

بخش دوم

فصل دوم

پیوستگی

هدف کلی



شناسایی توابع پیوسته و حل مسائل آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:



- ۱- تابع پیوسته را تعریف کند.
- ۲- با استفاده از قضیه‌های پیوستگی، حد تابع را در نقطه‌های مورد نظر حساب کند.
- ۳- نقطه‌های ناپیوستگی تابع‌ها را تعیین کند.
- ۴- مسائل پیوستگی را به‌طور نسبی حل کند.

پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱- واژه‌هایی که زیر آن‌ها خط کشیده شده است به چه معنی هستند؟

الف) راه‌آهن ایران از آذربایجان غربی به راه‌آهن اروپا پیوسته است.

ب) گرمای آب رادیاتور ماشین به‌طور ناپیوسته خنک می‌شود.

پ) کامپیوتر مسائل گسسته را مورد بررسی قرار می‌دهد.

ت) یک منحنی بدون بریدگی یا گسستگی، پیوسته است.

ث) واژه‌های وصل، فصل، متصل و منفصل به چه معنا هستند؟

۲- ویژگی عمده‌ی یک تابع چیست؟

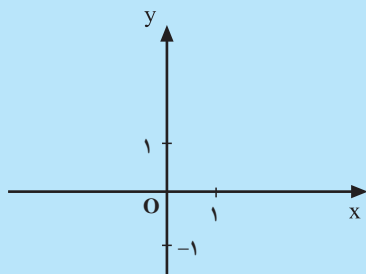
۳- تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

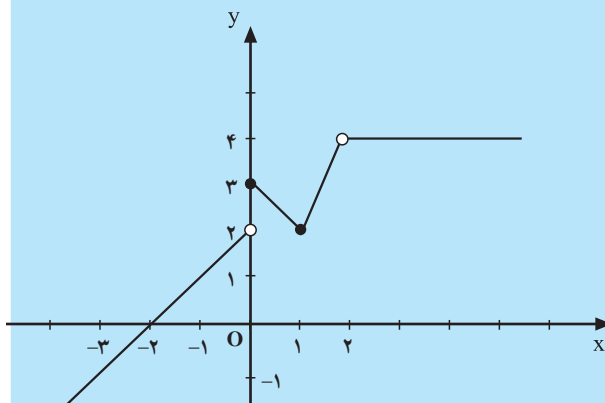
الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) نمودار این تابع در چه نقطه‌ای گسستگی دارد؟

پ) نمودار این تابع از چند قسمت تشکیل شده است؟



شکل ۲-۴۳



شکل ۲-۴۴

۴- نمودار تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ 3-x & 0 \leq x < 1 \\ 2x & 1 \leq x < 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$

در چه نقاطی

بریدگی دارد؟

۲-۲ پیوستگی

پیوستگی تابع رابطه‌ی بسیار نزدیکی با مفهوم حد تابع دارد. ابتدا پیوستگی تابع را در یک نقطه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ و نمودار آن را در شکل ۲-۴۵ در نظر می‌گیریم. این تابع برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است، یعنی $D_f = \mathbb{R}$. بنابراین، برای هر $a \in \mathbb{R}$ نقطه‌ی $A(a, f(a))$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. ضمناً همان‌طور که ملاحظه می‌شود این نمودار در هیچ نقطه‌ای بریدگی ندارد. به عبارت دیگر، منحنی $y = f(x)$ یک تکه (یا پیوسته) است. لذا، تابع $y = x^3$ را پیوسته نامیم.

اکنون مقدار تابع f و حد آن را در یک نقطه، مثلاً، $x = 1$ ، به دست می‌آوریم:

$$f(1) = 1^3 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3) = 1^3 = 1$$

به طوری که دیده می‌شود در این مثال $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$.

