

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# جبر و احتمال

سال سوم آموزش متوسطه

رشته ریاضی و فیزیک

وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

نام کتاب : جبر و احتمال - ۲/۲۵۸

مؤلفان : بیژن ظهوری‌زنگنه، زهرا گویا، یحیی تابش و یدالله ایلخانی‌پور

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹ ، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبسایت : [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir)

مدیر امور فنی و چاپ : لیدا نیک‌روش

طراح جلد : زهرا گویا، محمدقاسم علیمردانی

صفحه‌آرا : سمیه قنبری

حروفچین : زهرا ایمانی‌نصر، سیده فاطمه محسنی

مصحح : علیرضا کاهه، علی مظاهری نظری فر

امور آماده‌سازی خبر : زینت بهشتی شیرازی

امور فنی رایانه‌ای : احمدرضا امینی، حمید ثابت کلاچاهی

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (دارو پخش)

تلفن : ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵ ، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰ ، صندوق پستی : ۱۳۹-۳۷۵۱۵

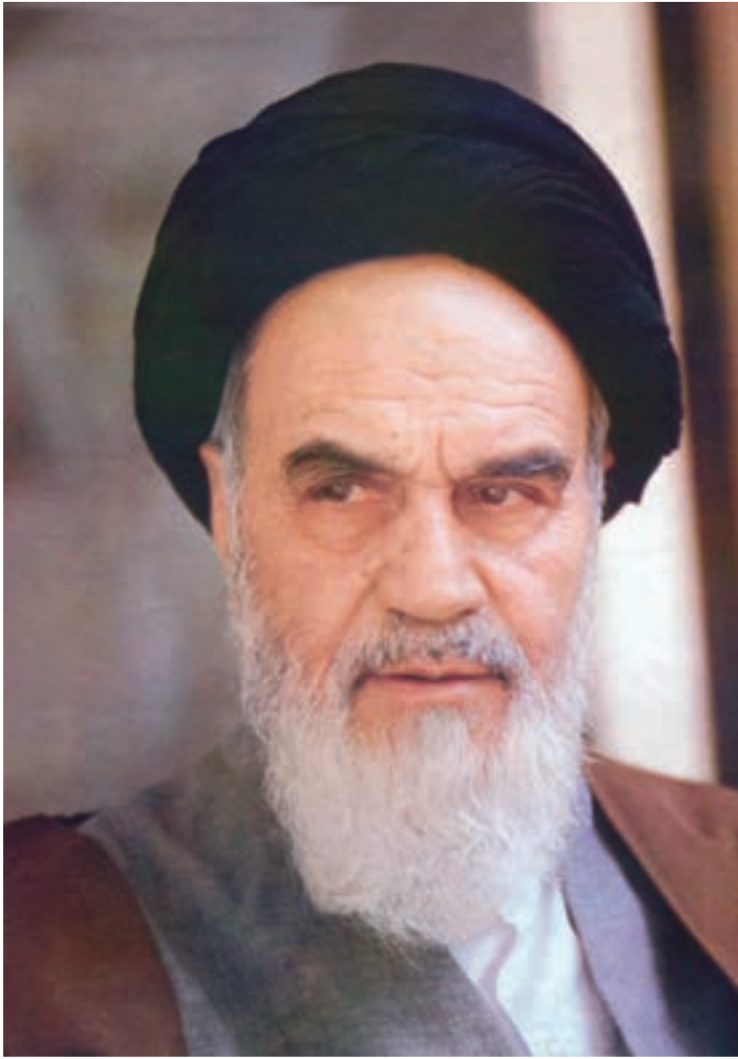
چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار : ۱۳۹۵

حَقّ چاپ محفوظ است.

ISBN 964-05-0055-0

شابک ۹۶۴-۰۵-۰۰۵۵-۰



اگر منحرفین و معوجین در یک کشوری سرنوشت آن کشور را به دست بگیرند، آن کشور رو به انحطاط و انحراف می‌رود، و اگر افاضل و دانشمندان که با فضیلت هستند، با فضیلت انسانی هستند، اینها سررشته‌دار یک کشور بشوند، فضیلت در آن کشور زیاد می‌شود؛ برای اینکه در آن مقامی که هستند مردم به حسب عادت توجه به آنها دارند و حرف‌های آنها در ذهن‌های آنها، در ذهن‌های عموم مردم کارگر است و تأثیر می‌کند.

امام خمینی

این کتاب در سال ۱۳۷۹ براساس هدف‌های آموزشی ریاضی و مطابق با ریزبرنامه تهیه و تصویب شده در شورای برنامه‌ریزی ریاضی متوسطه در دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری توسط آقای بیژن ظهوری زنگنه و خانم حمیده داریوش‌همدانی و خانم سهیلا غلام‌آزاد مورد تجدید نظر کلی قرار گرفت.

## فهرست مطالب

۱	فصل ۱: استدلال ریاضی
۱	۱-۱- درک شهودی
۱	۱-۲- استدلال تمثیلی یا قیاسی
۳	۱-۳- استدلال استقرایی
۳	۱-۴- محدودیت استدلال استقرایی
۵	۱-۵- استقرای ریاضی
۹	۱-۶- استقرای تعمیم یافته
۱۴	۱-۷- استدلال استنتاجی
۱۷	۱-۸- مثال نقض
۲۰	۱-۹- قضایای شرطی
۲۱	۱-۱۰- اثبات بازگشتی
۲۶	۱-۱۱- برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)
۲۸	۱-۱۲- اصل لانه کبوتر

۳۲	فصل ۲ : مجموعه - ضرب دکارتی و رابطه
۳۲	۱-۲- مجموعه
۳۶	۲-۲- زیرمجموعه
۳۹	۳-۲- مجموعه توانی
۴۱	۴-۲- نمایش هندسی مجموعه‌ها
۴۴	۵-۲- جبر مجموعه‌ها
۵۶	۶-۲- حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه
۶۰	۷-۲- رابطه
۶۵	۸-۲- افراز یک مجموعه
۶۶	۹-۲- رابطه هم‌ارزی
۶۹	فصل ۳ : احتمال و پدیده‌های تصادفی
۷۰	۱-۳- پدیده‌های تصادفی
۷۲	۲-۳- فضاهای نمونه‌ای
۷۴	۳-۳- پیشامدهای تصادفی
۷۹	۴-۳- عملیات بر روی پیشامدها
۸۲	فصل ۴ : احتمال : اندازه‌گیری شانس
۸۲	۱-۴- احتمال هم‌شانس در فضاهای گسسته
۸۷	۲-۴- احتمال دو جمله‌ای
۹۵	۳-۴- احتمال غیرهم‌شانس در فضاهای گسسته
۹۶	۴-۴- احتمال یک پیشامد اختیاری
۱۰۰	۵-۴- احتمال در فضاهای پیوسته
۱۰۹	۶-۴- قوانین احتمال

## پیشگفتار

حکایتی دربارهٔ یکی از ریاضی‌دان‌های مشهور می‌گویند که خالی از لطف نیست: روزی قرار بود که این ریاضی‌دان در حضور جمع تحصیل کرده‌ای سخنرانی کند. او در شروع صحبت یک عبارت ریاضی روی تخته نوشت و گفت: «در واقع این عبارت بدیهی است». ریاضی‌دان دوباره به عبارت نوشته شده نگاه کرد و گفت: «حداقل من فکر می‌کنم که بدیهی است». اما همچنان که شک او قوی‌تر می‌شد گفت: «بیخشید» و کاغذ و مدادی برگرفت و سالن سخنرانی را ترک کرد. بعد از بیست دقیقه او خندان به سالن بازگشت و پیروزمندانه گفت: «بله حضار محترم، این عبارت بدیهی است!» به نظر می‌رسد که منظور این ریاضی‌دان از بدیهی بودن عبارت آن بود که ما می‌توانیم به‌طور شهودی درستی آن را قبول کنیم. با این حال این پذیرش کافی نیست و در نهایت، تجزیه و تحلیل منطقی، آن را تأیید و یا رد می‌کند. بنا به گفتهٔ اسکمپ<sup>۱</sup> (۱۹۷۱) «مطمئن بودن از چیزی یک قصه است و دانستن این که چرا آن چیز درست است قصه‌ای دیگر» و هدف ما نیز کمک به دانستن این چراهاست. با در نظر گرفتن نقشی که ریاضیات در تربیت هر شهروند می‌تواند ایفا کند، آشنایی با قسمت‌های مختلف این علم برای نوجوانان مستعد، متفکر و توانای ما الزامی به نظر می‌رسد. نمونه‌های شهودی و تجربی زیبایی در رابطه با رشد و توسعهٔ مطالب مطرح شده در این کتاب وجود دارند که یادگیری و فهم آنها را آسان می‌کنند. اما برای بهتر فهمیدن و یادگرفتن موضوعات یاد شده، به دانش‌های پیش‌نیاز و ابزار مختلفی نیازمندیم. مهم‌ترین آنها نحوهٔ استدلال کردن و سپس تکمیل آنچه که دربارهٔ مجموعه‌ها و بالاخره حاصل ضرب دکارتی و رابطه یاد گرفته‌ایم می‌باشد.

نیاز به دانش‌های پیش‌نیاز ما را بر آن داشت که دو فصل اول کتاب را به مفاهیم فوق‌اختصاص دهیم تا علاوه بر تعمیق یادگیری‌های قبلی، زمینهٔ مناسب‌تری برای بهتر فهمیدن مطالب فصل‌های بعد فراهم آید.

هم‌چنین، توجه معلمان گرامی و دانش‌آموزان عزیز را به این مهم جلب می‌کنیم که تجدید نظر کتاب پس از جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل نتایج حاصل از ۴ سال تدریس آن صورت گرفته است. از حضور شما و تمامی صاحب‌نظران گرامی خواهشمندیم که با پیشنهادها و انتقادهای سازندهٔ خویش ما را در تصحیح، توسعه و تکمیل آن باری دهند.

مؤلفان

## استدلال ریاضی

### ۱-۱- درک شهودی<sup>۱</sup>

طی قرن‌های متمادی، مردم باور کرده بودند که زمین صاف است و ستاره‌ها به دور آن در گردش هستند. آنها نظریهٔ گرد بودن زمین و چرخش آن به دور خورشید را رد می‌کردند. اگر چه امروزه این نظریه حتی برای خردسالان نیز امری کم و بیش واضح است، لیکن با شهود مردم آن زمان مطابقت نداشت.

**شهود می‌تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد.** 

وقتی که از شهود خود استفاده می‌کنیم، هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان صد درصد بگوییم که نتیجه‌گیری ما درست است. با این حال در بسیاری مواقع، درک شهودی به ما کمک می‌کند که مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدس‌های بهتری برای اثبات قسمت‌های مختلف بزنیم. چنین حدس‌هایی کم و بیش محتمل و به صورت استدلال موقت، رضایتی در ما به وجود می‌آورند که با اشتیاق بیشتری برای دستیابی به یک استدلال حتمی تلاش کنیم. معمولاً استدلال موقت بر مبنای تمثیل و استقرا می‌باشد که در قسمت‌های بعد با محدودیت‌های آنها آشنا می‌شویم.

### ۱-۲- استدلال تمثیلی یا قیاسی<sup>۲</sup>

در اکثر کارهای روزمره - از نتیجه‌گیری‌های سطحی تا موفقیت‌های عمدهٔ علمی و یا کارهای هنری - از تمثیل یا قیاس استفاده می‌کنیم. قیاس که در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون می‌باشد، در تمام سطوح مختلف قابل استفاده است. انواع تمثیل با توجه به محدودیت‌هایی که دارند، می‌توانند در ایجاد یک زمینهٔ شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی کمک

---

۱ - Intuitive

۲ - Analogy

مؤثری باشند و نباید اهمیت آنها را نادیده گرفت. به مثال زیر توجه کنید :

**مثال ۱:** از تمثیل برای درک بهترین حقیقت که حاصل ضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی

مثبت است استفاده می کنیم :

وارد شدن آب به مخزن را عملی مثبت (+) و خروج آب از آن را عملی منفی (-) در نظر می گیریم. در نمایش فیلم نیز، جلو بردن فیلم را عملی مثبت (+) و عقب بردن آن را عملی منفی (-) به حساب می آوریم. حال اگر فیلمی نمایش داده شود که در آن، آب در حال خروج از یک مخزن است (-) و فیلم را به عقب برگردانیم (-)، آب دوباره به مخزن باز می گردد (+)؛ یعنی حاصل دو عمل منفی (خروج آب و عقب بردن فیلم)، عمل مثبت بازگشت آب به مخزن شده است.

همان طور که می دانید، مثال بالا به هیچ عنوان یک اثبات ریاضی نیست، اما تمثیل خوبی است تا ما را برای اثبات دقیق آماده کند.

**تمرین ۱-** با توجه به داستان زیر، توضیح دهید که طوطی چه تمثیلی به کار برد و علت خنده

مردم چه بود؟

خوش نوایی سبزگویا طوطی  
نکته گفتی با همه سوداگران  
در نوای طوطیان حاذق بدی  
شیشه های روغن گل را بریخت  
بر دکان بنشست فارغ خواجه و ش  
بر سرش زد گشت طوطی گل ز ضرب  
مرد بقال از ندامت آه کرد  
کآفتاب نعمتم شد زیر میغ  
چون زدم من بر سر آن خوش زبان  
تا بیابد نطق مرغ خویش را  
بر دکان بنشسته بُد نومیدوار  
تا که باشد کاندر آید او بگفت  
باسربی موجو پشت طاس و پشت  
بانگ بر درویش زد که هی فلان  
تو مگر از شیشه روغن ریختی  
کوچو خود پنداشت صاحب دل را  
گرچه مانند در نبستن شیر و شیر  
کم کسی ز ابدال حق آگاه شد

بود بقالی و وی را طوطی  
در دکان بودی نگهبان دکان  
در خطاب آدمی ناطق بدی  
جست از سوی دکان سویی گریخت  
از سوی خانه بیامد خواجه اش  
دید پر روغن دکان و جامه چرب  
روزی چندی سخن کوتاه کرد  
ریش برمی کند و می گفت ای دریغ  
دست من بشکسته بودی آن زمان  
هدیه ها می داد هر درویش را  
بعد سه روز و سه شب حیران و زار  
می نمود آن مرغ را هرگون شگفت  
جولقی سر برهنه می گذشت  
طوطی اندر گفت آمد در زمان  
از چه ای کل با کلان آمیختی  
از قیاسش خنده آمد خلق را  
کار پاکان را قیاس از خود مگیر  
جمله عالم زین سبب گمراه شد



### ۱-۳- استدلال استقرایی<sup>۱</sup>

اگر وارد قریه‌ای شوید و اولین فردی که به او برخورد می‌کنید دارای چشمانی آبی باشد چه می‌گویید؟ حال اگر به گردش در کوچه پس کوچه‌های قریه بپردازید و متوجه شوید که رنگ چشمان تمام افرادی که با آنها در آن قریه مواجه شده‌اید آبی است، ممکن است نتیجه بگیرید که رنگ چشمان تمامی افراد قریه آبی است.

در سفر به قریه، شواهد متعددی را جمع‌آوری کردیم، متوجه یکسان بودن نتایج شدیم و براساس آنها، نتیجه‌گیری کلی را انجام دادیم. عالمان تجربی نیز با روشی مشابه مشاهدات خود را نظم داده و با توجه به نظم حاکم بر آنها، قوانین عمومی طبیعت را کشف می‌کنند. در علوم تجربی به این نوع استدلال، روش تجربی یا علمی و در ریاضی به آن استدلال استقرایی گفته می‌شود.

 **استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.**

**مثال ۲:** فرض کنید که اعداد متوالی فرد را با هم جمع می‌کنیم. برای این کار از ۱ شروع می‌کنیم:

$$1+3=4$$

$$1+3+5=9$$

$$1+3+5+7=16$$

با توجه به مشاهدات بالا نتیجه می‌گیریم تمام حاصل جمع‌ها مربع کامل هستند. حال با ادامه الگوی بالا، نتیجه به دست آمده را کنترل می‌کنیم. از این یافته‌ها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ آیا می‌توان ادعا کرد که همیشه حاصل جمع اعداد فرد متوالی یک مربع کامل است؟

### ۱-۴- محدودیت استدلال استقرایی

مشاهده ۱- آب آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهده ۲- برف آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهده ۳- یخ آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند.

نتیجه: هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند.



در شکل بالا مرد غارنشین با مشاهده و جمع‌آوری اطلاعات و دیدن الگویی که تکرار می‌شد نتیجه‌گیری کرد که «هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند!»

همان‌طور که می‌بینید، شکل بالا ضعف اساسی چنین استدلالی را به ما نشان می‌دهد زیرا که همیشه این احتمال وجود دارد که شواهد بیشتری کشف بشوند تا نادرستی نتیجه‌گیری کلی، بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات را نشان دهند.

**تمرین ۲-** محاسبات تعیین شده را انجام دهید تا اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند

پیدا کنید :

$$۱) ۱ \times ۸ + ۱ = \boxed{\phantom{00}}$$

$$۲) ۱۲ \times ۸ + ۲ = \boxed{\phantom{00}}$$

$$۳) ۱۲۳ \times ۸ + ۳ = \boxed{\phantom{00}}$$

$$۴) ۱۲۳۴ \times ۸ + ۴ = \boxed{\phantom{00}}$$

الف) آیا فکر می‌کنید این الگو تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد؟

ب) بدون محاسبه و با توجه به الگوی بالا، اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند حدس بزنید :

$$۵) ۱۲۳۴۵ \times ۸ + ۵ = \boxed{\phantom{00}}$$

$$۶) ۱۲۳۴۵۶ \times ۸ + ۶ = \boxed{\phantom{00}}$$

پ) نتایج قسمت (ب) را محاسبه کنید تا مشخص شود که آیا حدس شما درست بوده است یا خیر؟

سعی کنید آنچه را شهودی به نظر می‌رسد، به طور رسمی و دقیق اثبات کنید و آنچه را که به طور رسمی و دقیق اثبات کرده‌اید به طور شهودی درک کنید. این یک ورزش مغزی جالب است.

جورج پولیا، ۱۹۴۵

### ۱-۵- استقرای ریاضی<sup>۲</sup>

ممکن است به طور تصادفی مشاهده کرده باشید که:  $1 + 8 + 27 + 64 = 100$ . با تشخیص مربع ها و مکعب های اعداد، شاید بتوانیم به مشاهده خود شکل جالب تری بدسیم:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

چطور این اتفاق افتاد؟ آیا همیشه مجموع مکعب های متوالی، مربع یک عدد است؟ برای پاسخ به کنجکاوای خود، می‌توانیم موارد مشخص دیگری را نیز بررسی کنیم و برای تکامل و یگانگی حالت،  $n = 1$  یعنی حالتی که فقط یک عدد مکعب شده وجود دارد، را نیز اضافه می‌کنیم:

مربع مجموع	مجموع مکعب ها	مکعب های اعداد متوالی
$1^2$	۱	$1^3$
$3^2$	۹	$1^3 + 2^3$
$6^2$	۳۶	$1^3 + 2^3 + 3^3$
$10^2$	۱۰۰	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$
$15^2$	۲۲۵	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$

با جمع آوری مشاهدات فوق و استفاده از استدلال استقرایی می‌بینیم که: مجموع مکعب های اعداد متوالی برابر است با مربع مجموع آنها. اما چنین نتیجه گیری ای کامل نیست. به همین دلیل است که در ریاضی استقرا را نه فقط با مشاهدات بلکه به کمک اثبات دقیق نیز محک می‌زنیم. حال برای اثبات دقیق به طریق زیر عمل می‌کنیم:

شاید بدانیم که  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  (اثبات کنید!) می‌خواهیم تحقیق کنیم و ببینیم که اگر مجموع مکعب های  $n$  عدد متوالی برابر با مربع مجموع آنها باشد

۱ - George Polya

۲ - برگرفته از کتاب How to solve it? اثر جورج پولیا.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (1)$$

آیا این ادعا برای  $n+1$  عدد متوالی نیز درست است؟ یعنی آیا رابطه

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \quad (2)$$

نیز برقرار است؟

با یک کنترل ساده، رابطه زیر را با کم کردن (1) از (2) به دست می آوریم:

$$(n+1)^3 = \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 - \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (3)$$

از جمله مشترک  $\left( \frac{n+1}{2} \right)^2$  فاکتور می گیریم:

$$(n+1)^3 = \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 [(n+2)^2 - n^2] \quad (4)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} [n^2 + 4n + 4 - n^2] \quad (5)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} [4n + 4] \quad (6)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} (n+1) \times 4 \quad (7)$$

$$= (n+1)^3 \quad (8)$$

رابطه تجربی ما امتحان حیاتی را گذراند، یعنی درستی تساوی (3) را نتیجه گرفتیم که معادل

تساوی (2) است، یعنی

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \quad (9)$$

در بررسی این موضوع، درستی ادعا را در حالت های خاص از  $n=1$  تا  $n=5$  مشاهده کردیم.

سپس با فرضی که این ادعا برای  $n$  امین حالت درست است، نشان دادیم که برای  $(n+1)$  امین حالت نیز

چنین ادعایی درست است. حال با اطمینان خاطر می گوئیم:

**مجموع مکعب های  $n$  عدد متوالی، برابر با مربع مجموع آنهاست.**

مطلب فوق نمونه خوبی برای گذار از استدلال استقرایی (تجربی) به استقرای ریاضی است.

برای بهتر فهمیدن استقرای ریاضی به مثال زیر توجه کنید :

**مثال ۳:** برای هر عدد صحیح و مثبت  $n$  ثابت کنید که :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (1)$$

حل : اگر  $n = 1$ ، آنگاه :

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1} \quad (2)$$

می بینیم که در این حالت، تساوی (۱) درست است.

اگر  $n = 2$ ، آنگاه

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2} \quad (3)$$

که مجدداً تساوی (۱) را نشان می دهد. این تساوی را می توانیم با جمع (۲) و  $\frac{1}{2}$  به دست آوریم :

$$\left(1 - \frac{1}{2^1}\right) + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2} = 1 - \frac{1}{2^2}$$

ادامه این بررسی برای تمام اعداد عملی نیست، پس چه کار کنیم؟

یک قدم دیگر هم جلو می رویم و با استفاده از نتایج به دست آمده برای دو جمله اول، حالت

$n = 3$  را نیز بررسی می کنیم :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3} \quad (4)$$

در نتیجه درستی رابطه برای حالت  $n = 3$  را نیز نتیجه گرفتیم.

حال اگر در حالت کلی، درستی رابطه را برای  $n = k$  فرض کنیم، یعنی داشته باشیم

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

و بتوانیم از این فرض، درستی رابطه را برای  $n = k + 1$  یعنی

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \quad (5)$$

نتیجه بگیریم، آنگاه می‌توانیم ادعا کنیم که تساوی (۱) در هر حالتی درست است.  
در طرف اول تساوی (۵) به جای مقدار داخل پرانتز، معادل آن یعنی  $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$  را از تساوی (۱) جایگزین می‌کنیم

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} \quad (6)$$

$$= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \quad (7)$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \quad (8)$$

از درستی رابطه در حالت  $n = k$ ، درستی آن در حالت  $n = k + 1$  نیز ثابت شد. این گونه اثبات را، اثبات به وسیله استقرای ریاضی یا اثبات به وسیله اصل استقرا می‌نامیم که از اهمیت ویژه‌ای در ریاضیات برخوردار است. اصل استقرا برای اثبات رابطه‌هایی نظیر رابطه بالا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### اصل استقرا

**فرض کنید  $P(n)$  حکمی درباره عدد طبیعی  $n$  باشد. اگر  $P(1)$  درست باشد و از درستی  $P(k)$  درستی  $P(k + 1)$  نتیجه شود، در این صورت  $P(n)$  برای هر عدد طبیعی  $n$  نیز درست است.**

در نتیجه بنابراین اصل استقرا، برای هر عدد طبیعی  $n$ ، تساوی (۱) در مثال قبل، درست است.

برای استفاده از اصل استقرا گام‌های زیر را برداشتیم:

گام ۱: درستی حکم را برای  $n = 1$  نشان دادیم.

گام ۲: ثابت کردیم که اگر حکم برای  $n = k$  درست باشد، آنگاه برای  $n = k + 1$  نیز درست است.

**مثال ۴:** با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $4^{2n} - 1$  بر ۵ بخش پذیر

است.

**حل:** با دانستن این که  $P_n = 4^{2n} - 1$  بر ۵ بخش پذیر است، گام اول را برمی‌داریم.

گام ۱ : درستی حکم را برای  $n = 1$  نشان می‌دهیم :

$$P_1 = 4^{2(1)} - 1 = 15 = 5 \times 3 \quad (1)$$

که بر ۵ بخش پذیر است پس  $P(1)$  درست است.

گام ۲ : می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر حکم برای  $P(k)$  درست باشد، در نتیجه برای  $P(k+1)$  نیز

درست است.

فرض کنیم :

$$P_k = 4^{2k} - 1 = 5r \quad (2)$$

که بر ۵ بخش پذیر است. حال باید بخش پذیر بودن

$$P_{k+1} = 4^{2(k+1)} - 1 \quad (3)$$

بر ۵ را نشان دهیم. برای این کار، طرفین تساوی (۲) را در  $4^2$  ضرب می‌کنیم یعنی

$$4^2(4^{2k} - 1) = 4^2(5r)$$

از ساده کردن (۳)، تساوی (۴) به دست می‌آید :

$$4^{2k+2} - 4^2 = 4^2(5r) \quad (4)$$

با اضافه کردن ۱۵ به طرفین تساوی خواهیم داشت :

$$4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 4^2(5r) \quad (5)$$

$$= 15 + 16(5r) \quad (6)$$

$$= 5(3 + 16r) \quad (7)$$

تساوی (۷) بخش پذیر بودن  $P(k+1)$  بر ۵ را نشان می‌دهد. یعنی از  $P(k)$ ، درستی  $P(k+1)$  را

نتیجه گرفتیم. در این صورت بنابر اصل استقرا،  $P(n)$  برای هر عدد صحیح و مثبت  $n$  نیز درست است.

در حالت کلی، از گام‌های ۱ و ۲ نتایج زیر را به دست می‌آوریم :

$P(1)$ ،  $P(2)$  را نتیجه می‌دهد.

$P(2)$ ،  $P(3)$  را نتیجه می‌دهد.

$P(3)$ ،  $P(4)$  را نتیجه می‌دهد.

و الی آخر که این توجیه کننده درست بودن حکم  $P(n)$  برای هر عدد طبیعی  $n$  است.

## ۱-۶- استقرای تعمیم یافته

در مثال‌هایی که تاکنون دیدیم، استقرای ریاضی را از  $n = 1$  شروع کردیم، یعنی درستی حکم

مورد نظر را برای  $n = 1$  نشان دادیم. اما گاهی لازم است که اولین مرحله استقرا را از یک عدد طبیعی  $n > 1$  آغاز کنیم. به مثال زیر توجه کنید :

**مثال ۵ :** ثابت کنید عدد طبیعی مناسبی مانند  $m > 1$  وجود دارد به طوری که برای هر عدد

طبیعی  $n (n \geq m)$  داریم

$$n! > 3^n \quad (1)$$

حل : ابتدا با اندکی جست و جو، تحقیق می کنیم که  $n$  چه اندازه باید بزرگ باشد؟

$n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$n!$	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰	۴۰۳۲۰
$3^n$	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹	۲۱۸۷	۶۵۶۱

می بینیم که برای  $n$  های طبیعی کوچکتر از ۷، اصلاً چنین حکمی درست نیست. اما برای  $n = 7$ ، رابطه  $n! > 3^n$  درست است و به نظر می رسد که برای  $n$  های بزرگتر از ۷ نیز حکم درست باشد. حال فرض می کنیم برای  $k \geq 7$  حکم درست باشد یعنی :  $k! > 3^k$ . آنگاه درستی حکم زیر را تحقیق می کنیم :

$$(k+1)! > 3^{k+1} \quad (2)$$

برای نشان دادن (۲) طرفین  $k! > 3^k$  را در  $(k+1)$  ضرب می کنیم :

$$(k+1)k! > (k+1)3^k \quad (3)$$

و چون  $k \geq 7$  فرض شده است، پس :

$$(k+1)k! > 7 \times 3^k \quad (4)$$

با این حال می بینیم که طرفین نامساوی (۴) چنین خاصیتی را دارد که :

$$7 \times 3^k > 3 \times 3^k = 3^{k+1} \quad (5)$$

پس :

$$7 \times 3^k > 3^{k+1} \quad (6)$$

در نتیجه طبق (۴) و (۶) :

$$(k+1)k! > 3^{k+1} \quad (7)$$

اما طبق تعریف :

$$(k+1)k! = (k+1)! \quad (8)$$

که معادل آن را در (۷) قرار می دهیم در نتیجه :

$$(k+1)! > 3^{k+1} \quad (9)$$



بدین ترتیب برای  $k \geq 7$ ، نشان دادیم که اگر  $k! > 3^k$ ، آنگاه  $3^{k+1} > (k+1)!$ . حال با اطمینان می‌توانیم بگوییم که برای هر  $n \geq 7$  داریم  $n! > 3^n$ .

در این مثال مشاهده شد  $m$  مناسب  $7$  است که به روش جست و جو آن را به دست آوردیم. چنین شیوه استدلالی را روش استقرای تعمیم یافته می‌گویند.

### اصل استقرای تعمیم یافته

فرض کنید  $P(n)$  حکمی درباره عدد طبیعی  $n$  باشد. اگر  $P(m)$  برای  $m > 1$  درست باشد و از درستی  $P(k)$  برای هر عدد طبیعی  $k \geq m$  درستی  $P(k+1)$  نتیجه شود، آنگاه  $P(n)$  برای هر عدد طبیعی  $n \geq m$  درست است. (دقت کنید که در هر مسأله‌ای باید  $m$  مناسب را پیدا کرد.)

برای استفاده از اصل استقرای تعمیم یافته، گام‌های زیر را برمی‌داریم:

گام ۱:  $m$  مناسب را به دست می‌آوریم،

گام ۲: درستی حکم را برای  $n = m$  نشان می‌دهیم،

گام ۳: ثابت می‌کنیم که اگر حکم برای  $n = k \geq m$  درست باشد، آنگاه حکم برای  $n = k+1$  نیز

درست است.

آنگاه نتیجه می‌شود که حکم برای هر عدد طبیعی  $n \geq m$  درست است.

### تمرین

۱- برای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{الف})$$

$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2 \quad (\text{ب})$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (\text{پ})$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2 \quad (\text{ت})$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (\text{ث})$$

۲- اگر  $r \neq 1$ ، برای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

۳- در هر یک از بندهای زیر ابتدا عدد طبیعی مناسب  $m$  را بیابید و سپس حکم را برای هر

عدد طبیعی  $n$  ( $n \geq m$ ) ثابت کنید.

$$2^n > n^2 \quad (\text{الف})$$

$$2^n < n! \quad (\text{ب})$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2} \quad (\text{پ})$$

۴- مجموع جملات زیر را حدس بزنید و ادعای خود را با استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

۵- با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

الف) تعداد قطرهای هر  $n$  ضلعی محدب برابر است با  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

ب) مجموع زاویه‌های داخلی هر  $n$  ضلعی محدب برابر است با  $90^\circ \times (2n - 4)$ .

۶- ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $1 - 8^n$  بر ۷ بخش پذیر است.

۷- اگر  $a \geq -1$  و  $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه به کمک استقرای ریاضی درستی رابطه زیر را ثابت کنید:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

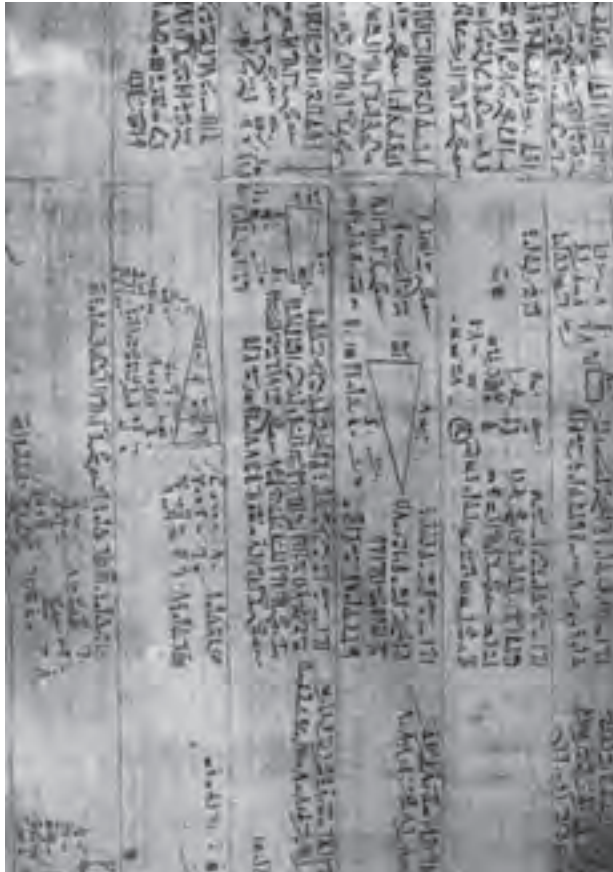
۸- نامساوی مثلث برای هر دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  به صورت  $|a + b| \leq |a| + |b|$  برقرار است.

