

# بخش دوم

## فصل سوم

### تعمیم حد

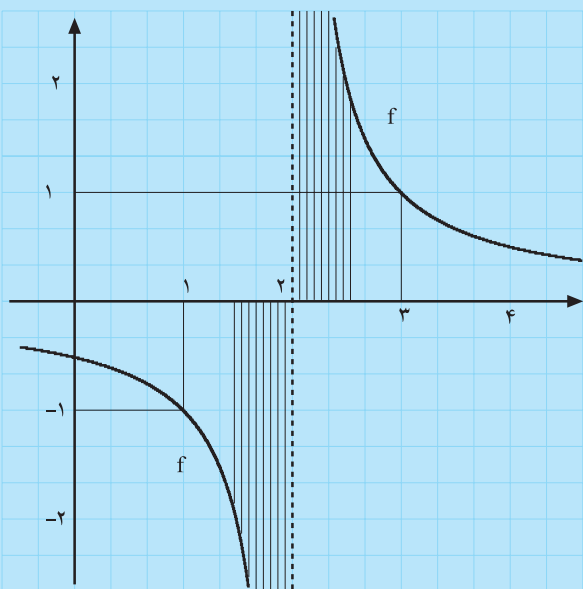
#### هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به  $+\infty$  (یا  $-\infty$ ) میل می‌کند. همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی  $x$  به یک عدد حقیقی یا  $\pm\infty$  میل می‌کند،  $+\infty$  یا  $-\infty$  است.

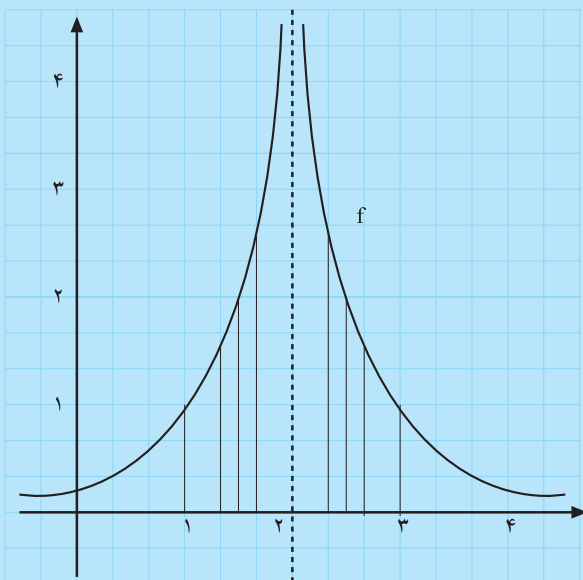
هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

- ۱- حد در بینهایت را تعریف کند.
- ۲- حد بینهایت برای یک تابع را تعریف کند.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۵۱-۲



شکل ۵۲-۲

۱- فرض کنید  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ . اگر  $x$  برابر عددهای

$2 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n-1}, \dots, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{1}$  باشد مقدار  $f(x)$ ،  $1, 2, \dots, n$  یا خواهد شد. مثلاً:

$$f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 2} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

با توجه به شکل ۵۱-۲ وقتی  $n$  بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود

به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؟ در چنین حالتی

برای  $f\left(2 + \frac{1}{n}\right)$  چه اتفاقی می‌افتد؟

۲- اگر در سؤال ۱،  $x$  به صورت  $2 - \frac{1}{n}$  و با افزایش  $n$

به عدد ۲ نزدیک شود  $f\left(2 - \frac{1}{n}\right)$  چه وضعیتی دارد؟ توجه کنید

که:

$$f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 2} = \frac{1}{-\frac{1}{n}} = -n$$

۳- اگر  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$  و متغیر  $x$  به صورت  $2 + \frac{1}{n}$  یا

$2 - \frac{1}{n}$ ، با افزایش  $n$ ، به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند وضعیت

$f(x)$  چگونه خواهد بود؟ (راهنمایی: نشان دهید که

$$f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = n^2 \text{ (شکل ۵۲-۲).}$$

۴- فرض کنید  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $x$  عددهای ۱، ۴، ۹،

۱۶،  $\dots, n^2$  را اختیار کند، مقدار  $f(x)$  چه عددهایی خواهد

بود؟ وقتی  $n$  بزرگ و بزرگ‌تر شود  $f(x)$  چگونه تغییر می‌کند؟

نمودار  $y = \sqrt{x}$  را در  $[0, +\infty)$  رسم کنید و رفتار این

تابع را، وقتی  $x$  بزرگ می‌شود، ملاحظه کنید.

