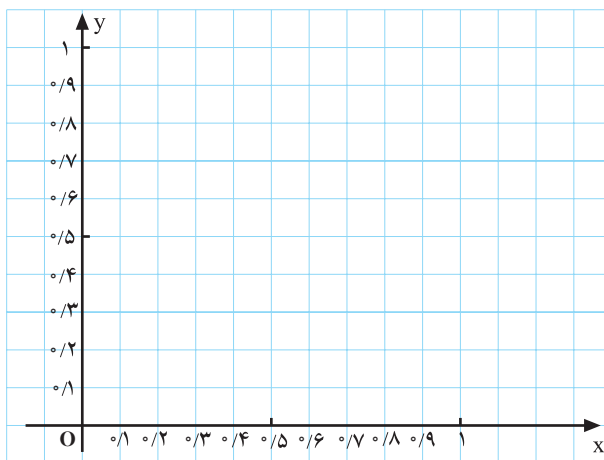
ب) برد تابع  $h$  را تعیین کنید؛

$$R_h =$$

پ) برد تابع  $t$  چیست؟

$$R_t =$$

ت) آیا دو تابع  $h$  و  $t$  برابرند؟ چرا؟

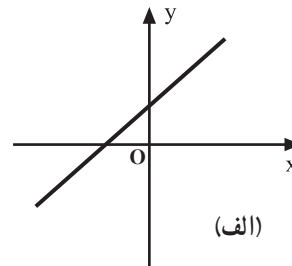
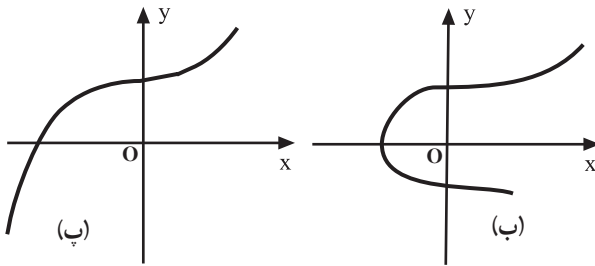


شکل ۶۸-۱

تساوی دو تابع: دو تابع وقتی با هم برابرند که دامنه‌ی یکسان داشته باشند و به ازای هر عضو از دامنه مقدار دو تابع برابر باشند.



۳) کدام نمودار مربوط به یک تابع است؟ توضیح دهید (شکل ۶۹-۱).



(الف)  
(ب)  
(پ)

شکل ۶۹-۱

۴) نشان دهید که هیچ یک از رابطه‌های زیر، بین  $x$  و  $y$ ، یک تابع مشخص نمی‌کنند.

- (الف)  $x + y^2 = 4$
- (ب)  $|y| = x + 1$
- (پ)  $y^2 = x$

(۵) تابع  $y = x^2 - 1$  مفروض است.

(الف) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۷۰-۱).

(ب) آیا نقطه‌ی  $A \left( \frac{3}{8} \right)$  روی نمودار این تابع است؟

(پ) اگر نقطه‌ی  $B \left( \frac{1}{b} \right)$  روی نمودار این تابع باشد  $b$  چیست؟

(ت) عدد  $a$  را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی  $C \left( \frac{a}{-1} \right)$  روی

نمودار تابع فوق باشد.

(ث) آیا نقطه‌ی  $D \left( \frac{\sqrt{3}}{1} \right)$  روی نمودار این تابع قرار دارد؟

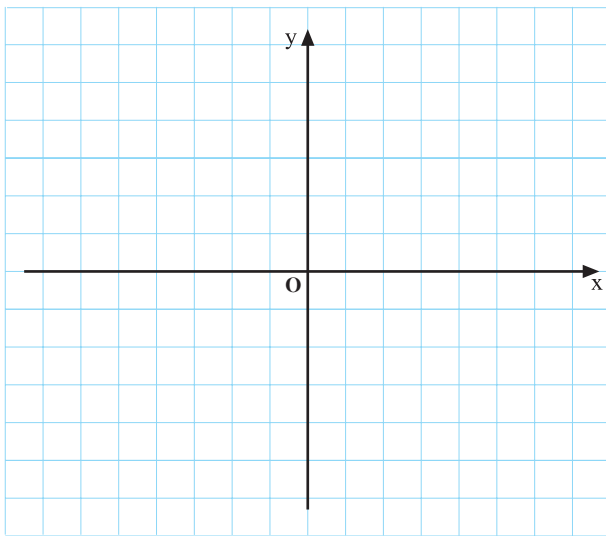
(۶) فرض کنید  $f(x) = x^2 - 2x$ . جدول ۷-۱ را کامل

کنید و بعد نمودار  $y = f(x)$  را در دفتر خود رسم کنید.