با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر  $n$  عدد حقیقی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  داریم:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

## مجله ریاضی

از زمان‌های قدیم، ایده‌های استقرا وجود داشته، از آن استفاده می‌شده است. با این حال، اثبات به کمک استقرا از اوایل قرن شانزدهم میلادی متداول شده است و توسط بعضی از ریاضی‌دانان اروپایی مورد استفاده قرار گرفته است. در قرن هفدهم فرما ریاضی‌دان مشهور، استفاده از استقرا را با تنوع بیشتری مطرح ساخت. ولی اصطلاح «استقرای ریاضی» در اوایل قرن نوزدهم توسط دمرگان، ریاضی‌دان انگلیسی، به کار رفت و روش استقرا در اثبات‌های ریاضی به‌طور مدون مورد استفاده قرار گرفت.



در طول تاریخ، مردم از علامت‌ها و نشانه‌های مختلفی برای نمایش اعداد استفاده کرده‌اند. بعضی از این نشانه‌ها در پاپیروس رابند دیده می‌شوند. ریاضی‌دان‌ها هنوز به مطالعه و یادگیری بیشتر در مورد اعداد مشغول‌اند.

### ۷-۱- استدلال استنتاجی<sup>۱</sup>

در مقدمهٔ پاپیروس رابند که شاید قدیمی‌ترین تاریخ موجود ریاضی باشد 

(۱۶۵۰ سال قبل از میلاد) چنین آمده است:

«به جرأت می‌توان گفت که بارزترین مشخصهٔ شعور انسان که نشان‌دهندهٔ درجهٔ تمدن هر ملت است، همان قدرت استدلال کردن است و به‌طور کلی این قدرت به بهترین وجهی می‌تواند در مهارت‌های ریاضی افراد آن ملت به نمایش گذاشته شود.»

<sup>۱</sup> \_ Deductive reasoning

یکی از مسائلی که در تاریخ ریاضی مصر - پاپیروس رابند - موجود است یک سرگرمی به صورت بازی با اعداد است. با توجه به دستورالعمل‌های مسئله، عددی انتخاب می‌شود و سپس چندین کار دیگر روی آن انجام می‌شود. در پایان بدون در نظر گرفتن عدد انتخابی، نتیجه همیشه یکسان است!

**مثال ۱:** این مثال از نوع سرگرمی با اعداد است. هر مرحله از این بازی در سمت راست و نتایج هر مرحله برای ۴ عدد انتخابی و تصادفی در سمت چپ جدول زیر نشان داده شده است.

۳۵	۱۲	۷	۴	یک عدد انتخاب کنید
۴۰	۱۷	۱۲	۹	به آن ۵ را اضافه کنید
۸۰	۳۴	۲۴	۱۸	نتیجه را دو برابر کنید
۷۶	۳۰	۲۰	۱۴	از آن ۴ را کم کنید
۳۸	۱۵	۱۰	۷	حاصل را بر ۲ تقسیم کنید
۳	۳	۳	۳	عددی را که از ابتدا انتخاب کرده بودید از این نتیجه تقسیم کم کنید

بررسی بالا ما را مطمئن می‌سازد که نتیجه همیشه برابر با ۳ است. اگرچه با استدلال استقرایی می‌توان استدلال کرد که این نتیجه شاید برای همه اعداد درست باشد، اما به هر حال برای اثبات کلی این مطلب، یعنی، تبدیل شاید به باید، به استدلال استنتاجی نیاز مندیم.

**مثال ۲:** همان مثال قبلی را با اندکی تغییر بررسی می‌کنیم و به جای انتخاب یک یا چند عدد مشخص در موقع شروع از علامت‌گذاری استفاده می‌کنیم. در طول بازی، مربع کوچک معرّف عدد انتخابی اولیه است و برای هر بار افزودن یا کاستن اعداد جدید، از یک دایره کوچک استفاده می‌کنیم.

□	عدد انتخابی
□□□□□□	عدد انتخابی به اضافه ۵
□□□□□□ □□□□□□	دو برابر نتیجه قبل
□□□□ □□□□	کم کردن ۴ واحد
□□□□	نصف نتیجه قبل
○○○	کم کردن عدد اولیه

به این ترتیب ثابت کردیم که نتیجه همیشه ۳ است. حال به وضوح می بینیم که عدد انتخابی اولیه هر چه که باشد، باز هم نتیجه ۳ است!

شاید مربع ها و دایره ها نمادهای جالبی برای استفاده همیشه نباشند. در ریاضیات معمولاً از حروف برای نشان دادن اعداد دلخواه استفاده می کنیم.

**مثال ۳:** حال مثال قبلی را با نماد جبری، یعنی با استفاده از حرف برای عدد انتخابی اولیه، دوباره بررسی می کنیم :

n	عدد انتخابی
$n + 5$	عدد انتخابی به اضافه ۵
$2n + 10$	دو برابر نتیجه قبل
$2n + 6$	کم کردن ۴ واحد
$n + 3$	نصف نتیجه قبل
۳	کم کردن عدد اولیه

نکته ای که در هر سه مثال به چشم می خورد این است که نتایجی را بر مبنای عباراتی که درستی آنها را قبول کرده ایم به دست آوردیم. یعنی از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

**استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری با استفاده از حقایق است که درستی آنها را پذیرفته ایم.**

مثال های فراوانی از دنیای اطراف ما وجود دارند که نشان دهنده استفاده از استدلال استنتاجی در زندگی روزمره هستند.

**مثال ۴:** رستورانی برای جلب مشتری و فروش بیشتر، اعلام کرده است که بین ساعت های ۱۲ ظهر تا ۲ بعدازظهر اگر کسی در آن رستوران غذایی سفارش داد و آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به طول انجامید، غذا را مجانی به مشتری بدهد. زمانی که خانواده بهارلو به این رستوران رفتند، عبارتهای زیر درست بودند :

الف) ساعت بین ۱۲ ظهر و ۲ بعدازظهر بود.

ب) آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به طول انجامید.

خانوادهٔ بهارلو نتیجه گرفتند که غذایشان مجانی خواهد بود که نتیجه گیری درستی بود!  
این مثال نیز نمونه‌ای از استدلال استنتاجی است.

**مثال ۵:** فرض کنید که دو عدد فرد را با هم جمع می‌کنیم. توضیح دهید که چرا مجموع آنها

همیشه زوج است؟

**حل:** فرض کنید  $2m + 1$  و  $2n + 1$  نشان‌دهندهٔ دو عدد فرد باشند که  $m$  و  $n$  اعداد طبیعی هستند. در نتیجه مجموع آنها چنین است:

$$(2m+1) + (2n+1) = 2m + 2n + 2 = 2(m+n+1)$$

به دلیل وجود ضریب ۲ در این مجموع، نتیجه می‌گیریم که مجموع دو عدد فرد همیشه زوج است. ثابت کردیم که مجموع دو عدد فرد همیشه یک عدد زوج است، حتی برای اعدادی که آنها را جمع نکرده‌ایم! این امر نشان‌دهندهٔ قدرت استدلال استنتاجی است.

**وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه**

**همیشه درست است.**

هدف از مثال‌های فوق، ایجاد زمینه‌ای مناسب برای آشنایی با مفهوم استدلال استنتاجی بود. بیشتر این مثال‌ها نمونه‌هایی از قضایای کلی هستند.

**قضایای کلی احکامی هستند که همیشه برقرار می‌باشند.**

اکثر قضیه‌های مهم ریاضی قضایای کلی هستند. به عنوان مثال، اهمیت قضیهٔ فیثاغورث در این نیست که در یک مثلث قائم‌الزاویه صدق می‌کند، بلکه این قضیه برای همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه صحیح است، و یا اهمیت اتحاد  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  در این است که  $x$  هر زاویه‌ای که باشد، این تساوی برقرار است.

## ۸-۱ - مثال نقض

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجهٔ به‌دست آمده حتماً درست است. این جامعیت، یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

**مثال ۶:** بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل جمع اعداد متوالی نوشت.

به نمونه‌های زیر توجه کنید :

$$9 = 2 + 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$22 = 4 + 5 + 6 + 7$$

$$39 = 12 + 13 + 14$$

$$74 = 17 + 18 + 19 + 20$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی

نوشت؟

حل : برای درست فهمیدن مسأله، باید به دو سؤال اساسی پاسخ گوئیم. اول آن که آیا مثال‌ها برای حل مسأله کافی هستند؟ و دوم این که آیا امکان دارد که تمام اعداد طبیعی را برای بررسی داشتن

چنین کیفیتی کنترل کرد؟

یکی از راه‌های خوب آن است که سعی کنیم یک عدد طبیعی بیابیم که چنین کیفیتی را نداشته باشد. از هر عددی که بخواهیم شروع می‌کنیم و به جست‌وجو ادامه می‌دهیم.

الف)  $12 = 3 + 4 + 5$

ج)  $100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$

ب)  $17 = 8 + 9$

چ)  $130 = 31 + 32 + 33 + 34$

پ)  $26 = 5 + 6 + 7 + 8$

ح)  $6 = 1 + 2 + 3$

ت)  $30 = 9 + 10 + 11$

خ)  $7 = 3 + 4$

ث)  $40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

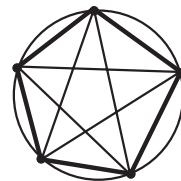
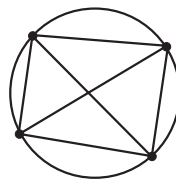
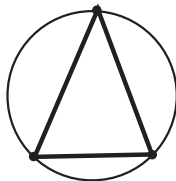
د)  $8 = ?$

می‌بینیم که عدد ۸ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت. عدد ۸ مثال نقضی

است که نشان می‌دهد هر عدد طبیعی را نمی‌توان به صورت اعداد متوالی نوشت.

**مثال ۷:** اگر دو نقطهٔ اختیاری بر روی پیرامون دایره را به وسیلهٔ یک پاره خط به هم وصل

کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. با اتصال سه نقطهٔ اختیاری بر روی دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم می‌شود. شکل زیر این موضوع را برای ۲، ۳، ۴ و ۵ نقطهٔ اختیاری بر روی دایره نشان می‌دهد :

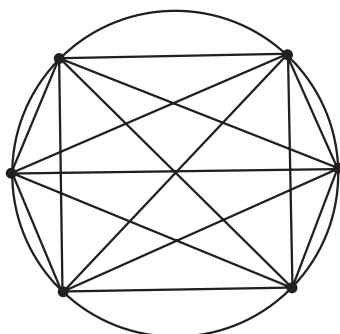




۵	۴	۳	۲	تعداد نقطه‌ها
۱۶	۸	۴	۲	تعداد ناحیه‌ها

نتیجه احتمالی: اگر تعداد نقاط ۶ باشد، تعداد ناحیه‌ها ۳۲ است.

حل: ۶ نقطه بر روی دایره‌ای اختیار می‌کنیم و آنها را به وسیله پاره خط‌هایی به هم وصل می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، می‌بینیم که تعداد ناحیه‌ها به صورت ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... افزایش می‌یابند. با استدلال استقرایی، به نظر می‌رسد که پاره خط‌هایی که ۶ نقطه را به هم متصل می‌کنند، دایره را به ۳۲ ناحیه تقسیم می‌کنند. اما با توجه به شکل زیر مشاهده می‌شود که این نتیجه احتمالی نادرست است. با شمردن تعداد ناحیه‌ها، می‌بینیم که تعداد آنها ۳۰ است.



این مثال، معرّف مراحل است که نشان‌دهنده نادرستی حدس ما است. اگرحتی یک مثال پیدا شود که حدس ما را نادرست کند، گوئیم که با مثال نقض نادرستی حدس ثابت شده است.

به مثالی که نشان دهد نتیجه گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گویند.

**مثال ۸:** برای هر دو عدد گنگ  $x$  و  $y$  می‌خواهیم ببینیم آیا  $x + y$  نیز گنگ است یا خیر؟

حل: کافی است نشان دهیم که  $x$  و  $y$  ای پیدا می‌شوند که گنگ باشند اما مجموع آنها، یعنی  $x + y$ ،

گنگ نباشد. برای این کار اگر دو عدد گنگ  $x = 2 + \sqrt{2}$  و  $y = 2 - \sqrt{2}$  را انتخاب کنیم، می‌بینیم

$$x + y = (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})$$

$$= 2 + 2 = 4$$

که یک عدد گویا است. پس این مثال، نتیجه گیری کلی را نقض کرد. یعنی مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ نیست.

## ۹-۱- قضایای شرطی

بیشتر شما با ضرب المثل‌های فارسی که معمولاً هدف‌شان آگاه کردن مردم از پیامدهای کارهای بخصوصی است آشنا هستید. «نابرده رنج گنج میسر نمی‌شود»، «کارها نیکو شود اما به صبر» و «سحرخیز باش تا کامروا باشی» از این نوع ضرب المثل‌ها هستند، یعنی اگر به ترتیب شرط «رنج بردن»، «صبوری» و «سحرخیزی» وجود داشته باشد، آنگاه «رسیدن به گنج»، «نیکویی در کارها» و «کامروایی» میسر می‌شود.

همان‌طور که دقت کرده‌اید، در سرتاسر ریاضی که تا به حال یاد گرفته‌اید، به دفعات با جملات شرطی از قبیل «اگر  $x > 5$  آنگاه  $x > 10$ » که به ازای تمام مقادیر حقیقی  $x$  برقرار هستند روبرو شده‌اید. این نوع جملات را **قضایای شرطی** می‌نامند.

قسمت شرطی چنین جمله‌هایی (در مثال بالا  $x > 5$ ) را **فرض قضیه** و نتیجه جمله را (در مثال بالا  $x > 10$ ) **حکم قضیه** می‌نامند.

**مثال ۹:** «هر نقطه دلخواه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است» مثالی از یک قضیه شرطی است که در آن  $M$  معرف نقطه دلخواه بر عمود منصف پاره خط  $AB$  است و

**فرض:** نقطه  $M$  بر عمود منصف پاره خط  $AB$  است.

$$\text{حکم: } MA = MB$$

حال به مثال زیر و ویژگی آن توجه کنید:

**مثال ۱۰:** اگر نقطه  $M$  از دو سر پاره خط  $AB$  به یک فاصله باشد یعنی:  $MA = MB$ ، آنگاه  $M$  بر عمود منصف پاره خط  $AB$  قرار دارد.

دیده می‌شود که جای فرض و حکم در این مثال، با فرض و حکم مثال بالا عوض شده است.

**جای فرض و حکم در عکس قضیه شرطی با هم عوض می‌شوند.**

**نکته:** باید توجه داشت که همیشه عکس قضیه، یک قضیه نیست.

**مثال ۱۱:** اگر  $x > 0$ ، آنگاه  $x^2 > 0$

این مثال یک قضیه است که در آن:

**فرض:**  $x > 0$

**حکم:**  $x^2 > 0$

حال عکس این قضیه را در نظر بگیرید  
 «اگر  $x^2 > 0$ ، آنگاه  $x > 0$ » که در اینجا

فرض:  $x^2 > 0$

حکم:  $x > 0$

اما این یک قضیه کلی نیست، زیرا به ازای  $x$  های منفی - در حالی که فرض درست است -  
 حکم درست نیست. مثلاً  $x^2 = (-1)^2 = 1 > 0$  اما  $x = -1 < 0$ .

### ۱-۱۰-۱- اثبات بازگشتی

از دانش آموزان کلاسی خواسته شده بود که قضیه زیر را اثبات کنند:  
 قضیه: ثابت کنید که به ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت  $x$  و  $y$ ، نابرابری زیر همیشه برقرار است.

$$\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy} \quad (1)$$

نحوه استدلال یکی از دانش آموزان چنین بود:  
 او طرفین (۱) را به توان ۲ رساند:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \quad (2)$$

سپس  $4xy$  را از طرفین (۲) کم کرد و آن را بدین صورت نوشت:

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad (3)$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \quad (4)$$

و نتیجه گرفت که چون همیشه  $(x-y)^2$  مثبت یا صفر است، پس (۴) برقرار و حکم ثابت است.

این گونه استدلال ویژه این دانش آموز نیست و در بین سایر دانش آموزان نیز کم و بیش مرسوم است. آنها به جای اثبات حکم، آن حکم را درست فرض کرده و به یک نتیجه بدیهی یا دانسته شده - یعنی از حکم به فرض - می‌رسند. این شیوه، اثبات نیست بلکه ایده خوبی برای اثبات به دانش آموزان می‌دهد و همچنان که در ابتدای این فصل نیز گفته شد، استفاده از چنین روش‌های شهودی برای فهمیدن استدلال واقعی مفید است. با این حال باید دقت داشته باشیم که استدلال شهودی - هرچند طبیعی و مفید - اگرچه می‌تواند ما را به طرف اثبات ریاضی راهبری کند اما یک اثبات ریاضی نیست. حال به بررسی مجدد اثبات فوق می‌پردازیم. می‌بینیم که در واقع این دانش آموز عکس قضیه فوق را ثابت کرده بود، یعنی با فرض درستی

$$\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy} \quad (1)$$

به درستی (۴)، یعنی  $(x - y)^2 \geq 0$ ، رسیده بود. در حالی که فرض قضیه این بود که  $x$  و  $y$  اعداد حقیقی و مثبت هستند، پس در مورد آنها (۴) برقرار است و هدف، اثبات حکم یعنی اثبات درستی نامساوی (۱) است:

$$\frac{1}{4}(x + y) \geq \sqrt{xy}$$

با این توضیحات، دوباره به اثبات ریاضی این قضیه می‌پردازیم.

اثبات: چون  $(x - y)^2$  همیشه بزرگ‌تر و یا مساوی صفر است، نامساوی (۳) یعنی  $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$  از آن نتیجه می‌شود.

با افزودن  $4xy$  به طرفین نامساوی (۳)، نامساوی (۲) به دست می‌آید، یعنی:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \quad (2)$$

نامساوی (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x + y)^2 \geq 4xy$$

چون  $x$  و  $y$  هر دو مثبت هستند، در نتیجه:

$$\sqrt{(x + y)^2} \geq \sqrt{4xy}$$

و یا:

$$(x + y) \geq 2\sqrt{xy}$$

که با تقسیم طرفین بر ۲ داریم:

$$\frac{1}{4}(x + y) \geq \sqrt{xy} \quad \square$$

**گاهی برای اثبات بعضی از قضیه‌ها - به خصوص در مورد تساوی‌ها، نامساوی‌ها و تساوی مجموعه‌ها - با استفاده از درستی حکم به یک رابطه بدیهی و یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات می‌بایستی نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند و گرنه درستی اثبات تأیید نمی‌شود.**

گاهی برای ارزیابی ذکاوت و دقت افراد، اثبات‌هایی ارائه می‌شود که در آنها درستی تساوی‌های غیر ممکن را با ایجاد شبهه در فرد نشان می‌دهند! و سپس از آنها علت را جویا می‌شوند؟! در واقع، در این گونه اثبات‌ها، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً گاهی (اکثر اشتباهات) در اثبات قضیه‌ها و حل مسائل ریاضی حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیات انجام

داده، ظاهراً به نتیجه می‌رسیم! به مثال زیر توجه کنید :

**مثال ۱۲ :** ثابت کنید  $۲ = ۶$ !

اثبات :

$$۲ = ۶ \quad (۱)$$

با توجه به خاصیت جابه‌جایی تساوی

$$۶ = ۲ \quad (۲)$$

سپس از جمع دو رابطه (۱) و (۲) خواهیم داشت!

$$\underline{\quad\quad\quad} \quad (۳)$$
$$۸ = ۸$$

اما با توجه به مطالبی که یاد گرفتیم، می‌دانیم که تنها در صورتی این اثبات درست است که برگشت‌پذیر باشد، یعنی بتوانیم از (۳) به (۲) و سپس به (۱) برسیم. در حالی که با یک نگاه درمی‌یابیم که چنین امری محال است یعنی از (۳) که  $۸ = ۸$  است نمی‌توانیم به تساوی (۲) که  $۶ = ۲$  و سپس به تساوی (۱) که  $۲ = ۶$  است برسیم. در نتیجه عدم برگشت‌پذیری ادعای فوق نشان می‌دهد که اثبات مذکور نادرست و فقط ایجاد شبهه بوده است! در واقع در اثبات فوق، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً به نتیجه رسیدیم.

**تمرین :** اثبات مثال ۱۲ را با اثبات دانش‌آموز در بخش ۱-۱۰ مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای

می‌گیرید؟

«همه می‌دانند که اگر کسی جواب معما را به شما گفته باشد، حل آن

ساده خواهد بود. به سادگی می‌توان گفت که این عمل یک آزمون حافظه است. فقط

در صورتی می‌توانید ادعا کنید یک ریاضی‌دان هستید که معماهایی را که قبلاً هرگز

مطالعه نکرده‌اید حل کنید. این یک آزمون استدلال کردن است.»

سایر<sup>۲</sup>

۱ - Puzzle

۲ - W.W. Sawyer: Mathematician's Delight

- ۱- با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.
- الف) اگر باران بیارد، زمین مرطوب می‌شود. الان باران می‌بارد.  
نتیجه: زمین  است.
- ب) خطوط موازی هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط  $L_1$  و  $L_2$  موازی هستند.  
نتیجه:  $L_1$  و  $L_2$
- ۲- آیا نتایج زیر از عبارات داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.
- الف) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند محاسبه کنند.  
حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد.  
نتیجه: حمید می‌تواند محاسبه کند.
- ب) بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند.  
نرگس دانش‌آموز است.  
نتیجه: نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.
- پ) مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دو ضلع مساوی است.  
مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه ضلع مساوی است.  
نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.
- ۳- نشان دهید که چرا مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است؟
- ۴- علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه خود هستند.  
با توجه به شرایط زیر، آنها را برحسب افزایش قد مرتب کنید:  
الف) حداقل دو نفر از آنها از علی کوتاه‌تر می‌باشند،  
ب) داوود از کامران کوتاه‌تر است،  
پ) احمد کوتاه‌ترین پسر نیست،  
ت) داوود از علی بلندتر است.
- ۵- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک غلط (نادرست) است. در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
- الف) اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است.

- (ب) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ تر است.  
 (پ) مجموع دو زاویه حاده کمتر از  $180^\circ$  است.  
 (ت) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می گیرد.  
 (ث) هر مستطیلی یک مربع است.  
 (ج) هر مربعی یک مستطیل است.  
 ۶- نمونه های زیر را در نظر بگیرید :

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$

$$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$24 = 2^2 + 2^2 + 4^2$$

$$59 = 1^2 + 3^2 + 7^2$$

$$61 = 3^2 + 4^2 + 6^2$$

$$89 = 2^2 + 2^2 + 9^2$$

نتیجه احتمالی آن است که : هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت. با ارائه یک مثال نقض نشان دهید که نتیجه گیری فوق غلط است.

۷- کدام یک از احکام زیر درست هستند؟

(الف) اگر  $x$  گنگ و  $y$  گویا باشد، آنگاه  $(x+y)$  گویا است.

(ب) اگر  $x$  و  $y$  هر دو گویا باشند، آنگاه  $x+y$  گویا است.

احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست مثال های نقض بیاورید.

۸- بعضی از احکام زیر قضایای کلی هستند. قضایای کلی را اثبات کرده و برای نادرستی باقی

احکام مثال نقض بیاورید :

(الف) حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی کوچک تر یا مساوی نصف مجموع مربع های آنهاست.

(ب) مربع هیچ عدد صحیح صفر نیست.

(پ) هر دو زاویه مساوی، متقابل به رأس هستند.

(ت) اگر  $x > 1$ ، آنگاه  $x > 2$ .

(ث) اگر  $x > 2$ ، آنگاه  $x > 1$ .

(ج) اگر  $(x-1)^2 = 0$ ، آنگاه  $x = 1$ .

(چ) اگر  $ab = 0$ ، آنگاه  $a = 0$  و  $b = 0$ .

### ۱-۱-۱- برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد. آنگاه با استفاده از روش استنتاج به یک تناقض می‌رسیم.

**مثال ۱:** نشان دهید که با فرض صحیح بودن  $n$ ، اگر  $n^2$  زوج باشد،  $n$  نیز زوج است.

**حل:** به جای اثبات زوج بودن  $n$ ، می‌توانیم نشان دهیم که  $n$  نمی‌تواند فرد باشد.

ابتدا فرض می‌کنیم  $n$  فرد باشد یعنی  $n = 2k + 1$  که در اینجا  $k$  یک عدد صحیح است. در نتیجه

داریم:

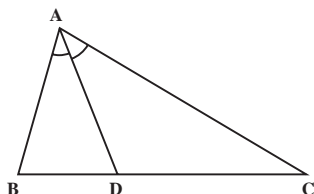
$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

و این نشان دهنده آن است که  $n^2$  فرد است.

می‌بینیم که این یک تناقض است. زیرا فرض مسئله برای این بود که  $n^2$  زوج باشد. یعنی  $n^2$  نمی‌تواند هم زوج (طبق فرض مسئله) و هم فرد (طبق نتیجه‌ای که به دست آورده‌ایم) باشد، بنابراین به یک تناقض می‌رسیم. تنها توجیه این تناقض آن است که فرض فرد بودن  $n$  نادرست است، پس  $n$  باید زوج باشد.

**مثال ۲:** فرض کنید  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  در مثلث  $ABC$  باشد. اگر  $BD \neq CD$  ثابت کنید

$AB \neq AC$ .



**حل:** اثبات را از طریق برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض کنید نتیجه مطلوب یعنی  $AB \neq AC$  درست

نباشد یعنی  $AB = AC$ . بنابراین مثلث  $ABC$  متساوی الساقین است. می‌دانیم در مثلث متساوی الساقین

نیمساز  $AD$  میانه نیز هست. بنابراین  $BD = DC$  که این با فرض مسئله یعنی  $BD \neq CD$  در تضاد است.

بنابراین فرض درست نبودن  $AB \neq AC$  رد می‌شود. یعنی  $AB \neq AC$ .

روش استدلالی مورد استفاده در دو مثال قبل را برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم می‌نامند که

در تمام ریاضیات کاربرد دارد.

برهان خلف

برای استفاده از برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) گام‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

گام ۱: فرض می‌کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد.

گام ۲: نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به دست می‌دهد که حقایق دانسته شده



را نقض می کند.

گام ۳: حال که به یک تناقض رسیده ایم، معلوم می شود که فرضی که در گام اول کرده بودیم نادرست است. بنابراین نتیجه مطلوب باید درست باشد.

**مثال ۳:** نشان دهید که  $\sqrt{2}$  گنگ است.

اثبات: فرض کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد یعنی  $\sqrt{2}$  گنگ نبوده، گویا باشد (گام ۱). حال با توجه به تعریف گویا بودن یک عدد،  $\sqrt{2}$  را به صورت کسر  $\frac{p}{q}$  می نویسیم که در آن  $p$  و  $q$  اعداد صحیح (متعلق به  $\mathbb{Z}$ ) و کسر  $\frac{p}{q}$  به ساده ترین صورت خود است. یعنی  $p$  و  $q$  نسبت به هم اول هستند یعنی  $(p, q) = 1$  و

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

طرفین (۱) را به توان دو می رسانیم:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad (2)$$

سپس با ضرب طرفین (۲) در  $q^2$  خواهیم داشت:

$$2q^2 = p^2 \quad (3)$$

از (۳) نتیجه می شود که  $p^2$  عددی زوج است. حال طبق مثال ۱، می دانیم که با فرض صحیح بودن  $p$ ، اگر  $p^2$  زوج باشد،  $p$  نیز زوج است یعنی:

$$p = 2k \quad (4)$$

در نتیجه:

$$p^2 = 4k^2 \quad (5)$$

در (۵) به جای  $p^2$ ، معادل آن را از (۳) که همان  $2q^2$  باشد جایگزین می کنیم:

$$2q^2 = 4k^2 \quad (6)$$

پس از تقسیم طرفین بر ۲ داریم:

$$q^2 = 2k^2 \quad (7)$$

از (۷) نتیجه می گیریم که  $q^2$  زوج بوده، باز طبق مثال ۱،  $q$  نیز زوج است و این خلاف فرض است. زیرا در این صورت  $p$  و  $q$  هر دو مضارب ۲ هستند و نمی توانند نسبت به هم اول باشند (گام ۲). در نتیجه فرض گویا بودن  $\sqrt{2}$  نادرست بوده پس  $\sqrt{2}$  می بایستی گنگ باشد.

- با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، احکام زیر را ثابت کنید :
- ۱- اگر  $n$  عددی صحیح و  $n^2$  فرد باشد، نشان دهید  $n$  نیز فرد است.
  - ۲- اگر  $n^2$  مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که  $n$  نیز مضربی از ۳ است.
  - ۳- اگر  $n^2$  مضربی از  $10$  باشد، نشان دهید که  $n$  نیز مضربی از  $10$  است.
  - ۴- از یک نقطه خارج یک خط نمی توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.
  - ۵- ثابت کنید  $\sqrt{3}$  گنگ است.
  - ۶- اگر سه خط راست  $d$ ،  $d'$  و  $d''$  دوه‌دو متمایز باشند و  $d \parallel d'$  (بخوانید  $d$  موازی  $d'$ ) و  $d \parallel d''$ ، آنگاه  $d' \parallel d''$ .
  - ۷- ثابت کنید  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})$  گنگ است.
  - ۸- ثابت کنید اگر  $x$  گویا و  $y$  گنگ باشد، آنگاه  $(x + y)$  گنگ است.
  - ۹- به برهان خلف ثابت کنید اگر  $p$  عددی اول باشد آنگاه به یکی از دو صورت  $p = Sk + 1$  یا  $p = Sk + 5$  نوشته می شود.

اگر مطالب یک موضوع درسی یکدیگر را نقض کنند، آن درس گیج کننده می شود. با این حال در استدلال استنتاجی گاهی وقتها اگر سعی کنیم و عامدانه به تناقض برسیم مفید خواهد بود!

هارولد ژاکوبز، ۱۹۷۴

### ۱-۱۲- اصل لانه کبوتر

بسیاری از بدیهیات دنیای اطراف و زندگی روزمره ما، قانونمندی ریاضی دارند و درعین سادگی و ظرافت، دارای کاربردهای گوناگون و متنوع هستند. به عنوان مثال، واضح است که اگر ۵ کبوتر به طرف ۴ لانه پرواز کنند و بخواهند داخل لانه‌ها بشوند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو کبوتر خواهد

بود! همچنین اگر ۹ نفر در یک میهمانی حضور داشته باشند، حداقل روز تولد دو و یا چند نفر از آنها در یک روز هفته می‌باشد. مثال‌هایی از این قبیل برای همه ما آشناست. اصل لانه کبوتر توجیه‌کننده دو مثال بالا و یکی از همین بدیهیات است که با این حال بعضی از مسایل پیچیده ریاضی را قابل حل می‌کند. این اصل، بخصوص در مواقعی که می‌خواهیم رخداد موقعیت خاصی را بررسی کنیم، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### ← اصل لانه کبوتر

**اگر  $m$  کبوتر،  $n$  لانه کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه کبوترها باشد ( $m > n$ )، آنگاه طبق اصل لانه کبوتر حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو کبوتر در آن قرار داشته باشند.**

**مثال ۱:**  $S$ : یک زیرمجموعه ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای  $S$  را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم، حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۶ هستند.

**حل:** می‌دانیم که تقسیم هر عدد طبیعی  $n$  بر ۳۶ به صورت  $n = 36q + r$  است که  $q$  خارج قسمت،  $r$  باقیمانده و  $0 \leq r < 36$  است. بنابراین مجموعه باقیمانده‌ها، یعنی  $\{0, 1, 2, \dots, 35\}$ ، دارای ۳۶ عضو است. مشابهت این مثال با لانه کبوتر چنین است که اگر اعضای  $S$  (۳۷ عضو) را تعداد کبوترها و تعداد باقیمانده‌ها (۳۶) را لانه کبوترها در نظر بگیریم، آن وقت درمی‌یابیم که حداقل یکی از لانه‌ها پذیرای دو و یا تعداد بیشتری کبوتر می‌باشد! یعنی:


حداقل دو عضو از مجموعه  $S$  دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۶ خواهند بود.

**تمرین:**  $S$ : یک زیرمجموعه ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای  $S$  را بر ۲۵ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست کم سه عضو  $S$  دارای یک باقیمانده‌اند.

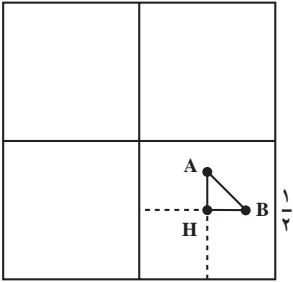
**مثال ۲:** پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۱ مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از

این پنج نقطه کمتر از  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  است.

**حل:** با رسم محورهای تقارنی که موازی اضلاع هستند، سطح مربع را به ۴ مربع مساوی تقسیم

می‌کنیم (مطابق شکل). 

۴ مربع کوچک‌تر را ۴ لانه کبوتر و ۵ نقطه مفروض را ۵ کبوتر در نظر می‌گیریم که می‌خواهند به داخل لانه‌ها برگردند در ضمن، نقاط روی مرز را متعلق به هر دو مربع می‌گیریم. بنابراین اصل لانه کبوتر،



حداقل دوتا از نقطه‌ها به یکی از مربع‌های کوچک تعلق دارند – همان طوری که حداقل دو کیبوتر، به لانه مشترک می‌روند – و با استفاده از قضیه فیثاغورس درمی‌یابیم که فاصله آن دو نقطه کمتر از  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  است. با توجه به شکل، صحت این ادعا را نشان می‌دهیم

محاسبه: با توجه به اینکه طول ضلع مربع بزرگ ۱ است، در نتیجه طول ضلع مربع‌های کوچک  $\frac{1}{2}$  و فاصله دو نقطه A و B با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می‌آید:

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2$$

اما شکل معلوم می‌کند که طول‌های AH و BH از  $\frac{1}{2}$  که طول ضلع مربع‌های کوچک است کمتر هستند. در نتیجه:

$$(AB)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(AB)^2 < \frac{2}{4}$$

$$AB < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی:

و حکم ثابت است.