### ۲-۳- تعمیم حد

تاکنون در حدهایی که مورد بررسی قرار داده‌ایم، عدد  $a$  و عدد  $L$  هر دو، عدد حقیقی بوده‌اند. در این قسمت می‌خواهیم ببینیم اگر  $a$  یا  $L$  بینهایت شوند چگونه باید عمل کرد.

### فعالیت ۱۰-۲

تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  ( $x \neq 0$ )، را در نظر بگیرید. (به مثال روبه‌رو نیز توجه کنید.)

(۱) جدول ۲-۲۰ را کامل کنید.

(۲) در جدول ۲-۲۰،  $x$  به چه عددی میل می‌کند؟

(۳) با نزدیک شدن  $x$  به صفر،  $f(x)$  چگونه تغییر می‌کند؟

(۴) آیا می‌توان گفت که اگر  $x$  به عدد صفر بسیار نزدیک

باشد،  $f(x)$  می‌تواند از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر شود؟

(۵) با توجه به آنچه در مورد  $+\infty$  می‌دانید، درست است

که بگوییم حد  $f(x)$ ، وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $+\infty$  است؟

(۶) آیا درست است که بنویسیم؟  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

(۷) نمودار  $y = f(x)$  در شکل ۲-۵۳ رسم شده است

آیا از این نمودار هم معلوم می‌شود که وقتی  $x$  به عدد صفر میل

می‌کند  $f(x)$  به  $+\infty$  میل می‌کند؟

(۸) آیا درست است که بگوییم:

$\frac{1}{x^2}$  را هرچه بخواهیم می‌توانیم بزرگ

کنیم به شرط آن که  $x$  را به قدر کافی به صفر

نزدیک کنیم.

مثال: فرض کنید استوانه‌ای به شعاع  $r$  و ارتفاع  $h$  داریم

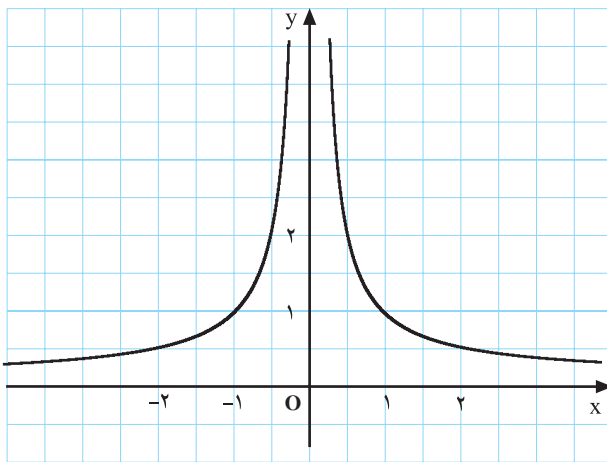
که حجم آن عدد ثابت  $108$  است. یعنی  $r^2 h = 108 \Rightarrow r^2 h = 36$

واضح است که با تغییر شعاع، ارتفاع استوانه تغییر خواهد

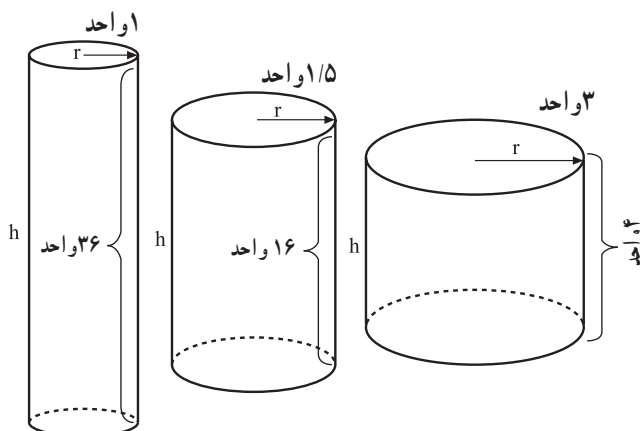
کرد. شکل ۲-۵۴ این بستگی را نشان می‌دهد.

