

بخش اول

فصل پنجم

عملیات روی تابع‌ها

هدف کلی

تعیین ضابطه‌ی $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g و کاربرد آن‌ها

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

- ۱- چهار عمل اصلی روی دو تابع را تعریف کند.
- ۲- با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g ، ضابطه‌ی تابع‌های $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بنویسد.
- ۳- دامنه‌ی تابع‌های $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را تعیین کند.
- ۴- از اعمال بر تابع‌ها در موارد کاربردی استفاده کند.

پیش‌آزمون (۵)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱- اگر $f(x) = 2x$ و دامنه‌ی f مجموعه $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید:

الف) $f(2) \times f(3)$

ب) $f(2) + f(3)$

پ) آیا تساوی $f(2) \times f(3) = f(6)$ درست است؟

۲- اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = 2 - 2x$ ، حاصل

عبارت‌های زیر را حساب کنید:

الف) $f(2) + g(2)$

ب) $f(2) - g(2)$

پ) $f(2) \times g(2)$

ت) $\frac{f(2)}{g(2)}$

۳- دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = 5 - 3x$ و

$g(x) = 2x + 6$ داده شده‌اند. مطلوب است محاسبه عبارت‌های

زیر:

الف) $f(4) + g(4)$

ب) $f(x) + g(x)$

پ) $f(2) - g(2)$

ت) $f(x) - g(x)$

ث) $f\left(\frac{1}{4}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right)$

ج) $f(x) \times g(x)$

ح) $\frac{f(3)}{g(3)}$

۴- اگر $f(x) = 2x^2 - x + 3$ و $g(x) = x^2 + x - 1$

ضابطه و دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f + g$

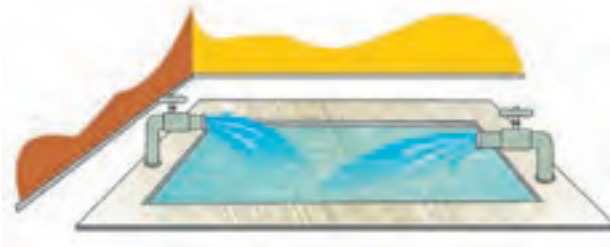
ب) $f - g$

پ) $f \times g$

ت) $\frac{f}{g}$

۱-۵- عملیات روی تابع‌ها

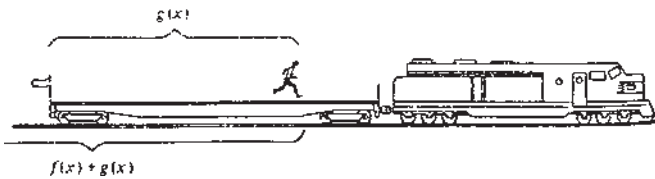
اگر f و g دو تابع حقیقی باشند به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک آنها $f(x)$ و $g(x)$ دو عدد حقیقی هستند. بنابراین، می‌توان روی آنها چهار عمل اصلی را انجام داد.



شکل ۸۷-۱

۱) یک استخر دارای دو شیر آب است (شکل ۸۷-۱). شیر اول در هر ثانیه ۲ لیتر و شیر دوم در هر ثانیه ۳ لیتر آب وارد استخر می‌کند. اگر این دو شیر با هم آب وارد استخر کنند در هر ثانیه چند لیتر آب وارد استخر می‌شود؟

اگر $f(t)$ مقدار آب وارد شده در t ثانیه، از شیر اول (برحسب لیتر) و $g(t)$ مقدار آب وارد شده در t ثانیه، از شیر دوم باشد، پس از t ثانیه $f(t) + g(t)$ لیتر آب وارد استخر می‌شود. بنابراین آنچه گفته شد: لیتر $f(t) = 2t$ ، لیتر $g(t) = 3t$ پس، توسط دو شیر، در t ثانیه، لیتر $f(t) + g(t) = 2t + 3t = 5t$ آب وارد استخر می‌شود.



شکل ۸۸-۱

۲) شخصی، مطابق شکل ۸۸-۱، روی واگن کفی یک قطار می‌دود و در هر ثانیه به طور متوسط ۵/۵ متر طی می‌کند. اگر قطار در هر ساعت به طور متوسط ۹۰ کیلومتر (در هر ثانیه ۲۵ متر) طی کند، این شخص در هر ثانیه چند متر از مبدأ حرکت قطار دور می‌شود؟

مطابق شکل ۸۸-۱، واضح است که $g(x) = 5/5x$ و $f(x) = 25x$. بنابراین، این شخص در هر ثانیه به اندازه‌ی $30/5$ متر از مبدأ حرکت قطار دور می‌شود.
 $(f(1) + g(1)) = 25 + 5/5 = 30/5$.

اگر $h(x)$ فاصله‌ی این شخص تا مبدأ پس از x ثانیه باشد،

داریم:

$$h(x) = f(x) + g(x) = 25x + 5/5x = 30/5x$$

مثال‌های حل شده در مورد مجموع،
تفاضل و ضرب دو تابع.

اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 2x + 1$
 آنگاه، اگر $h = f + g$ داریم:

$$h(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 2x) + (2x + 1)$$

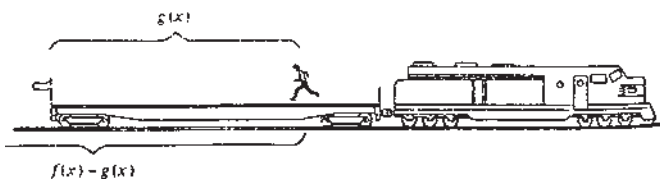
$$= x^2 + 1$$

تابع h را مجموع دو تابع f و g می‌گویند و می‌نویسند:

$$h = f + g$$

زیرا، برای هر x ، $h(x) = f(x) + g(x)$.