## تمرین

- ۱- ۱۳ نفر در یک میهمانی حضور دارند. نشان دهید حداقل ۲ نفر از آنها در یک ماه متولد شده‌اند.
- ۲- آمار نشان می‌دهد که تعداد تارهای موی سر افراد بیش از ۳۰۰۰۰۰ نیست. ثابت کنید در شهری که ۳۰۰۰۰۲ نفر جمعیت دارد، حداقل دو نفر از شهروندان تعداد تارهای مویشان با هم مساوی است.
- ۳- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱ مفروض است. پنج نقطه را در داخل مثلث در نظر می‌گیریم. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله آنها کمتر از  $\frac{1}{4}$  است.
- ۴- نشان دهید هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  که دارای ۶ عضو باشد حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است.
- ۵- در یک دبیرستان با ۲۵۵ دانش‌آموز ثابت کنید حداقل ۴ نفر روز، هفته و ماه تولد یکسان دارند.

## مجله ریاضی

نظریه مجموعه‌ها از اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم میلادی مطرح شد و پس از مدتی به عنوان مبانی ریاضیات جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد.

ریاضی‌دانان گوناگونی در تحکیم این نظریه فعالیت داشته‌اند ولی ریاضی‌دان آلمانی گ. کانتور در این مورد نقشی اساسی داشت. کانتور در سن پترزبورگ (روسیه) متولد شد، خانواده‌اش در طفولیت وی به آلمان مهاجرت کردند. وی در سال‌های ۱۸۷۲ الی ۱۹۱۳ استاد دانشگاه هالد در آلمان بود و در این دوران آثار عمیق خود را در نظریه مجموعه‌ها تألیف کرد.

## مجموعه - ضرب دکارتی و رابطه

### ۲-۱- مجموعه

فکر می‌کنید می‌توانیم مفهوم مجموعه را به کمک مفهوم‌های ساده‌تری از خود مفهوم مجموعه تعریف کنیم؟!

این کار امکان‌پذیر نیست؛ ولی اغلب افراد با این مفهوم آشنا هستند و آن را به کار می‌برند. به عنوان مثال عبارت‌های «دانش‌آموزانی که معدل آنها ۱۶ است»، «نقطه‌هایی در فضا که از دو نقطه مفروض به یک فاصله‌اند»، «عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷» و «همه کسانی که گواهینامه رانندگی دارند» هر کدام یک مجموعه هستند. در واقع مجموعه به عنوان دسته‌ای از اشیای کاملاً معین در نظر گرفته می‌شود که با نام بردن اعضای آن یا معرفی خاصیت مشترک اعضای آن مشخص می‌شود.

در این فصل ضمن آشنایی بیشتر با طبیعت مجموعه‌ها به بررسی روش‌های طبیعی و متعدد ترکیب و پیرایش مجموعه‌ها، برای تشکیل مجموعه‌های دیگر می‌پردازیم. همان‌طور که بررسی نظام‌وار ویژگی‌های کلی اعداد همراه با اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به جبر اعداد می‌انجامد؛ مطالعه نظام‌وار این روش‌ها نیز به «جبر مجموعه‌ها» منجر می‌شود.

معمولاً در حالت کلی مجموعه را با یکی از حروف بزرگ  $A, B, C, \dots$  نشان می‌دهیم.

اشیایی که با هم مجموعه مفروضی را تشکیل می‌دهند، عضوها یا عناصرهای آن مجموعه نامیده می‌شوند. برای آنکه تعلق عضوی چون  $x$  به مجموعه‌ای چون  $A$  را به طور نمادی بیان کنیم، می‌نویسیم

$$x \in A$$

و اگر  $x$  عضو مجموعه  $A$  نباشد و یا به عبارت دیگر  $x$  متعلق به  $A$  نباشد، می‌نویسیم

$$x \notin A$$

بدیهی است برای شناختن یک مجموعه باید بدانیم دقیقاً چه چیزهایی عضو آن هستند. گفتیم یک مجموعه با نام بردن اعضای آن یا معرفی خاصیت مشترک اعضای آن مشخص

می‌شود. مثلاً مجموعه اعداد اول یک رقمی را با نام بردن اعضای آن به صورت

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

و یا با بیان خاصیت مشترک اعضای آن به صورت

$$\{x \mid x \text{ عدد اول یک رقمی است}\}$$

نشان می‌دهیم که آن را با به کار بردن نماد « $x < 10$ » به جای « $x$  یک رقمی است» و « $x \in P$ » به جای « $x$  عددی اول است» به صورت

$$\{x \mid x < 10, x \in P\}$$

می‌نویسیم.

به عنوان مثالی دیگر؛ می‌دانیم مجموعه نقطه‌هایی از یک صفحه که به فاصله معینی از نقطه مفروضی در آن صفحه باشند یک دایره تشکیل می‌دهند. در این مثال مجموعه را به کمک یک شرط تعریف کرده‌ایم که باید عضوهای مجموعه با آن سازگار باشند و یا می‌توان گفت، خاصیتی را معین کرده‌ایم که عضوهای مجموعه باید آن را داشته باشند. نقطه‌های واقع بر محیط دایره، با این شرط سازگارند و یا دارای این خاصیت هستند که، همه آنها در یک صفحه قرار گرفته‌اند و از نقطه مفروضی (O مرکز دایره) به یک فاصله (r اندازه شعاع دایره) هستند.

در مشخص کردن یک مجموعه، ممکن است مناسب، یا حتی امکان‌پذیر نباشد که فهرست کاملی از اعضایش را بنویسیم. مجموعه نقاط روی دایره به مرکز O و شعاع r از آن جمله هستند؛ یا مانند مجموعه اعداد اول امکان نوشتن همه عضوهای آن نباشد،

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$$

مفهوم‌های «شرط» و «خاصیت» پیوندی جدی با مفهوم «مجموعه» دارند. به طور کلی هر تعریف

از نوع

$$S = \{x \mid x \text{ مورد شرطی در مورد } x\}$$

به این معنی است که S مجموعه همه xهایی است که در مورد آنها شرط مفروضی صادق باشد.

به طور مثال اگر A را مجموعه جواب‌های معادله درجه دوم

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

در نظر بگیریم می‌توان آن را بعد از حل معادله به صورت

$$A = \{-1, 5\}$$

نشان داد، یا از حل معادله اجتناب کرده آن را به صورت

$$A = \{x \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}$$

بنویسیم. به این طریق نیز تعریفی دقیق و بدون ابهام برای A به دست می‌آید.  
 حال به عنوان مثالی دیگر مجموعه B را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$B = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

با کمی دقت متوجه ابهامی در تعریف این مجموعه می‌شویم. زیرا اگر فقط اعداد صحیح مورد نظر باشند، مجموعه B شامل اعداد  $-2, -1, 0, 1, 2, 3$  می‌شود ولی اگر اعداد حقیقی مورد نظر باشند آنگاه همه اعداد حقیقی دیگر بین  $-2$  و  $3$  را نیز شامل می‌شود.

برای رفع چنین ابهامی، مجموعه‌ای چون U را که اعضای مجموعه مورد نظر باید از آن انتخاب شوند، مشخص می‌کنیم. به طور کلی هر تعریف به صورت

$$X = \{x \in U \mid x \text{ مورد در مورد } x\}$$

به این معنی است که X مجموعه تمام اعضای مانند x موجود در مجموعه U است که به ازای آنها شرط مفروض در مورد x برآورده می‌شود. البته صورت معادل

$$X = \{x \in U \mid x \text{ و شرطی در مورد } x\}$$

نیز همان معنا را دارد ولی ما نمایش اول را ترجیح می‌دهیم چون بر نقش U تأکید بیشتری دارد. مجموعه U که اعضای X طبق شرط تعیین شده از آن انتخاب می‌شوند، مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی خوانده می‌شود.

به عنوان مثال اگر A مجموعه اعداد مضرب ۳ باشد، آنگاه مجموعه جهانی را مجموعه اعداد صحیح ( $\mathbb{Z}$ ) می‌گیریم و آن را به صورت

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

نشان می‌دهیم.

معمولاً خاصیت مشترک اعضای یک مجموعه را با  $P(x)$  یا  $q(x)$  نشان می‌دهیم و آن را گزاره‌نما با متغیر x می‌خوانیم. بنابراین برای نشان دادن مجموعه X در حالت کلی می‌نویسیم:

$$X = \{x \in U \mid P(x)\}$$

که U مجموعه جهانی و  $P(x)$  به معنی «x خاصیت P دارد» می‌باشد (گزاره‌نما).  
 در مجموعه

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$$



اعداد حقیقی  $\mathbb{R}$ ، مجموعه جهانی و  $1 < x < 2$  همان  $P(x)$  است.  
به طور کلی

**گزاره نما عبارتی است شامل نمادی مانند  $x$  که هرگاه هر عضو مانند  $a \in U$  را به جای  $x$  قرار دهیم جمله حاصل یا به وضوح درست باشد یا به وضوح نادرست.**

اگر چنین باشد می‌گوییم که این گزاره‌نما برای مجموعه  $U$  معتبر است.  
مثلاً عبارت  $2 \leq x \leq 3$  یک گزاره‌نماست که برای مجموعه  $\mathbb{Z}$  و برای مجموعه  $\mathbb{R}$  معتبر است.  
یعنی با قرار دادن هر عدد صحیح یا حقیقی به جای  $x$  جمله‌ای به دست می‌آید که یا درست است یا نادرست. مثلاً جمله  $2 \leq 1 \leq 3$  درست است ولی  $2 \leq 6 \leq 3$  نادرست است.  
باید توجه کرد که گزاره‌نما در مجموعه‌های جهانی متفاوت تعریف می‌شود. مثلاً اگر  $M$  را مجموعه چهارضلعی‌های محدب واقع در صفحه در نظر بگیریم آنگاه عبارت « $x$  مربع است» گزاره‌نمایی است معتبر برای مجموعه  $M$  و مجموعه

$$\{x \in M \mid x \text{ مربع است}\}$$

فقط مجموعه مربع‌های واقع در صفحه است.

یا اگر  $S$  مجموعه نقاط صفحه باشد، دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را به عنوان یک مجموعه از نقاط به صورت

$$\{x \in S \mid x \text{ از } O \text{ برابر } r \text{ است}\}$$

می‌نویسیم.

گفتیم یک مجموعه ممکن است به روش‌های مختلف توصیف شود. مثلاً اگر  $A$  مجموعه جواب‌های معادله

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

باشد و  $B$  مجموعه اعداد صحیح زوج بین ۱ و ۵، آنگاه  $A$  و  $B$  هر دو دقیقاً دارای دو عضو ۲ و ۴ هستند. با مشخص شدن اعضاء مشاهده می‌شود که این دو مجموعه برابرند. حال تساوی بین دو مجموعه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

**دو مجموعه  $A$  و  $B$  برابرند اگر و فقط اگر اعضایشان یکی باشد و می‌نویسیم**

$$A=B$$

اگر  $A$  و  $B$  برابر نباشند می نویسیم  $A \neq B$ .

با توجه به تعریف بالا مشاهده می شود که مجموعه های  $A = \{5, 15, 25\}$  و  $B = \{15, 25, 5\}$  برابرند، زیرا هر عضو  $A$  عضو  $B$  نیز هست و هر عضو  $B$  نیز عضو  $A$  است.

**تغییر ترتیب عضوهای یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی دهد.**

همچنین مجموعه های  $C = \{1, 3, 1, 6\}$  و  $D = \{3, 1, 3, 6\}$  نیز برابرند زیرا هر عضو  $C$  متعلق به  $D$  نیز هست و هر عضو  $D$  نیز به  $C$  تعلق دارد.

**تکرار اعضا در یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی دهد.**

مجموعه

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$$

را در نظر بگیرید، با کمی دقت ملاحظه می کنید که هیچ عدد حقیقی در شرط این مجموعه صدق نمی کند، در نتیجه این مجموعه خالی از عضو است.

**مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی نامیده می شود و با**

**نماد  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نشان داده می شود.**

حال با توجه به تعریف بالا آیا می توانید تفاوت مجموعه های  $\emptyset$ ،  $\{0\}$  و  $\{\emptyset\}$  را بیان کنید؟

**۲-۲- زیرمجموعه**

با حذف برخی از اعضای مجموعه غیر تهی  $A$ ، مجموعه های دیگری به دست می آیند که این مجموعه ها را زیرمجموعه های  $A$  می نامیم. مثلاً اگر از مجموعه

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

اعضای ۱ و ۲ را حذف کنیم مجموعه

$$B = \{3, 4\}$$

به دست می آید که همه اعضای آن در  $A$  نیز هستند. در این حالت می گوئیم  $B$  زیرمجموعه  $A$  است یا  $A$  شامل  $B$  است.

**B یک زیرمجموعه از A است اگر هر عضو B عضوی از A نیز باشد و می نویسیم  $B \subseteq A$ .**

به عبارت دیگر  $B \subseteq A$  اگر برای هر  $x \in U$  از  $x \in B$  نتیجه شود که  $x \in A$ . با توجه به این تعریف می توان گفت برای دو مجموعه A و B اگر عضوی در B وجود داشته باشد که این عضو در A نباشد در این صورت B زیرمجموعه A نیست و آن را به صورت  $B \not\subseteq A$  نشان می دهیم. بنابراین می توان گفت:

هر مجموعه ای زیرمجموعه خودش است.

یعنی برای هر مجموعه A داریم  $A \subseteq A$ . همچنین بدیهی است که  $A \subseteq U$ .

**مثال ۱:** نشان دهید مجموعه  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  زیر مجموعه  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ زوج باشد}\}$  نیست.

حل: باید نشان دهیم حداقل یک عضو A در B نیست.

چون  $3 \in A$  و  $3 \notin B$  بنابراین  $A \not\subseteq B$ .

توجه کنید که لازم نیست بدانیم که آیا عضوهای دیگر A عضو B هستند یا خیر.

**اگر  $B \subseteq A$  ولی  $B \neq A$ ، آنگاه B زیرمجموعه سره A نامیده می شود.**

**مثال ۲:** نشان دهید که مجموعه  $A = \{a, b\}$  زیرمجموعه سره  $B = \{a, b, c\}$  است.

حل:  $A \subseteq B$  است زیرا a و b هم متعلق به A و هم متعلق به B است. اما چون  $c \in B$  ولی  $c \notin A$

در نتیجه  $A \neq B$ . بنابراین A یک زیرمجموعه سره B است.

**مثال ۳:** اگر

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq x \leq 20\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \leq 49\}$$

$$C = \{A, B, -3, 4, 6\}$$

$$D = \{-3, 4, 6, 7\}$$

آنگاه:

$$B \subseteq A \text{ (چرا؟)}$$

$$C \not\subseteq A \text{ زیرا } A \in C \text{ ولی } A \notin A$$

$$D \subseteq A \text{ (چرا؟)}$$

$\forall \in C$  ولی  $\forall \in D$  زیرا  $D \not\subseteq C$

$3 \notin B$  ولی  $3 \in D$  زیرا  $D \not\subseteq B$

**مثال ۴:** ثابت کنید  $\emptyset$  زیرمجموعه هر مجموعه است.

**حل:**  $\emptyset \subseteq A$  زیرا اگر  $\emptyset$  باید عضوی مانند  $x$  در  $\emptyset$  باشد که در  $A$  نباشد، و این غیرممکن

است چون  $\emptyset$  عضوی ندارد.

با توجه به تعریف زیر مجموعه می توان تعریف تساوی دو مجموعه را به صورت قضیه زیر بازنویسی

کرد.

**قضیه ۱:** دو مجموعه  $A$  و  $B$  مساوی هستند، یعنی  $A=B$ ، اگر و تنها اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$

برهان: اگر  $A=B$  آنگاه از آنجا که  $A \subseteq A$ ، نتیجه می گیریم که  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$ .

برعکس، فرض می کنیم  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$  آنگاه هر عضو  $A$ ، عضوی از  $B$  است و هر عضو  $B$ ،



عضوی از  $A$ . از این رو اعضای  $A$  و  $B$  یکی هستند و لذا  $A=B$ .

**قضیه ۲:** برای سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  اگر داشته باشیم  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$  آنگاه داریم  $A \subseteq C$ .

برهان: چون  $A \subseteq B$  پس هر عضو  $A$  در  $B$  است و چون  $B \subseteq C$  پس هر عضو  $B$  در  $C$  است.



بنابراین هر عضو  $A$ ، عضو  $C$  نیز هست در نتیجه  $A \subseteq C$ .

توجه کنید که زیرمجموعه ها را نباید با اعضای مجموعه اشتباه گرفت زیرا که این دو مفهوم

کاملاً متفاوت هستند.

**مثال ۵:** اگر  $M = \{r, s, t\}$ ، کدام یک از احکام زیر درست و کدام یک نادرست است؟ در

صورت نادرستی دلیل آن را بیان کنید.

الف)  $r \in M$

ب)  $r \subseteq M$

پ)  $\{r\} \in M$

ت)  $\{r\} \subseteq M$

**حل:** الف) درست.

ب) نادرست، علامت  $\subseteq$  بایستی دو مجموعه را به هم مربوط کند ولی در این جا  $r$  زیرمجموعه

$M$  نیست بلکه عضو  $M$  است.

پ) نادرست، علامت  $\in$  بایستی یک شیء را به یک مجموعه مربوط کند، ولی  $\{r\}$  زیرمجموعه

$M$  است نه عضو  $M$ .

ت) درست.

**مثال ۶:** اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x = 6\}$  آیا  $3 \in A$ ؟

حل : A یک مجموعه است که دارای تنها یک عنصر ۳ است، یعنی  $A = \{3\}$ . پس عدد ۳ متعلق به A است نه مساوی A.

در نتیجه باید توجه داشته باشیم که عضو a و مجموعه {a} متفاوت هستند و آنها را یکی نگیریم.

**مثال ۷:** آیا هر مجموعه‌ای دارای زیرمجموعه سره است؟

حل : مجموعه تهی دارای زیرمجموعه سره نیست ولی بقیه مجموعه‌ها  $\emptyset$  را به عنوان زیرمجموعه سره خود دارند. اگر مجموعه سره غیر تهی مورد نظر باشد، مجموعه‌های تک‌عضوی دارای زیرمجموعه سره غیر تهی نیستند ولی بقیه مجموعه‌ها که بیش از یک عضو دارند دارای زیرمجموعه سره ناتهی می‌باشند.

### ۳-۲- مجموعه توانی

مجموعه  $A = \{1, 2, 3\}$  را در نظر می‌گیریم و همه زیرمجموعه‌های A را می‌نویسیم که عبارتند از :

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\emptyset$$

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{2\}$$

$$A_3 = \{3\}$$

$$A_4 = \{1, 2\}$$

$$A_5 = \{1, 3\}$$

$$A_6 = \{2, 3\}$$

حال اگر مجموعه این زیرمجموعه‌ها را با

$$P(A) = \{A, \emptyset, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

نشان دهیم،  $P(A)$  مجموعه توانی A خوانده می‌شود. پس

**مجموعه کلیه زیرمجموعه‌های X، مجموعه توانی X نامیده می‌شود و با**

**$P(X)$  نشان داده می‌شود.**

**مثال ۸:** مجموعه توانی  $B = \{a, b\}$  را بنویسید.

حل : کلیه زیر مجموعه های B عبارتند از :

$$B = \{a, b\}$$

$$\emptyset$$

$$B_1 = \{a\}$$

$$B_2 = \{b\}$$

بنابراین

$$P(B) = \{\{a, b\}, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}.$$

چنانکه ملاحظه شد مجموعه B که ۲ عضو داشت، مجموعه توانی آن دارای  $2^2 = 4$  عضو بود و مجموعه A که ۳ عضو داشت، مجموعه توانی آن  $2^3 = 8$  عضوی شد. شاید شما نیز با مشاهده مثال های بالا به حدس زیر رسیده باشید.

**قضیه ۳:** اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، مجموعه توانی آن دارای  $2^n$  عضو خواهد بود. برهان : این قضیه را با استفاده از استقرای ریاضی اثبات می کنیم.  
اگر  $n=1$ ، مثلاً  $A = \{a\}$ ، آنگاه :

$$P(A) = \{A, \emptyset\}$$

می بینیم که در این حالت P(A) دارای  $2^1$  عضو است و در نتیجه حکم قضیه برقرار است. اگر  $n=2$ ، مثلاً  $A = \{a, b\}$ ، آنگاه

$$P(A) = \{A, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

که دارای  $2^2$  عضو است و در نتیجه حکم قضیه در این حالت نیز برقرار است. حال درستی حکم را برای  $n=k$  فرض می کنیم (فرض استقراء)، یعنی فرض می کنیم اگر مجموعه A دارای k عضو باشد، مجموعه توانی آن، P(A)، دارای  $2^k$  عضو است.

اگر به مجموعه A یک عضو اضافه کنیم، یعنی مجموعه A،  $k+1$  عضوی شود ( $n=k+1$ )، آنگاه این عضو با  $2^k$  عضو دیگر مجموعه توانی،  $2^k$  مجموعه جدید برای مجموعه توانی پدید خواهد آورد. یعنی تعداد عضوهای مجموعه توانی A جدید،  $2(2^k)$  یعنی  $2^{k+1}$  می باشد و به این ترتیب نتیجه



می شود که حکم قضیه برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

مجموعه ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد مجموعه متناهی می نامیم و مجموعه ای را که متناهی نباشد، مجموعه نامتناهی می نامیم. مثلاً مجموعه اعداد صحیح یک رقمی متناهی است ولی مجموعه اعداد صحیح  $\mathbb{Z}$  نامتناهی است همچنین مجموعه  $\mathbb{N}$  نامتناهی است. تعداد

عضوهای یک مجموعه متناهی را عدد اصلی آن مجموعه می‌نامیم. مثلاً عدد اصلی مجموعه

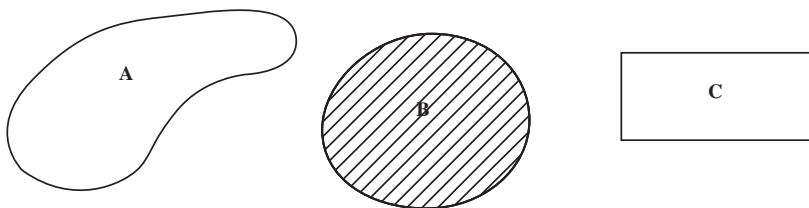
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$10$  است، چون تعداد عضوهای آن  $10$  است. عدد اصلی مجموعه‌ای مانند  $A$  را با  $|A|$  یا  $n(A)$  نشان می‌دهیم. باید توجه داشت که همواره می‌توان تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه متناهی را برحسب تعداد اعضای همان مجموعه به دست آورد ولی تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه نامتناهی تعریف نشده است.

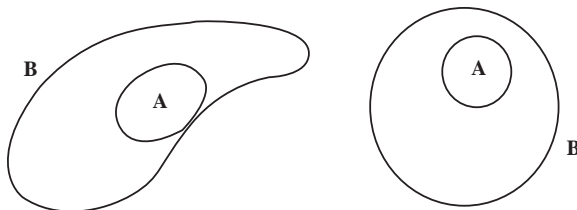
**تذکر:** مجموعه  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$  نیز نمونه‌ای از مجموعه‌های نامتناهی است.

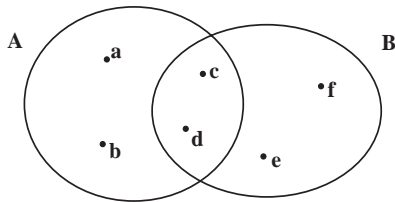
## ۴-۲- نمایش هندسی مجموعه‌ها

یکی از ابزارهای مهم استدلال‌های شهودی و استقرایی برای فهم بهتر مجموعه‌ها استفاده از تمثیل هندسی است. این کار برای بار اول توسط ریاضیدانی به نام ون انجام شد و نمودار ون نام گرفت. در نمودار ون در حالت کلی اعضای مجموعه درون یک خم بسته در صفحه مانند دایره یا مستطیل نشان داده می‌شود. گاهی ناحیه داخلی شکلی را که برای نمایش مجموعه به کار می‌رود هاشور می‌زنند. در زیرمجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  با استفاده از نمودار ون نشان داده شده‌اند.



به عنوان مثال اگر  $A \subseteq B$  و  $A \neq B$ ، آنگاه  $A$  و  $B$  را می‌توان به صورت هر یک از نمودارهای زیر نشان داد.





به عنوان مثالی دیگر، اگر  $A = \{a, b, c, d\}$  و  $B = \{c, d, e, f\}$ ، آنگاه این مجموعه‌ها را با استفاده از نمودار ون به صورت مقابل می‌توان نشان داد. باید توجه داشت که نمودار ون خود یک نوع تمثیل شهودی و هندسی است و به وسیله آن نمی‌توان یک قضیه ریاضی را ثابت کرد. بلکه برای اثبات می‌توان از آنها ایده گرفت.

## تمرین

- مجموعه‌های زیر را که با بیان خاصیتی معین، مشخص شده‌اند با گزاره‌ها نشان دهید.
  - الف) مجموعه اعداد حقیقی مثبت
  - ب) مجموعه اعداد صحیح که مربعشان بزرگ‌تر از ۲۵ نباشد.
  - پ) مجموعه اعداد حقیقی بین ۲- و ۲
- مجموعه‌های زیر را که با گزاره‌ها نوشته شده‌اند با نوشتن اعضا نشان دهید:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} \quad \text{الف)}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 25\} \quad \text{ب)}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \cdot x^2 + 3x - 1 = 0\} \quad \text{پ)}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} \quad \text{ت)}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 1 = 0\} \quad \text{ث)}$$

- هریک از مجموعه‌های زیر را با استفاده از یک گزاره‌ها بنویسید.

$$A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \quad \text{الف)}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \quad \text{ب)}$$

$$C = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\} \quad \text{پ)}$$

$$D = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\} \quad \text{ت)}$$

- نشان دهید که مجموعه حروف لازم برای هجی کردن «بینابین» با مجموعه حروف لازم برای هجی کردن «بیان» مساوی است.



۵- چه شرایطی بین  $a, b, c, d$  وجود داشته باشد تا تساوی زیر برقرار باشد؟

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

۶- نشان دهید: الف) اگر  $A \subseteq \emptyset$  آنگاه  $A = \emptyset$

ب) اگر  $U \subseteq A$  آنگاه  $A = U$

۷- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{1, 0, -1\}$  را بنویسید.

۸- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه  $S = \{3, \{1, 4\}\}$  را بنویسید.

۹- از گزاره‌های زیر کدام یک درست و کدام یک نادرست است.

الف)  $\emptyset = \{\emptyset\}$

ب)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$

پ)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

ت)  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

۱۰- کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم مساویند.

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m\}$$

$$C = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 2m\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\}$$

$$E = \{0, 1, 2\}$$

۱۱- تعیین کنید که در مجموعه‌های زیر، کدام مجموعه، زیرمجموعه دیگری است.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8x + 12 = 0\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$D = \{6\}$$

۱۲- تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است.

الف)  $x \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$

ب)  $\{x\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\}$

پ)  $\{1, x, 2\} \subseteq \{1, 2, x\}$

ت)  $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$

(ث)  $\{x\} \in \{x\}$

۱۳- مثال هایی از مجموعه های دلخواه  $A$  و  $B$  و  $C$  بیاورید که برای آنها احکام زیر درست باشند.

(الف)  $A \notin C$  و  $B \in C$  و  $A \in B$

(ب)  $A \in C$  و  $B \in C$  و  $A \in B$

(پ)  $A \subseteq B$  و  $A \in B$

## ۲-۵ - جبر مجموعه ها

همان طور که با اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم در مجموعه اعداد، اعداد جدیدی حاصل می شود، در نظریه مجموعه ها نیز اعمالی مانند اجتماع، اشتراک، تفاضل تعریف می شود که به کمک آنها می توان از دو مجموعه داده شده، مجموعه جدیدی ساخت.

### اجتماع دو مجموعه

اجتماع مجموعه های  $A$  و  $B$ ، مجموعه ای است که اعضایش، همه اعضای  $A$  و همه اعضای  $B$  را شامل می شود. به عنوان مثال اگر

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$$

آنگاه اجتماع آنها مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  است. یعنی

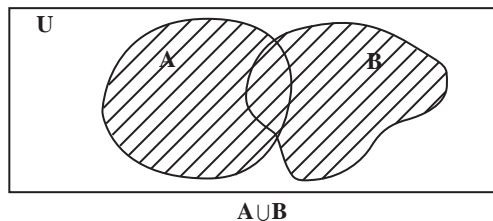
**اجتماع مجموعه های  $A$  و  $B$  مجموعه ای است که اعضایش متعلق به  $A$  یا**

**متعلق به  $B$  یا متعلق به هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  باشد.**

اجتماع  $A$  و  $B$  را به صورت  $A \cup B$  نمایش می دهیم. لذا داریم:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B \text{ یا } x \text{ متعلق به هر دو مجموعه } A \text{ و } B \text{ است}\}$$

با استفاده از نمودار ون، اجتماع دو مجموعه را می توان به صورت زیر نمایش داد.



تبصره: با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه می توان نتیجه گرفت که دو مجموعه  $A \cup B$  و  $B \cup A$  یکی هستند یعنی:

$$A \cup B = B \cup A$$

همچنین هر یک از دو مجموعه  $A$  و  $B$  زیرمجموعه  $A \cup B$  هستند، یعنی

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{و} \quad B \subseteq A \cup B$$

**مثال ۱:** اگر  $A = \{1, 2, 3\}$ ،  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  و  $C = \{3, 4, 5, 6\}$  آنگاه طبق تعریف اجتماع داریم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$C \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$B \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$$

در این مثال مشاهده می شود که  $B \cup B = B$ .

**مثال ۲:** فرض کنید  $A$ ،  $B$  و  $C$  مجموعه های مثال ۱ باشند. می توان نشان داد

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

برای این منظور ابتدا  $A \cup B$  را تعیین می کنیم

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

سپس اجتماع  $A \cup B$  را با  $C$  به دست می آوریم

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

به همین ترتیب برای محاسبه  $A \cup (B \cup C)$  ابتدا  $B \cup C$  را تعیین می کنیم:

$$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

و بعد اجتماع  $A$  و  $B \cup C$  را به دست می آوریم

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

به وضوح مشاهده می شود که

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

**مثال ۳:** برای مجموعه های  $A = \{1, 2\}$ ،  $B = \{2, 3\}$  و  $C = \{1, 2, 3, 4\}$  ملاحظه می شود:

$$A \subseteq C \quad \text{و} \quad B \subseteq C$$

در این حالت برای مجموعه

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

نیز داریم

$$A \cup B \subseteq C$$

مشاهده بالا در حالت کلی برقرار است. این مطلب را می‌توان به صورت قضیه زیر بیان کرد.  
**قضیه ۱:** اگر  $A \subseteq C$  و  $B \subseteq C$  آنگاه  $A \cup B \subseteq C$ .

برهان: فرض می‌کنیم  $x \in A \cup B$  آنگاه طبق تعریف اجتماع،  $x \in A$  یا  $x \in B$ . اگر  $x \in A$ ، چون طبق فرض قضیه داریم  $A \subseteq C$ ، بنابراین  $x \in C$ ؛ اگر  $x \in B$ ، چون طبق فرض قضیه  $B \subseteq C$ ، بنابراین  $x \in C$ ؛ یعنی در هر صورت از  $x \in A \cup B$  نتیجه می‌شود  $x \in C$ . بنابراین

$$A \cup B \subseteq C$$



قضیه زیر خواص مقدماتی اجتماع را بیان می‌کند.

**قضیه ۲:** برای هر سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  داریم:

$$A \cup \emptyset = A \quad (\text{الف})$$

$$A \cup A = A \quad (\text{ب})$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\text{پ})$$

برهان: بندهای الف و ب با توجه به تعریف به سادگی اثبات می‌شود. در اینجا فقط به اثبات قسمت پ می‌پردازیم.

چون  $B \subseteq B \cup C$  و  $B \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$  بنابراین

$$B \subseteq A \cup (B \cup C)$$

اما  $A \subseteq A \cup (B \cup C)$  بنابراین طبق قضیه ۱

$$A \cup B \subseteq A \cup (B \cup C) \quad (۱)$$

اما  $C \subseteq B \cup C$  و  $B \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$  بنابراین

$$C \subseteq A \cup (B \cup C) \quad (۲)$$

براساس قضیه ۱، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$$

با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد

$$A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$$

بنابراین

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

با توجه به برابری به دست آمده می‌توان پرانتزها را برداشت و نوشت

$$A \cup B \cup C$$



**قضیه ۳:** اگر  $A \subseteq B$  آنگاه  $A \cup B = B$ .

برهان: اگر  $A \subseteq B$  چون  $B \subseteq B$  طبق قضیه ۱ خواهیم داشت:

$$A \cup B \subseteq B$$

اما از طرف دیگر می دانیم

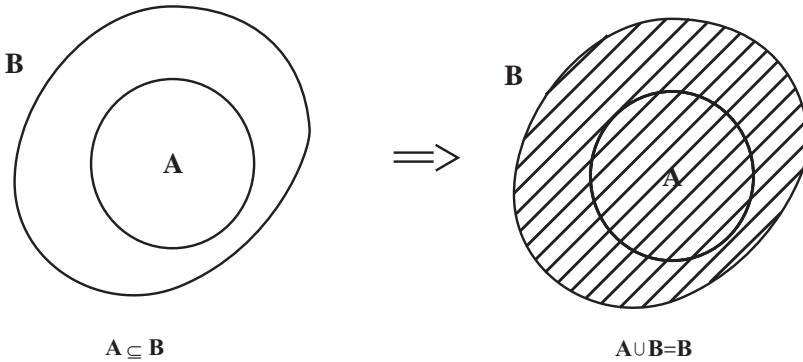
$$B \subseteq A \cup B$$

به این ترتیب از دو رابطه اخیر نتیجه می شود:

$$A \cup B = B$$



با استفاده از نمودار و نیز نتیجه این قضیه را می توان مشاهده کرد.