جدول ۲-۲۰

$x$	$\dots$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\dots$	$0$	$\dots$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\dots$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\dots$	$4$								$4$	$\dots$



شکل ۲-۵۳



شکل ۲-۵۴

## فعالیت ۱۱-۲

تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )، را در نظر بگیرید.

(۱) جدول ۲-۲۱ را کامل کنید.

جدول ۲-۲۱

$x$	...	-۰/۲	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	...	...	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	...
$f(x) = \frac{1}{x}$	...	-۱۰۰						۱۰۰۰				...

(۲) در جدول ۲-۲۱ متغیر  $x$  به چه عددی میل می‌کند؟

(۳) با نزدیک شدن  $x$  به عدد صفر مقدارهای  $f(x)$  چگونه

تغییر می‌کنند؟

(۴) آیا می‌توان گفت وقتی  $x$  از چپ به عدد صفر نزدیک

می‌شود  $f(x)$  به  $-\infty$  میل می‌کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \dots$$

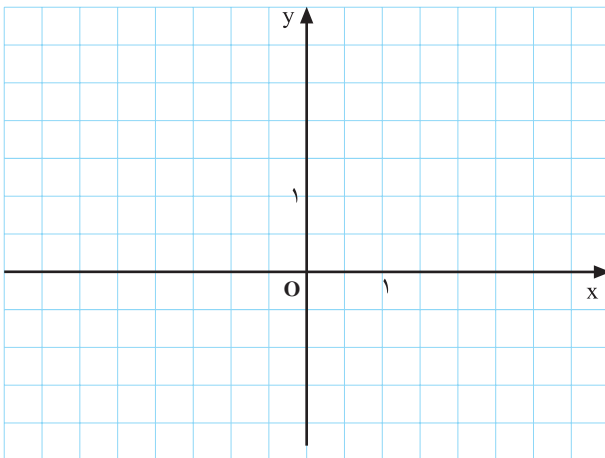
(۵) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

(۶) جدول ۲-۲۲ را کامل کنید.

جدول ۲-۲۲

$x$	-۲	-۱	- $\frac{1}{2}$	- $\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲
$f(x)$					تعریف نشده				



شکل ۲-۵۵

(۷) نمودار  $y = \frac{1}{x}$  را در دستگاه شکل ۲-۵۵ رسم

کنید.

(۸) به کمک نمودار  $f(x) = \frac{1}{x}$  رفتار این تابع را، وقتی

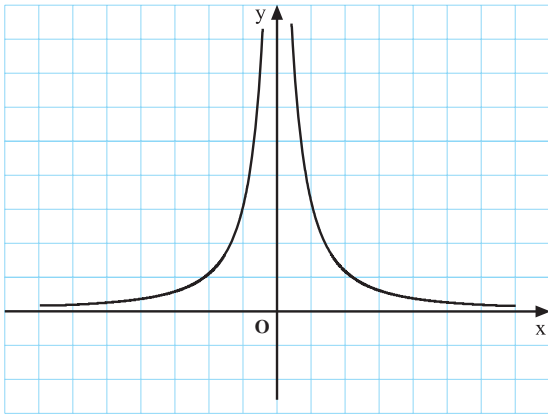
$x \rightarrow 0$ ، بررسی کنید.