(۷) تابع  $f$  به صورت زیر تعریف شده است. جدول ۸-۱

را کامل و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$



شکل ۷۰-۱

جدول ۷-۱

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$f(x)$						

جدول ۸-۱

$x$	$f(x)$
-۱	
۰	
۱	
۲	
۳	



۸) در زیر چند تابع با ضابطه داده شده اند، مقدار آن‌ها را در نقاط مشخص شده حساب کنید.

$$f(0) = \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$g(-1) = \quad , \quad g(1) =$$

$$h(-2) = \quad , \quad h(0/5) =$$

الف)  $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$  ,  $x = 0, \frac{\pi}{2}$

ب)  $g(x) = 3x^2 - x$  ,  $x = -1, 1$

پ)  $h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  ,  $x = -2, 0/5$

$$f(3) =$$

$$f(3+h) =$$

$$f(3+h) - f(3) =$$

۹) تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^2 - x$  تعریف شده است. مقادیر زیر را حساب کنید. ( $h$  عددی حقیقی است.)

$$f(3) , f(3+h) , f(3+h) - f(3)$$

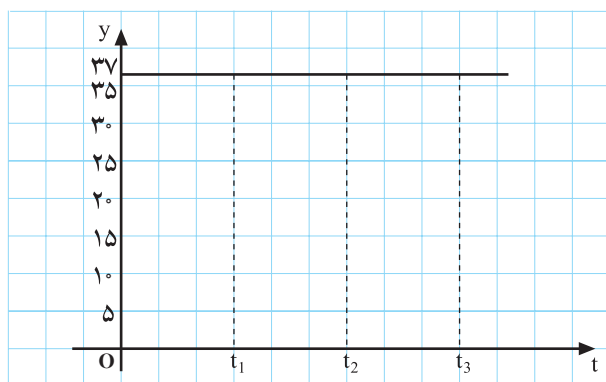
### ۵-۳-۱- چند تابع ویژه

– تابع ثابت: دمای بدن یک انسان سالم همواره چند درجه‌ی سلسیوس (سانتی‌گراد) است؟ اگر  $f(t)$  دمای بدن این شخص در زمان  $t$  باشد داریم:

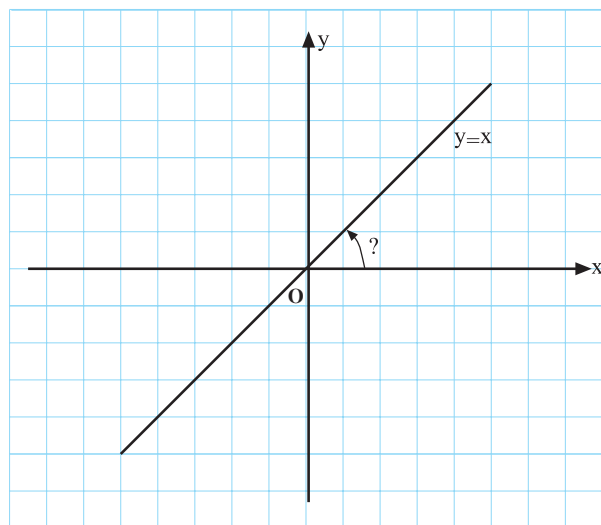
$$f(t) = 37,$$

این تابع که به ازای هر  $t$  دارای مقدار ثابت ۳۷ است تابع ثابت نامیده می‌شود. نمودار این تابع را در شکل ۱-۷۱ ملاحظه می‌کنید.

شما نیز چند تابع ثابت مثال بزنید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.



شکل ۱-۷۱



شکل ۱-۷۲

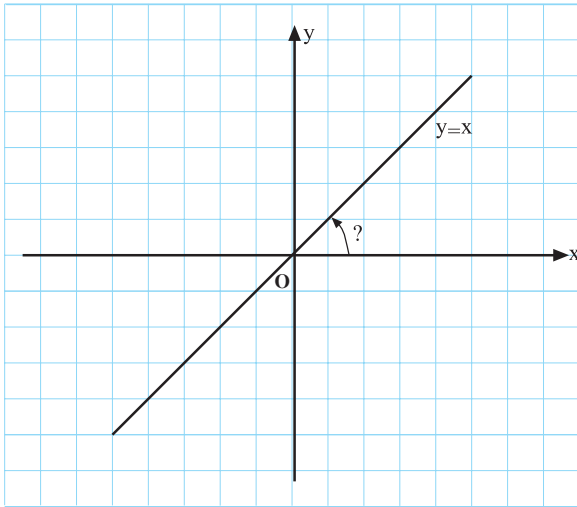
اگر به ازای هر  $x$  از دامنه‌ی تابع  $f$ ،  $f(x) = c$  که  $c \in \mathbb{R}$  را تابع ثابت گویند.