عکس قضیه ۳ نیز برقرار است.

**قضیه ۴ (عکس قضیه ۳):** برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، اگر  $A \cup B = B$  آنگاه  $A \subseteq B$ .

برهان: می دانیم  $A \subseteq A \cup B$  و طبق فرض قضیه داریم  $A \cup B = B$ . پس  $A \subseteq B$ .

### اشتراک دو مجموعه

در دو مجموعه  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{3, 4, 5\}$ ، عدد ۳ مشترک است، لذا مجموعه  $\{3\}$  اشتراک

دو مجموعه  $A$  و  $B$  خوانده می شود.

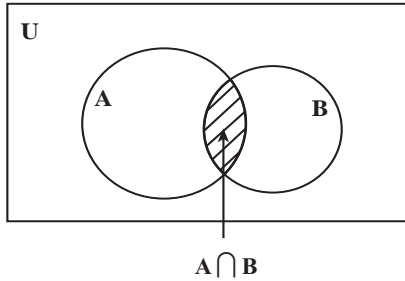
**اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$  مجموعه ای است که اعضایش به هر دو مجموعه**

**$A$  و  $B$  تعلق داشته باشد.**

اشتراک دو مجموعه A و B را با  $A \cap B$  نمایش می‌دهیم، پس

$$A \cap B = \{x | x \in B, x \in A\}$$

با استفاده از نمودار ون، اشتراک دو مجموعه را به صورت زیر می‌توان نشان داد.



تبصره: از تعریف اشتراک دو مجموعه نتیجه می‌شود که

$$A \cap B = B \cap A$$

همچنین چون عضوهای  $A \cap B$  هم در A و هم در B قرار دارند، بنابراین

$$A \cap B \subseteq A$$

$$A \cap B \subseteq B$$

اگر دو مجموعه غیرتهی A و B عضو مشترک نداشته باشند، آنگاه

$$A \cap B = \emptyset$$

در این حالت دو مجموعه A و B را جدا از هم یا مجزا می‌نامیم.

مشابه ویژگی‌هایی که برای اجتماع دو مجموعه برقرار بود، برای اشتراک هم برقرار است.

**قضیه ۵:** برای هر سه مجموعه A، B و C داریم:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \text{ (الف)}$$

$$A \cap B = A \text{ (ب)}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ (پ)}$$

قسمت‌های الف و ب با استفاده از تعریف اشتراک به راحتی اثبات شده و قسمت پ را بدون

اثبات می‌پذیریم.

**قضیه ۶:** برای هر دو مجموعه A و B، اگر  $A \subseteq B$  آنگاه  $A \cap B = A$ .

برهان: چون  $A \cap B \subseteq A$  بنابراین کافی است ثابت کنیم  $A \subseteq A \cap B$ .

اگر  $x \in A$  چون  $A \subseteq B$  پس  $x \in B$ . حال با توجه به اینکه  $x \in A$  و  $x \in B$  می توان نتیجه گرفت که  $A \cap B = A$  یعنی  $A \subseteq A \cap B$ . حال از دو رابطه  $A \cap B \subseteq A$  و  $A \subseteq A \cap B$  نتیجه می شود  $A \cap B = A$ . (عکس قضیه ۶ را به عنوان تمرین ثابت کنید.)

در پایان دو تساوی وجود دارند که اجتماع و اشتراک را درهم می آمیزند. ما این مطلب را در قضیه زیر بدون اثبات بیان می کنیم.

**قضیه ۷:** (قوانین پخش پذیری)

برای هر سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  داریم:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{الف)}$$

(پخش پذیری اجتماع نسبت به اشتراک)

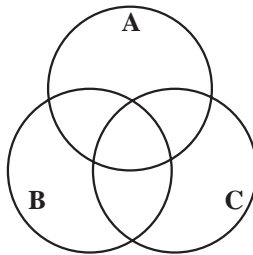
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{ب)}$$

(پخش پذیری اشتراک نسبت به اجتماع)

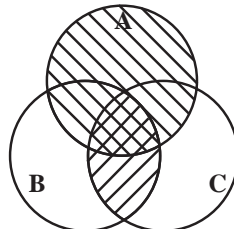
یک راه تصور تساوی هایی که در قضیه بالا مطرح شد، استفاده از نمودار ون است. برای تحقیق تساوی

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

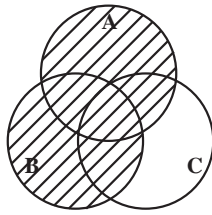
سه دایره دو به دو متقاطع برای نمایش مجموعه های  $A$ ،  $B$  و  $C$  در نظر می گیریم.



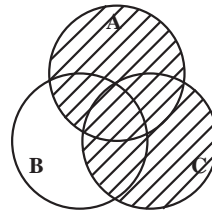
حال  $B \cap C$  را سایه می زنیم و سپس اجتماع آن ناحیه را با  $A$  مشخص می کنیم. به این ترتیب ناحیه سایه دار مجموعه  $A \cup (B \cap C)$  را نمایش می دهد.



از سوی دیگر اگر دو مجموعه  $A \cup B$  و  $A \cup C$  را روی شکل مشخص کنیم



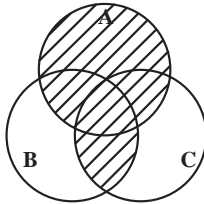
$A \cup B$



$A \cup C$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

اشتراک این دو ناحیه یعنی :



را به صورت مقابل خواهیم داشت.

همین طور که ملاحظه می کنید ناحیه های یکسانی به دست آمد.

### تفاضل دو مجموعه

فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند

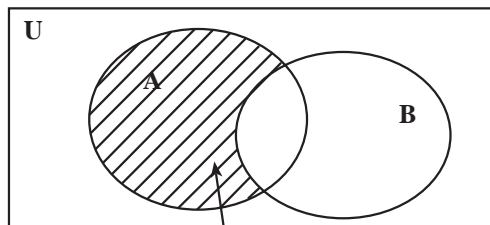
تفاضل مجموعه ای  $A - B$  عبارت است از مجموعه تمام اعضای  $A$  که

به  $B$  تعلق ندارند.

تفاضل دو مجموعه با استفاده از نماد ریاضی چنین بیان می شود

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

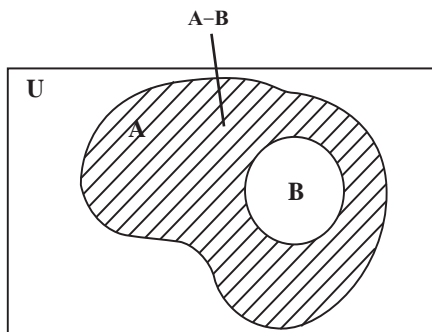
و با استفاده از نمودار ون، تفاضل دو مجموعه به صورت زیر نشان داده می شود.



$A - B$

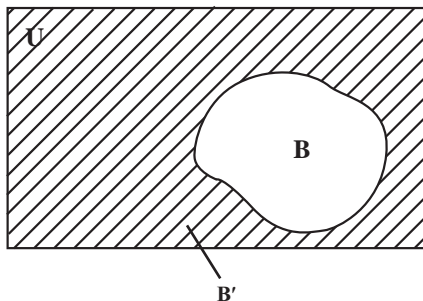


اگر B زیرمجموعه‌ای از A باشد، آنگاه  $A-B$  را متمم B نسبت به A می‌نامیم.



اگر A را برابر U (مجموعه جهانی) بگیریم آنگاه  $U-B$  را با  $B'$  نشان می‌دهیم و آن را متمم مجموعه B نسبت به مجموعه جهانی می‌نامیم. پس

$$U-B=B'$$



عمل متمم‌گیری از قوانین ساده‌ای پیروی می‌کند که برخی از آنها در قضیه زیر مطرح شده است.

**قضیه ۸:** اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه جهانی U باشند، آنگاه

الف)  $\emptyset'=U$

ب)  $U'=\emptyset$

پ)  $(A')'=A$

ت)  $A-B=A \cap B'$

ث) اگر  $A \subseteq B$  آنگاه  $B' \subseteq A'$

ج)  $A \cap A'=\emptyset$

چ)  $A \cup A'=U$

اثبات قضیه به کمک تعریف‌ها به سادگی انجام می‌شود.

به عنوان مثال اگر  $\mathbb{R}$  مجموعه اعداد حقیقی و  $Q$  مجموعه اعداد گویا باشد آنگاه  $\mathbb{R}-Q$  مجموعه اعداد گنگ است.

اعمالی که تا اینجا تعریف شدند از دو قانون دیگر به نام قوانین دمرگان تبعیت می کنند.

**قضیه ۹:** اگر  $A$  و  $B$  زیر مجموعه هایی از مجموعه جهانی  $U$  باشند، آنگاه:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (\text{الف})$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\text{ب})$$

برهان: (الف) فرض کنیم  $x \in (A \cup B)'$  آنگاه  $x \notin A \cup B$  پس  $x \notin A$  و  $x \notin B$  در نتیجه  $x \in A'$

و  $x \in B'$  بنابراین  $x \in A' \cap B'$ ، به این ترتیب می توان نتیجه گرفت

$$(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$$

و اگر مراحل استدلال بالا را وارونه کنیم خواهیم داشت

$$A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$$

از روابط به دست آمده می توان تساوی

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$



را نتیجه گرفت.

اثبات قسمت (ب) به عنوان تمرین به عهده دانش آموز است.

از قوانین دمرگان و بند (ب) قضیه ۸ نتیجه می شود که اگر متمم گیری را بدانیم آنگاه اجتماع یا

اشتراک را می توان به صورت زیر بر حسب دیگری بیان کرد.

$$A \cap B = (A' \cup B)'$$

$$A \cup B = (A' \cap B)'$$

گفتیم اگر برای دو مجموعه  $A$  و  $B$  داشته باشیم  $A \cap B = \emptyset$  آنگاه دو مجموعه را جدا از هم

می نامیم. حال با توجه به تعریف متمم یک مجموعه، می توان ویژگی زیر را برای دو مجموعه جدا از

هم  $A$  و  $B$  نتیجه گرفت.

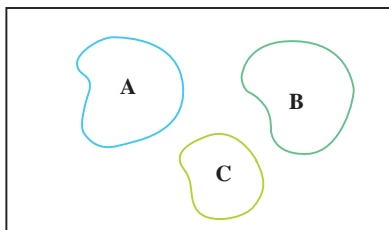
نتیجه: اگر  $A \cap B = \emptyset$  آنگاه  $A \subseteq B'$  و  $B \subseteq A'$ .

توجه کنید که مفهوم مجزا بودن سه مجموعه معنایی وسیع تر از

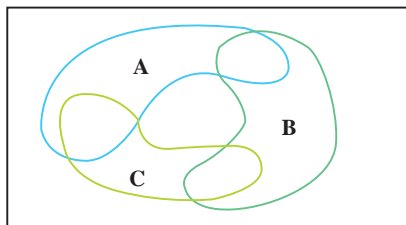
$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

دارد. در واقع سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  مجزا هستند اگر

$$A \cap B = \emptyset \text{ و } A \cap C = \emptyset \text{ و } B \cap C = \emptyset$$



A، B و C مجزا هستند



$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

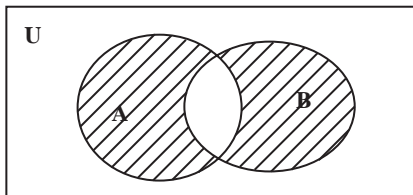
ولی A، B و C مجزا نیستند

## تفاضل متقارن

مجموعه تفاضل متقارن دو مجموعه A و B شامل اعضای است که دقیقاً به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق دارند. این مجموعه به طور نمادی با  $A \Delta B$  نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

تفاضل متقارن دو مجموعه را با استفاده از نمودار ون به صورت زیر می توان نمایش داد.



$$A \Delta B$$

همان طور که از روی نمودار ون مشاهده می شود

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

بنابراین دو مجموعه  $A \Delta B$  و  $A \cap B$  مجزا هستند. همچنین سه مجموعه  $A - B$ ،  $A \cap B$  و  $B - A$  نیز مجزا هستند.

این فصل را با اثبات دو اتحاد از طریق جبر مجموعه ها به پایان می رسانیم.

**مثال ۱:** می خواهیم ثابت کنیم

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

برای اثبات این تساوی به کمک قوانین مجموعه ها که جبر مجموعه ها خوانده می شود از یک طرف تساوی شروع می کنیم و به طرف دیگر تساوی می رسمیم (یا می توانیم دو طرف را ساده کنیم تا به یک

نتیجه برسیم). اکنون سمت راست رابطه بالا را در نظر می گیریم :

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' && \text{طبق ت از قوانین متمم} \\
 &= (A \cap B) \cap (A' \cup C') && \text{قانون دمرگان} \\
 & && \text{پخش پذیری اشتراک نسبت به اجتماع} \\
 &= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] \\
 & && \text{قوانین جابه جایی و شرکت پذیری} \\
 &= [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')] \\
 &= (\emptyset \cap B) \cup [A \cap (B \cap C')] && \text{طبق ج از قوانین متمم} \\
 &= \emptyset \cup [A \cap (B \cap C')] && \text{طبق الف از قضیه ۵} \\
 &= A \cap (B \cap C') && \text{طبق الف از قضیه ۲} \\
 &= A \cap (B - C) && \text{طبق ت از قوانین متمم}
 \end{aligned}$$

**مثال ۲:** می خواهیم ثابت کنیم

$$A \cap (A \cup B) = A$$

از طرف چپ تساوی شروع می کنیم

$$\begin{aligned}
 A \cap (A \cup B) &= (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) \\
 &= A \cup (\emptyset \cap B) \\
 &= A \cup \emptyset \\
 &= A
 \end{aligned}$$

## تمرین

۱- اگر  $A = \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$  و  $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$  مطلوب است  $A - B$ ،  $A \cap B$ ،  $A \cup B$  و  $B - A$ .

۲- اگر  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ،  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ،  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  و  $C = \{3, 4, 5, 6\}$  مطلوب است :

الف)  $A'$  (ب)  $(A \cap C)'$

پ)  $B - C$  (ت)  $(A \cup B)'$

۳- اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $\{m \in \mathbb{Z} \mid -n \leq m, 2^m \leq n\}$ ،  $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid -n \leq m, 2^m \leq n\}$ ،  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  را تعیین کنید

چه رابطه‌ای بین  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  و  $A_4$  وجود دارد؟

اشتراک  $A_1$  تا  $A_4$  چیست؟ ( $\cap_{i=1}^4 A_i = ?$ ) اجتماع  $A_1$  تا  $A_4$  چیست؟ ( $\cup_{i=1}^4 A_i = ?$ )

(توضیح:  $\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ )

۴- اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right)$ ، مطلوب است  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  سپس اجتماع و اشتراک  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  را مشخص کنید.

۵- اگر  $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$  و  $A_i = [-i, 10-i]$ ،  $A_1$  و  $A_2$  و  $\dots$  و  $A_{10}$  را حساب کنید. سپس

$\bigcup_{i=1}^{10} A_i$  و  $\bigcap_{i=1}^{10} A_i$  را مشخص کنید.

۶- با ذکر مثال  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  آیا حساب کنید.

۷- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید اگر  $A$  و  $B$  مجموعه باشند. داریم:

الف)  $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$

ب)  $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$

پ) اگر  $A \subset C$  و  $B \subset C$  آنگاه  $A \cup B \subset C$

ت) اگر  $A \subset B$  و  $A \subset C$  آنگاه  $A \subset B \cap C$

ث) اگر  $A \cup B = A \cap B$  آنگاه  $A = B$

ج) اگر  $A \subset B$  آنگاه  $B' \subset A'$

۸- برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  ثابت کنید:

الف)  $A \Delta B = B \Delta A$

ب)  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

پ) اگر  $A \cap B = \emptyset$  آنگاه  $A \Delta B = A \cup B$

ت)  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

۹- به وسیله نمودار ون نشان دهید که

$A' - B' = B - A$

۱۰- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند آنگاه داریم:

الف)  $(A-B) \cap B = \emptyset$

ب)  $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

$$A-B = A - (A \cap B) \quad (\text{پ})$$

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B \quad (\text{ت})$$

۱۱- در هریک از موارد زیر به جای S یکی از مجموعه‌های  $\mathbb{Z}$ ،  $\mathbb{N}$  یا  $\mathbb{R}$  را چنان جایگزین

کنید تا تساوی درستی حاصل شود.

$$\{x \in S \mid x^2 = 5\} = \emptyset \quad (\text{الف})$$

$$\{x \in S \mid -1 \leq x \leq 1\} = \{1\} \quad (\text{ب})$$

$$\{x \in S \mid 2 < x^2 < 5\} - \{x \in S \mid x > 0\} = \{-2\} \quad (\text{پ})$$

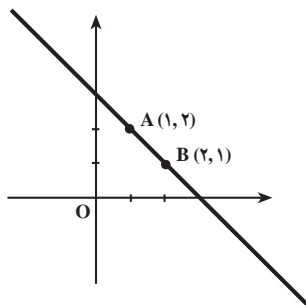
$$\{x \in S \mid 1 < x \leq 4\} = \{x \in S \mid x^2 = 4\} \cup \{3, 4\} \quad (\text{ت})$$

## ۲-۶- حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه

دیدید که با اجتماع و اشتراک و متمم‌گیری و تفاضل مجموعه‌های مفروض، مجموعه‌های جدیدی حاصل می‌شوند. حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه روش دیگری برای ساختن یک مجموعه جدید از مجموعه‌های مفروض است، ولی این کار با استفاده از مفهوم زوج مرتب انجام می‌شود. همان طور که خوانده‌اید اگر دستگاه محورهای مختصات در صفحه را در نظر بگیریم هر نقطه از صفحه با یک زوج مرتب منحصر به فردی مانند  $(x, y)$  مشخص می‌شود که  $x$  و  $y$  اعداد حقیقی‌اند و  $x$  را مختص یا مؤلفه اول و  $y$  را مختص یا مؤلفه دوم می‌نامیم. معمولاً در صفحه مختصات،  $x$  را طول و  $y$  را عرض نقطه مفروض می‌گویند. به شکل زیر که نمودار خط  $y = -x + 3$  است، توجه کنید. ملاحظه می‌کنید که نقاط  $A$  و  $B$  به ترتیب به مختصات  $(1, 2)$  و  $(2, 1)$  با اینکه متعلق به نمودار خط هستند ولی با هم متفاوت‌اند. بنابراین دو زوج  $(x, y)$  و  $(y, x)$  در حالت کلی با هم برابر نیستند.

پس دو زوج مرتب  $(a, b)$  و  $(c, d)$  زمانی مساویند که مؤلفه‌های اول آنها با هم و مؤلفه‌های دوم

آنها نیز با هم مساوی باشند.  $(b = d)$  و  $(c = a)$



**مثال ۱:**  $x$  و  $y$  را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب  $(x+y, 6)$  و  $(-5, xy)$  با هم مساوی باشند.

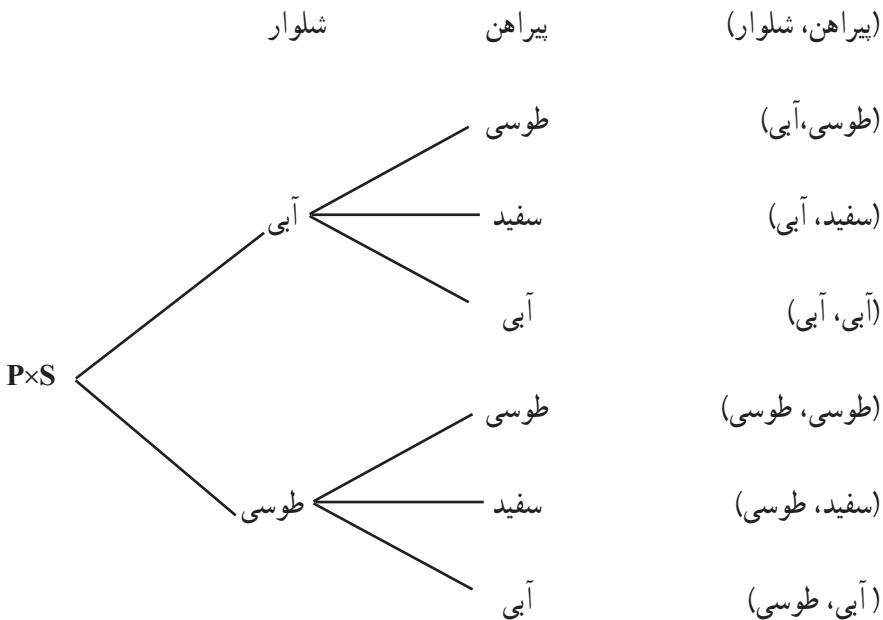
حل: طبق شرط تساوی دو زوج مرتب باید  $\begin{cases} x+y = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$  که پس از حل دستگاه  $x = -2$  و  $y = -3$  به دست می‌آید.

اکنون به مثال زیر توجه کنید.

اگر شخصی دو شلوار طوسی و آبی و سه پیراهن آبی، سفید و طوسی داشته باشد به شش طریق می‌تواند یک شلوار و یک پیراهن را انتخاب کند:

(طوسی، آبی) و (سفید، آبی) و (آبی، آبی) و (طوسی، آبی) و (طوسی، سفید) و (آبی، سفید). ملاحظه می‌کنید برای هر انتخاب، یک زوج مرتب تشکیل شده است. اگر  $P = \{\text{شلوار آبی، شلوار طوسی}\}$  و  $S = \{\text{پیراهن آبی، پیراهن سفید، پیراهن طوسی}\}$  آنگاه مجموعه همه زوج‌های مرتب تشکیل شده را به صورت  $P \times S$  نشان می‌دهیم یعنی

$P \times S = \{(\text{آبی، طوسی}), (\text{سفید، طوسی}), (\text{طوسی، طوسی}), (\text{آبی، آبی}), (\text{سفید، آبی}), (\text{طوسی، آبی})\}$   
و نمودار درختی آن به صورت زیر است:



به عبارتی اگر  $x$  را رنگ شلوار و  $y$  را رنگ پیراهن بنامیم

$$P \times S = \{(x,y) \mid x \in P, y \in S\}$$

$P \times S$  را حاصل ضرب دکارتی مجموعه  $P$  در مجموعه  $S$  می نامیم. دقت کنید که چون مؤلفه های اول زوج ها نماینده شلوار و مؤلفه های دوم زوج ها نماینده پیراهن است ترتیب آنها اهمیت دارد.

**تعریف:** حاصل ضرب دکارتی مجموعه  $A$  در مجموعه  $B$  که با  $A \times B$  نشان می دهیم، مجموعه همه زوج های مرتب  $(a, b)$  است که  $a$  عضوی از  $A$  و  $b$  عضوی از  $B$  است یعنی:

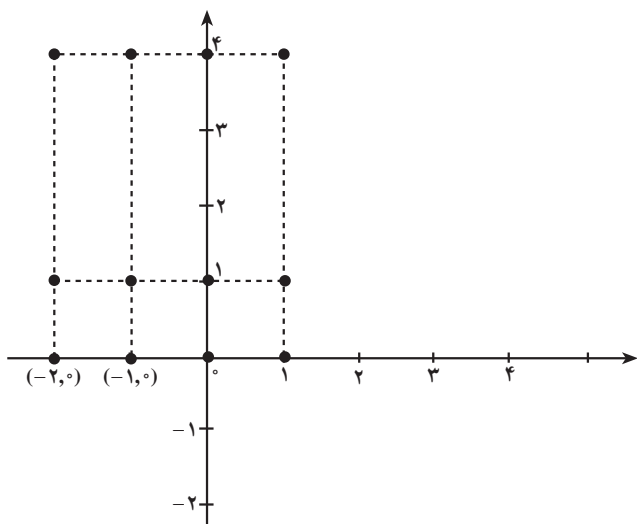
$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

اگر  $A=B$  باشد  $A \times A$  را با  $A^2$  نشان می دهیم و  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  یعنی  $\mathbb{R}^2$  را صفحه مختصات می نامیم.  
**مثال ۲:** اگر  $A = \{-1, 0, 1, -2\}$  و  $B = \{1, 4, 0\}$  را مشخص کنید و نمودار مختصاتی  $A \times B$  را رسم کنید.

**حل:** حاصل ضرب دکارتی  $A$  در  $B$  به صورت زیر است:

$$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 4), (-1, 0), (0, 1), (0, 4), (0, 0), (1, 1), (1, 4), (1, 0), (-2, 1), (-2, 4), (-2, 0)\}$$

برای رسم نمودار مختصاتی  $A \times B$  کافی است هر عضو آن را به عنوان مختصات یک نقطه در نظر بگیریم و در صفحه مختصات رسم کنیم. مانند شکل.



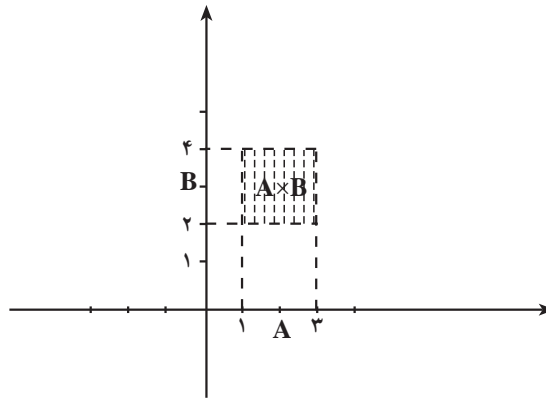


**مثال ۳:** اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$  نمودار  $A \times B$  را در صفحه

نمایش دهید.

$$A \times B = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ و } 2 < y < 4\}$$

حل:



### تمرین

۱-  $x$  و  $y$  را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب زیر با هم مساوی باشند.

الف)  $(0, 3)$  و  $((x-1)^2 + (y-1)^2, 3)$

ب)  $(13, xy)$  و  $(x^2 + y^2, 6)$

۲- اگر مجموعه  $A$  دارای  $m$  عضو و مجموعه  $B$  دارای  $n$  عضو باشد، مجموعه  $A \times B$  چند

عضو دارد؟ تعداد زیرمجموعه‌های  $A \times B$  چند تا است؟

۳- اگر  $A = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 0\}$  و  $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y^2 \leq 9\}$

الف)  $A \times B$  را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) تعداد اعضای مجموعه‌های  $(A \times B) \cup (B \times A)$  و  $(A \times B) \cap (B \times A)$  را بنویسید.

پ)  $A^2 - B^2$  چند زیرمجموعه دارد؟

۴- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیرتهی باشند در چه شرایطی  $A \times B = B \times A$ ؟ و در چه شرایطی

$(A \times B) \cap (B \times A)$  تهی است؟

۵- اگر شهر  $B$  بین دو شهر  $A$  و  $C$  باشد و برای رفتن از شهر  $A$  به شهر  $B$  سه راه و برای رفتن

از  $B$  به  $C$  چهار راه موجود باشد به چند طریق یک مسافر می‌تواند از شهر  $A$  به شهر  $C$  برود؟ به چند

طریق می‌تواند برگردد؟ آیا راه‌های رفت و برگشت یکی است؟

۶- در پرتاب دو سکه ۲ ریالی و ۵ ریالی با هم، چند زوج مرتب از پشت و روی سکه‌ها حاصل می‌شود؟

۷- هر یک از مجموعه‌های زیر را در صفحه مختصات نمایش دهید.

(الف)  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$

(ب)  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > y\}$

(پ)  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x+y| \leq 1\}$

۸- حاصل ضرب دکارتی هر یک از مجموعه‌های زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

(الف)  $B = (-2, 0]$  ،  $A = [-3, 2]$

(ب)  $B = (-\infty, -2)$  ،  $A = (3, \infty)$

(پ)  $B = [1, 2]$  ،  $A = [-2, 2]$

۹- روابط زیر را ثابت کنید.

(الف)  $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$  یا  $B = \emptyset$

(ب)  $C \neq \emptyset$  و  $A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$

## ۲-۲-۲- رابطه

یکی از مهم‌ترین مفاهیم در نظریه مجموعه‌ها، مفهوم رابطه است که نه تنها در تمام ریاضیات بلکه در خارج از ریاضیات نیز کاربرد دارد. عبارات «بزرگ‌تر است از»، «کوچک‌تر است از»، «عاد می‌کند»، «برابر است با» در اعداد و «زیرمجموعه‌ای است از»، «متعلق است به»، در مجموعه‌ها و « $x$  برادر  $y$  است»، « $x$  فرزند  $y$  است» در مجموعه انسان‌ها، هر یک مثالی از رابطه است. آنچه در تمام این مثال‌ها مشترک است این است که همه عبارات به دوشیء اشاره می‌کنند یعنی یک زوج مانند  $(x,y)$  و اینکه در هر حالت شیء اول با شیء دوم در رابطه هست یا نیست. مثلاً  $x > y$  که  $x$  و  $y$  اعداد حقیقی باشند، یا درست است یا نادرست (۲ > ۳ درست است ولی ۲ > ۳ نادرست).

بنابراین  $x > y$  کاملاً با  $y > x$  متفاوت است یعنی  $(x,y) \neq (y,x)$  (مفهوم زوج مرتب) پس هر رابطه‌ای می‌توان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب در نظر گرفت. از طرفی هر کدام از روابط در مجموعه مشخصی تعریف شده‌اند مانند مجموعه اعداد، مجموعه انسان‌ها و ... . حتماً دقت کرده‌اید که مثلاً  $x > y$  یک

گزاره‌نما در مجموعه اعداد است.

پس می‌توان رابطه « $x$  بزرگ‌تر است از  $y$ » در اعداد حقیقی را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت  $\{(x,y) \mid x > y\}$  در نظر گرفت.

**مثال ۱:** فرض کنیم مجموعه عام مجموعه انسان‌ها و گزاره‌نمای  $P(x,y)$  به معنی « $x$  پدر  $y$  است» باشد بنابراین رابطه پدری در مجموعه انسان‌ها چنین است:

$$R = \{(x,y) \mid x \text{ پدر } y \text{ است}\}$$

$$R = \{(x,y) \mid P(x,y)\}$$

بنابراین شرط اینکه حسن پدر تقی باشد آن است که زوج مرتب (تقی، حسن) متعلق به مجموعه رابطه پدری باشد.

پس می‌توان رابطه را به کمک مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تعریف کرد، یک راه ساختن زوج‌های مرتب به کمک ضرب دکارتی مجموعه‌هاست.

**تعریف:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند. هر زیرمجموعه از حاصل ضرب

دکارتی  $A \times B$  رابطه‌ای از  $A$  در  $B$  است. اگر رابطه را  $R$  نشان دهیم،  $R \subseteq A \times B$

جمله «از  $A$  در  $B$ » یعنی اولین مؤلفه‌های زوج‌های مرتب، عضوهای  $A$  و دومین مؤلفه‌های زوج‌های مرتب عضوهای  $B$  می‌باشند.

اگر  $A=B$ ، گوئیم  $R$  رابطه‌ای روی  $A$  است.

اگر  $a \in A$  و  $b \in B$  گوئیم  $a$  با  $b$  توسط  $R$  در رابطه هستند. هرگاه  $(a,b) \in R$ ، متداول تر است که

نماد  $aRb$  را به معنی  $(a,b) \in R$  به کار ببریم. در صورتی که  $(a,b) \notin R$  می‌نویسیم  $a \not R b$

**مثال ۲:** فرض کنیم،  $\mathbb{Z}$  مجموعه عام باشد. یکی از مهم‌ترین رابطه‌های ریاضی رابطه عادی کردن

در  $\mathbb{Z}$  است که با علامت « $|$ » نمایش داده می‌شود اگر بنویسیم:  $a|b$  یعنی عدد صحیحی مانند  $c$  هست که  $b=ac$ .

مثلاً  $۳|۶$ ،  $۲|۶$ ،  $۳|-۶$  که  $۳|۶$  معادل  $۳R۶$  یا معادل  $(۳,۶) \in R$  است پس  $a|b$  معادل  $aRb$

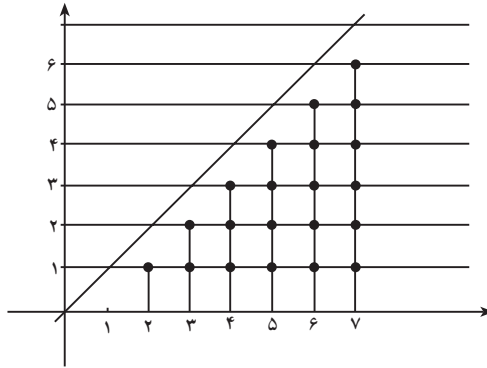
است که به صورت  $a|b \Leftrightarrow aRb$  یا  $\{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, a|b\}$  نشان می‌دهیم.

**مثال ۳:** فرض کنیم  $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$  رابطه « $>$ » را روی  $A$  در نظر می‌گیریم یعنی

$(a,b) \in R$  معادل است با  $a > b$ . برای نمایش این رابطه ابتدا حاصل ضرب دکارتی  $A \times A$  را به دست

می آوریم و روی مختصات دکارتی مشخص می کنیم.