(۹) آیا نمودار نیز درستی نتایج مرحله‌های ۵ و ۶ را تأیید

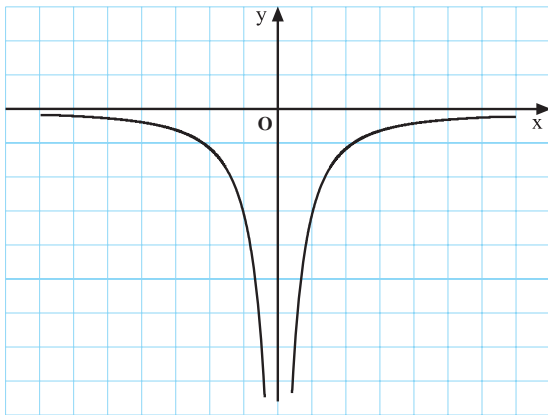
می‌کند؟

(۱۰) آیا تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$ ، وقتی  $x \rightarrow 0$  حد دارد؟ چرا؟

تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$ ، وقتی  $x \rightarrow 0$ ، حد ندارد.



شکل ۵۶-۲



شکل ۵۷-۲

### ۱-۳-۲- تعریف (حد بینهایت): فرض کنید تابع $f$

در بازه‌ی  $I$  باز که شامل عدد  $a$  است، مگر احتمالاً در  $a$ ، تعریف شده باشد.

الف) حد تابع  $f$ ، وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $+\infty$  است هرگاه بتوانیم  $f(x)$  را از هر عدد بزرگی، بزرگ‌تر کنیم، به شرط آن که  $x$  را به اندازه‌ی کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم.

ب) حد تابع  $f$ ، وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $-\infty$  است هرگاه بتوانیم

$f(x)$  را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچک‌تر کنیم، به شرط آن که  $x$  را به اندازه‌ی کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم. مثلاً،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad (\text{شکل ۵۶-۲})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \quad (\text{شکل ۵۷-۲})$$

### مثال‌ها

۱. نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

حل ۱: فرض کنید  $X = x - 1$  واضح است که  $x \rightarrow 1$  معادل است با  $X \rightarrow 0$  بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X^2} = +\infty$$

۲. نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-4}{(2x+1)^2} = -\infty$$

حل ۲: می‌دانیم که  $2x+1 = 2(x + \frac{1}{2})$  و  $x \rightarrow -\frac{1}{2}$

معادل است با  $X = x + \frac{1}{2} \rightarrow 0$  بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-4}{(2x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-4}{4(x + \frac{1}{2})^2} =$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{-1}{X^2} = -\infty$$

## تمرین ۸-۲

حدهای زیر را بررسی کنید، در صورت وجود حد نامتناهی، آن حد را تعیین کنید.

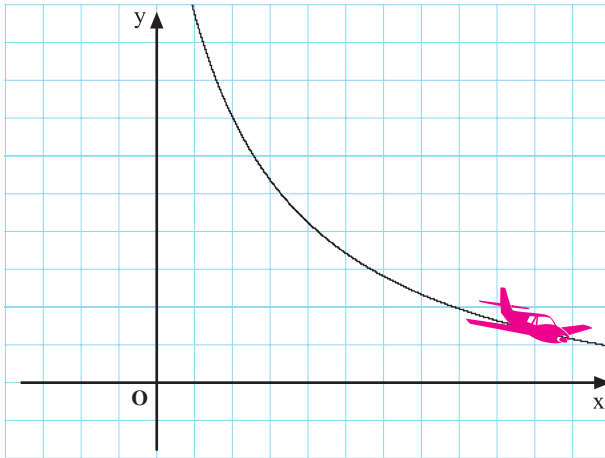
ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9}{(1-3x)^2}$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{2x+1}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{x-4}$

۲-۳-۲ حد در بینهایت: اینک می‌خواهیم مفهوم حد یک تابع را، وقتی  $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  بررسی کنیم.



شکل ۵۸-۲

## فعالیت ۱۲-۲

تابع  $f$  با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی  $x \rightarrow +\infty$  بررسی کنیم.

(۱) جدول ۲۳-۲ را کامل کنید.

### جدول ۲۳-۲

$x$	...	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x) = \frac{1}{x}$	...						...