– تابع همانی: یک شیء در فاصله‌ی  $x$  جلوی آینه‌ای تخت قرار دارد. فاصله‌ی تصویر این شیء تا آینه چقدر است؟ (شکل ۱-۷۲). اگر  $f(x)$  فاصله‌ی شیء تا آینه باشد.

$$f(x) = x$$

این نمونه‌ای از یک تابع همانی است.

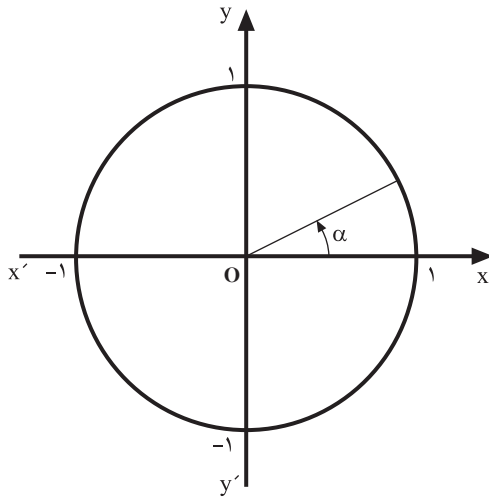
اگر به ازای هر  $x$  از دامنه‌ی  $f$ ،  $f(x) = x$  را تابع همانی گویند.



شکل ۱-۷۳

نمودار تابع همانی را در شکل ۱-۷۳ می بینید. زاویه ی نمودار تابع همانی با محور  $OX$  چند درجه است؟

در حالت کلی، نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.



شکل ۱-۷۴

**– تابع های مثلثاتی:**

در شکل ۱-۷۴ دایره ی مثلثاتی رسم شده و زاویه ی  $\alpha$  مشخص شده است.

الف) این دایره ی مثلثاتی چه ویژگی هایی دارد؟

ب) نقطه های مربوط به  $\pi + \alpha$  و  $2\pi + \alpha$  را روی این دایره مشخص کنید.

پ) مقدار  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  را به ترتیب، روی محور  $y'Oy$  و محور  $x'Ox$  مشخص کنید.

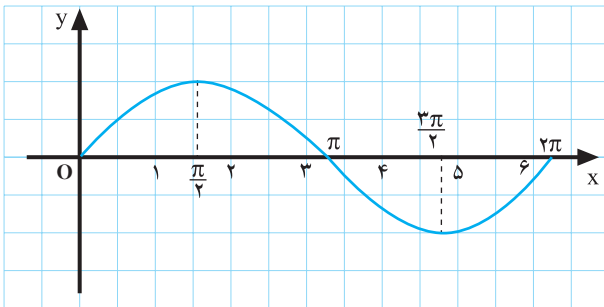
ت) وقتی  $\alpha$  از  $0^\circ$  تا  $\frac{\pi}{2}$  (یعنی  $90^\circ$ ) تغییر می کند  $\sin \alpha$  چگونه تغییر می کند؟

ث) وقتی  $\alpha$  از  $\frac{\pi}{2}$  تا  $\pi$  (یعنی  $180^\circ$ ) تغییر می کند  $\sin \alpha$  چگونه تغییر می کند؟

ج) وقتی  $\alpha$  از  $0^\circ$  تا  $180^\circ$  تغییر می کند  $\cos \alpha$  چگونه تغییر می کند؟

چ) وقتی  $\alpha$  از  $\frac{\pi}{4}$  تا  $\frac{3\pi}{4}$  (یعنی  $45^\circ$  تا  $135^\circ$ ) تغییر می کند  $\sin \alpha$  چگونه تغییر می کند؟

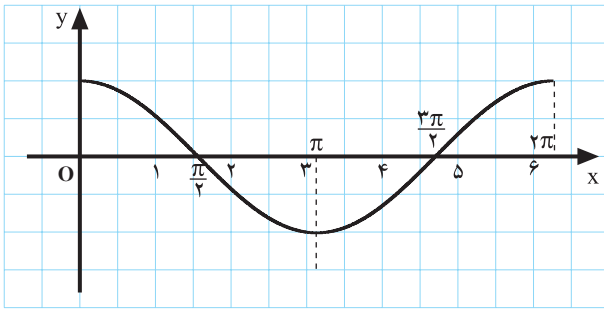
ح) با توجه به آنچه در قسمت های قبل ملاحظه شد، نمودار تابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  در بازه ی  $[0, 2\pi]$  رسم شده اند (شکل های ۱-۷۵ و ۱-۷۶).