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,7), (2,1), \dots, (2,7), \dots, (7,7)\}$$



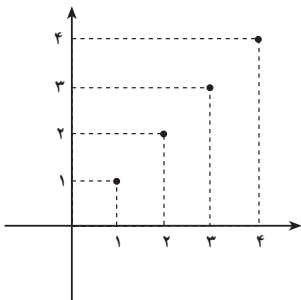
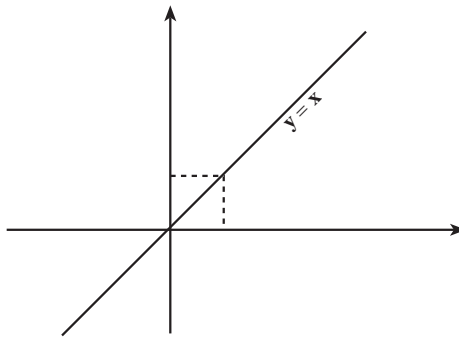
روی شکل، زیرمجموعه  $A \times A$  که با نقاط پررنگ مشخص شده اند، نمودار رابطه  $R$  می باشد

$$R = \{(2,1), (3,1), \dots, (7,1), (3,2), (4,2), (4,3), \dots, (7,6)\}$$

**مثال ۴:** فرض کنیم رابطه تساوی روی  $\mathbb{R}$  به صورت زیر تعریف شده باشد.

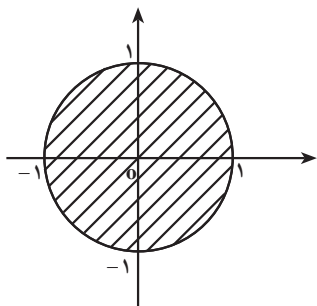
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y=x\}$$

نمودار مختصاتی این رابطه خط راست  $y=x$  است که نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.



**تذکره:** اگر  $A = \mathbb{N}$  رابطه تساوی فقط نقاطی از خط  $y=x$

می باشند که مؤلفه های صحیح مثبت داشته باشند مانند شکل.



**مثال ۵:** در صفحه  $xOy$  رابطه  $R$  را چنین تعریف می‌کنیم که  $x$  با  $y$  در رابطه است اگر  $(x,y)$  نقطه‌ای در داخل یا روی دایره واحد<sup>۱</sup> باشد یعنی  $x^2+y^2 \leq 1$  به عبارتی

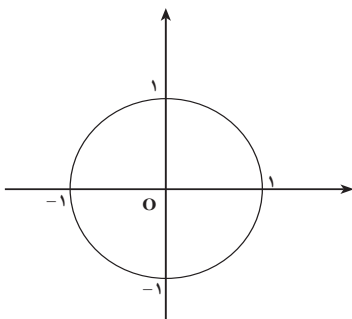
$$xRy \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 1$$

بنابراین نمودار این رابطه قرصی به شکل روبه‌رو است. با توجه به مثال‌ها، تاکنون متوجه شده‌اید که کلیه معادلات

و نامعادلات (نامساوی‌ها) دو متغیره‌ای که قبلاً خوانده‌اید می‌توانند به‌عنوان رابطه در نظر گرفته شوند.

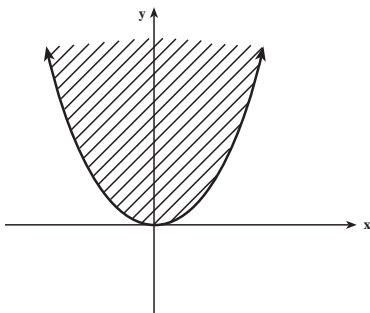
**مثال ۶:** نمودار رابطه  $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$  یک دایره به شعاع ۱ است که مرکز آن

$O(0,0)$  می‌باشد.<sup>۲</sup>



**مثال ۷:** نمودار رابطه  $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$  نقاط مرز و داخل سهمی  $y=x^2$  می‌باشد.

مانند شکل

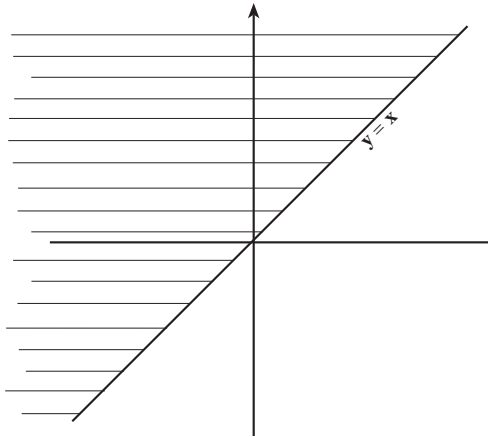


۱- دایره واحد، دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱.

۲- در حالت کلی معادله یک دایره به مرکز  $O(\alpha, \beta)$  و به شعاع  $r$  به صورت  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$  نوشته می‌شود (این مطلب سال بعد اثبات می‌شود).

**مثال ۸:** نمودار رابطه « $\leq$ » در اعداد حقیقی یعنی رابطه  $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$  سطح یک

نیم صفحه است. (ناحیه سایه دار در شکل زیر)



### تمرین

۱- رابطه  $R = \{(1, \pi), (\pi, 1), (2, 2), (\pi, 2), (2, \pi)\}$  در  $A = \{0, 1, \pi, 2, 4\}$  تعریف شده است. الف) تحقیق کنید کدام یک از موارد زیر درست است.

$$1R2, \quad \pi R1, \quad 1R\pi, \quad 2R0, \quad 2R1$$

ب) مجموعه اعضای  $A$  که با ۲ رابطه دارند را مشخص کنید.

۲- چند رابطه در مجموعه  $A$  از تمرین ۱ می توان نوشت؟

۳- آیا  $\emptyset$  یک رابطه است؟

۴- در مجموعه  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  رابطه  $R = \{(x,y) \mid x,y \in A, x|y\}$  تعریف شده است.  $R$

را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید، دامنه و برد  $R$  را تعیین کنید.

۵- اعضای رابطه  $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$  را در  $\mathbb{Z}$  به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب

مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۶- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  نمودار رابطه های زیر را رسم کنید.

الف)  $a, b \in A$   $aRb \Leftrightarrow a+b \leq 4$  (الف)

ب)  $aRb \Leftrightarrow$   $a(b+1) \leq 6$  (ب)

پ)  $aRb \Leftrightarrow$   $-1 \leq a + 5b \leq 10$  (پ)

ت)  $xRy \Leftrightarrow$   $x^2 + y^2 \leq 4$  (ت)

۷- رابطه  $f$  از  $\mathbb{R}$  در فاصله بسته  $[0, 1]$  به صورت  $y = \frac{1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow xy \Leftrightarrow y$  تعریف شده است، نمودار رابطه  $f$  را رسم کنید.

۸- رابطه‌های زیر، روی مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 6\}$  تعریف شده‌اند. اولاً هر رابطه را به صورت زوج‌های مرتب نشان دهید. ثانیاً نمودار رابطه‌ها را رسم کنید.

$$R_1 = \{(x, y) \mid x|y\} \quad , \quad R_2 = \{(x, y) \mid x < y\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid x = y\} \quad , \quad R_4 = \{(x, y) \mid x \neq y\}$$

$$R_5 = \{(x, y) \mid x^2 \leq y\} \quad , \quad R_6 = \{(x, y) \mid x + y \text{ فرد است}\}$$

۹- رابطه‌های زیر، روی مجموعه  $\mathbb{R}$  تعریف شده‌اند. نمودار آنها را رسم کنید.

$$R_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid |x| = |y|\}$$

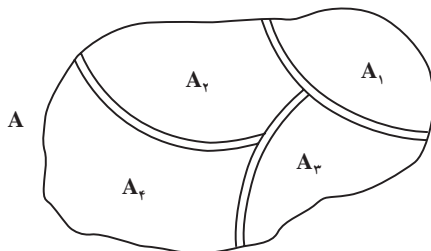
$$R_4 = \{(x, y) \mid |y| = -x\}$$

## ۸-۲- افراز یک مجموعه

مجموعه اعداد صحیح  $\mathbb{Z}$  را به صورت  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  در نظر می‌گیریم. این مجموعه را می‌توان به دو زیرمجموعه اعداد فرد و اعداد زوج تقسیم کرد. مسلماً  $\mathbb{Z}_O \cap \mathbb{Z}_E = \emptyset$  زیرا هیچ عددی نمی‌تواند هم زوج و هم فرد باشد و  $\mathbb{Z}_O \cup \mathbb{Z}_E = \mathbb{Z}$ ، این تقسیم را افراز  $\mathbb{Z}$  به دو مجموعه  $\mathbb{Z}_E$  و  $\mathbb{Z}_O$  می‌نامیم. همچنین هر مجموعه  $A$  با متمم خود یعنی  $A'$  یک افراز برای مجموعه  $U$  می‌باشند زیرا:

$$A \cap A' = \emptyset \quad \text{و} \quad A \cup A' = U$$

می‌توان این ایده را تعمیم داد. در شکل زیر، مجموعه  $A$  به چهار مجموعه  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  و  $A_4$  افراز شده است.



تعریف: فرض کنیم  $A$  یک مجموعه غیر تهی باشد گوییم  $A$  به  $n$  زیرمجموعه

$A_1$  و  $A_2$  و ... و  $A_n$  افراز شده است اگر:

(الف) برای هر  $1 \leq i \leq n$  ،  $A_i \neq \emptyset$

(ب) برای هر  $i \neq j$   $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $1 \leq j \leq n$ )

(پ)  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$

**مثال:** اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  آنگاه  $A$  دارای ۵ افراز به صورت زیر است:

(۱)  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

(۲)  $\{1\}, \{2, 3\}$

(۳)  $\{2\}, \{1, 3\}$

(۴)  $\{3\}, \{1, 2\}$

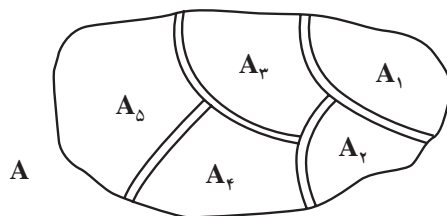
(۵)  $\{1, 2, 3\}$

## ۹-۲- رابطه هم‌ارزی

**مثال:** فرض کنیم که مجموعه  $A$  به قطعات مجزای از یکدیگر مانند شکل، افراز شده باشد

می‌توانیم رابطه « $\sim$ » را چنین تعریف کنیم.

$x \sim y$  هر دو در یک قطعه هستند  $\Leftrightarrow$



برای داشتن شهودی بهتر فرض کنید  $A$  نقشه یک کشور باشد و زیرمجموعه‌های  $A_1$  و  $A_2$  و

$A_3$  و  $A_4$  و  $A_5$  استان‌های این کشور باشند. رابطه‌ای که بین هر دو شهروند این کشور برقرار است

رابطه هم‌استانی بودن است. یعنی

$x \sim y$  در یک استان هستند  $\Leftrightarrow$

بنابراین اگر  $x$  متعلق به استان  $A_1$  است و  $y$  متعلق به استان  $A_2$ ،  $x$  و  $y$  رابطه‌ای باهم ندارند.



این رابطه دارای این خواص است که اگر  $x$  و  $y$  و  $z$  افرادی از این کشور باشند :

۱-  $x$  با خودش هم استان است.

۲- اگر  $x$  با  $y$  هم استان باشد  $y$  نیز با  $x$  هم استان است.

۳- اگر  $x$  با  $y$  و  $y$  با  $z$  هم استان باشند،  $x$  نیز با  $z$  هم استان است.

برعکس می‌توانیم ناحیه‌ها را با رابطه « $\sim$ » بازسازی کنیم. ناحیه‌ای که  $x$  متعلق به آن است

(استانی که  $x$  در آن زندگی می‌کند) با  $E_x$  نمایش می‌دهیم. که عبارت است از :

$$E_x = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

یعنی استانی که  $x$  متعلق به آن است مجموعه تمام شهروندان کشور  $A$  است که با  $x$  در یک استان زندگی می‌کنند. یعنی مجموعه  $E_x$  یکی از استان‌های کشور است یا یکی از ناحیه‌های مورد نظر است.

بنابراین اگر  $x \in A_r$  باشد آنگاه  $E_x = A_r$  و اگر  $x \in A_h$  آنگاه  $E_x = A_h$  پس دقیقاً رابطه هم‌استانی بودن، کشور را به استان‌ها تقسیم می‌کند. به طور کلی می‌توان گفت: رابطه‌ای که دارای خواص (۱) و (۲) و (۳) باشد یک رابطه هم‌ارزی است.

**تعریف: رابطه‌ای چون « $\sim$ » روی مجموعه  $A$  یک رابطه هم‌ارزی است اگر**

**به ازای هر  $x$  و  $y$  و  $z$  از  $A$  سه خاصیت زیر برقرار باشد:**

**الف)  $x \sim x$  یعنی هر عضو با خودش رابطه داشته باشد. (بازتابی یا انعکاسی)**

**ب) اگر  $x \sim y$  آنگاه  $y \sim x$  (تقارنی)**

**پ) اگر  $x \sim y$  و  $y \sim z$  آنگاه  $x \sim z$  (تعدی یا تراگذری)**

**مثال:** رابطه توازی خطوط در صفحه و رابطه هم‌نهستی دو مثلث رابطه‌های هم‌ارزی روی

صفحه هستند.

ملاحظه کردید که هرگاه مجموعه  $A$  را به قطعات مجزا تقسیم کنیم، رابطه  $x$  هم‌استان است با

$y$  یک رابطه هم‌ارزی است و برعکس. بنابراین

**هر رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه، آن مجموعه را به زیرمجموعه‌های**

**مجزا که هر یک از آنها دسته یا کلاس هم‌ارزی نامیده می‌شود تقسیم می‌کند.**

دسته هم‌ارزی  $a$  را با علامت  $[a]$  نشان می‌دهیم.  $a$  را نماینده دسته می‌گوییم و به صورت

$$[a] = \{x \mid xRa\}$$

**مثال:** سطح مربع واحد  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  را در نظر بگیرید. هر دو نقطه از این مربع را با رابطه

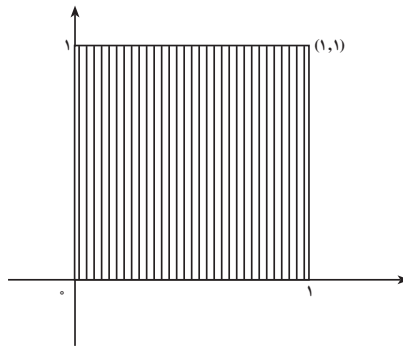
اینکه مؤلفه‌های اول آنها با هم برابرند تعریف می‌کنیم یعنی:

$$(x, y) R (a, b) \Leftrightarrow x = a$$

این رابطه یک رابطه هم‌ارزی روی  $D$  است. و مجموعه  $D$  (صفحه  $D$ ) را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند، دسته‌های هم‌ارزی خطوط عمود بر محور  $x$  ها می‌باشند زیرا مثلاً دسته  $(0, 0)$  عبارت است از:

$$\begin{aligned} [(0, 0)] &= \{(x, y) \mid (x, y) R (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \mid x = 0\} \end{aligned}$$

که نمودار آن خط  $x = 0$  است.



## تمرین

۱- رابطه  $R$  در  $\mathbb{Z}$  به صورت

$$x R y \Leftrightarrow 3 \mid x - y$$

تعریف شده است. اولاً ثابت کنید  $R$  یک رابطه هم‌ارزی است. ثانیاً رابطه  $R$  مجموعه  $\mathbb{Z}$  را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند؛ این کلاس‌های هم‌ارزی را مشخص کنید.

۲- ثابت کنید رابطه تشابه دو مثلث، یک رابطه هم‌ارزی است.

۳- از رابطه‌های زیر که روی  $\mathbb{R}^2$  تعریف شده‌اند کدام یک هم‌ارزی است؟

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \quad \text{(الف)}$$

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow (a - c)(b - d) = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ab = cd \quad \text{(پ)}$$

## احتمال و پدیده‌های تصادفی

هنگامی که علم احتمالات هنوز دوران طفولیت خود را سپری می‌کرد، لاپلاس ریاضی‌دان معروف فرانسوی— مشهور به نیوتن فرانسه— گفت: «علم احتمالات که برای بررسی بازی‌های شانس مطرح شده، بایستی به مهم‌ترین هدف دانش بشری تبدیل گردد... در بخش اعظم زندگی، مهم‌ترین سؤالاتی که مطرح می‌شوند در واقع فقط مسائل احتمالات هستند» [راس<sup>۱</sup>، ۱۹۷۶، ص ۷].

هر چند بیان فوق ممکن است اغراق‌آمیز به نظر برسد، ولی خود حقیقتی است زیرا همان‌طور که ریاضی‌دان برجسته قرن بیستم مارک کتز<sup>۲</sup> می‌گوید: «نظریه احتمالات، سنگ بنای تمام علوم شمرده می‌شود.» [به نقل از جیکوب<sup>۳</sup>، ۱۹۸۲، ص ۴۲۴]. تقریباً تمام شاخه‌های دانش بشری از فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، مهندسی و پزشکی گرفته تا قضاوت، جامعه‌شناسی، اقتصاد و ... احتمالات را به عنوان یکی از ابزارهای اساسی خود در نظر می‌گیرند. چون بررسی درستی یک مطلب در مسائل مختلف همیشه امکان‌پذیر نیست در نتیجه برای انسان متفکر و جستجوگر این عصر، احتمال درستی یک مطلب بیش از درستی خود مطلب اهمیت می‌یابد. تاریخچه علم احتمالات به قرن شانزدهم میلادی باز می‌گردد، یعنی زمانی که ریاضی‌دان و پزشک ایتالیایی کاردانو<sup>۴</sup> (۱۵۷۶–۱۵۰۱) به بررسی معارف ریاضی زمان خود که شامل تحلیل سازمان یافته مسئله بازی‌های مبتنی بر شانس بود پرداخت. در سال ۱۶۵۴، پاسکال ریاضی‌دان معروف فرانسوی به مسئله شانس و بازی‌ها علاقه‌مند

۱ – Ross

۲ – Mark Katz

۳ – Jacob

۴ – Cardano

شد و نتیجه مطالعات خود را با ریاضی‌دان مشهور دیگر فرما<sup>۱</sup> (۱۶۶۵-۱۶۰۱) در میان گذاشت. در نتیجه مطالعه احتمالات ریاضی با بررسی مسائل مربوط به بازی‌های شانسی متولد شد. علی‌رغم این تولد مبتنی بر تفنن، اکنون پس از گذشت چند سده احتمالات به یک رشته کاملاً ضروری و مورد نیاز تبدیل شده است. نظریه احتمالات به علم عدم قطعیت نیز مشهور است. منظور از عدم قطعیت این است که در حیطه احتمالات از قوانین پیش‌بینی‌کننده که به طور قطع وقوع پدیده‌هایی را در کنترل داشته باشد سخن نمی‌گوییم. به عنوان مثال در پرتاب سکه نمی‌توانیم به طور قطع بگوییم رو یا پشت سکه نمایان خواهد شد. با این حال اگر این پرتاب را بارها تکرار کنیم، نسبت دفعات مشاهده پشت و یا روی سکه به کل دفعات آزمایش در دراز مدت تقریباً قابل پیش‌بینی است. پرداختن به این نسبت‌ها در حیطه نظریه احتمال است.

### ۳-۱- پدیده‌های تصادفی

نیوتن با مشاهده افتادن سیب از درخت متوجه قانون جاذبه شد. زیرا تکرار این پدیده و قطعی بودن نتیجه، این باور را در او تقویت کرد که حتماً باید جاذبه‌ای وجود داشته باشد تا بتوان افتادن سیب را به طور قطع توجیه کرد. همچنین اگر سنگ ریزه‌ای را از یک بلندی رها کنیم بالاخره پس از مدتی به زمین اصابت خواهد کرد. مثال‌هایی از قبیل مشاهده افتادن سیب از درخت و یا آزمایش رها کردن سنگ ریزه نمونه‌هایی از پدیده‌های قطعی هستند.

### با فرض یکسان بودن شرایط، در پدیده‌های قطعی، نتیجه آزمایش و یا مشاهده را قبل از وقوع می‌توان به طور قطع مشخص کرد.

پدیده‌های دیگری نیز وجود دارند که مشاهده تکراری آنها تحت شرایط مشخص همیشه به نتیجه یکسانی ختم نمی‌شود. یک مثال آشنا در این مورد پرتاب سکه است. اگر یک سکه را ۱۰۰ بار پرتاب کنیم افتادن سکه به رو یا به پشت از قبل قابل پیش‌بینی نیست<sup>۲</sup>، یعنی نمی‌توانیم بگوییم مثلاً در پنجاهمین بار، سکه به رو می‌افتد یا به پشت. این نوع پدیده‌ها که آنها را تصادفی می‌نامیم در این فصل مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

۱ - Fermat

۲ - در نشست یک سکه طرفی که عدد نوشته شده است را پشت و طرف دیگر را رو نامیده و آنها را به ترتیب با «پ» و «ر» نشان

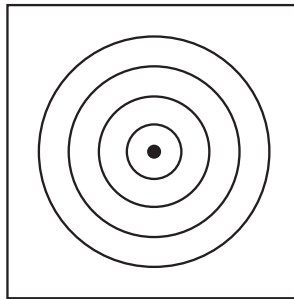
طیف وسیعی از پدیده‌هایی که در جهان اطراف ما وجود دارند دارای ماهیت تصادفی هستند. شما نیز در محیط آموزشی خود ناظر پدیده‌های بی‌شماری با ماهیت تصادفی هستید. به عنوان مثال اتومبیل‌هایی که در ساعت‌های مشخصی از مقابل مدرسه شما می‌گذرند، میانگین طول عمر دانش‌آموزان هر کلاس، کشیدن قرعه از بین کارت‌هایی که نام دانش‌آموزان کلاس بر آنها نوشته شده است، تعیین موقعیت مکانی یک دانش‌آموز خاص در زمین فوتبال، تعداد افراد چپ دست در هر کلاس، تعداد دانش‌آموزانی که در هر زنگ تفریح زمین می‌خورند، تعداد نمرات  $20^\circ$  در درس فیزیک در هر سال و میانگین قد دانش‌آموزان هر کلاس نمونه‌هایی از پدیده‌های تصادفی هستند.

ملاحظه می‌کنید که وقوع بعضی از پدیده‌ها مانند تعداد اتومبیل‌هایی که در ساعت مشخصی از مقابل مدرسه می‌گذرند را از طریق مشاهده و وقوع بعضی دیگر مانند پرتاب سکه و یا کشیدن قرعه نام دانش‌آموزان را از طریق آزمایش نظاره می‌کنیم.

## با فرض یکسان بودن شرایط، در پدیده‌های تصادفی، نتیجه آزمایش و یا مشاهده را قبل از وقوع نمی‌توان به طور قطع مشخص کرد.

برای بهتر آشنا شدن با پدیده‌های تصادفی، به مثال زیر توجه کنید.

**مثال ۱:** بر روی صفحه‌ای تعدادی دایره متحدالمرکز مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم:



سطح دایره‌های متحدالمرکز درون صفحه مذکور را به عنوان هدف‌های تیراندازی مورد استفاده قرار می‌دهیم به طوری که هر قدر تیر به دایره کوچک‌تر نزدیک‌تر باشد، امتیاز بیشتری نصیب تیرانداز می‌شود. همچنین سطح بزرگ‌ترین دایره را صفحه هدف می‌نامیم. در چنین شرایطی، اگر فرض کنیم تیری که به سمت هدف پرتاب شده است حتماً به صفحه هدف برخورد خواهد کرد، با این حال قبل از اصابت تیر به هدف، تشخیص اینکه تیر به کدام دایره برخورد خواهد کرد ممکن نیست.

- ۱- چند نمونه از پدیده‌های قطعی که در درس‌های فیزیک و شیمی با آنها آشنا شده‌اید را بنویسید.
- ۲- چند نمونه از پدیده‌های تصادفی محیط اطرافتان را بازگو کنید.

### ۲-۳- فضاهای نمونه‌ای

در بررسی شانس وقوع آزمایش‌های تصادفی، همانند بسیاری دیگر از مفاهیم ریاضی ناگزیر از مدل‌سازی هستیم. انجام این کار در قالب سه مرحله زیر صورت می‌گیرد:

- ۱- تعیین فضای نمونه‌ای مناسب؛
- ۲- مشخص کردن پیشامد مورد بررسی؛
- ۳- اندازه‌گیری شانس وقوع پیشامد در فضای نمونه‌ای مربوطه (احتمال).  
چنان‌که مشاهده می‌شود، نخستین مرحله تعیین فضای نمونه‌ای مناسب است (مرحله دوم و مرحله سوم در فصل آینده مورد بحث قرار خواهند گرفت). بدین منظور نخست به تعریف مفهوم فضای نمونه‌ای در آزمایش‌های تصادفی می‌پردازیم.

**مثال ۲:** یک سکه به هوا پرتاب می‌شود. این سکه در فرود آمدن بر روی زمین یا رو «ر» می‌آید و یا پشت «پ». بنابراین مجموعه تمام نتایج (برآمدهای) ممکن آزمایش پرتاب سکه، مجموعه دو عضوی  $\{ر, پ\}$  است، که فضای نمونه‌ای ما را در این مثال تشکیل می‌دهد.

**مثال ۳:** یک تاس<sup>۱</sup> ریخته می‌شود. بعد از نشستن این تاس یکی از اعداد ۱ تا ۶ به دست خواهد آمد. بنابراین، تمام برآمدهای ممکن این آزمایش یعنی فضای نمونه‌ای این مثال را می‌توان به صورت مجموعه ۶ عضوی

$$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

نشان داد.

**مجموعه تمام نتایج (برآمدهای) ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده نامیده و معمولاً آن را با  $S$  نشان می‌دهیم.**

۱- تاس، مکعبی است که روی وجوه آن به ترتیب اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است.

در مثال‌های فوق فضاهای نمونه‌ای به ترتیب  $S_1 = \{p, r\}$  و  $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  هستند که مجموعه‌هایی متناهی‌اند. به چنین فضاهایی، فضای نمونه‌ای گسسته گفته می‌شود. حال به مثال‌های زیر توجه کنید و ببینید آیا فرقی بین فضاهای نمونه‌ای مثال‌های فوق با این مثال‌ها وجود دارد؟ درباره آنها فکر کنید.

**مثال ۴:** می‌خواهیم طول عمر یک ترانزیستور را برحسب ساعت اندازه‌گیری کنیم. با توجه به اینکه طول عمر ترانزیستور می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت و در صورت خراب بودن صفر باشد لذا برآمدهای ممکن اعداد حقیقی مثبت یا صفر خواهد بود. پس این فضا را می‌توان به صورت

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

که در آن  $x$  نشان‌دهنده طول عمر ترانزیستور است نوشت.

چنان‌که مشاهده می‌شود، فضای نمونه‌ای مربوط به این مسئله برخلاف مثال‌های قبلی نامتناهی است زیرا تمام اعداد حقیقی مثبت را شامل می‌شود.

**مثال ۵:** تیراندازی به هدف را در نظر بگیرید. محل برخورد تیر به دایره‌های متحدالمرکز یعنی هدف ممکن است نقطه‌ای از میان تمام نقاط واقع بر سطح دایره‌ها باشد. در نتیجه فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی همان صفحه هدف یعنی سطح بزرگ‌ترین دایره است که می‌توان آن را به صورت صفحه‌ای دایره‌ای شکل به مرکز مبدأ مختصات و شعاع بزرگ‌ترین دایره واقع بر صفحه هدف تصور کرد. با توجه به معادله دایره، فضای نمونه‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

که در آن  $x$  و  $y$  مختصات نقاط واقع بر صفحه  $r$  شعاع دایره مذکور می‌باشند (شکل زیر).

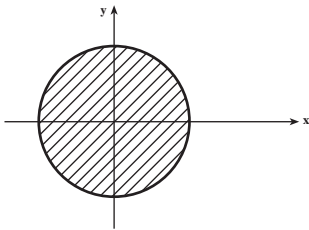
فضاهای نمونه‌ای مثال‌های ۴ و ۵ از ویژگی خاصی برخوردارند. فضای نمونه‌ای مثال

۴ یعنی  $S = \{x : 0 \leq x < \infty\}$  بازه‌ای از اعداد حقیقی و فضای نمونه‌ای مثال ۵ یعنی:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

قسمت هاشور خورده می‌باشد. این نوع فضاهای

نمونه‌ای را پیوسته می‌نامیم.



۱ - فضاهای گسسته به مجموعه‌های متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر (countable) گفته می‌شود. با این حال در این کتاب فضای

نمونه‌ای گسسته فقط به فضای نمونه‌ای متناهی اطلاق می‌شود.

فضای نمونه‌ای پیوسته یک مجموعه نامتناهی به صورت بازه‌هایی از اعداد

حقیقی و یا اشکال و احجام هندسی می‌باشد.

فضاهای نمونه‌ای اندازه‌گیری‌های فیزیکی از قبیل دما، شتاب و فشار از نوع فضاهای نمونه‌ای

پیوسته هستند.

## تمرین

- ۱- یک سکه را دوبار به هوا می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش چیست؟
- ۲- یک تاس و یک سکه را با هم به هوا می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

## ۳-۳- پیشامدهای تصادفی

در ریختن تاس، فضای نمونه‌ای مجموعه  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  است. اگر به عنوان مثال در این آزمایش، رو شدن یک عدد فرد مورد نظر باشد، مجموعه  $A = \{1, 3, 5\}$  که تمام نتیجه‌های مطلوب در این آزمایش را نشان می‌دهد، یک پیشامد تصادفی فضای نمونه‌ای مورد بحث نامیده می‌شود. در حقیقت، هر زیرمجموعه دیگری از فضای نمونه‌ای  $S$  نیز دارای همین خاصیت می‌باشد. یعنی، هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای گسسته یک پیشامد تصادفی است<sup>۱</sup>. در این کتاب هر زیرمجموعه فضای نمونه‌ای را یک پیشامد در نظر می‌گیریم. پیشامد  $A$  زمانی رخ می‌دهد که برآمد آزمایش عضوی از آن باشد.

هر زیرمجموعه فضای نمونه‌ای را یک پیشامد می‌نامیم.

**مثال ۶:** در فضای نمونه‌ای ریختن تاس، پیشامد  $A$  را رو شدن عددی می‌گیریم که بر ۳

بخش پذیر باشد، پس  $A = \{3, 6\}$ .

**مثال ۷:** یک تاس قرمز و یک تاس سبز را با هم می‌ریزیم. اولاً فضای نمونه‌ای این آزمایش

را پیدا کنید، ثانیاً اگر پیشامد  $B$  ظاهر شدن دو عدد با مجموع ۷ بر روی تاس‌ها باشد، این پیشامد را توصیف نمایید.

۱- با وجود این، حالت‌های پیچیده‌ای در فضاهای نمونه‌ای پیوسته وجود دارند که پیشامد محسوب نمی‌شوند.



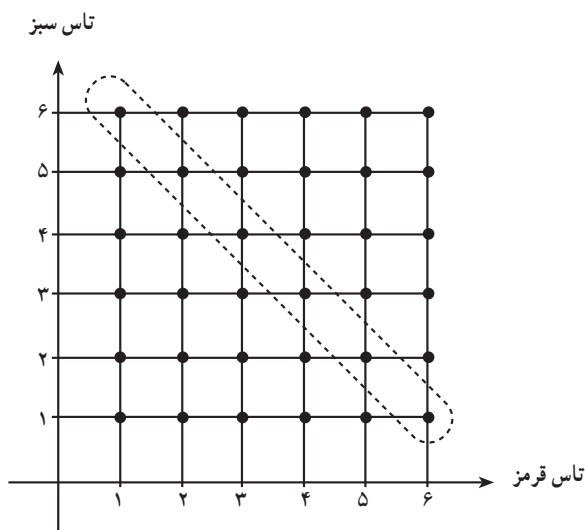
حل : فضای نمونه‌ای این آزمایش حاصل ضرب دکارتی  $S$  (فضای نمونه‌ای ریختن یک تاس) در خودش است، یعنی :

$$S_1 = S \times S = \{(x,y) \mid x = 1,2,3,\dots,6, y = 1,2,3,\dots,6\}$$

جواب قسمت دوم مسئله، مجموعه  $B$  می‌باشد که این مجموعه، شامل همه حالت‌هایی است که مجموع دو عدد رو شده ۷ است :

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

در شکل، پیشامد مورد بحث عبارت است از مجموعه نقاط داخل نقطه چین.