این ویژگی در هر نقطه‌ی دیگر نیز برقرار است. به طور مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 2^3 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = (-1)^3 = -1$$

مثال ۲: تابع f با ضابطه‌ی

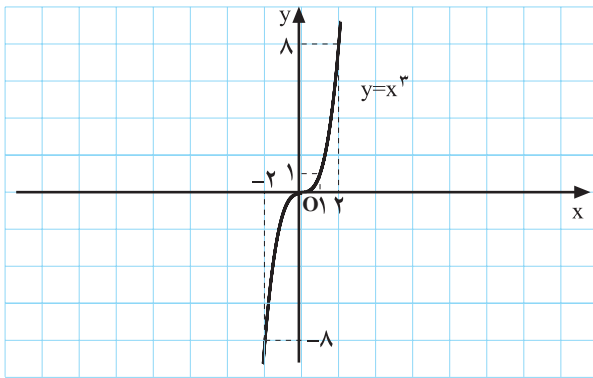
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. دامنه‌ی این تابع $D_f = \mathbb{R}$ و با توجه به اتحاد مزدوج، برای هر $x \neq 1$ ، یا $(x-1) \neq 0$ داریم:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

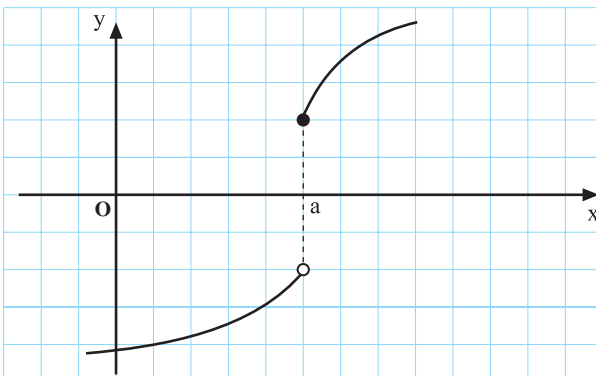
یعنی، $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$. نمودار این تابع را در شکل

۲-۴۷ ملاحظه می‌کنید. دیده می‌شود که این نمودار در $x = 1$ دارای گسستگی (ناپیوستگی) است. ضمناً، با توجه به ضابطه‌ی



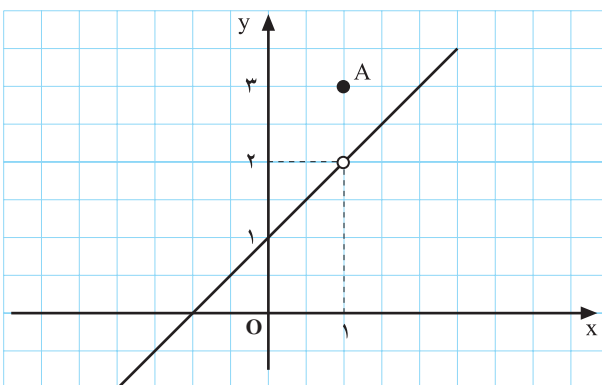
شکل ۲-۴۵

به طور کلی، اگر نمودار یک تابع در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریفش بریدگی نداشته باشد پیوسته است.



نمودار یک تابع ناپیوسته

شکل ۲-۴۶



شکل ۲-۴۷

تابع داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

اما، مقدار حد با مقدار $f(1)$ برابر نیست و همین باعث گسستگی در نمودار تابع شده است. اگر $f(1)$ را به جای ۳ عدد ۲ تعریف کنیم تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته خواهد شد. با توجه به آنچه توضیح داده شد تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱: تابع f را در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته گوئیم،

هرگاه :

(۱) تابع f در $x=a$ تعریف شده باشد ؛

(۲) وقتی $x \rightarrow a$ تابع f حد داشته باشد ؛

(۳) حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ با مقدار تابع در a برابر باشد.

یعنی،

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

نکته‌ی ۱: رابطه‌ی $(*)$ سه شرط (۱)، (۲) و (۳) را

داراست. چرا؟

تعریف ۲: اگر f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد

گوئیم f پیوسته است. اگر $D_f = [a, b]$ برای پیوستگی f در a

کافی است داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (پیوستگی از

راست در a) و برای پیوستگی در b کافی است داشته باشیم

$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (پیوستگی از چپ در b) (شکل ۲-۴۹).