(۲) در جدول ۲۳-۲ متغیر  $x$  چگونه تغییر کرده است؟

(۳) وقتی  $x$  به  $+\infty$  میل می‌کند،  $f(x)$  به چه عددی میل

می‌کند؟

(۴) آیا با میل کردن  $x$  به  $+\infty$ ،  $f(x)$  به صفر میل می‌کند؟



(۵) آیا رابطه‌ی زیر برقرار است؟

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(۶) نمودار  $y = \frac{1}{x}$  را در بازه‌ی  $(0, +\infty)$  رسم کنید.

(۷) با استفاده از نمودار  $y = \frac{1}{x}$  حد  $\frac{1}{x}$  را وقتی

$x \rightarrow +\infty$  بررسی کنید.

(۸) آیا نمودار هم‌تساوی رابطه‌ی  $(*)$  را تأیید می‌کند؟

### کار در کلاس ۲-۴

تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $(x \neq 0)$  را در نظر

می‌گیریم.

(۱) جدول ۲-۲۴ را کامل کنید.

جدول ۲-۲۴

$x$	$\dots -1000000 -100000 -10000 -1000 -100 -10$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\dots$

(۲) در جدول ۲-۲۴ متغیر  $x$  چگونه تغییر می‌کند؟

(۳) آیا  $x$  به  $-\infty$  میل می‌کند؟

(۴) با میل کردن  $x$  به  $-\infty$ ،  $f(x)$  چگونه تغییر کرده است؟

(۵) آیا  $f(x)$  به صفر میل کرده است؟

(۶) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

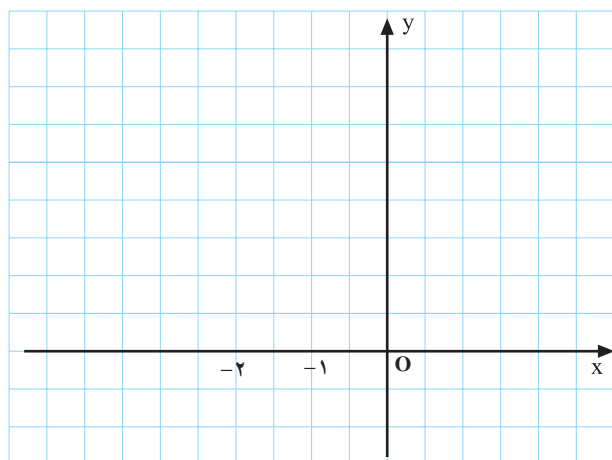
(۷) نمودار  $y = \frac{1}{x}$  را در بازه‌ی  $(-\infty, 0)$  و در شکل

۲-۵۹ رسم کنید.

(۸) آیا نمودار هم‌نشان می‌دهد وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ،  $f(x)$  به

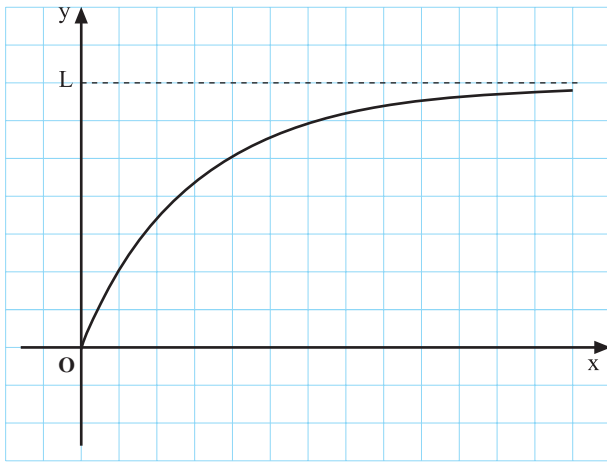
صفر میل می‌کند؟

بنابراین آنچه مورد بررسی قرار گرفت:



شکل ۲-۵۹

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$



شکل ۲-۶۰

جدول ۲-۲۵

x	$t = \frac{1}{x}$
۱	۱
۱۰	۰/۱
۱۰۰	۰/۰۱
۱۰۰۰	۰/۰۰۱
۱۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱
۱۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۱

x	→ +∞
t	→ ۰+

جدول ۲-۲۶

x	$t = \frac{1}{x}$
-۱	-۱
-۱۰	-۰/۱
-۱۰۰	-۰/۰۱
-۱۰۰۰	-۰/۰۰۱
-۱۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۱
-۱۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۰۰۱
-۱۰ <sup>۱۰</sup>	-۱۰ <sup>-۱۰</sup>

x	→ -∞
t	→ ۰-

### ۲-۳-۳- تعریف (حد در بینهایت)

(الف) حد یک تابع وقتی  $x \rightarrow +\infty$ :