**مثال ۸:** یک سکه دو بار به هوا پرتاب می‌شود. فضای نمونه‌ای مربوط به این دو پرتاب را توصیف کرده و پیشامد تصادفی ظاهر شدن رو (ر) در هر دو پرتاب یا پشت (پ) در هر دو پرتاب را مشخص کنید.  
 حل : فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه  $S_1 = \{ر, پ\}$  می‌باشد، پس فضای نمونه‌ای دو بار پرتاب برابر حاصل ضرب دکارتی مجموعه  $S_1$  در خودش است.  
 یعنی :

	بار دوم	
بار اول	ر	پ
ر	(ر, ر)	(ر, پ)
پ	(پ, ر)	(پ, پ)

بنابراین فضای نمونه‌ای عبارت است از :

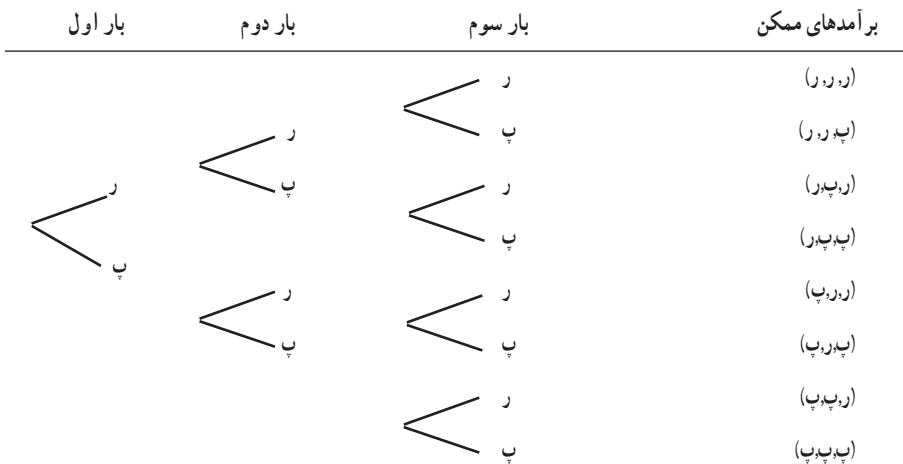
$$S = S_1 \times S_1 = \{(ر,ر), (ر,پ), (پ,ر), (پ,پ)\}$$

در این آزمایش، پیشامد تصادفی A یعنی ظاهر شدن (ر) در هر دو بار و یا (پ) در هر دو بار،

چنین نمایش داده می‌شود :

$$A = \{(ر,ر), (پ,پ)\}$$

**مثال ۹:** یک سکه سه بار پرتاب می‌شود. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کرده و پیشامد A که در آن هر سه بار پشت بیاید و پیشامد B که در آن فقط یک بار پشت بیاید را معین کنید. حل : در این آزمایش، عضوهای فضای نمونه‌ای به صورت زیر مشخص می‌شوند :



پس فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی به قرار زیر است :

$$S = \{(ر,ر,ر), (پ,ر,ر), (ر,پ,ر), (پ,پ,ر), (ر,ر,پ), (پ,ر,پ), (ر,پ,پ), (پ,پ,پ)\}$$

در این فضای نمونه‌ای، پیشامدهای A و B عبارت‌اند از :

$$A = \{(پ,پ,پ)\}; B = \{(ر,ر,ر), (پ,ر,پ), (ر,پ,پ)\}$$

بایستی توجه شود سه مرحله‌ای که برای مدل‌سازی آزمایش‌های تصادفی شرح داده شد، کلیت ندارد؛ یعنی لازم نیست که همیشه اول فضای نمونه‌ای مناسب را پیدا کرد و بعد به مشخص کردن پیشامد مورد بررسی پرداخت؛ زیرا اولاً فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی یگانه نیست و بستگی به

مدلی دارد که ما از آن پدیده می‌سازیم. ثانیاً خیلی وقت‌ها به دلیل اینکه به دنبال جواب دادن به سؤال مشخصی هستیم و عموماً این سؤالات را با تشکیل پیشامد مطلوب پاسخ می‌گوییم؛ لذا ممکن است مدل‌سازی فضای نمونه‌ای ما متأثر از پیشامد تصادفی باشد. مثلاً آزمایش تصادفی مثال ۹ را می‌توان به صورت دیگری مدل‌سازی کرد.

**مثال ۱۰:** اگر در مثال ۹ تعداد «رو» آمدن‌ها مورد نظر باشد می‌توان فضای نمونه‌ای را  $S = \{0, 1, 2, 3\}$  در نظر گرفت که  $\circ$  نمایش دهنده برآمدی است که در آن هیچ «رو» نیامده باشد و به همین ترتیب ۲ نمایش دهنده برآمدی است که در آن ۲ رو آمده است و غیره. به این ترتیب پیشامد A مثال ۹ مجموعه تک‌عضوی  $\{\circ\}$  و پیشامد B در مثال ۹ مجموعه تک‌عضوی  $\{2\}$  است.

حال به چند مثال از پیشامدهای تصادفی پیوسته توجه می‌کنیم.

**مثال ۱۱:** فضای نمونه‌ای مربوط به طول عمر یک لامپ روشنایی را بیان کرده و پیشامد A برای از کار افتادن لامپ قبل از ۶۰ ساعت را مشخص کنید.

**حل:** اگر t طول عمر مفید لامپ بر حسب ساعت باشد، فضای نمونه‌ای را می‌توان به صورت  $S = \{t \mid t \geq \circ\}$  نوشت.  $A = \{t \mid \circ \leq t < 60\}$  پیشامدی است که سوختن لامپ قبل از ساعت شصت استفاده را نشان می‌دهد.

**مثال ۱۲:** در مثال تیراندازی به هدف دایره‌ای شکل، شعاع بزرگترین دایره هدف را ۴ و شعاع سایر دایره‌ها را به ترتیب ۳، ۲ و ۱ سانتی‌متر می‌گیریم.

A، B و C را به ترتیب پیشامدهایی در نظر می‌گیریم که عبارت باشند از اصابت تیر به دایره‌های دارای شعاع ۱، ۲ و ۳ سانتی‌متر. فضای نمونه‌ای و A، B و C را مشخص کنید.

$$S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\} \quad \text{حل:}$$

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

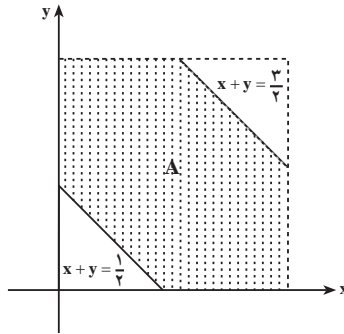
**مثال ۱۳:** فرض کنیم دو عدد حقیقی بین  $\circ$  و ۱ به تصادف انتخاب شوند. در این صورت فضای نمونه‌ای چنین خواهد بود:

$$S = \{(x,y) \mid \circ < x < 1, \circ < y < 1\}$$

S در واقع مجموعه نقاط داخل مربعی به ضلع یک است. اگر پیشامد مورد نظر انتخاب دو عدد

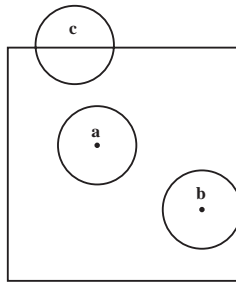
حقیقی با مجموع کوچک تر از  $\frac{1}{5}$  و بزرگ تر از  $\frac{3}{5}$  باشد، می توان آن را به صورت زیر بیان کرد :

$$A = \{(x, y) \mid \frac{1}{5} < x + y < \frac{3}{5}, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$



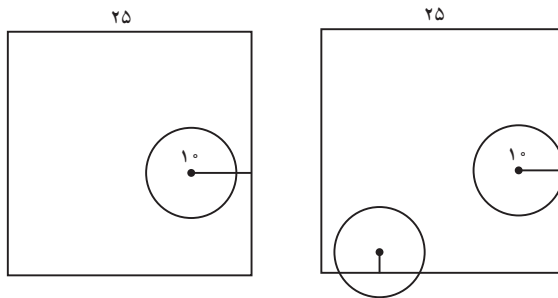
**مثال ۱۴:** سکه ای به شعاع  $1^\circ$  را بر روی یک صفحه مربعی به طول ضلع  $25$  پرتاب می کنیم. فرض می کنیم که مرکز سکه پس از فرود آمدن حتماً داخل مربع یا روی محیط مربع قرار گیرد. فرض می کنیم که اگر بر اثر پرتاب، سطح سکه کاملاً در داخل مربع واقع شود؛ برنده و اگر با محیط مربع تماس داشته باشد، یا در خارج مربع بیفتد، بازنده محسوب شویم. در چنین شرایطی مطلوب است تعیین فضای نمونه ای مناسب و پیشامد مطلوب یعنی برنده شدن.

**حل :** طبق فرض سکه  $a$  در شکل زیر برنده و سکه های  $b$  و  $c$  بازنده خواهند بود.

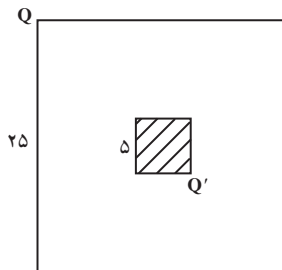


کلید حل این مسئله آن است که فرود آمدن سکه را چگونه مدل سازی کنیم. سکه دایره ای است به شعاع  $1^\circ$  و مرکز متغیر (بستگی به این دارد که کجا فرود آید). بنابراین، چون شعاع سکه ثابت است می توان مکان سکه را تنها با مرکز آن مشخص نمود. مجموعه برآمدهای ممکن، مجموعه همه آن نقاطی است که مرکز سکه در آن فرود می آید، طبق فرض حتماً سکه در داخل مربع یا روی مرز آن فرود می آید. بنابراین فضای نمونه ای ما داخل و مرز مربعی به طول  $25$  است.

اگر مرکز سکه به فاصله بیشتر از  $10^\circ$  از اضلاع مربع قرار گیرد، سکه کاملاً در داخل مربع واقع خواهد شد و در صورتی که فاصله مرکز سکه از اضلاع مربع کمتر یا مساوی  $10^\circ$  باشد، سکه بر محیط مربع مماس است و یا اضلاع مربع را قطع می کند، یعنی بازنده خواهیم بود. به شکل های زیر توجه کنید.



بنابراین برد برای باید مرکز سکه به فاصله بیشتر از  $10^\circ$  از اضلاع مربع قرار داشته باشد؛ یعنی در داخل مربع هاشور خورده در شکل زیر به ضلع  $5 = 25 - 10 - 10$  بیفتد.



### ۳-۴- عملیات بر روی پیشامدها

انجام عملیات بر روی پیشامدها و دست یافتن به پیشامدهای جدید با استفاده از اجتماع، اشتراک و متمم گیری از دو یا یک پیشامد انجام می شود.

(الف) پیشامد  $A \cup B$ : اجتماع پیشامدهای  $A$  و  $B$  تنها وقتی به دست می آید که یکی از دو پیشامد  $A$  یا  $B$  و یا هر دو اتفاق بیفتد.

(ب) پیشامد  $A \cap B$ : اشتراک پیشامدهای  $A$  و  $B$  تنها وقتی حاصل می شود که پیشامدهای  $A$  و  $B$  هر دو واقع شوند.

(ج) پیشامد  $A'$ : متمم پیشامد  $A$ ، تنها وقتی اتفاق می افتد که پیشامد  $A$  اتفاق نیفتد.

لازم است دقت کنیم در مورد یک فضای نمونه ای  $S$ ، چون  $S$  و  $\emptyset$  هر دو نیز زیر مجموعه  $S$

هستند، این دو را هم می‌توانیم پیشامد تلقی کنیم و  $S$  را پیشامد حتمی و  $\emptyset$  را پیشامد نشدنی می‌نامیم و بدیهی است که پیشامدهای حتمی و نشدنی متمم یکدیگرند.

حال به چند مثال در مورد عملیات روی پیشامدها توجه کنید.

**مثال ۱۵:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد معین باشند، پیشامدهای زیر را به صورت عبارت‌های

مجموعه‌ای بیان کنید و با استفاده از نمودار ون آنها را نشان دهید.

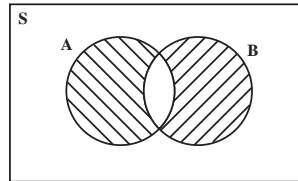
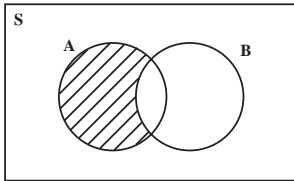
(الف)  $A$  اتفاق بیفتد ولی  $B$  اتفاق نیفتد.

(ب) تنها یکی از دو پیشامد  $A$  یا  $B$  اتفاق بیفتد.

حل: (الف) چون  $A$  اتفاق می‌افتد اما  $B$  اتفاق نمی‌افتد پس برآمدهای ما متعلق به مجموعه  $A$

هستند و متعلق به مجموعه  $B$  نیستند یعنی داخل  $A$  و خارج  $B$  می‌باشند و در نتیجه پیشامد مطلوب عبارت

است از  $A - B$ .



(ب) چون  $A$  یا  $B$  اتفاق می‌افتد ولی هر دو با هم اتفاق نمی‌افتند بنابراین برآمدهای ممکن متعلق

به  $A \cup B$  می‌باشند و متعلق به هر دو یعنی  $A \cap B$  نیست پس متعلق به  $(A \cup B) - (A \cap B)$  می‌باشند. با توجه

به قسمت (الف) این پیشامد مساوی اجتماع دو پیشامد  $A \cap B'$  و  $B \cap A'$  است در نتیجه:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

که همان پیشامد مطلوب است و این مجموعه را تفاضل متقارن  $A$  و  $B$  می‌نامند.

## تمرین

۱- فرض کنید  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه پیشامد باشند. برای هر کدام از پیشامدهای زیر یک عبارت

مجموعه‌ای پیدا کرده و آن را با استفاده از نمودار ون نشان دهید:

(الف) پیشامد  $A$  و پیشامد  $B$  اتفاق بیفتند اما پیشامد  $C$  اتفاق نیفتد.

(ب) فقط پیشامد  $A$  اتفاق بیفتد.

۲- شرکتی در نظر دارد یک آزمایشگاه تحقیقاتی را در خوزستان و در یکی از شهرهای اهواز،

آبادان، دزفول، خرمشهر، یا شوشتر تأسیس کند. اگر  $A$  پیشامد انتخاب خرمشهر یا شوشتر،  $B$  پیشامد

انتخاب خرمشهر یا آبادان و C پیشامد انتخاب اهواز یا شوشتر باشند، هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $A'$       ب)  $C'$       پ)  $B \cap C$       ت)  $B \cup C$   
 ث)  $A \cup B$       ج)  $(B \cup C)'$       چ)  $B' \cap C'$

۳- هر یک از ارقام ۱ تا ۹ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور قرعه برمی‌داریم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت کوچک‌تر از ۶ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، عددی اول باشد.

ث) پیشامد C که در آن عدد روی کارت بزرگ‌تر از ۶ باشد.

۴- یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش و پیشامد آنکه سکه اقلایک بار پشت بیاید را بنویسید.

۵- یک سکه را سه بار می‌اندازیم فضای نمونه‌ای این تجربه و پیشامد آنکه اقلایک بار رو بیاید را بنویسید.

۶- یک تاس و یک سکه را با هم به هوا می‌اندازیم فضای نمونه‌ای این تجربه و پیشامد آنکه سکه رو یا تاس ۶ بیاید را بنویسید.

۷- یک کیسه محتوی ۱۵ مهره قرمز و ۱۰ مهره سفید است. یک مهره را به طور تصادفی از داخل کیسه بیرون می‌آوریم، این مهره مسلماً سفید (س) یا قرمز (ق) خواهد بود. آیا مجموعه {س, ق} می‌تواند نمایش فضای نمونه‌ای این تجربه باشد؟ توضیح دهید.

۸- سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم، اگر رو بیاید آنگاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. مثلاً (۲, ر) نشان‌دهنده آمدن رو در پرتاب سکه و ۲ در انداختن تاس است و (پ, پ, پ) سه بار متوالی پشت را نشان می‌دهد،  
 الف) ده عضو از فضای نمونه‌ای S را بنویسید.

ب) اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً یک بار سکه به پشت بیاید، عناصر این پیشامد را بنویسید.  
 پ) اگر B پیشامدی باشد که حداقل دو بار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد، عناصری از S که با این پیشامد متناظر هستند را بنویسید.

۹- با به کارگیری عبارت‌های مجموعه‌ای، فضای نمونه‌ای مرکب از تمام نقاط واقع بر محیط و داخل دایره‌ای به شعاع ۳ به مرکز (۳- و ۲) را مشخص کنید.

## احتمال: اندازه‌گیری شانس

با توجه به آشنایی که با مفاهیم پدیده‌های تصادفی، فضاهاى نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی پیدا کردیم، اکنون می‌توانیم احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی را مورد مطالعه قرار دهیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم شانس وقوع یک پیشامد تصادفی را اندازه‌گیری کنیم. برای این منظور احتمال وقوع پیشامدهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در تمام فضای نمونه‌ای به‌طور یکسان در نظر گرفته می‌شوند مانند پرتاب سکه که در آن احتمال آمدن پشت یا رو یکسان است.

### ۴-۱- احتمال هم‌شانس در فضاهای گسسته

فضای گسسته را فضایی گرفتیم که تعداد عناصر آن متناهی باشند، و بنابراین هر زیرمجموعه آن دارای تعداد معینی عضو است که قابل شمارش می‌باشد و چون هر زیرمجموعه یک فضای نمونه‌ای، یک پیشامد می‌باشد، بنابراین، با تعیین تعداد اعضای متناظر با هر پیشامد خاص و تقسیم آن بر تعداد کل عناصر فضای نمونه‌ای، می‌توان شانس وقوع آن پیشامد یا احتمال وقوع آن را اندازه گرفت. به زبان ریاضی برای به‌دست آوردن  $P(A)$ ، احتمال وقوع پیشامد  $A$ ، رابطه زیر را به کار می‌بریم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$



که  $n(A)$  تعداد عضوهای  $A$  و  $n(S)$  تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای  $S$  است. احتمال در فضاهای گسسته هم شانس، احتمال کلاسیک نیز نامیده می‌شود.

**مثال ۱:** در ریختن یک تاس سالم<sup>۱</sup>، احتمال آمدن عدد ۴ چقدر است؟

**حل:** فضای نمونه آزمایش مورد بحث عبارت است از:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

احتمال ظاهر شدن عدد ۴ یا به عبارت دیگر احتمال وقوع پیشامد  $A = \{4\}$  عبارت است از:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

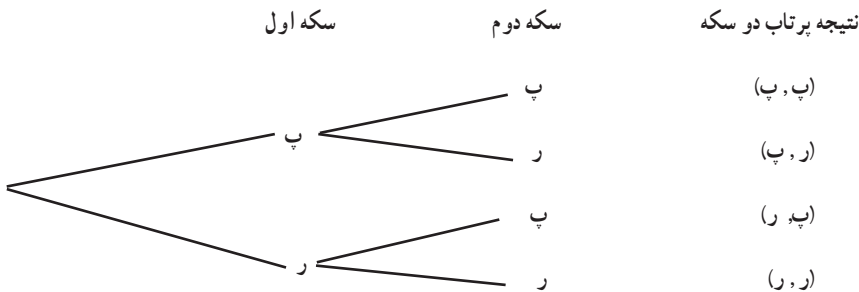
**مثال ۲:** دو سکه سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال وقوع پدیده‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) هر دو سکه به پشت بیفتند.

ب) یکی از دو سکه به پشت، و دیگری به رو بیفتد.

پ) حداقل یکی از سکه‌ها به پشت بیفتد.

**حل:** فضای نمونه‌ای آزمایش مورد بحث با استفاده از نمودار درختی به قرار زیر است:



به عبارت دیگر فضای نمونه‌ای عبارت است از  $S = \{(پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر)\}$  پیشامد وقوع دو

سکه به پشت زیرمجموعه  $A_1 = \{(پ, پ)\}$  از  $S$  است، پس:

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

پیشامد اینکه یکی از دو سکه به پشت و دیگری به رو بیفتد زیرمجموعه  $A_2 = \{(پ, ر), (ر, پ)\}$

از  $S$  می‌باشد، در نتیجه:

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱- تاس سالم نامی است که متقارن بوده و شانس آمدن هر وجه آن یکسان باشد.

و بالاخره پیشامد اینکه حداقل یک سکه به پشت بیفتد زیر مجموعه  $A_3$  از  $S$  است که  $\{(ر, پ), (پ, ر), (پ, پ), (پ, پ)\}$ ، زیرا کافی است یکی از سکه‌ها به پشت بیفتد یا هر دو سکه به پشت بیفتند، پس:

$$P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

**مثال ۳:** در ریختن یک جفت تاس قرمز و سبز، احتمال اینکه مجموع ارقام ظاهر شده برابر ۷ باشد را محاسبه کنید.

حل: در این آزمایش، فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S = \{(a, b) \mid a, b \in K\} = K \times K$$

که  $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  پس  $S$  دارای ۳۶ عضو می‌باشد. پیشامد مورد نظر عبارت است از:

$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

**مثال ۴:** تمام ترکیبات دو رقمی مجموعه اعداد  $\{1, 2, 3\}$  را روی کارت‌های مختلف نوشته (هر ترکیب روی یک کارت) و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یک کارت را به طور تصادفی برمی‌داریم احتمال آنکه روی این کارت عدد ۲ باشد چیست؟

حل: فضای نمونه آزمایش مورد نظر عبارت است از:

$$S = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$$

و پیشامد مطلوب زیر مجموعه  $A$  از فضای نمونه است:

$$A = \{12, 21, 23, 32\}$$

در نتیجه احتمال آن برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

**مثال ۵:** از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد چقدر است؟

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل هزار عضو است. پس  $n(S) = 1000$ . فرض

می‌کنیم  $A$  مجموعه همه اعدادی باشد که بین ۱ تا ۱۰۰۰ هستند و بر ۳ نیز بخش پذیرند، پس:

$$A = \{3m : 1 \leq m \leq 333\}$$

و  $n(A) = 333$ . در نتیجه احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد برابر  $\frac{333}{1000}$  است.

**مثال ۶:** از مجموعه اعداد طبیعی  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$  عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال

اینکه عدد انتخابی بر عدد  $k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) بخش پذیر باشد چقدر است؟

**حل:** فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل  $N$  عضو است. فرض کنید  $A$  پیشامد بخش پذیر

بودن عدد انتخابی بر عدد  $k$  باشد، در این صورت:

$$A = \left\{ km : 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \right\}$$

که در آن،  $[X]$  بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی  $x$  است. پس

$$n(A) = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$$

$$P(A) = \frac{\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor}{N}$$

**مثال ۷:** از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۵ سیب فاسد، ۲ سیب به طور تصادفی بیرون

می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه هر دو سیب سالم باشند.

**حل:** در بسیاری از موارد اصولاً نوشتن پیشامدهای مطلوب و فضای نمونه‌ای به صورت

فهرست‌وار، کاری وقت‌گیر و دشوار است و باید از راه دیگری تعداد عناصر مورد نیاز را شمارش

کنیم. در این مثال فضای نمونه عبارت است از همه ترکیبات دوتایی از سیب‌ها که می‌توان آنها را از

یک سبد محتوی ۹ سیب خارج کرد. با استفاده از آنالیز ترکیبی از ریاضی (۲) می‌دانیم که تعداد این

ترکیبات چنین به دست می‌آید:

$$n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

پیشامد مطلوب  $A$ ، آن است که هر دو سیبی که خارج کرده‌ایم سالم باشند، ۴ سیب سالم داریم،

با توجه به اینکه سیب‌های خروجی باید حتماً یک جفت از این ۴ سیب باشند، داریم:

$$n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

**مثال ۸:** از بین ۲۲ دانش‌آموز قرار است به‌طور تصادفی ۸ نفر برای تشکیل تیم کوهنوردی دبیرستان انتخاب شوند. اگر ۱۰ نفر از این دانش‌آموزان در سال اول و ۱۲ نفر دیگر در سال دوم مشغول به تحصیل باشند، مطلوب است احتمال آنکه ۴ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند. حل: در اینجا فضای نمونه‌ای عبارت است از تمام حالات ممکن برای انتخاب ۸ نفر از ۲۲

نفر، یعنی  $\binom{22}{8}$ . پیشامد مطلوب حالت‌هایی است که ۴ نفر از دانش‌آموزان سال اول (که تعداد آنها ۱۰ نفر است) و ۴ نفر از دانش‌آموزان سال دوم (که تعداد آنها ۱۲ نفر است) انتخاب شوند. تعداد

حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۰ نفر عبارت است از  $\binom{10}{4}$  و تعداد انتخاب‌های ممکن ۴ نفر از ۱۲ نفر

مساوی است با  $\binom{12}{4}$ . طبق اصل اساسی شمارش (یا اصل ضرب که در ریاضی (۲) خوانده‌اید)،

تعداد تمام حالت‌های این پیشامد مساوی با حاصلضرب این دو عدد  $\binom{12}{4}$  و  $\binom{10}{4}$  می‌باشد. پس:

$$n(A) = \binom{10}{4} \binom{12}{4}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{4} \times \binom{12}{4}}{\binom{22}{8}} = \frac{210}{323}$$

**مثال ۹:**  $n$  نفر را در نظر می‌گیریم احتمال اینکه روز تولد هیچ دو نفری از آنها یک روز نباشد را مشخص کنید (برای سادگی کار، از احتمال وقوع تولد افراد در روز آخر سال‌های کبیسه صرف‌نظر می‌کنیم).

حل : چون تعداد افراد مورد بررسی  $n$  است و هریک از آنها ممکن است در ۳۶۵ روز مختلف سال به دنیا آمده باشد، بنابراین در این مسأله با یک فضای نمونه‌ای  $۳۶۵^n$  عضوی روبه‌رو هستیم، (با استدلالی مشابه وقتی که دو تاس را با هم می‌اندازیم و فضای نمونه‌ای ما  $۶^۲$  عضو دارد) پس داریم  $n(S) = ۳۶۵^n$ ، از میان  $n$  نفر مورد نظر، نفر اول احتمال دارد که در یکی از ۳۶۵ روز سال به دنیا آمده باشد. چون فرض بر یکسان نبودن روز تولد افراد است پس نفر دوم ممکن است در یکی از ۳۶۴ روز باقیمانده سال متولد شده باشد و به همین ترتیب نفر سوم در یکی از ۳۶۳ روز باقیمانده و بالاخره نفر  $n$ ام در یکی از  $۳۶۵ - n + ۱$  روز ممکن است متولد شده باشد. بدین ترتیب، با توجه به اصل اساسی شمارش،  $n$  نفر ممکن است  $(۳۶۵ - n + ۱) \times ۳۶۴ \times ۳۶۵$  روز تولد متفاوت داشته باشند. بنابراین اگر  $A$  پیشامد مورد نظر باشد داریم :

$$n(A) = ۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \dots \times (۳۶۵ - n + ۱)$$

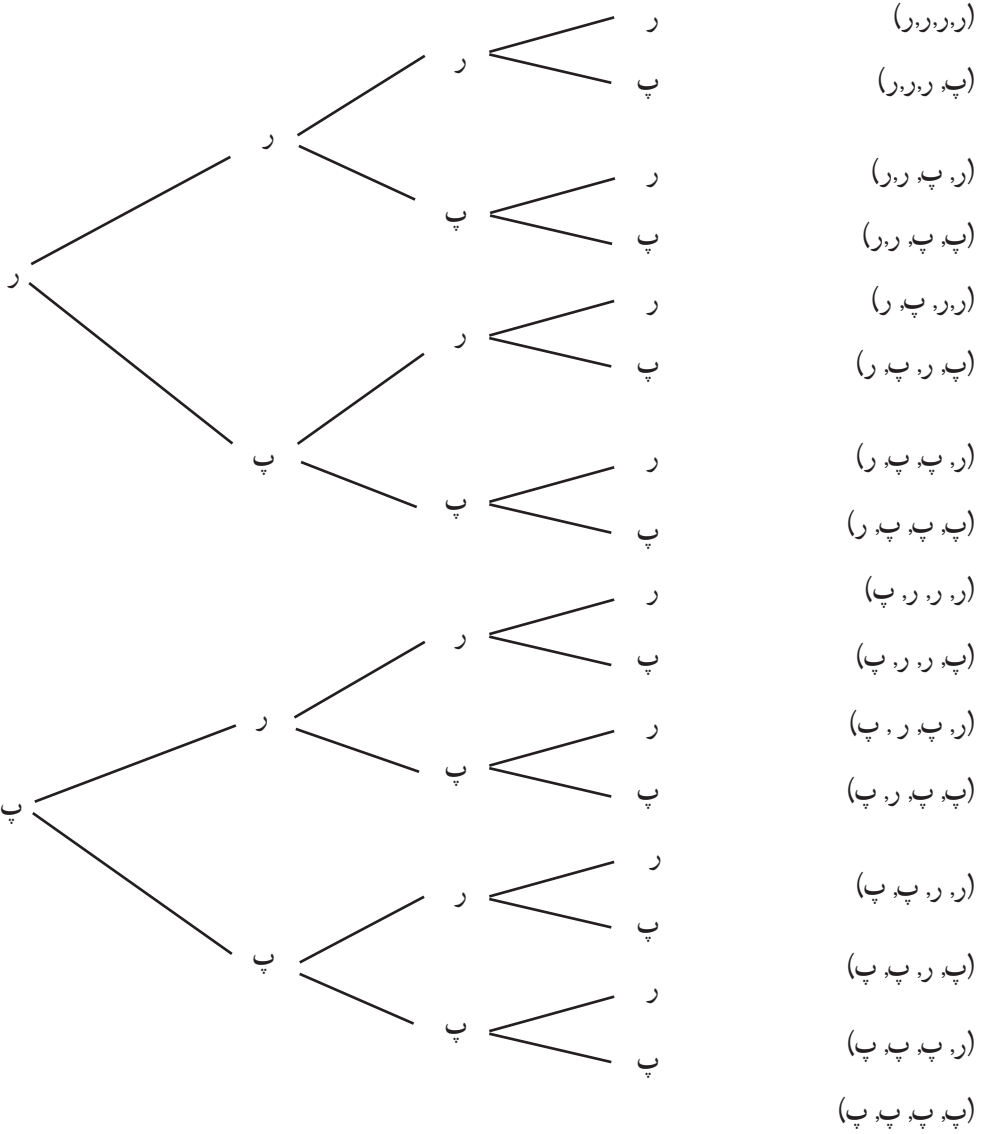
پس :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \dots \times (۳۶۵ - n + ۱)}{۳۶۵^n}$$

دقت کنید که اگر  $n > ۳۶۵$  آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حتماً دو نفر در یک روز متولد شده‌اند، که در این حالت  $P(A) = ۰$ .

#### ۲-۴- احتمال دو جمله‌ای

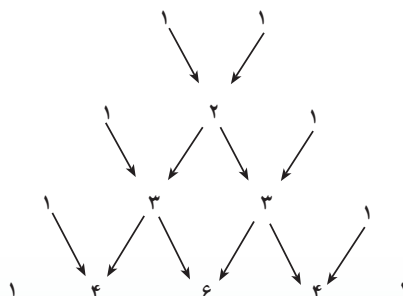
اگر یک سکه سالم یک بار پرتاب شود هرکدام از برآمدها دارای احتمال  $\frac{۱}{۲}$  است. اگر سکه را دو، سه یا چهار بار پرتاب کنیم، به ترتیب چهار، هشت یا شانزده حالت هم شانس وجود دارد که در نمودار درختی صفحه بعد نشان داده شده است :



بدین ترتیب جدول زیر را برای پرتاب ۱، ۲، ۳ و ۴ سکه به دست می آوریم.

پرتاب ... سکه	تعداد رو آمدن ها	احتمال
یک سکه	۰	$\frac{1}{2}$
	۱	$\frac{1}{2}$
دو سکه	۰	$\frac{1}{4}$
	۱	$\frac{2}{4}$
	۲	$\frac{1}{4}$
سه سکه	۰	$\frac{1}{8}$
	۱	$\frac{3}{8}$
	۲	$\frac{3}{8}$
	۳	$\frac{1}{8}$
چهار سکه	۰	$\frac{1}{16}$
	۱	$\frac{4}{16}$
	۲	$\frac{6}{16}$
	۳	$\frac{4}{16}$
	۴	$\frac{1}{16}$

حال صورت کسرهای احتمال در جدول فوق را به صورت نمودار زیر در می آوریم :



این اعداد یک مثلث تشکیل می دهند که به مثلث خیام – پاسکال موسوم است. هر عدد در یک سطر مثلث از جمع کردن جفت اعداد چپ و راست آن در سطر بالایی به دست می آید. این مثلث را تا بی نهایت می توان ادامه داد. اگر به ضرایب حاصل از بسط توان های طبیعی دوجمله ای  $a+b$  نگاه کنیم، همین اعداد موجود در مثلث فوق را می یابیم:

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

و در حالت کلی از آنالیز ترکیبی در ریاضی (۲) می دانیم که:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

بنابراین:

$$P(\text{آمدن } k \text{ رو}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال ۱۰: تاس سالمی را ۱۵ بار می ریزیم. احتمال اینکه ۶ بار برآمد تاس یک عدد فرد باشد،

چيست؟ احتمال اینکه ۱۰ بار برآمد تاس یک عدد زوج باشد، چقدر است؟

حل: چون در ریختن یک تاس سالم، برآمد مشاهده شده یا زوج است و یا فرد، بنابراین می توان

گفت {فرد و زوج} =  $S$  و  $\frac{1}{2} = P(\text{فرد آمدن تاس}) = P(\text{زوج آمدن تاس})$  و مانند مثال پرتاب سکه سالم،

خواهیم داشت

$$P(\text{۶ بار مشاهده عدد فرد}) = \frac{\binom{15}{6}}{2^{15}} = 0/15$$

$$P(\text{۱۰ بار مشاهده عدد زوج}) = \frac{\binom{15}{10}}{2^{15}} = 0/09$$



۱- در یک خانواده با دو فرزند احتمال اینکه بچه‌ها از دو جنس مخالف ویا هر دو دختر باشند را پیدا کنید.

۲- رمز یک قفل، عددی سه رقمی است که تنها با تنظیم سه رقم آن به طور صحیح می‌توان قفل را باز کرد. با علم به تکراری نبودن ارقام رمز، احتمال کشف کردن تصادفی رمز قفل فقط با یک بار تنظیم ارقام را پیدا کنید.

۳- مسأله فوق را با فرض وجود یک رمز پنج رقمی حل کنید.

۴- اگر یک عدد ۴ رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ترکیب ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ به وجود آید، احتمال اینکه عدد ساخته شده بر ۵ بخش پذیر باشد را پیدا کنید.