نکته‌ی ۲: اگر تابع f پیوسته باشد و $a \in D_f$ ، اولاً f در

a حد دارد، ثانیاً این حد مساوی $f(a)$ است. پس، برای به دست

آوردن حد f ، وقتی $x \rightarrow a$ ، کافی است در ضابطه‌ی تابع f

به جای متغیر مقدار a را قرار دهید.

۲-۲-۱- قضیه‌های پیوستگی: همان طور که تاکنون

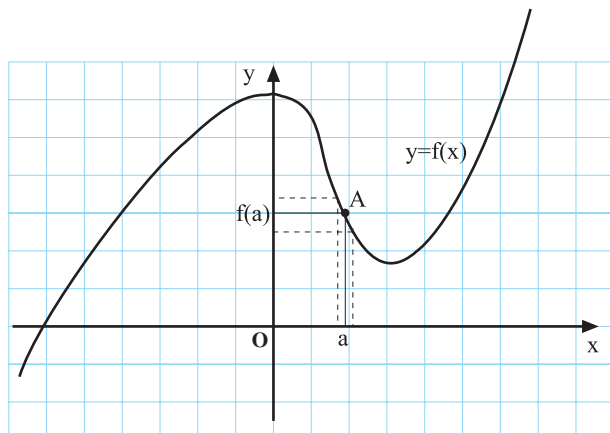
متوجه شده‌اید تعیین حد تابع به وسیله‌ی جدول یا رسم نمودار

دارای مشکلاتی است. اما برای تابع‌هایی که پیوسته هستند مقدار

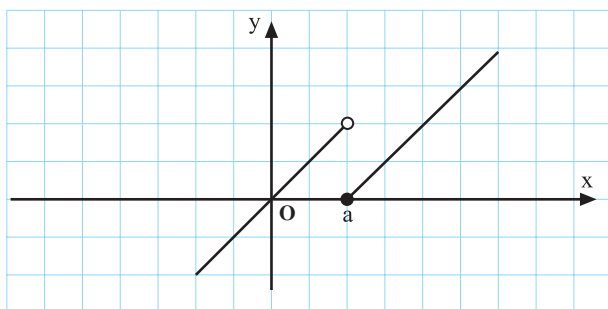
حد، وقتی x به نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریف میل می‌کند، به سادگی

به دست می‌آید. لذا، شناختن تابع‌های پیوسته در این مورد کمک

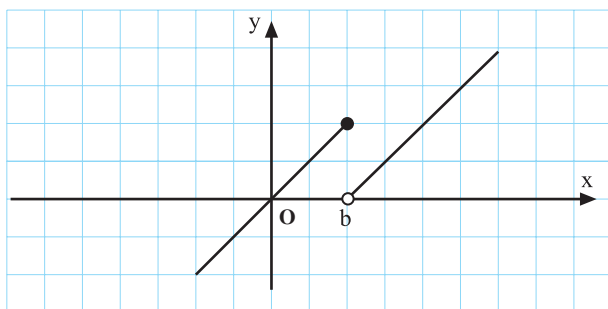
شایانی می‌کند.



شکل ۲-۴۸



(الف)



(ب)

شکل ۲-۴۹

در زیر چند قضیه در مورد تابع‌های پیوسته بیان می‌کنیم. اثبات این قضیه‌ها با توجه به تعریف یک تابع پیوسته آسان است ولی هدف ما استفاده و به کار بردن این قضیه‌ها می‌باشد.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۱)

۱) اگر c یک عدد ثابت باشد تابع ثابت $f(x) = c$ پیوسته است. در نتیجه، مثلاً می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3} = \sqrt{3}, \quad \lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

۲) تابع $f(x) = 2x + 1$ پیوسته است، لذا در هر نقطه حد دارد. مثلاً،

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 1) = 2(-1) + 1 = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (2x + 1) = 2\sqrt{3} + 1.$$