فرض کنید تابع f برای  $x > a$  تعریف شده باشد. گوئیم حد  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow +\infty$  مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم  $f(x)$  را هر چه قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن که x را به قدر کافی بزرگ اختیار کرده باشیم.

(ب) حد یک تابع وقتی  $x \rightarrow -\infty$ :

فرض کنید تابع f برای  $x < a$  تعریف شده باشد. گوئیم حد  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow -\infty$  مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم  $f(x)$  را هر چه قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن که x را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچکتر کنیم (شکل ۲-۶۰).

مثلاً،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

لذا، اگر قرار دهیم  $t = \frac{1}{x}$  آن گاه (جدول های ۲-۲۵ و

۲-۲۶ ملاحظه شوند)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0$$

همچنین،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} t = 0$$

از این مطلب می توان استفاده کرد و بسیاری از حدهای

کسری را حساب کرد.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3+4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(\frac{3}{x}+4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}+4}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2-t}{3t+4} = \frac{2-0}{0+4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{1+t^3}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0$$





پ) ممکن است حد یک تابع وقتی  $x \rightarrow +\infty$  و یا  $x \rightarrow -\infty$  عددی حقیقی نباشد بلکه  $+\infty$  یا  $-\infty$  باشد. به فعالیت زیر توجه کنید.

### فعالیت ۲-۱۳

تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = 2x + 5$  را در نظر می‌گیریم. (۱) مقدارهای  $f(x)$  را، برای  $x$ هایی که در جدول (۲۷-۱) داده شده است، محاسبه کنید و در جدول بنویسید.

جدول ۲-۲۷

	←	→
$x$	... -۱۰۰۰۰۰ -۱۰۰۰۰ -۱۰۰ -۱۰ ۰ ۱۰ ۱۰۰ ۱۰۰۰۰ ۱۰۰۰۰۰ ...	
$f(x) = 2x + 5$	... ۲۰۰۰۰۵ ...	

(۲) هنگامی که متغیر  $x$  به قدر کافی بزرگ اختیار شود مقدار  $f(x)$  چگونه است؟

(۳) آیا با میل کردن  $x$  به  $+\infty$ ،  $f(x)$  به  $+\infty$  میل می‌کند؟

(۴) آیا با میل کردن  $x$  به  $-\infty$ ،  $f(x)$  هم به  $-\infty$  میل

می‌کند؟

(۵) آیا رابطه‌های زیر صحیح است؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 5) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 5) = -\infty$$

### کار در کلاس ۲-۵

فعالیت ۲-۱۳ را برای تابع  $f(x) = -3x + 5$  تکرار کنید.

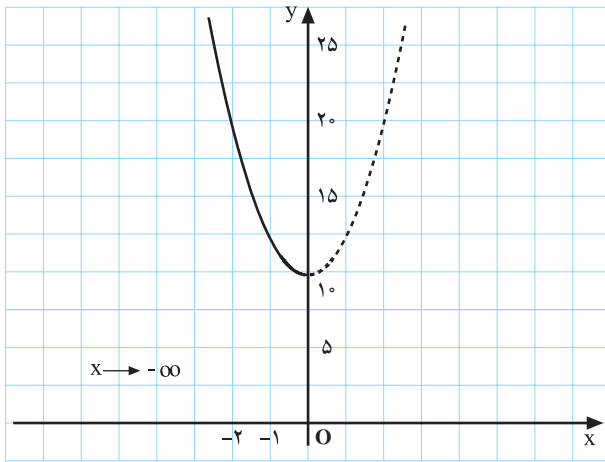
### فعالیت ۲-۱۴

تابع  $f(x) = 2x^2 + 10$  را در نظر بگیرید.

