

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول‌درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.



بانک سلول‌های بنیادی رویان



درس اول ریشه و توان

درس دوم ریشه ام

درس سوم توان‌های گویا

درس چهارم عبارت‌های جبری

درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال $\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$ ؛ همچنین $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$. علامت \Rightarrow به این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به طور خلاصه با علامت \Leftrightarrow نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$.

فعالیت

۱ اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

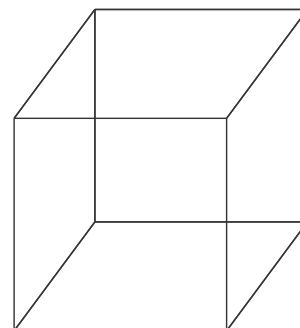
$$\begin{array}{ll} (-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3 & \sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81 \\ (-5)^3 = -125 \Leftrightarrow & \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ 2^4 = 16 \Leftrightarrow & \sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow \\ 11^2 = 121 \Leftrightarrow & \sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow \\ (0/25)^2 = 0/625 \Leftrightarrow & \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \\ (0/5)^2 = 0/25 \Leftrightarrow & \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \end{array}$$

۲ در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	۸	۲۷	-۲۷				۱۰۰۰	۷۲۹
ریشه سوم			-۳	۵	-۱۰	۱۵		

کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.



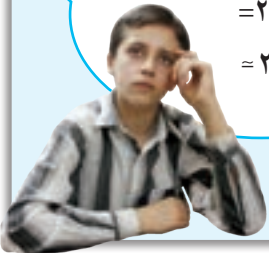
طول ضلع	۱	۲		۴		۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷			۱۲۵

دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به دست آورده‌اند: روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

احمد: چون $3^3 = 27$ و $2 < \sqrt[3]{25} < 3$ ، پس $8 < 25 < 27$
بهتر است $\frac{2}{8}$ را امتحان کنم
آیا $(\frac{2}{8})^3 = 25$ ؟
 $(\frac{2}{8})^3 = (\frac{2}{8})^2 \times \frac{2}{8}$
 $= \frac{21}{952}$
 $= 22$



محسن: 25 به 27 نزدیک‌تر است تا 8 ، پس بهتر است عدد $\frac{2}{9}$ را امتحان کنم.
 $(\frac{2}{9})^3 = (\frac{2}{9})^2 \times \frac{2}{9}$
 $= \frac{24}{389}$
 $= \frac{24}{4}$



دبیر: ریشه سوم 25 تقریبی به دست می‌آید و می‌توانیم به صورت تقریبی آن را برابر $\frac{2}{9}$ بگیریم.

$$\sqrt[3]{25} \approx \frac{2}{9}$$

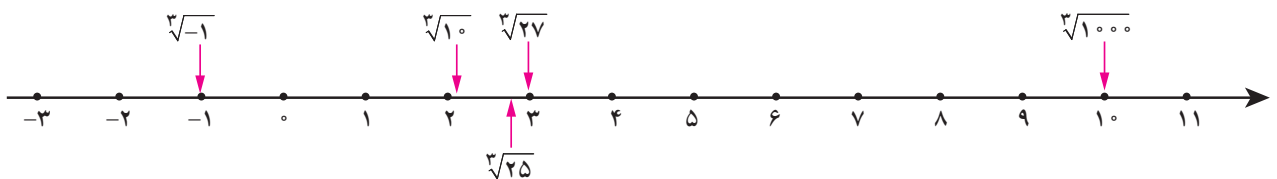
احمد: مقدار دقیق $\sqrt[3]{25}$ چقدر است؟

دبیر: $\sqrt[3]{25}$ یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید، می‌توانید مقدار تقریبی دقیق‌تری برای آن به دست آورید، اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به همین علت برای نمایش مقدار دقیق آن از نماد $\sqrt[3]{25}$ استفاده می‌کنیم.

اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می‌دهد و عدد دقیق‌تری برای ریشه سوم 25 حاصل می‌شود.

$\sqrt[3]{25}$ برای نمایش مقدار دقیق ریشه سوم 25 به کار می‌رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند $\frac{2}{9}$ ، $\frac{2}{92}$ و $\frac{2}{924}$ کار می‌کنیم.

ریشه عددها را می‌توانیم به‌طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt[3]{1} \qquad \sqrt[3]{3} \approx 1/4 \qquad \sqrt[3]{4} = \qquad \sqrt[3]{125} = \qquad \sqrt[3]{-8} =$$



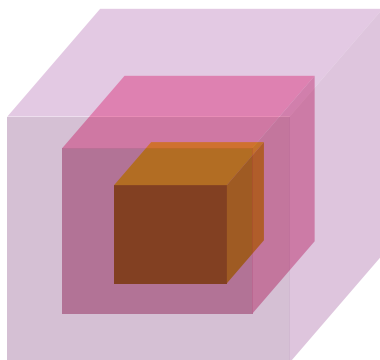
۳) مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:
الف) چون $۳۶ < ۳۰ < ۲۵$ پس $۶ < \sqrt{۳۰} < ۵$. همچنین چون $۸ < ۵ < ۱$ پس $۲ < \sqrt[۳]{۵} < ۱$.