۳) اگر n عددی طبیعی باشد و $f(x) = x^n$ این تابع پیوسته است. لذا، مثلاً، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = (-2)^3 = -8, \quad \lim_{x \rightarrow -1} x^5 = (-1)^5 = -1.$$

۴) رابطه‌های زیر نیز از پیوستگی تابع‌های چندجمله‌ای نتیجه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - x^2 + 7x - 5) &= 2(3)^3 - (3)^2 + 7(3) - 5 \\ &= 54 - 9 + 21 - 5 = 61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (2x^4 - x^2 + 5) &= 2(\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^2 + 5 \\ &= 8 - 2 + 5 = 11. \end{aligned}$$

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌های ۲ و ۳)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

با توجه به پیوستگی حاصل جمع دو تابع پیوسته می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x + \sin x) = \cos \pi + \sin \pi = -1 + 0 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x + x) = \cos \pi + (\pi) = -1 + \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 2 \sin x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

قضیه‌ی ۱: فرض کنید a, a_1, \dots, a_n عددهای حقیقی باشند. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

که یک تابع چندجمله‌ای نامیده می‌شود، بر \mathbb{R} پیوسته است.

قضیه‌ی ۲: تابع‌های $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ بر \mathbb{R} پیوسته هستند.

قضیه‌ی ۳: اگر تابع‌های f و g در $x = a$ پیوسته باشند تابع‌های $f + g$ و $f - g$ نیز در $x = a$ پیوسته‌اند.

نکته: قضیه‌ی ۳ برای هر تعداد با پایان (متناهی) تابع پیوسته برقرار است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۴)

۱) با استفاده از پیوستگی حاصل ضرب دو تابع پیوسته،

می‌توان گفت که تابع‌های زیر پیوسته‌اند:

الف) $f(x) = x \sin x$ ب) $g(x) = x^2 \cos x$

۲) با توجه به قضیه‌ها می‌توان نوشت:

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 8x + 1) \sin x = (0 - 0 + 1) \sin 0$
 $= 1 \times 0 = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} [(2x+1)(x^2-4)(x+3)]$
 $= (2 \times 3 + 1)(3^2 - 4)(3 + 3)$
 $= 7 \times 5 \times 6 = 210$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x (1 + \sin x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 $= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + 1)$

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۵)

۱) تابع‌های زیر بر \mathbb{R} پیوسته‌اند (زیرا، تابع‌هایی که در

مخرج کسر‌ها قرار دارند پیوسته و همواره غیرصفرند و تابع‌هایی

که در صورت کسر‌ها قرار دارند پیوسته‌اند):

الف) $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{1 + x^2}$

ب) $g(x) = \frac{x^2 - 8x - 3}{2 + \sin x}$

پ) $h(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}$

۲) با توجه به پیوستگی تابع‌های مثال بالا، می‌توان نوشت:

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 1}{1 + x^2} = \frac{2(-1)^2 - 1}{1 + (-1)^2} = \frac{2 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 8x - 3}{2 + \sin x} = \frac{0^2 - 8 \times 0 - 3}{2 + \sin 0} = \frac{-3}{2} = -1.5$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\frac{\pi}{4} \times \sin \frac{\pi}{4}}{1 + \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\pi}{4} \times 1}{1 + 0} = \frac{\pi}{4}$

قضیه‌ی ۴: اگر تابع‌های f و g در $x = a$ پیوسته باشند

تابع $(fg)(x) = f(x).g(x)$ در $x = a$ پیوسته است.

نکته: قضیه‌ی ۴ برای تعدادی با پایان (متناهی) تابع پیوسته

برقرار است.

قضیه‌ی ۵: اگر تابع‌های f و g در $x = a$ پیوسته باشند

تابع با ضابطه‌ی $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ در $x = a$ ، به شرط آن‌که

$g(a) \neq 0$ ، پیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ وقتی

$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ پیوسته است.

مثال ۲: تابع $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ وقتی

$x \neq k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$ پیوسته است.