تابع $f + g$ به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g ، یعنی
 $D_f \cap D_g$ ، با ضابطه‌ی $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ تعریف
 می‌شود.



شکل ۸۹-۱

اگر این شخص خلاف جهت حرکت قطار بدود، در هر
 ثانیه چقدر از مبدأ دور می‌شود؟ (شکل ۸۹-۱)

$$f(1) - g(1) = 25 - 5 / 5 = 19 / 5 \text{ متر}$$

اگر $d(x)$ فاصله این شخص تا مبدأ پس از x ثانیه باشد

داریم:

اگر $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ و

$g(x) = 2x^2 - x + 2$ ضابطه‌ی تابع $h = f - g$ را

بنویسید.

حل: با توجه به تعریف داریم:

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$= (2x^2 + 5x - 3) - (2x^2 - x + 2) = 6x - 5$$

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

تابع d را با $f - g$ نشان می‌دهند.

تابع $f - g$ به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g ، یعنی
 $D_f \cap D_g$ ، با ضابطه‌ی $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ تعریف
 می‌شود.

فرض کنید $f(x) = x + 1$ اندازه‌ی عرض یک مستطیل و
 $g(x) = 2x + 3$ اندازه‌ی طول این مستطیل باشد. اگر مساحت
 این مستطیل را با $s(x)$ نمایش دهیم، ضابطه‌ی $s(x)$ را بنویسید.

حل: واضح است که

$$s(x) = f(x) \times g(x) = (x + 1)(2x + 3)$$

بنابراین،

$$s(x) = 2x^2 + 5x + 3$$

در حقیقت، $s = f \times g$.

به همین ترتیب می‌توان حاصل ضرب دو تابع f و g را نیز
 تعریف کرد.

تابع $f \times g$ به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g ، یعنی
 $D_f \cap D_g$ ، با ضابطه‌ی $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ تعریف
 می‌شود.

تابع $\frac{f}{g}$ را نیز، برای تمام x هایی که $g(x) \neq 0$ ، می توان تعریف کرد.

در حقیقت،

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x : g(x) = 0\}$$

تابع $\frac{f}{g}$ به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g

که $g(x) \neq 0$ ، با ضابطه‌ی $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می شود.

به مثال روبه‌رو توجه کنید.

مثال:

اگر $f(x) = x^2 + 1$ و

$g(x) = 3x - 2$ ، ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید

و $(\frac{f}{g})(\frac{5}{3})$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به تعریف $\frac{f}{g}$ داریم:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 1}{3x - 2} \quad (x \neq \frac{2}{3})$$

$$\frac{f}{g}(\frac{5}{3}) = \frac{(\frac{5}{3})^2 + 1}{3(\frac{5}{3}) - 2} = \frac{\frac{25}{9} + 1}{5 - 2} = \frac{34}{27}$$

تمرین ۹-۱

۱- فرض کنید $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x + 1$.

الف) ضابطه و دامنه‌ی تابع‌های $f + g$ ، $f - g$ و $f \times g$

را بنویسید.

ب) مقدارهای $(f + g)(0)$ ، $(f - g)(1)$ ، $(f \times g)(2)$ و

$(\frac{f}{g})(4)$ را حساب کنید.

۲- فرض کنید $M \begin{vmatrix} t-1 \\ t+1 \end{vmatrix}$ و $N \begin{vmatrix} t+1 \\ t+3 \end{vmatrix}$ و نقطه‌ی P وسط

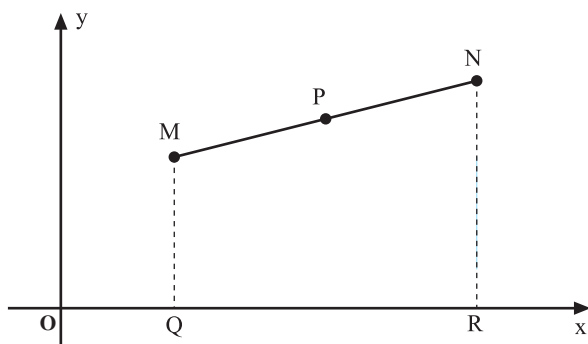
پاره خط MN باشد.

الف) مطابق شکل ۹-۱، مختصات نقاط Q و R را

بنویسید.

ب) اگر مساحت دوزنقه $MQRN$ را با $s(t)$ نشان دهیم،

ضابطه‌ی تابع s را بنویسید.



شکل ۹-۱

آزمون پایانی (۵)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- مقدار آبی که در هر ثانیه، برحسب لیتر، از فواره‌ی A وارد یک استخر می‌شود از دستور $f(t) = 2t$ و مقدار آبی که در هر ثانیه از فواره‌ی B وارد این استخر می‌شود از دستور $g(t) = 5t$ محاسبه می‌شود.

الف) مقدار آبی که در هر ثانیه از هر دو فواره‌ی A و B وارد استخر می‌شود از کدام دستور می‌توان محاسبه کرد؟

ب) در ۵ ثانیه چقدر آب وارد استخر می‌شود؟

پ) اگر حجم استخر ۳۵۰۰۰ لیتر باشد دو فواره‌ی A و B در چه مدت این استخر را پر می‌کنند؟

۲- مختصات نقطه‌های متغیر M و N چنین است :

$$M \left| \begin{array}{l} t-1 \\ t^2+1 \end{array} \right. \quad \text{و} \quad N \left| \begin{array}{l} t^2-1 \\ t+1 \end{array} \right.$$

طول پاره‌خط MN را برحسب t به دست آورید.