۵- یک کلمه چهار حرفی به طور تصادفی با استفاده از حروف کلمه «خوارزمی» ساخته شده است. احتمال اینکه این کلمه دارای حرف نقطه‌دار نباشد را پیدا کنید. مسأله را با فرض تکراری بودن حروف و نیز بدون این فرض حل کنید.

۶- یک جفت تاس مخصوص داریم که در هر کدام از آنها به جای ارقام ۱ تا ۶ دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ نمایش داده شده است. این دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال وقوع مجموع‌های زیر را پیدا کنید:

الف) ۵ (ب) عددی فرد

۷- ۵ نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند. با این حال، امکان استخدام تنها برای ۵ نفر از آنها وجود دارد احتمال انتخاب ۵ نفر را در حالت‌های زیر پیدا کنید:

الف) ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

ب) ۵ زن انتخاب شوند.

پ) حداقل ۴ مرد انتخاب شوند.

۸- یک تاس و یک سکه با هم انداخته می‌شوند، مطلوب است:

الف) احتمال آنکه تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

ب) احتمال آنکه تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

۹- یک کیسه محتوی ۲۰ مهره قرمز، ۱۰ مهره سفید و ۱۵ مهره سبز است. یک مهره را به طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. مطلوب است:

الف) احتمال آنکه این مهره سفید باشد.

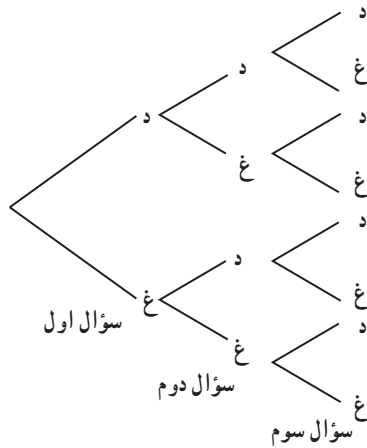
این مهره را به کیسه برگردانده ۲ مهره را به طور تصادفی بیرون می آوریم.

ب) احتمال آنکه یک مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.

۱۰- نمودار درختی زیر راه های پاسخ دادن به سه سؤال در یک آزمون دوگزینه ای (درست -

غلط) را نشان می دهد. حرف «د» یعنی درست و حرف «غ» یعنی غلط. اگر سؤال ها به تصادف انتخاب

شوند، مطلوب است احتمال :



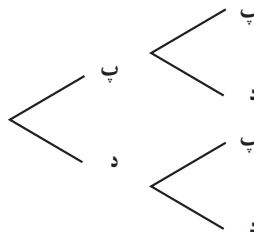
الف) اینکه هر سه سؤال صحیح جواب داده شده باشند؛

ب) هیچ یک از سؤالات صحیح جواب داده نشده باشند؛

پ) تعداد سؤالات صحیح پاسخ داده شده بیشتر باشند.

۱۱- نمودار درختی زیر حالات ممکن تولد پسر و دختر را در یک خانواده دو فرزندی نشان

می دهد. فرض می کنیم احتمال پسر بودن فرزند  $\frac{1}{4}$  باشد.



الف) با توجه به نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

	۲	۱	۰	تعداد پسرها
	۱	۲	۱	تعداد حالات
		$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	احتمال
	۰/۲۵		۰/۲۵	درصد احتمال

ب) احتمال اینکه دو فرزند هم جنس باشند چیست؟

پ) احتمال اینکه دست کم یک فرزند پسر باشد چیست؟

۱۲- نمودار درختی زیر احتمال های باریدن برف را طی چهار روز متوالی در یک محوطه اسکی

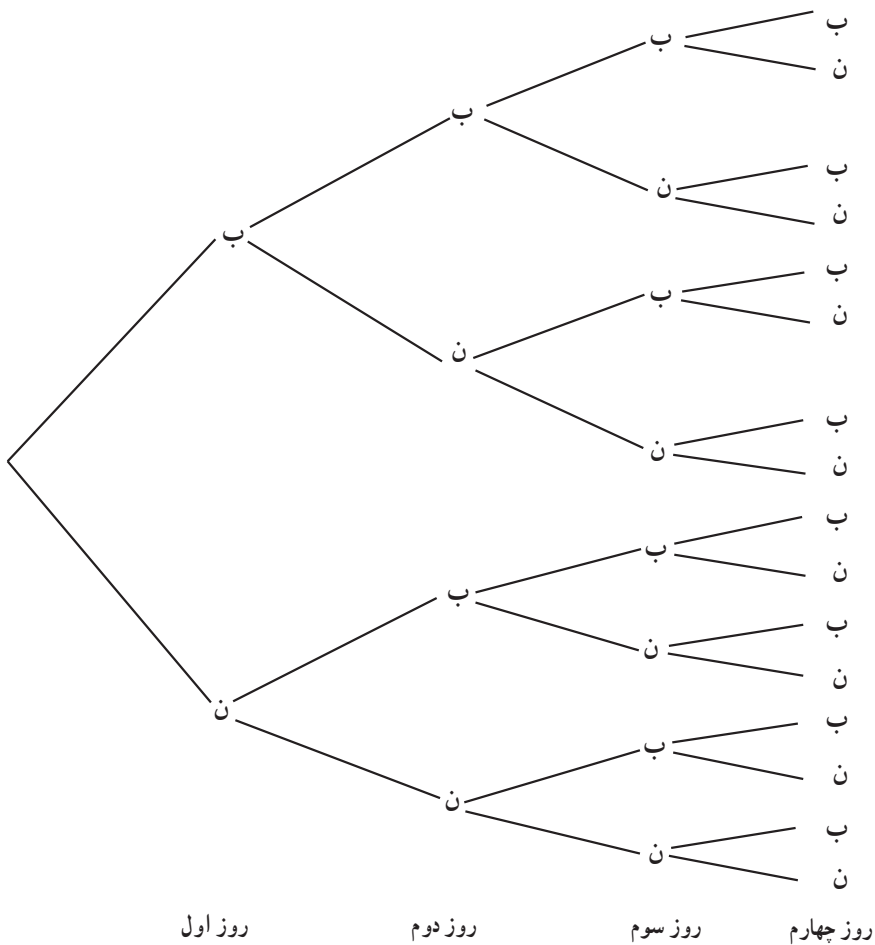
نشان می دهد. («ن» یعنی نباریدن برف و «ب» یعنی باریدن برف) فرض می کنیم احتمال آمدن برف در یک روز مفروض  $\frac{۱}{۳}$  باشد.

الف) با توجه به نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

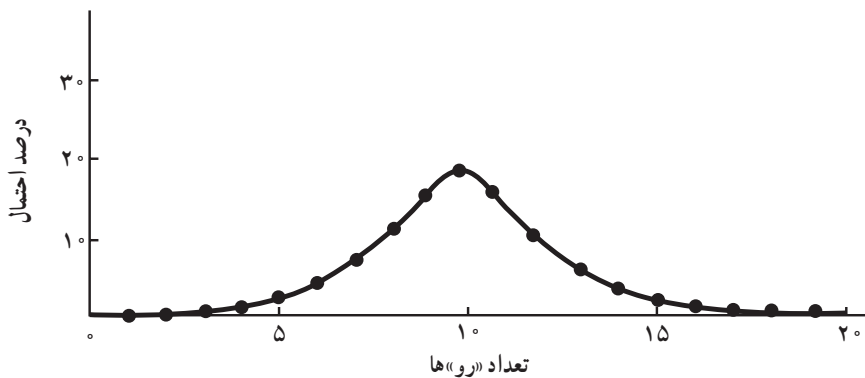
۰	۱	۲	۳	۴	تعداد روزهای باریدن برف
۱	۴	۶	۴	۱	تعداد امکان های مختلف
$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$	احتمال
	%۲۵		%۲۵	%۶/۲۵	درصد احتمال

ب) درصد احتمال اینکه طی چهار روز متوالی دست کم دو روز برف بیارد چیست؟

پ) کدام محتمل تر است؟ دقیقاً یک روز برف بیارد یا دقیقاً سه روز؟



۱۳- نمودار زیر احتمال‌های رخ دادن پیشامد «رو» در پرتاب ۲۰ سکه را نشان می‌دهد.



به نمودار صفحه قبل رجوع کنید و به این سوالات پاسخ دهید :

الف) اگر هر بیست سکه پرتاب شوند آمدن چند «رو» محتمل تر است؟

ب) با توجه به فرض الف احتمال آن که آن تعداد «رو» بیاید چقدر است؟ (به کمک نمودار تقریب بزنید)

پ) کدام یک عجیب تر است؟ اینکه در پرتاب  $10^\circ$  سکه تعداد «رو»ها و «پشت»ها مساوی باشد یا در پرتاب  $20^\circ$  سکه؟

ت) اگر تعداد سکه‌هایی که پرتاب می شود را افزایش دهیم، احتمال مساوی بودن تعداد «ر» و «پ»ها چه تغییری می کند؟

#### ۳-۴- احتمال غیر هم‌شانس در فضاهای گسسته

در بخش قبل فرض کرده بودیم احتمال وقوع پیشامدهای مورد بررسی در تمام نقاط فضای نمونه‌ای یکسان باشد. مثلاً در پرتاب سکه، احتمال آمدن «پشت» یا «رو» هر دو  $\frac{1}{2}$  بود. اما این فرض همیشه یک فرض واقع‌بینانه نیست و برای سادگی مطلب در بندهای قبل گذاشته شده بود. یکی از راه‌های محاسبه احتمال، استفاده کردن از محاسبه فراوانی است.

**مثال ۱ :** در مورد مثال بالا اگر یک سکه را  $100$  بار پرتاب کنیم و در این  $100$  بار،  $45$  بار «رو» بیاید، فرض کنید که کسر  $\frac{45}{100}$  و یا  $45\%$  و یا  $0/45$  را احتمال آمدن «رو» در نظر بگیریم. در این صورت احتمال آمدن پشت  $55\%$  می باشد. بنابراین در فضای  $S = \{ر, پ\}$  داریم :

$$P(\{ر\}) = 0/45 \quad \text{و} \quad P(\{پ\}) = 0/55$$

مجموعه‌های تک عضوی  $\{ر\}$  و  $\{پ\}$  را مجموعه‌های ساده می‌گوییم. و احتمال هر مجموعه تک عنصری  $\{x\}$  را با  $P(x)$  یا  $P(\{x\})$  نشان می‌دهیم.

**هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم.**

می‌بینیم که :

$$P(ر) + P(پ) = 0/45 + 0/55 = 1$$

یعنی احتمال پیشامدهای ساده بزرگ‌تر یا مساوی صفر و کوچک‌تر یا مساوی یک می‌باشد و مجموع احتمال‌های پیشامدهای ساده  $1$  می‌باشد.

**مثال ۲ :** در مسأله پرتاب سه سکه بخش قبل، اگر فضای نمونه‌ای را  $\{0, 1, 2, 3\}$  بگیریم که

در آن هر عضو این فضا تعداد «رو» آمدن های سه سکه باشد، آن گاه با استفاده از احتمال دو جمله ای می دانیم که :

$$P(0) = P(\{\text{هیچ رو نیاید}\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(1) = P(\{\text{یک بار رو آمده باشد}\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(2) = P(\{\text{دو بار رو آمده باشد}\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = P(\{\text{سه بار رو آمده باشد}\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1 \quad \text{ملاحظه می کنیم که :}$$

در حالت کلی فرض کنیم فضای نمونه ای ما  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  شامل  $n$  عضو باشد. به هر پیشامد ساده  $\{e_k\}$  یک عدد حقیقی  $P(\{e_k\})$  که احتمال پیشامد  $\{e_k\}$  است را نسبت می دهیم. این عدد باید تحت شرایط زیر انتخاب گردد :

(۱) احتمال یک پیشامد ساده عددی بین ۰ و ۱ است؛ یعنی

$$0 \leq P(e_k) \leq 1$$

(۲) مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در فضای نمونه ای برابر ۱ است؛ یعنی :

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$$

اعداد  $P(e_1), P(e_2), \dots, P(e_n)$  را که در شرط بالا صدق می کنند «تخصیص احتمال مقبول» می نامیم.

فرض کنیم یک تخصیص احتمال مقبول به پیشامدهای ساده در فضای نمونه ای  $S$  داده شده

باشد. چگونه می توان یک احتمال برای پیشامد دلخواه  $A$  در  $S$  تعریف نمود؟

#### ۴-۴- احتمال یک پیشامد اختیاری

اگر یک تخصیص احتمال مقبول به پیشامدهای ساده در فضای نمونه ای  $S$  داده شده باشد،

به پیشامد  $A$  احتمالی را که با  $P(A)$  نشان می دهیم به صورت زیر نسبت می دهیم :

الف) اگر  $A$  پیشامد غیرممکن (یعنی مجموعه  $\emptyset$ ) باشد آنگاه

$$P(A) = 0$$

- (ب) اگر  $A$  یک پیشامد ساده باشد  $P(A)$  خودبه خود تعریف شده است.
- (ج) اگر  $A$  پیشامد مرکب باشد، یعنی  $A$  اجتماعی از پیشامدهای ساده باشد، آنگاه  $P(A)$  مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در  $A$  می باشد.
- (د) اگر  $A$  خود فضای نمونه ای  $S$  باشد، آنگاه:

$$P(A) = P(S) = 1$$

در واقع این قسمت حالت خاصی از (ج) است.

حال اگر حالت هم شانسی بخش قبل را در نظر بگیریم، یعنی:

$$P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n)$$

آنگاه چون  $1 = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n)$  داریم:

$$P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n) = \frac{1}{n}$$

حال اگر مجموعه  $A$  دارای  $m$  عضو  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  باشد طبق تعریف فوق داریم:

$$P(\{f_1, f_2, \dots, f_m\}) = P\{f_1\} + \dots + P\{f_m\} = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ بار}} = \frac{m}{n}$$

یعنی:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}$$

که همان فرمول بخش قبل است. یعنی ملاحظه می کنیم که مطالب این بخش در واقع تعمیم بخش قبل است.

**مثال ۳:** فرض کنیم فضای نمونه ای ما  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  باشد. در هر دو حالت زیر به پیشامدهای ساده  $S$  اعدادی را نسبت داده ایم. بررسی کنید که آیا این نسبت ها که آنها را تخصیص دادن احتمال می نامیم مجاز هستند و یا نه، دلیل پاسخ خود را بیان کنید.

$$P(1) = 0/12, P(2) = 0/63, P(3) = 0/45, P(4) = -0/20 \quad (\text{الف})$$

$$P(1) = \frac{9}{120}, P(2) = \frac{45}{120}, P(3) = \frac{27}{120}, P(4) = \frac{46}{120} \quad (\text{ب})$$

حل: در مورد (الف) چون  $P(4) = -0/20$  ناقص فرض (۱) در مورد پیشامدهای ساده است، یعنی احتمال باید نامنفی باشد، بنابراین تخصیص احتمال مجاز نیست. اما در مورد (ب) داریم

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{9}{120} + \frac{45}{120} + \frac{27}{120} + \frac{46}{120} = \frac{127}{120} > 1$$

و این خاصیت (۲) در مورد پیشامدهای ساده را نقض می‌کند بنابراین، این تخصیص احتمال هم مجاز نیست.

**مثال ۴:** تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک پرتاب این تاس،  $A$  پیشامد وقوع عددی بزرگ‌تر از ۳ باشد،  $P(A)$  را بیابید.

**حل:** فضای نمونه‌ای عبارت است از  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . حال اگر به هر عدد زوج احتمال  $w$  نسبت دهیم، آنگاه احتمال عدد فرد برابر  $2w$  است؛ یعنی:

$$P(1) = P(3) = P(5) = 2w \quad \text{و} \quad P(2) = P(4) = P(6) = w$$

و چون مجموع این پیشامدهای ساده باید ۱ باشد، بنابراین:

$$2w + w + 2w + w + 2w + w = 9w = 1$$

و از آنجا  $w = \frac{1}{9}$ ، حال قرار می‌دهیم  $A = \{4, 5, 6\}$  طبق خاصیت (ج) داریم:

$$P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

**مثال ۵:** سه اسب  $a$ ،  $b$  و  $c$  با هم مسابقه می‌دهند. فرض کنیم احتمال برد  $a$  دو برابر احتمال

برد  $b$  و احتمال برد  $b$  دو برابر احتمال  $c$  است.

(الف) مطلوب است احتمال برد هر کدام از اسب‌ها.

(ب) مطلوب است احتمال اینکه  $a$  یا  $b$  ببرند.

**حل:** گیریم  $P(c) = p$ ، چون شانس برد  $b$  دو برابر شانس برد  $c$  است. پس:  $P(b) = 2p$  و چون

شانس برد  $a$  دو برابر شانس برد  $b$  است پس:  $P(a) = 2(2p) = 4p$ . حال چون مجموع احتمال‌های

فوق باید برابر ۱ باشد پس:

$$p + 2p + 4p = 1$$

یا  $7p = 1$ . در نتیجه  $p = \frac{1}{7}$  و از آنجا داریم:

$$P(a) = 4p = \frac{4}{7}$$

$$P(b) = 2p = \frac{2}{7}$$

$$P(c) = p = \frac{1}{7}$$



پیشامد اینکه یا a برسد یا b، مجموعه {a, b} است. طبق تعریف :

$$P(\{a, b\}) = P(a) + P(b) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

**مثال ۶:** گیریم  $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ، مطلوب است محاسبه

الف)  $P(a_1)$ ، اگر  $P(a_4) = \frac{1}{9}$ ،  $P(a_3) = \frac{1}{6}$ ،  $P(a_2) = \frac{1}{3}$

ب)  $P(a_1)$  و  $P(a_2)$  اگر  $P(a_3) = 2P(a_2)$  و  $P(a_4) = P(a_2) = \frac{1}{4}$

ج)  $P(a_1)$  اگر  $P(a_2) = \frac{1}{3}$  و  $P(\{a_2, a_4\}) = \frac{1}{4}$  و  $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{2}{3}$

حل : الف) فرض کنیم  $p = P(a_1)$ . آنگاه چون P تخصیص احتمال مقبول به فضای S است

بنابراین :

$$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = 1$$

و از آنجا :

$$p + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow p = \frac{7}{18}$$

ب) گیریم  $p = P(a_2)$ . آنگاه  $P(a_1) = 2p$  و از آنجا :

$$2p + p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

و یا  $p = \frac{1}{6}$  . بنابراین  $P(a_2) = \frac{1}{6}$  و  $P(a_1) = \frac{1}{3}$  .

ج) گیریم  $P(a_1) = p$ . آنگاه چون

$$P(a_3) = P(\{a_2, a_3\}) - P(a_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

و

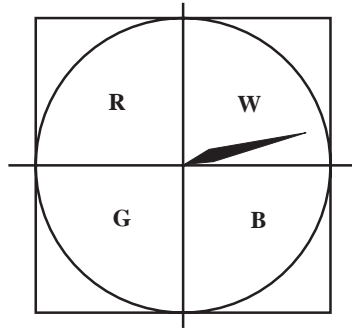
$$P(a_4) = P(\{a_2, a_4\}) - P(a_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

در نتیجه :

$$p + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

و یا  $p = \frac{1}{6}$  . یعنی  $P(a_1) = \frac{1}{6}$  .

۱- در دستگاه زیر دایره را به چهار رنگ سبز (G)، قرمز (R)، آبی (B)، سفید (W) رنگ آمیزی کرده ایم. عقربه را به چرخش درمی آوریم. اگر احتمال های ایستادن عقربه روی رنگ های مختلف، متفاوت باشند، کدام یک از تخصیص احتمال های زیر غیر مجازند؟



(الف)  $P(B) = \frac{1}{30}$  و  $P(W) = \frac{1}{24}$  و  $P(G) = \frac{1}{28}$  و  $P(R) = \frac{1}{22}$

(ب)  $P(B) = \frac{1}{30}$  و  $P(W) = \frac{1}{30}$  و  $P(G) = \frac{1}{14}$  و  $P(R) = \frac{1}{26}$

۲- یک سکه ناسالم را پرتاب می کنیم. فرض کنیم شانس آمدن «رو» دو برابر شانس آمدن «پشت» باشد. مطلوب است محاسبه  $P(r)$  و  $P(p)$ .

۳- سه شناگر a, b و c با هم مسابقه می دهند. a و b دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هر کدام از آنها دو برابر c است. مطلوب است احتمال اینکه b یا c ببرد.

#### ۴-۵ - احتمال در فضاهای پیوسته

در این بخش به محاسبه احتمال در فضاهای پیوسته می پردازیم. فضاهای پیوسته، برخلاف فضاهای گسسته که از تعدادی منتهای نقطه تشکیل شده اند، مجموعه هایی نامتناهی می باشند نظیر بازه ها در محور اعداد حقیقی یا سطوح در صفحه و غیره. واضح است که در این حالت دیگر شمارش تعداد عناصر فضای نمونه ای یا پیشامد میسر نیست ولی آنچه که می تواند مورد استفاده قرار گیرد «اندازه» طول بازه ها، مساحت سطوح، و حجم شکل های فضایی است. در این حالت نسبت «اندازه» فضای پیشامد به «اندازه» فضای نمونه ای، احتمال وقوع پیشامد را مشخص می کند. به عبارت دیگر اگر پیشامد مطلوب

را با  $A$  نمایش دهیم، داریم<sup>۱</sup>:

$$P(A) = \frac{A \text{ طول}}{S \text{ طول}} = \frac{l_A}{l_S}$$

اگر  $S \subset \mathbb{R}$  و  $A$  داریم:

$$P(A) = \frac{A \text{ مساحت}}{S \text{ مساحت}} = \frac{a_A}{a_S}$$

اگر  $S \subset \mathbb{R}^2$  و  $A$  داریم:

$$P(A) = \frac{A \text{ حجم}}{S \text{ حجم}} = \frac{v_A}{v_S}$$

اگر  $S \subset \mathbb{R}^3$  و  $A$  داریم:

حال به ذکر چند مثال می پردازیم.

**مثال ۱:** در مثال تیراندازی به هدف دایره ای شکل، فرض می کنیم شعاع صفحه هدف  $20^\circ$

سانتیمتر و شعاع دایره کوچک تر  $10^\circ$  سانتیمتر است. فرض می کنیم تیر حتماً به صفحه هدف برخورد می کند، احتمال برخورد تیر به دایره کوچک تر را محاسبه کنید.

**حل:** فضای نمونه، مساحت دایره بزرگ تر و پیشامد  $A$  مساحت دایره کوچک تر است، بنابراین:

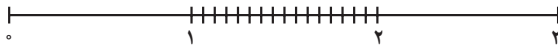
$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\pi \times 10^2}{\pi \times 20^2} = \frac{1}{4}$$

**مثال ۲:** از بین اعداد حقیقی بین  $0^\circ$  و  $3^\circ$  یک عدد به تصادف انتخاب می شود، مطلوب است

محاسبه احتمال آنکه این عدد بین  $1^\circ$  و  $2^\circ$  انتخاب شده باشد.

**حل:** فضای نمونه بازه  $S = [0, 3]$  و پیشامد مطلوب بازه  $A = [1, 2]$  است، پس:

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{1}{3}$$



**مثال ۳:** فرض می کنیم دو عدد حقیقی بین  $0^\circ$  و  $1^\circ$  به تصادف انتخاب شوند، مطلوب است احتمال

آنکه مجموع این دو عدد بین  $0/5^\circ$  و  $1/5^\circ$  باشد.

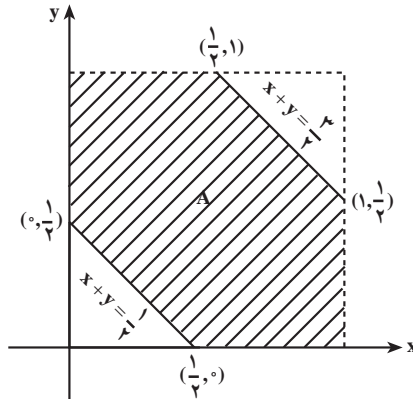
**حل:** فضای نمونه ای مناسب عبارت است از:

$$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

۱- در این قسمت فرض بر این است که احتمال روی طول، سطح و حجم یکسان توزیع شده است.

و پیشامد مطلوب مجموعه زیر است :

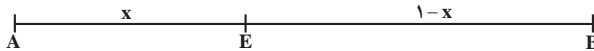
$$A = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4} < x + y < \frac{3}{4} \right\}$$



بنابراین :

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

**مثال ۴:** فرض می‌کنیم دو قطعه چوب داریم که طول‌های آنها به ترتیب ۱ و ۰/۵ متر می‌باشد. قطعه بزرگ‌تر را با آرّه دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می‌شود، احتمال اینکه سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث را بدهند، چقدر است؟  
**حل:** فرض می‌کنیم قطعه چوب یک متری، در نقطه E بریده شود که به فاصله x از یک سر چوب قرار دارد.



بنابراین فضای نمونه‌ای را می‌توان خط AB به طول ۱ متر در نظر گرفت، در اینجا پیشامد مطلوب آن است که پاره‌خط‌های AE و EB و پاره‌خط دیگر که آن را CD می‌نامیم (همان چوب به طول ۰/۵ متر) مثلی تشکیل دهند. ولی اگر سه پاره خط بخواهند تشکیل مثلث بدهند باید طول هر پاره خط از مجموع طول‌های دو پاره خط دیگر کمتر باشد یعنی :

$$AE + EB > CD$$

$$AE + CD > EB$$

$$EB + CD > AE$$

چون  $CD = \frac{1}{4}$  و  $AE = x$  و  $EB = 1-x$ ، پس داریم :

$$x + (1-x) > \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{4} > 1-x$$

$$(1-x) + \frac{1}{4} > x$$

با ساده کردن سه نامساوی بالا :

(به طور بدیهی درست است)

$$1 > \frac{1}{4}$$

$$x > \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{3}{4}$$

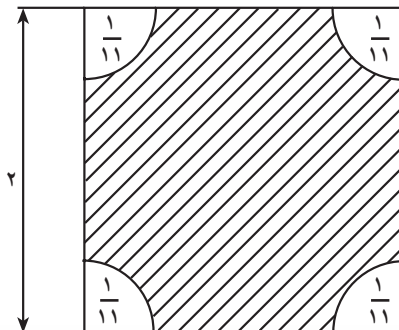
در نتیجه پیشامد مطلوب به صورت زیر قابل بیان خواهد بود :

$$A = \left\{ x \mid \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right\}$$

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

**مثال ۵ :** یک چتر باز از داخل هواپیما بر روی زمین مربع شکلی به طول ضلع ۲ کیلومتر می‌پرد.

در چهار گوشه زمین، مناطقی پوشیده از درخت وجود دارند که می‌توان آنها را به صورت ربع دایره‌هایی به شعاع  $\frac{1}{11}$  کیلومتر و به مرکز رأس‌های مربع تصور کرد (به شکل زیر نگاه کنید). اگر چتر باز در یکی از مناطق مزبور فرود بیاید چتر او به درختان گیر خواهد کرد. اگر فرض کنیم که چتر باز حتماً در نقطه‌ای از قطعه زمین مورد بحث فرود آید و با فرض اینکه مختصات مکان فرود نیز تصادفی باشد، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فرود او بدون گیر کردن به درخت‌ها انجام بگیرد.



حل: فضای نمونه‌ای مربعی به ضلع ۲ کیلومتر می‌شود و پیشامد مورد نظر مجموعه هاشور زده شده است. بنابراین احتمال برابر است با:

$$\frac{4 - \frac{\pi}{4}}{4} \approx 0.99$$

(≈ علامت تقریب است.)

یادداشت: در این مسأله احتمال اینکه چتر باز در یک نقطه فرود آید صفر است حتی احتمال اینکه چتر باز روی یک خط فرود آید صفر است، زیرا سطح این نوع مجموعه‌ها صفر می‌باشد.

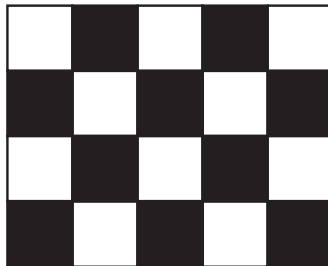
**پیشامدهایی که احتمال وقوع آنها صفر است را پیشامدهای تقریباً غیر ممکن می‌نامیم.**

**مثال ۶:** در مثال (۱۴) فصل قبل احتمال برنده شدن چقدر است؟

حل: در مثال (۱۴) فصل قبل فضای نمونه‌ای و پیشامد مطلوب را مشخص کردیم. فضای نمونه‌ای مربعی به طول ۲۵ و پیشامد مطلوب مربع کوچکی در داخل آن به طول ۵ بود. اگر A پیشامد مورد نظر باشد، احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{(5)^2}{(25)^2} = \frac{1}{25}$$

**یادداشت:** اگر سکه را به جای مربع مطرح شده در مسئله بر روی صفحه‌ای شطرنجی شکل متشکل از مربع‌های بسیار نیز پرتاب کنیم، باز احتمال آنکه سکه بر روی مرز مشترک بین هیچ دو مربعی نیفتد، برابر با مقداری خواهد بود که به دست آوردیم.



توجه این مطلب با توجه به شکل فوق بدیهی به نظر می‌رسد. مرکز سکه پرتاب شده ممکن است در داخل هر کدام از مربع‌های هم اندازه با مربع Q واقع شود

و در آن صورت همان طور که در مسئله مشاهده کردید، پیشامد ما مربع  $Q'$  خواهد بود (شکل صفحه ۷۹). بنابراین در داخل هر یک از مربع‌های بزرگ‌تر مجموعه‌ای به اندازه مربع هاشور خورده داخل آن وجود دارد که اگر سکه داخل آن بیفتد، بازی را خواهیم برد. در نتیجه اگر پیشامد آنکه سکه بر روی محیط هیچ کدام از مربع‌ها نیفتد را  $A$  بنامیم، داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت مربع‌های هاشورخورده}}{\text{مساحت کل صفحه}} = \frac{1}{25}$$

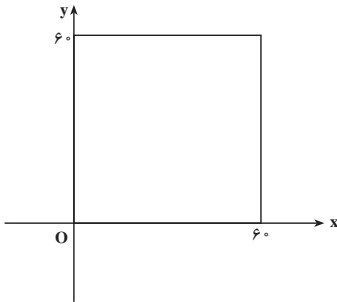
**مثال ۷:** اتوبوس‌های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یک بار به ایستگاه می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۷ تا ۷:۳۰ به یک ایستگاه وارد شود، احتمال اینکه کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند چقدر است؟ احتمال اینکه بیشتر از ۱۰ دقیقه معطل بماند تا اتوبوس برسد چقدر است؟

**حل:** چون شخص در لحظه‌ای بین ۷ تا ۷:۳۰ به ایستگاه می‌رسد، فضای نمونه‌ای مربوط به آزمایش تصادفی رسیدن به ایستگاه اتوبوس فاصله (۷:۳۰ و ۷) است. برای اینکه شخص کمتر از ۵ دقیقه منتظر اتوبوس شود باید در یکی از لحظات بین ۷:۱۰ تا ۷:۱۵ یا ۷:۲۵ تا ۷:۳۰ به ایستگاه برسد. بنابراین پیشامد مورد نظر از دو فاصله زمانی (۷:۱۵ و ۷:۱۰) و (۷:۳۰ و ۷:۲۵) تشکیل یافته است. لذا احتمال این پیشامد برابر است با  $\frac{1}{3} = \frac{10+5}{30} = \frac{1}{3}$ . برای اینکه شخص بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس بماند، باید در یکی از لحظات بین ۷ تا ۷:۵ یا ۷:۱۵ تا ۷:۲۰ به ایستگاه برسد، لذا در این حالت پیشامد مطلوب عبارت است از اجتماع دو فاصله (۷:۵ و ۷) و (۷:۲۰ و ۷:۱۵)، در نتیجه، احتمال آن برابر است با  $\frac{1}{3} = \frac{10+5}{30} = \frac{1}{3}$ . ملاحظه می‌کنید که احتمال‌های هر دو پیشامد مساوی هستند. این مطلب عجیب نیست؟

**مثال ۸:** مسئله روبرو شدن دو دوست: حسن و احمد قرار گذاشتند که هنگام بازدید از نمایشگاه کتاب یکدیگر را بین ساعت ۴ تا ۵ بعد از ظهر در بخش کتاب‌های مرجع ببینند. قرار آنها به این صورت بود که هر کدام زودتر سر قرار حاضر شد ۱۵ دقیقه منتظر دیگری بماند و بعد از آن، به بازدید از نمایشگاه ادامه دهد. با فرض اینکه زمان سر قرار رسیدن هریک به طور تصادفی بین ۴ تا ۵ بعد از ظهر است، احتمال اینکه این دو یکدیگر را ملاقات کنند، چقدر است؟

**حل:** فرض کنیم حسن  $x$  دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر و احمد  $y$  دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر سر قرار حاضر شوند، می‌توانیم زمان‌های رسیدن هریک را به صورت زوج‌های مرتب  $(x, y)$

در نظر بگیریم به طوری که  $0 < x < 60$  و  $0 < y < 60$ . عضوهای فضای نمونه‌ای، نقاط داخل مربعی به ضلع  $60$  دقیقه خواهند بود (شکل زیر).