قضیه‌ی ۶: اگر تابع f در a و تابع g در $f(a)$ پیوسته باشد تابع $g \circ f$ در a پیوسته است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۶)
 (۱) با توجه به پیوستگی تابع‌های چندجمله‌ای و تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$ ، می‌توان گفت که تابع‌های زیر پیوسته‌اند:

الف) $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ ب) $\cos x^2$ پ) $\cos(2x + \pi)$

(۲) با توجه به پیوستگی تابع‌های بالا داریم:

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin(0 - \frac{\pi}{4}) = -1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = \cos 0^2 = \cos 0 = 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos(2x + \pi) = \cos 3\pi = -1$

حل ۱: اولاً $f(2) = 2^2 - 5 = -1$ ، ثانیاً، با توجه به پیوسته بودن هر تابع چندجمله‌ای،

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1 - x) = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 5) = 2^2 - 5 = -1$$

بنابراین، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$ و تابع f در $x = 2$ پیوسته است.

حل ۲: داریم: $\lim_{x \rightarrow 2^+} -2x + 6 = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} |2x - 2| = 2$

بنابراین، کافی است تعریف کنیم:

$$f(2) = 2.$$

حل ۳: صرف‌نظر از تعریف این تابع، چون هر تابع چندجمله‌ای پیوسته است، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - b) = 2 \times 2 - b = 4 - b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 - 2 = 2^3 - 2 = 6$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$4 - b = 6 \Rightarrow b = -2$$

واضح است که به‌ازای $b = -2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 - (-2) = 6 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

یعنی تابع f در $x = 2$ پیوسته است.

۲-۲-۲- مسائل پیوستگی: در این جا مثال‌هایی از پیوستگی تابع‌ها، می‌آوریم. نحوه‌ی حل این مثال‌ها می‌تواند نمونه‌ای برای حل مسائل مشابه باشد.

مثال‌ها

(۱) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 2 \\ x^2 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

آیا تابع f در $x = 2$ پیوسته است؟

(۲) تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} -2x + 6, & x > 2 \\ |2x - 2|, & x < 2 \end{cases}$ داده شده است.

$f(2)$ را چنان تعریف کنید که تابع f در $x = 2$ پیوسته باشد.

(۳) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - b, & x \leq 2 \\ x^3 - 2, & x > 2 \end{cases}$$

عدد b را چنان تعیین کنید که تابع f در نقطه‌ی $x = 2$

پیوسته باشد. جواب خود را امتحان کنید.

حل ۴: کافی است c را چنان تعیین کنیم که تابع f در -1 حد داشته باشد و بعد $f(-1)$ را مقدار این حد تعریف کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3(-1) + 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = (-1)^2 - c = 1 - c$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$1 - c = -1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(-1) = -1$$

حل ۵: اولاً، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \times 2 - a = 4 - a$ ، ثانیاً،

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 + b = 4 + b$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$4 - a = 5 \Rightarrow a = -1$$

$$4 + b = 5 \Rightarrow b = 1$$

پیوستگی تابع f را در $x = 2$ ، با توجه به مقدارهایی که برای a و b به دست آمد، امتحان کنید.

(۴) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x < -1 \\ x^2 - c & x > -1 \end{cases}$$

هرگاه تابع f در $x = -1$ پیوسته باشد $f(-1)$ و c را بیابید.

(۵) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 2 \\ 5 & x = 2 \\ x^2 + b & x > 2 \end{cases}$$

عددهای a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در $x = 2$

پیوسته باشد.

تمرین ۷-۲

۱- پیوستگی یا ناپیوستگی هریک از تابع‌های زیر را در

نقطه‌ی داده شده تعیین کنید.