(۱) جدول ۲-۲۸ را کامل کنید.

جدول ۲-۲۸

	←	→
$x$	... -۱۰۰۰۰۰ -۱۰۰۰۰ -۱۰۰۰ -۱۰۰ -۱۰ ...	
$f(x) = 2x^2 + 10$	... ..	



شکل ۲-۶۱

(۲) وقتی  $x \rightarrow -\infty$  مقادارهای  $f(x)$  چگونه تغییر می کنند؟

(۳) آیا وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ،  $f(x)$  به  $+\infty$  میل می کند؟

(۴) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 10) = +\infty$$

(۵) جدول ۲-۲۹ را کامل کنید.

جدول ۲-۲۹

	$\xrightarrow{\hspace{10em}}$ $x \quad \dots \quad -10 \quad 0 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad \dots$
$f(x) = 2x^2 + 10$	$\dots \quad \quad \quad 20010 \quad \dots$

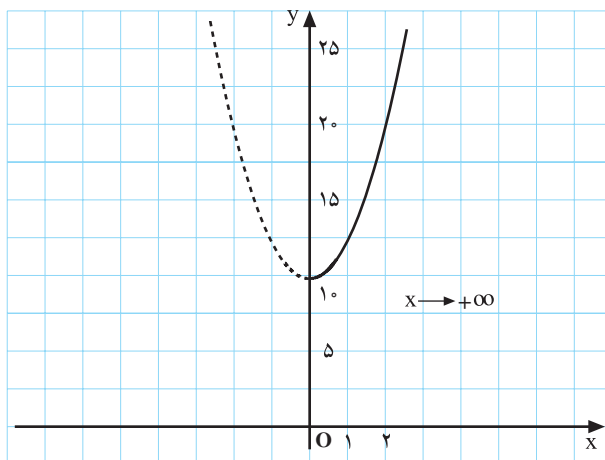
(۶) وقتی  $x \rightarrow +\infty$  مقادارهای  $f(x)$  چگونه تغییر می کنند؟

(۷) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 10) = +\infty$$

(۸) آیا درست است که بنویسیم؟

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^2 + 10) = +\infty$$



شکل ۲-۶۲

(منظور از  $x \rightarrow \pm\infty$  آن است که  $x$  به  $+\infty$  یا  $-\infty$  میل

می کند.)

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 7x^2 + 1}{x - 3x^2} = ?$$

حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 7x^2 + 1}{x - 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 - \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)}{-3x^2 \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{3} x^2 = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^5 + x}{1 + x^7 - x^3} = ?$$

حل: مانند دو مثال قبل عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^5 + x}{1 + x^7 - x^3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5 \left(-\frac{1}{x^3} + 1 - \frac{1}{x^4}\right)}{x^7 \left(\frac{1}{x^7} + 1 - \frac{1}{x^4}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^4 + x^2 + 3}{2 - 2x^5 + x^4 - x^2} = ?$$

حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^4 + x^2 + 3}{2 - 2x^5 + x^4 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right)}{-2x^5 \left(-\frac{1}{x^5} + 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3}\right)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} = -1/5$$

ث) عدد a را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - ax^2 + 1}{2x^2 + 1} = 3$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - ax^2 + 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - a + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{a}{2}$$

پس باید 3 و یا -6

با توجه به فعالیت های ۲-۱۲، ۲-۱۳، و ۲-۱۴ می توان نشان داد که اگر m یک عدد صحیح مثبت و a عددی حقیقی و غیرصفر باشد آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

(این حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز برقرار است).

و همچنین

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^m} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$$

وقتی  $x \rightarrow +\infty$ ، حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز

برقرار است.

ضمناً، اگر m عدد مثبت زوج باشد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

ولی اگر m عدد مثبت فرد باشد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^m = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$$

واضح است که

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^0} = a$$

از مطالب بالا برای تعیین حد عبارت های کسری که

صورت و مخرج آن ها چندجمله ای هستند استفاده می شود.

در زیر، مثال هایی در این مورد ملاحظه می کنید.