برای اینکه حسن و احمد بتوانند یکدیگر را ملاقات کنند، باید موقع سر قرار رسیدنشان در فاصله زمانی  $15$  دقیقه از یکدیگر رخ دهد. زیرا قرار گذاشته بودند که فقط  $15$  دقیقه برای یکدیگر صبر کنند. این شرط را می‌توان با نامساوی قدرمطلق

$$|x - y| < 15$$

بیان کرد. برای مثال، اگر احمد  $14$  دقیقه بعد از حسن برسد هم‌دیگر را ملاقات می‌کنند. یعنی

$$y - x = 14$$

یا

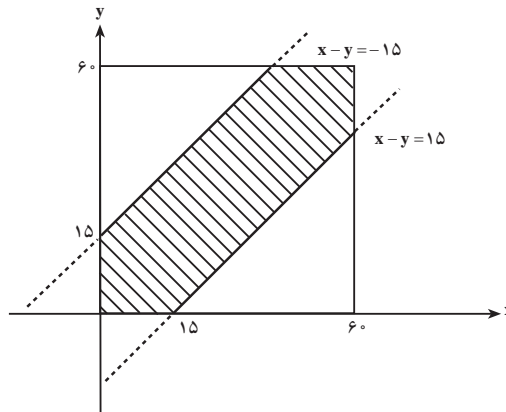
$$x - y = -14$$

$$|x - y| = 14$$

در نتیجه

بنابراین، نامساوی برقرار است.

نمودار  $|x - y| < 15$  که در داخل فضای نمونه‌ای محصور است، ناحیهٔ موفقیت را نشان می‌دهد.





اگر ناحیهٔ موفقیت (ناحیهٔ هاشور خورده) را با  $r$  و فضای نمونه‌ای را با  $R$  نشان دهیم، آنگاه احتمال مطلوب یعنی  $P(r)$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(r) = \frac{\text{مساحت ناحیه } r}{\text{مساحت مربع}}$$

$$= \frac{(\text{دو مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین به ضلع قائمه } 45) - (\text{مساحت مربع به ضلع } 60)}{60^2}$$

$$= \frac{60^2 - \left[ \frac{1}{2}(45)^2 + \frac{1}{2}(45)^2 \right]}{60^2} \cong 0.44$$

## تمرین

۱- نقطه‌ای مانند  $x$  را به طور تصادفی در بازه  $(0, 3)$  انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه داشته باشیم  $1 < x < 2/5$  را تعیین کنید.

۲- بر روی مربع  $Q$  با مشخصات  $Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  یک نقطه را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه داشته باشیم  $x \leq y \leq 1-x$  را تعیین کنید.

۳- دو نقطه را به طور تصادفی در بازه  $(0, 1)$  انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه  $|x - y| < \frac{1}{2}$  را پیدا کنید.

۴- در بازه  $[0, 1]$  دو نقطه به طور تصادفی طوری انتخاب می‌شوند که بازه را به سه پاره خط تقسیم کنند. احتمال این را پیدا کنید که سه پاره خط تشکیل یک مثلث بدهند.

۵- یک نقطه  $(x, y)$  را به طور تصادفی بر روی مثلثی به رأس‌های  $(0, 0)$ ،  $(4, 0)$  و  $(3, 2)$  انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر چیست؟

(الف)  $x < 2$       (ب)  $x < 2y$

(پ)  $(x, y)$  درون یک مستطیل به رأس‌های  $(0, 0)$ ،  $(1, 2)$ ،  $(2, 2)$  و  $(2, 0)$  قرار داشته باشد.

۶- یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌شود، مطلوب است احتمال آنکه فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد.

۷- روی محور اعداد حقیقی،  $\mathbb{R}$ ، نقاط  $a$  و  $b$  به طور تصادفی انتخاب شده‌اند به طوری که:  $-2 \leq b \leq 0$

و  $0 \leq a \leq 3$ ، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه فاصله بین  $a$  و  $b$  بزرگ‌تر از ۳ باشد.

۸- دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین  $0$  و  $2$  انتخاب می‌شوند. مطلوب است احتمال آنکه:

(الف) مجموع دو عدد کمتر از  $2$  باشد.

(ب) مجموع دو عدد بیشتر از  $1$  باشد.

(پ) مجموع دو عدد بین  $1$  و  $2$  باشد.

۹- دو عدد به طور تصادفی بین  $0$  و  $2$  انتخاب می‌شوند.

(الف) مطلوب است احتمال آنکه نسبت دو عدد مساوی  $1$  باشد.

(ب) مطلوب است احتمال آنکه نسبت دو عدد کمتر از  $1$  باشد.

(پ) مطلوب است احتمال آنکه نسبت دو عدد بین  $4/5$  و  $5/5$  باشد.

۱۰- در مثال ۴ این بخش فرض می‌کنیم پاره خط بزرگ‌تر  $AB$  برابر  $2l$  و پاره خط کوچک‌تر

$CD$  مساوی  $l$  باشد. نقطه  $E$  را به طور تصادفی روی  $AB$  انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه

$AE, EB$  و  $CD$  تشکیل یک مثلث بدهند.

۱۱- مسئله ۱۰ را در حالات زیر حل کنید.

(الف) اگر  $AB=4l$  و  $CD=l$ .

(ب) اگر  $AB=nl$  و  $CD=l$ ، که در آن  $n$  یک عدد طبیعی است.

۱۲- در عبارت  $p - q$  مقدار ضریب  $p$  را به طور تصادفی بین  $1$  و  $2$  و مقدار ضریب  $q$  را به طور

تصادفی بین  $-1$  و  $3$  انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه حاصل عبارت بالا کمتر از  $\frac{1}{4}$  باشد.

۱۳- در مثال (۵) مسئله چتر باز، به جای شعاع  $\frac{1}{11}$ ، عدد  $\frac{1}{9}$  قرار دهید و مسئله را حل کنید. در

حالت کلی مسئله را برای مربعی به ضلع  $l$  و شعاع  $R$  حل کنید.

۱۴- اتوبوس‌های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یکبار به

ایستگاه خاصی می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۸ تا ۳:۰۸ به این ایستگاه وارد شود،

احتمال اینکه کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند چقدر است؟ احتمال اینکه بیشتر از ۱۰ دقیقه صبر کند تا

اتوبوس برسد چقدر است؟

۱۵- تجربه قبلی نشان می‌دهد که هر کتاب جدید از ناشر خاصی می‌تواند بین ۴ تا ۱۲ درصد بازار

کتاب را به خود اختصاص دهد. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه کتاب بعدی این ناشر حداکثر  $6/35$

درصد بازار کتاب را به خود اختصاص دهد.

۱۶- زمان تصادفی برحسب دقیقه که حیوان خاصی نسبت به داروی خاصی عکس العمل نشان دهد بین ۲ و  $\frac{4}{3}$  دقیقه می باشد. مطلوب است احتمال اینکه عکس العمل این حیوان نسبت به آن دارو کمتر از  $\frac{3}{25}$  دقیقه طول بکشد.

۱۷- دو عدد مانند  $x$  و  $y$  به تصادف از بازه  $[0, 4]$  انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال آنکه  $|x - y| < 3$ .

۱۸- در معادله  $ax + b = 0$  ضریب  $a$  به طور تصادفی عددی در بازه  $[1, 2]$  و ضریب  $b$  نیز به طور تصادفی عددی از بازه  $[-1, 1]$  انتخاب شده است. احتمال اینکه جواب معادله بزرگ تر از  $\frac{1}{25}$  باشد چقدر است؟

۱۹- یک تاجر منتظر دو تماس تلفنی از علی و رضا است. احتمال اینکه علی در فاصله زمانی بین ۲ تا ۴ بعد از ظهر با او تماس بگیرد به اندازه احتمال تماس تلفنی رضا در همان فاصله زمانی است. احتمال در حالت های زیر را محاسبه نمایید:

(الف) علی قبل از رضا تلفن بزند؛

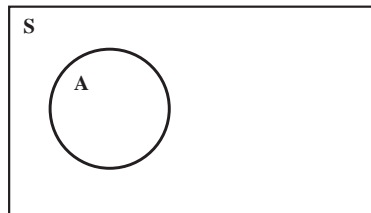
(ب) فاصله دو تماس تلفنی کمتر از  $10^\circ$  دقیقه باشد؛

(پ) علی اول تماس بگیرد، فاصله تلفن ها کمتر از  $10^\circ$  دقیقه باشد و هر دو تلفن قبل از ساعت ۳ بعد از ظهر باشد.

#### ۴-۶- قوانین احتمال

می دانیم که از تقسیم کردن اندازه پیشامد؛ یعنی طول، سطح و حجم پیشامد بر اندازه فضای نمونه ای در حالت پیوسته، احتمال به دست می آید. با توجه به اینکه فضای پیشامد  $A$  همواره زیر مجموعه فضای نمونه ای  $S$  است، پس اگر  $P(A)$  احتمال وقوع پیشامد  $A$  باشد، همیشه داریم:

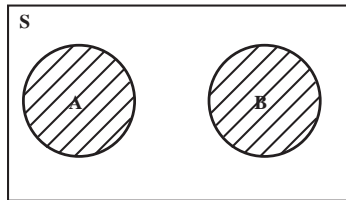
$0 \leq P(A) \leq 1$	اصل ۱
----------------------	-------



در اینجا در واقع چون  $A$  زیرمجموعه  $S$  است پس نسبت «اندازه»  $A$  به «اندازه»  $S$ ، کوچک تر یا مساوی ۱ می باشد و واضح است که وقتی مساوی ۱ است که  $A=S$ ، پس :

$P(S) = 1$	اصل ۲
------------	-------

حال اگر  $A$  و  $B$  را پیشامدهایی در فضای نمونه ای  $S$  بگیریم که هر دو با هم اتفاق نمی افتند یعنی در واقع  $A \cap B = \emptyset$ ، که در این صورت دو پیشامد را ناسازگار می نامیم، می خواهیم احتمال وقوع هر دو پیشامد  $A$  و  $B$  یعنی  $A \cup B$  را بررسی کنیم.



در واقع برای پیدا کردن  $P(A \cup B)$  می توانیم مجموع «اندازه های»  $A$  و  $B$  را بر «اندازه»  $S$  تقسیم کنیم که در نتیجه در این حالت احتمال  $A \cup B$  برابر حاصل جمع احتمال  $A$  و احتمال  $B$  خواهد بود.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B), A \cap B = \emptyset$	اصل ۳
---	-------

برای حالت گسسته با احتمال کلی نیز می توان سه اصل بالا را ثابت کرد. (این مطلب به عنوان تمرین آورده شده است.) سه اصل فوق در واقع اصول علم احتمالات هستند که نخستین بار ریاضی دان برجسته آندره کولموگروف<sup>۱</sup> در سال ۱۹۳۳ آنها را بیان کرد و علم احتمالات را مبتنی بر یک دستگاه اصولی مدون ساخت. حال می توان به کمک این سه اصل بقیه قوانین احتمال را استنتاج نمود.

**قضیه ۱:** اگر  $A, B, C$  سه پیشامد دو بدو مجزا باشند، یعنی اشتراک هر جفت از آنها تهی باشد، آن گاه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

برهان : با استفاده از خاصیت شرکت پذیری مجموعه ها داریم :

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \quad (۱)$$


در رابطه فوق  $A \cup B$  و  $C$  مجموعه های از هم جدا هستند زیرا :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

<sup>۱</sup> - A. Kolmogorov

بنابراین رابطه (۱) را به این صورت می توان نوشت :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] \\ &= P(A \cup B) + P(C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \end{aligned}$$

رابطهٔ اخیر به واسطهٔ  $A \cap B = \emptyset$  برقرار است. 

**قضیه ۲:** اگر داشته باشیم  $A \subseteq B$ ، آنگاه


$$P(A) \leq P(B) \text{ (الف)}$$

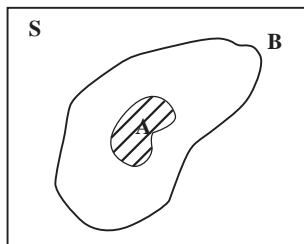
$$P(B - A) = P(B) - P(A) \text{ (ب)}$$

برهان: می دانیم که  $B = (B - A) \cup A$ . (به شکل زیر رجوع کنید). همچنین  $A$  و  $B - A$  از هم جدا هستند، زیرا  $A \cap (B - A) = \emptyset$ . بنابراین طبق اصل ۳ احتمال  $P(B) = P(B - A) + P(A)$ . حال

اثبات (الف) چون  $P(B - A) \geq 0$  بنابراین  $P(A) \leq P(B)$ ؛

اثبات (ب)  $-P(A)$  را به دو طرف تساوی فوق اضافه می کنیم و به دست می آوریم.

$$\text{ } P(B - A) = P(B) - P(A)$$



توجه: در قضیهٔ ۲، شرط  $A \subseteq B$  لازم است و بدون آن نتایج (الف) و (ب) در حالت کلی برقرار

نیستند. مثلاً تاس سالمی را می ریزیم. پیشامدهای

$A =$  «عدد تاس بیشتر از ۵ نباشد»

$B =$  «عدد تاس زوج باشد»

را در نظر می گیریم. در این صورت  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B = \{2, 4, 6\}$  می باشد. روشن است که

$A \not\subseteq B$ ،  $A - B = \{1, 3, 5\}$  و داریم:

$$P(A) = \frac{5}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A - B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) - P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = P(A - B)$$

بنابراین

و (ب) برقرار نیست. همچنین نامساوی (الف) نیز در این حالت برقرار نیست. به طور کلی دلیلی ندارد که برای دو پیشامد داده شده  $A$  و  $B$ ، همواره  $P(A)$  کوچک تر یا مساوی  $P(B)$  باشد.

حال اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامدی باشند که  $A \cap B \neq \emptyset$  یعنی مجزا از یکدیگر نباشند، احتمال وقوع  $A \cup B$  یعنی  $P(A \cup B)$  چه مقداری خواهد بود؟ با توجه به رابطه زیر

$$A \cup B = (A - A \cap B) \cup (B - A \cap B) \cup (A \cap B)$$

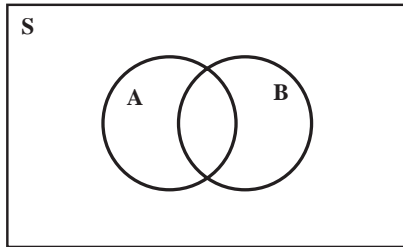
که به کمک نمودار و قابل بررسی است. و از طرف دیگر چون  $(A - A \cap B)$ ،  $(B - A \cap B)$  و  $(A \cap B)$  مجزا از یکدیگرند در نتیجه:

$$P(A \cup B) = P(A - A \cap B) + P(B - A \cap B) + P(A \cap B)$$

ولی چون  $A \cap B \subset A$  و  $A \cap B \subset B$ ، پس:

$$P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$



حال با جایگذاری دو رابطه اخیر در رابطه قبلی نتیجه می شود:

**قضیه ۳:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد در فضای نمونه ای  $S$  باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حال به دو مثال توجه می کنیم:

**مثال ۱:** اگر احتمال وجود تلویزیون رنگی در یک خانه  $41\%$ ، سیاه و سفید  $85\%$  و از هر دو نوع  $32\%$  باشد، احتمال اینکه در این خانه لااقل یکی از دو نوع تلویزیون موجود باشد، چقدر است؟

**حل:** اگر  $A$  پیشامد وجود تلویزیون رنگی،  $B$  وجود تلویزیون سیاه و سفید و  $C$  وجود هر دو نوع تلویزیون باشد، طبق فرض داریم:

$$P(A) = 0.41, P(B) = 0.85, P(C) = 0.32$$

حال با استفاده از قضیه (۳) می نویسیم:

$$P(A \cup B) = 0.85 + 0.41 - 0.32$$

$$= 1.26 - 0.32 = 0.94$$

**مثال ۲:** احتمال اینکه شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد،  $0.23$ ، ناراحتی قلبی داشته باشد  $0.24$  و دست کم یکی از این دو نوع بیماری را داشته باشد  $0.38$  است. احتمال اینکه هر دو نوع بیماری را دارا باشد چقدر است؟

**حل:** اگر  $A$  پیشامد بیماری کلیوی داشتن و  $B$  پیشامد بیماری قلبی داشتن باشد، طبق فرض داریم:

$$P(A) = 0.23$$

$$P(B) = 0.24$$

$$P(A \cup B) = 0.38$$

بنابراین:

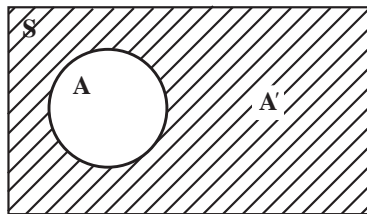
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.09$$

فرض کنید  $A$  پیشامدی در فضای نمونه‌ای  $S$  باشد، یعنی  $A \subset S$ ، مکمل  $A$  نسبت به  $S$  را که با  $A'$  نشان می‌دهیم پیشامد مکمل  $A$  می‌نامیم. در واقع رخ دادن  $A'$  به معنای رخ ندادن پیشامد  $A$  است. اجتماع  $A$  و  $A'$  برابر فضای نمونه‌ای  $S$  است ولی از طرف دیگر  $A$  و  $A'$  مجزا از یکدیگرند یعنی  $A \cap A' = \emptyset$ ، پس داریم:

$$P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(S) = 1$$

در نتیجه:

$$P(A') = 1 - P(A)$$



**مثال ۳:** قبلاً احتمال اینکه  $n$  نفر در یک میهمانی روز تولد متفاوتی داشته باشند را محاسبه

کرده‌ایم:

$$P(A) = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

که  $A$  همان پیشامد روزهای تولد متفاوت برای  $n$  نفر بود. حال اگر بخواهیم احتمال اینکه حداقل دو نفر روز تولد یکسانی داشته باشند را پیدا کنیم چون پیشامد یکسان بودن روز تولد حداقل دو نفر، متمم پیشامد  $A$  است، پس

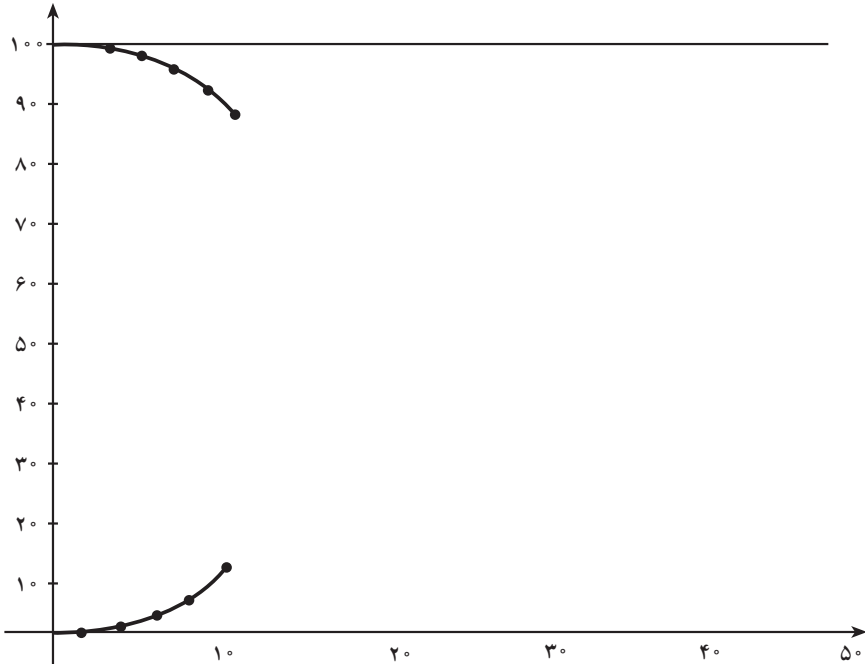
$$P(A') = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

احتمال‌های اینکه حداقل دو نفر در یک گروه موجود باشند که روز تولدشان یکسان باشد و نیز اینکه هیچ دو نفری روز تولد یکسان نداشته باشند در صفحه بعد آورده شده است. هر کدام از این احتمال‌ها به نزدیک‌ترین درصد گرد شده است.



تعداد افراد در گروه	احتمال متفاوت بودن همه روز تولدها	احتمال وجود دو نفر با روز تولد یکسان
۲	%۱۰۰	%۰
۴	%۹۸	%۲
۶	%۹۶	%۴
۸	%۹۳	%۷
۱۰	%۸۸	%۱۲
۱۲	%۸۳	%۱۷
۱۴	%۷۸	%۲۲
۱۶	%۷۲	%۲۸
۱۸	%۶۵	%۳۵
۲۰	%۵۹	%۴۱
۲۲	%۵۲	%۴۸
۲۴	%۴۶	%۵۴
۲۶	%۴۰	%۶۰
۲۸	%۳۵	%۶۵
۳۰	%۲۹	%۷۱
۳۲	%۲۵	%۷۵
۳۴	%۲۰	%۸۰
۳۶	%۱۷	%۸۳
۳۸	%۱۴	%۸۶
۴۰	%۱۱	%۸۹
۴۲	%۹	%۹۱
۴۴	%۷	%۹۳
۴۶	%۵	%۹۵
۴۸	%۴	%۹۶
۵۰	%۳	%۹۷

حال اگر این جدول را روی نموداری که محور x های آن نماینده تعداد اعضای موجود در گروه و محور y های آن درصد احتمال های مزبور به ترتیب مشخصی باشد، پیاده کنیم، نمودار زیر را به دست می آوریم.



لازم به تذکر است که با توجه به مثال ۷ بخش ۹-۱، وقتی  $n > ۳۶۵$  است  $P(A) = ۰$  خواهد بود. در مورد جدول و نمودار بالا یک تمرین در تمرین ها آورده شده است.

**مثال ۴:** از مجموعه اعداد  $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰۰۰\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال

اینکه عدد انتخابی بر ۳ یا بر ۵ یا هر دو بخش پذیر باشد چقدر است؟

**حل:** تعداد اعداد صحیح بین ۱ و  $N$  که بر  $k$  بخش پذیرند از تقسیم  $N$  بر  $k$  و سپس  $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$  به دست

می آید (به مثال ۶ در قسمت ۴-۱ مراجعه کنید). بنابراین اگر  $A$  پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر

$۳$  و  $B$  پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر  $۵$  باشد، آنگاه

$$P(A) = \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$$

$$P(B) = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}$$

و  $A \cap B$  پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر هر دو عدد ۳ و ۵ است. برای محاسبه احتمال پیشامد  $A \cap B$ ، چون ۳ و ۵ نسبت به هم اول هستند پس اگر عددی بر ۳ و ۵ بخش پذیر باشد، بر ۱۵ نیز بخش پذیر است. برعکس، اگر عددی بر ۱۵ بخش پذیر باشد، هم زمان بر ۳ و ۵ نیز بخش پذیر است.

$$P(A \cap B) = \frac{\left[ \frac{1000}{15} \right]}{1000} = \frac{66}{1000} \quad \text{بنابراین}$$

در نتیجه بنا به قضیه ۳، احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{467}{1000}$$

**مثال ۵:** با توجه به مثال ۴ و قضیه ۳، برای محاسبه احتمال سه پیشامد یعنی  $P(A \cup B \cup C)$

فرمولی پیدا کنید.

حل: بر اساس خواص مجموعه‌ها داریم

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

$$P[(A \cup B) \cup C] = P[(A \cup B) \cup C]$$

و در نتیجه

اگر  $A \cup B$  را یک مجموعه فرض کنیم، آنگاه از قضیه ۳ خواهیم داشت:

$$P[(A \cup B) \cup C] = P[(A \cup B)] + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] \quad (۱)$$

اما مجدداً از قضیه ۳ به دست می‌آوریم

$$P[(A \cup B)] = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۲)$$

و طبق خاصیت بخش پذیری اشتراک نسبت بر اجتماع

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

اما طبق قضیه ۳

$$P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$

$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]$$

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

چون

$$P[(A \cup B) \cap C] = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

پس

(۳)

از جایگذاری رابطه‌های (۲) و (۳) در رابطه (۱) نتیجه می‌شود

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

در این مثال و قضیه ۳ می‌بینید که بعضی از احتمال‌ها جمع می‌شوند و بعضی دیگر، از مجموع احتمال‌ها، کم می‌شوند. جمع و تفریق احتمال‌ها اصل شمول و عدم شمول نامیده می‌شود. در واقع، «شمول» مربوط به احتمال‌هایی است که جمع می‌شوند و عدم شمول مربوط به احتمال‌هایی است که کم می‌شوند.

با استفاده از قضیه ۳ و مثال ۵ می‌توان اصل شمول و عدم شمول را در حالت کلی (برای  $n$  پیشامد) یعنی  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$  به دست آورد.

برای این کار، ابتدا همه اشتراک‌های ممکن پیشامدهای  $A_1, A_2, \dots, A_n$  را پیدا کرده و احتمال آنها را به دست می‌آوریم. پس از آن، احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد فردی از پیشامدها هستند را با علامت مثبت و احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد زوجی از پیشامدها هستند را با علامت منفی به آنها اضافه می‌کنیم که به این فرایند، اصل شمول و عدم شمول می‌گوییم. تمرین زیر، به پیدا کردن این الگو کمک می‌کند.

**تمرین:** اصل شمول و عدم شمول را برای ۴ پیشامد اثبات کنید.

**مثال ۶:** فرض کنید ۲۰٪ مردم یک شهر روزنامه الف، ۲۵٪ روزنامه ب، ۱۳٪ روزنامه پ، ۱۰٪ روزنامه‌های الف و ب، ۸٪ روزنامه‌های الف و پ، ۵٪ روزنامه‌های ب و پ و بالاخره ۴٪ هر سه روزنامه را می‌خوانند.

احتمال اینکه شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود که هیچ یک از این روزنامه‌ها را نخواند، چقدر است؟

**حل:** اگر  $E, F$  و  $G$  به ترتیب پیشامدهای خواندن روزنامه‌های الف، ب و پ باشد، پیشامد اینکه فرد انتخاب شده دست کم یکی از روزنامه‌های الف، ب و پ را بخواند،  $E \cup F \cup G$  است. در نتیجه احتمال اینکه فرد انتخاب شده هیچ یک از روزنامه‌ها را نخواند، برابر  $1 - P(E \cup F \cup G)$  است. پس طبق اصل شمول و عدم شمول

$$\begin{aligned} P(E \cup F \cup G) &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) \\ &\quad - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G) \\ &= 0/25 + 0/20 + 0/13 - 0/10 - 0/08 - 0/05 + 0/04 = 0/39 \end{aligned}$$

بنابراین، احتمال مطلوب برابر است با :

$$1 - 0/39 = 0/61$$

## تمرین

۱- برای انتخاب یک نفر جهت عضویت در انجمن خانه و مدرسه یک دبیرستان، چهار نفر کاندید شده‌اند. اگر احتمال انتخاب شدن A دو برابر احتمال انتخاب شدن B باشد و B و C شانس برابر در انتخاب شدن داشته باشند، ولی احتمال انتخاب شدن C دو برابر احتمال انتخاب شدن D باشد، مطلوب است :

الف) احتمال اینکه C موفق به انتخاب شود؛

ب) A موفق به انتخاب نشود.

۲- یک شرکت بازرگانی فقط به یک کارمند نیاز دارد. از بین متقاضیان خانم اکبری، خانم معینی و خانم حیدری واجد شرایط هستند. به دلیل مهارت‌های حرفه‌ای خانم معینی، احتمال اینکه ایشان استخدام شوند ۲۰٪ بیشتر از خانم اکبری و ۲۰٪ بیشتر از خانم حیدری است. احتمال اینکه خانم معینی استخدام شود چقدر است؟

۳- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید :

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{الف)}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \quad \text{ب)}$$

۴- سه خاصیت احتمالات را برای فضاهای گسسته ثابت کنید.

۵- آمار نشان می‌دهد که در یکی از شهرهای بزرگ، ۲۵٪ جرائم در طول روز و ۲۰٪ جرائم در درون شهر صورت می‌گیرد. اگر تنها ۲۰٪ جرائم در حومه شهر و در طول روز اتفاق بیفتند، در این صورت چند درصد جرم‌ها درون شهر و در طول شب رخ می‌دهند؟ چند درصد جرم‌ها در حومه شهر و در طول شب اتفاق می‌افتد؟

۶- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S داریم :  $P(A) = P(B) = 1/2$ ، نشان دهید :

$$P(A \cap B) = 1/4$$

۷- فرض کنیم که شخصی از شهر اصفهان دیدن کند، احتمال اینکه از عالی قاپو بازدید کند ۷۴/۰، احتمال اینکه از بازار اصفهان بازدید کند ۷۰/۰، احتمال اینکه از مسجد جامع بازدید کند ۶۴/۰، احتمال اینکه از عالی قاپو و بازار هر دو دیدن کند ۴۶/۰، احتمال اینکه بازار اصفهان و مسجد

جامع را ببیند  $0/44$  و احتمال اینکه از عالی قاپو و مسجد جامع دیدن کند  $0/72$  است. احتمال اینکه به بازدید هر سه مکان برود  $0/34$  است. احتمال اینکه این شخص لا اقل یکی از این سه مکان را دیدن کند چقدر است؟

۸ - نشان دهید که :

$$P(A) \geq P(A \cap B) \quad (\text{الف})$$

$$P(A) \leq P(A \cup B) \quad (\text{ب})$$

۹ - با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید اگر  $A_1, A_2, \dots, A_n$  n پیشامد دو به دو مجزا باشند، آنگاه :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

۱۰ - با استفاده از قضیه ۳ ثابت کنید که برای دو پیشامد دلخواه A و B

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

۱۱ - جدول و نمودار مربوط به روز تولد را به یاد بیاورید و به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) نقطه برخورد دو نمودار بالا و پایین چه اهمیتی دارد ؟

اگر نمودار را به راست ادامه دهیم :

ب) نمودار مربوط به وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می کند؟

پ) نمودار مربوط به عدم وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می کند؟

۱۲ - عددی به تصادف از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  انتخاب می کنیم. احتمال اینکه :

الف) عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، اما بر ۵ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟

ب) عدد انتخابی نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

۱۳ - از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  عددی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه عدد

انتخابی بر ۴ بخش پذیر و بر ۵ و ۷ بخش پذیر نباشد چقدر است؟

۱۴ - رابطه های زیر همیشه درست نیستند. برای اثبات این ادعا، برای هر حالت یک مثال نقض

بزنید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{الف})$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (\text{ب})$$

۱۵ - تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است که از این افراد، ۳۷ نفر مرد و ۲۰ نفر برای عمل

جراحی بستری شده اند. اگر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی مرد باشند، در این صورت

چند نفر از ۶۳ بیمار نه مرد هستند و نه برای عمل جراحی بستری شده‌اند.

۱۶-  $A, B$  و  $C$  سه پیشامد هستند. ثابت کنید رابطه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

درست است اگر و تنها اگر رابطه زیر درست باشد:

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0$$

۱۷- ثابت کنید

$$P(A \cap B \cap C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

۱۸- به کمک استقرای ریاضی، نامساوی تمرین ۱۷ را برای  $n$  پیشامد ثابت کنید.

- ۱- شووینگ تی - لین ویو - فنگ لین. نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن، (ترجمه: حمید رسولیان). مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۸.
- ۲- ایان استیوارت - دیوید تال. مبانی ریاضیات (ترجمه: محمدمهدی ابراهیمی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۵.
- ۳- مصاحب، غلامحسین. آنالیز ریاضی، جلد اول، مؤسسه انتشارات فرانکلین، تهران، ۱۳۴۸.
- ۴- ظهوری زنگنه، بیژن؛ گویا، مریم؛ گویا، زهرا؛ دوره های کوتاه مدت عملی یا کارگاهی آموزش ریاضی، اداره کل آموزش های ضمن خدمت، تهران، ۱۳۷۲.
- ۵- پولیا، جورج. چگونه مسئله را حل کنیم. (ترجمه: احمد آرام). انتشارات کیهان، تهران، چاپ دوم، ۱۳۶۹.
- ۶- چانک، کای، لای. نظریه مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی، (ترجمه: ابوالقاسم میامتی، قاسم وحیدی)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵.
- ۷- فروند، جان. و. والبول، رونالد. آمار ریاضی، (ترجمه: علی عمیدی و محمد قاسم وحید اصل) مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۱.
- ۸- بلایس، تی. اس. رابرتسون، ای. اف. جبر به روش تمرین، (ترجمه: حسین دوستی) ناشر مبتکران، تهران، ۱۳۷۰.
- ۹- لیانگ شین هان، اعداد مختلط و هندسه، (ترجمه: محمد بهفروزی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۶.
- ۱۰- جهانی پور، روح الله. احتمال (جلد دوم)، از سری کتاب های موضوعی انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۹.
- ۱۱- قهرمانی، سعید. مبانی احتمال (ترجمه: غلامحسن شاهکار و ابوالقاسم بزرگ نیا)، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۷.
- ۱۲- راس، شلدون، مبانی احتمال، (ترجمه: علی همدانی و احمد پارسیان)، انتشارات شیخ بهایی، ۱۳۷۵.
- 13- Albert D. polimeni H. Joseph. **Straight Foundations. of Discrete. Mathematics.** State University of New York-Fredonia 1990.
- 14- Billstein R., Libeskind, S., Lott J., **A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers**, (2nd ed.) Benjamin-Cummings Publish. Co. 1904.
- 15- Churchill R. V. , Brown J. W. , Verhey R. F. , **Complex Variables and Applications**, Mc-Graw Hill 1990.
- 16- Feller, W. **An Introduction to Probability Theory and its Applications**, John Wiley & Sons, 1968.
- 17- Graham R., Knuth D., Pathshinik O., **Concrete Mathematics**, Addison-Wesley 1989.
- 18- Jacob. H. R. **Mathematics, a human endeavor**, W. H. Freeman, (1982 2nd ed.)
- 19- Larson L. C. , **Problem Solving Through Problems**, Springer Verlag, 1983.
- 20- Ghahramani, S. **Fundamentals of probability**, Prentic-Hall, Inc, (2000 2nd ed.)
- 21- Grimmett G., Stirzaker D., **Probability and random processes**. Clarendon press. Oxford, 1982