ت) $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ (در $x = 2$)

ث) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > -1 \\ -2, & x = -1 \\ 2x, & x < -1 \end{cases}$ (در $x = -1$)

۲- اگر $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 1 \\ a-2x, & x > 1 \end{cases}$ مقدار a و $f(1)$ چقدر

باشد تا این تابع در $x = 1$ پیوسته باشد؟

۳- تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a, & x > -2 \\ 4, & x = -2 \\ 3x - 2b, & x < -2 \end{cases}$$

الف) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1, & x \geq 1 \\ 4 - x^2, & x < 1 \end{cases}$ (در $x = 1$)

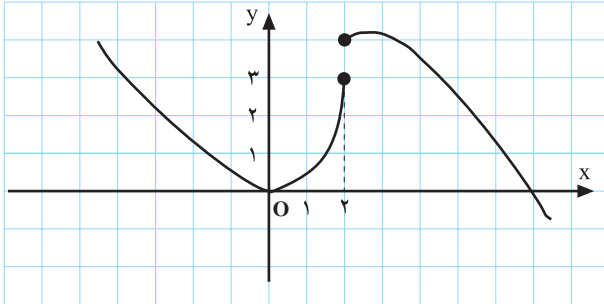
ب) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{4} x, & x > 2 \\ x^2 - 2x, & x \leq 2 \end{cases}$ (در $x = 2$)

پ) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$ (در $x = 0$)

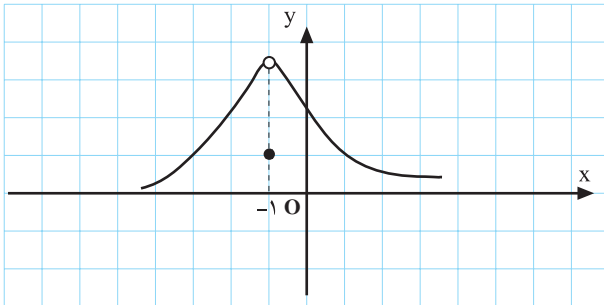
عددهای a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در $x = -2$ پیوسته باشد.

۴- آیا تابع f با ضابطه‌ی زیر در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

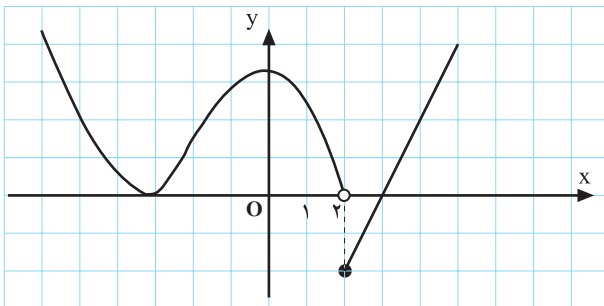
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x > 0 \\ -x^2 + 1, & x \leq 0 \end{cases}$$



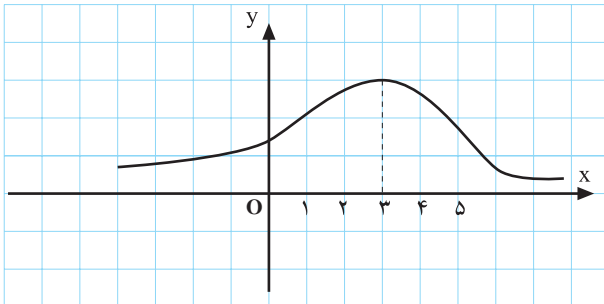
$x = 2$ (الف)



$x = -1$ (ب)



$x = 2$ (پ)



$x = 3$ (ت)

شکل ۵-۲

۵- با توجه به نمودارهای تابع‌های شکل ۵-۲، پیوستگی راست، پیوستگی چپ، و در نتیجه، پیوستگی در نقطه‌های مشخص شده را تعیین کنید.

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- مجموعه‌ی نقطه‌هایی را که در آن‌ها تابع زیر پیوسته است، تعیین کنید.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

۲- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$ در چه نقطه‌هایی ناپیوسته است؟

۳- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{|2-x|}{x-2}$ داده شده است. $f(2)$ را چنان تعریف کنید که در $x=2$ از چپ پیوسته باشد.

۴- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^3-5x+4}{x^2-3x+2}$ داده شده است، $f(1)$ را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=1$ پیوسته باشد.