مثال های حل شده

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - x + 7}{x^3 - 2x^2 + 3x} = ?$$

حل: در صورت و مخرج کسر از جمله ی با بزرگ ترین

درجه فاکتور می گیریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - x + 7}{x^3 - 2x^2 + 3x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x^5}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2) = +\infty \end{aligned}$$

تمرین ۹-۲

(۱) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x + 2}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x - 2}{5x^2 + 2}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 + 7x - 1}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 5}{-\frac{1}{2}x + 6}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 2x^3}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - x^2 + 1)$

(۳) تابع  $f$  با ضابطه‌ی زیر داده شده است.

$$f(x) = \frac{ax^2 + 3x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4}$$

که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -4$$

(۴) تابع  $f$  با ضابطه‌ی زیر داده شده است:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x^m + x^2 - 3}$$

که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(۵) تابع  $f$  با ضابطه‌ی زیر داده شده است:

$$f(x) = \frac{x^n - 2x^{n-1} + 5}{x^3 - 2x^2 + 7x + 1}$$

کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(۶) فرض کنید  $f(x) = \frac{3x^m + 1}{x^2 + x + 1}$  را چنان تعیین

کنید که

(۲) تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x^m + x^2 + 1}{x^2 + 3x - 1}$

داده شده است. عدد  $m$  را چنان بیابید که:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

(راهنمایی: عبارتهای صورت و مخرج کسر مساوی

$f(x)$  را بر  $x^2$  تقسیم کنید.)

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

پ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

### آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- اگر  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$  در  $x = 3$  پیوسته باشد، مقدار  $f(3)$  را به دست آورید.

۲- اگر  $m$  عددی طبیعی باشد و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^m + x + 1}{x^2 + 2} = +\infty$$

، کمترین مقدار  $m$  چیست؟

۳- اگر  $n$  عددی طبیعی باشد و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^n - 3x + 14}{x^3 + 6} = 0$$

، بیشترین مقدار  $n$  چیست؟

۴- اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^n + 2x^2 + 1}{ax^3 + 2} = 2$  ، مقدار  $n$  و  $a$  را به دست آورید.

۵- اگر به ازای مقدارهای بزرگ  $x$ ،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ مقدار } \frac{4x^2 + 3x + 1}{8x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{x + 2}{2x - 1}$$

را به دست آورید.

۶- اگر  $f(x) = 2ax^3 + x - a + 2$  بر  $(x + 2)$  بخش پذیر باشد، مقدار  $f(0)$  برابر چیست؟

۷- اگر  $f(x) = \frac{x}{x + 1}$  مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{2x + 1}$  را به دست

آورید.

تمرین‌های تکمیلی بخش دوم

۴) مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با

$$f(x) = \begin{cases} ax + 4, & x < -2 \\ \frac{2}{x} + b, & x > -2 \\ 6, & x = -2 \end{cases}$$

ضابطه‌ی  $x = -2$  در نقطه‌ی  $x = -2$

پیوسته باشد.

۵) حدهای زیر را حساب کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-1}{(x+2)^2}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{1-2x}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1}}{2 + \sqrt{x-1}}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \sin x}{2x^2}$

چ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x \sin^2 2x}{5x^3}$

ح)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\pi - x}$

۱) تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} 3+2x, & x \geq 1 \\ x+4, & x < 1 \end{cases}$

داده شده است.

الف) با توجه به ضابطه‌ی  $f$  جدول زیر را کامل کنید.

$x$	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	... ۱ ...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$							

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  را با استفاده از جدول به دست آورید و

درستی آن را بررسی کنید.

۲) حد راست و حد چپ تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}, & x \neq \frac{3}{2} \\ 2x + 4, & x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

را وقتی  $x \rightarrow \frac{3}{2}$  به دست

آورید. آیا  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x)$  وجود دارد؟

۳) تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x}, & x \geq \frac{1}{4} \\ 2 - x - x^2, & x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

داده شده است.

پیوستگی این تابع را در نقطه‌ی  $x = \frac{1}{4}$  بررسی کنید.