شکل ۱-۷۵ نمودار تابع  $y = \sin x$

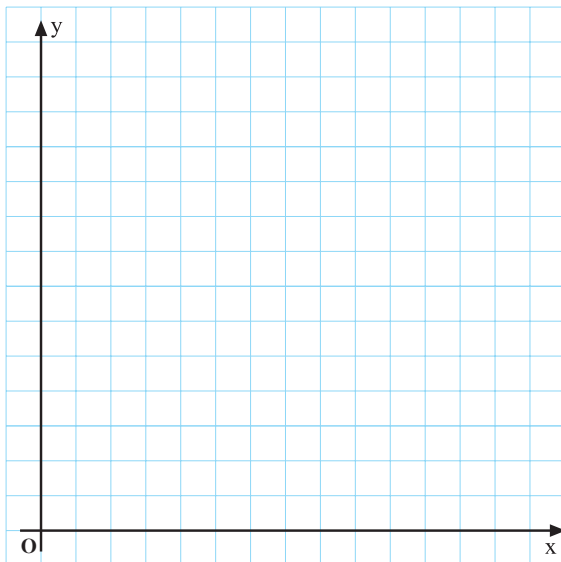
خ) با توجه به این که برای هر  $\alpha$ ،  $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$ ،

نمودار  $y = \sin x$  را در بازه ی  $[2\pi, 4\pi]$  رسم کنید.



شکل ۱-۷۶ نمودار تابع  $y = \cos x$

(د) با توجه به این که برای هر  $\alpha$ ،  $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$ ، نمودار  $y = \cos x$  را در بازه  $[\pi, 4\pi]$  رسم کنید.



شکل ۱-۷۷

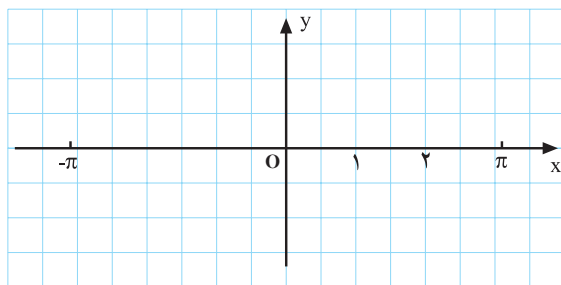
### تمرین ۱-۷

(۱) تابع  $y = f(x)$  چنین تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 5 \\ 2x, & 5 < x \leq 7 \\ \frac{3}{2}x, & 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

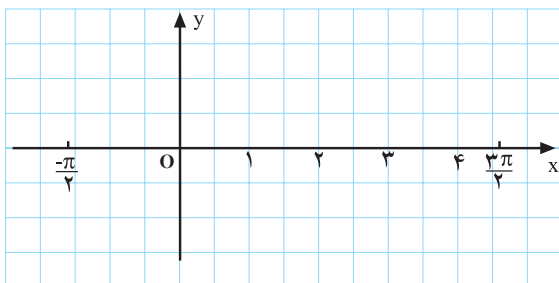
(الف) دامنه‌ی این تابع را بنویسید:

(ب) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۱-۷۷).



شکل ۱-۷۸

(۲) نمودار تابع  $y = \sin x$  را در بازه  $[-\pi, \pi]$  رسم کنید (شکل ۱-۷۸).



شکل ۱-۷۹

(۳) نمودار تابع  $y = \cos x$  را در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  رسم کنید (شکل ۱-۷۹).

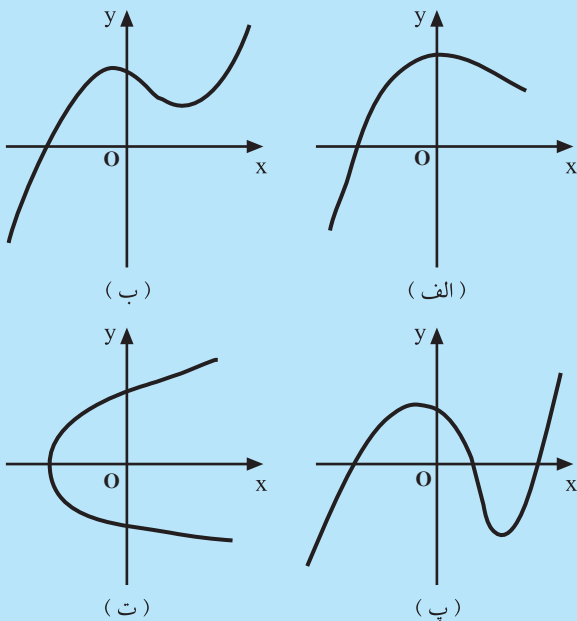
## آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = 2x - 1$  و  $D_f = \{0, 1, 5\}$  است.

- الف) این تابع را با مجموعه زوج‌های مرتب نمایش دهید.  
 ب) این تابع را با جدول نمایش دهید.  
 پ) نمودار این تابع را تعیین کنید.

۲- تابع مربوط به دمای محل سکونت خود را در ساعت‌های ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸ و ۲۲ مشخص کنید. آیا می‌توانید برای این تابع ضابطه به دست آورید؟



شکل ۸۰-۱

۳- کدام یک از نمودارهای شکل ۸۰-۱ یک تابع را مشخص می‌کند؟