ب) $\square < \sqrt{۷} < \square$ پ) $\square < \sqrt{۱۰} < \square$

ت) $\square < \sqrt[۳]{-۱۷} < \square$ ث) $\square < \sqrt[۳]{۲۰} < \square$

۴) زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف) $۴ < \sqrt{\quad} < ۵$ ب) $۹ < \sqrt[۳]{\quad} < ۱۰$



۵) سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

فعالیت

۱) مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشه‌های چهارم را تعریف کرد. با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی داریم:

$$\begin{array}{l} ۲^۴ = ۱۶ \\ (-۲)^۴ = ۱۶ \end{array} \Rightarrow \text{ریشه‌های چهارم} \begin{array}{l} \nearrow ۲ \\ \searrow -۲ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ۵^۴ = ۶۲۵ \\ (-۵)^۴ = ۶۲۵ \end{array} \Rightarrow \text{ریشه‌های چهارم} \begin{array}{l} \nearrow ۵ \\ \searrow -۵ \end{array}$$

$\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی مثبت و برابر است با ریشه‌های چهارم مثبت عدد ۶۲۵؛ یعنی $\sqrt[۴]{۶۲۵} = ۵$. همچنین $\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی منفی است و برابر است با ریشه‌های چهارم منفی عدد ۶۲۵؛ یعنی $\sqrt[۴]{۶۲۵} = -۵$.
آیا -۱۶ ریشه‌های چهارم دارد؟ آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر -۱۶ شود؟ اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای ریشه‌های چهارم است که یکدیگرند.
عددهای منفی ریشه‌های چهارم ندارند.

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶		۶۲۵		۱۰,۰۰۰		۳۱۲۵		
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵			$5\sqrt[4]{5}$		

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲		۷۱	-۲۴۳		۱۹	
ریشه پنجم	-۲	۵			-۱	-۱۰	

۳ ریشه پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟

۴ محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{\frac{1}{1000000}} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$$

$$\sqrt[5]{-32} =$$

$$\sqrt[5]{-0.00032} =$$

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن است.

تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16}$$

$$\sqrt{20}$$

$$-\sqrt{35}$$

$$\sqrt{75}$$

$$\sqrt[3]{-8}$$

$$\sqrt[3]{20}$$

$$\sqrt[3]{-90}$$

$$\sqrt[3]{250}$$

$$\sqrt[4]{16}$$

$$-\sqrt[4]{20}$$

$$-\sqrt[4]{12}$$

$$\sqrt[4]{400}$$

$$\sqrt[5]{1}$$

$$\sqrt[5]{-32}$$

$$\sqrt[5]{400}$$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{25}$$

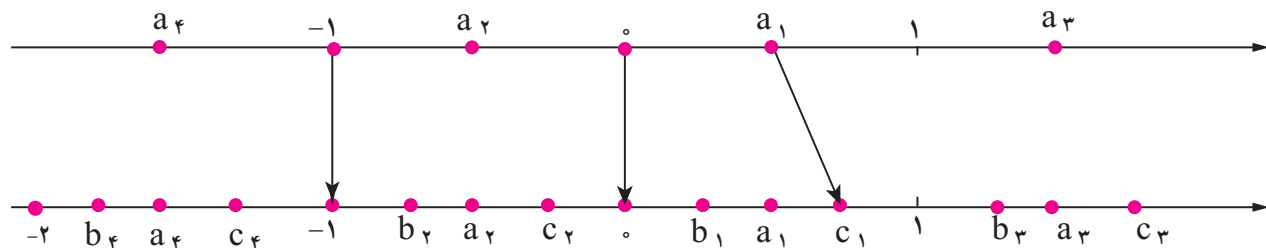
$$\sqrt[3]{7/25}$$

$$\sqrt[5]{16}$$

$$\sqrt[5]{64}$$

$$\sqrt[4]{90}$$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

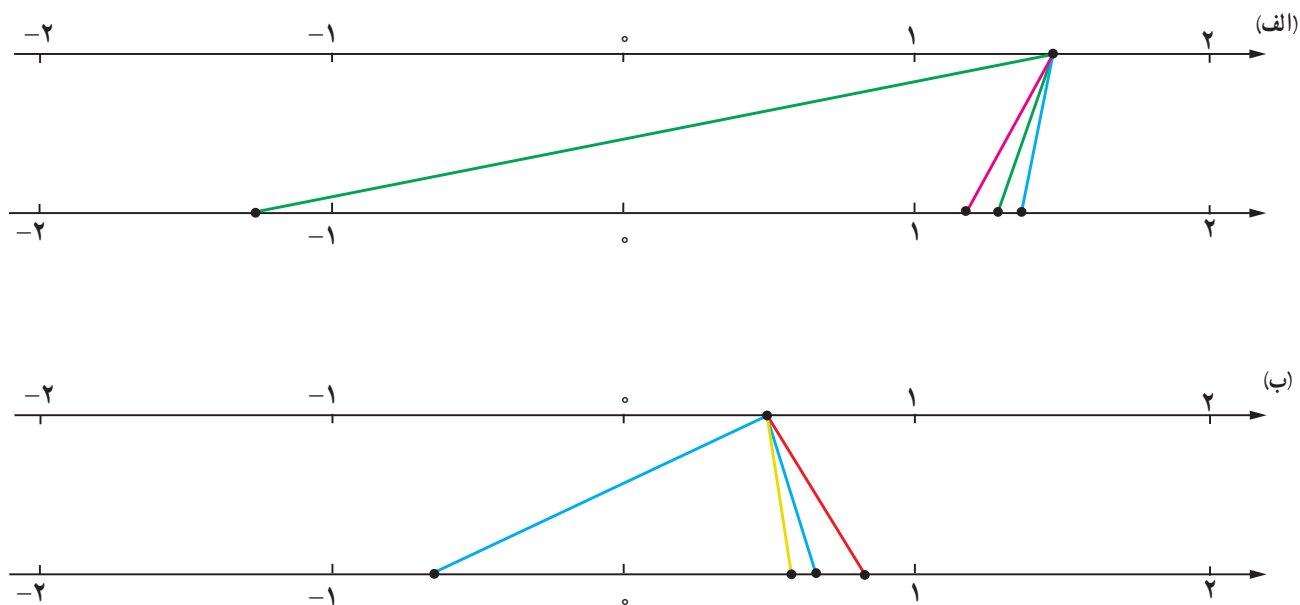
(الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. چه عددی می‌تواند باشد؟

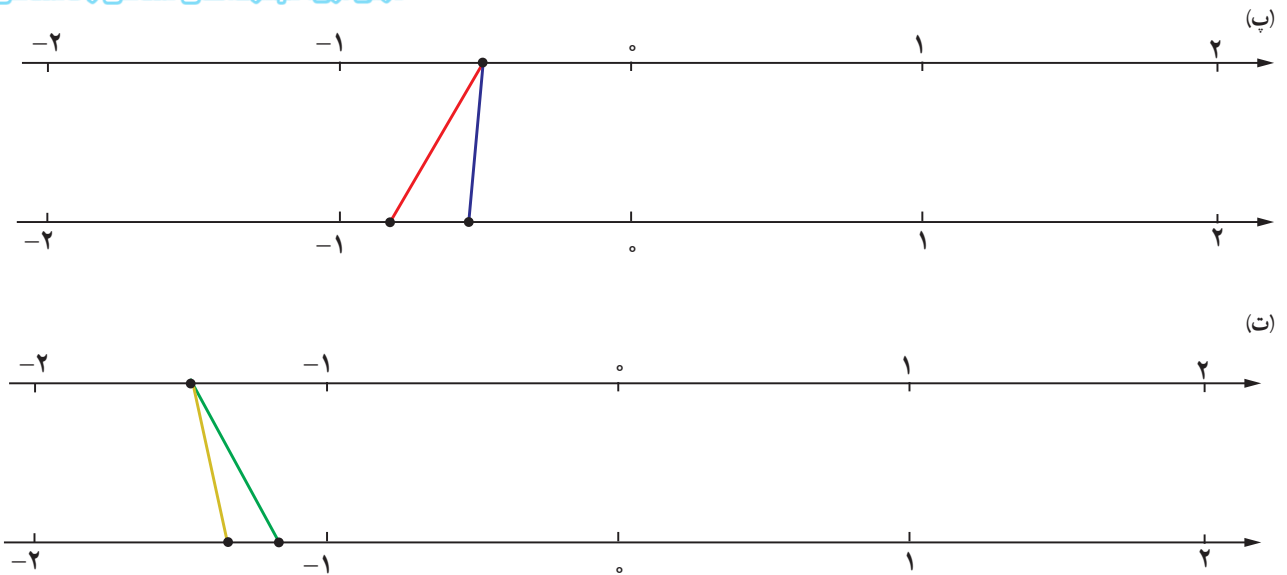
(ب) a عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.





۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ریشه‌های چهارم عدد می‌باشند.

ب) اگر $\sqrt[4]{16} = a$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^2 + 5$ را بیابید.

۷ می‌دانیم $\sqrt[5]{161051} = 11$ ، $\sqrt[5]{1700000}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۸ در جاهای خالی یکی از علامت‌های «>» ، «<» یا «=» را قرار دهید.

$(-0/1)^5 \bigcirc (-0/1)^3$

$(0/1)^5 \bigcirc (0/1)^3$

$2^5 \bigcirc 2^2$

$(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$

$(-2)^5 \bigcirc (-2)^3$

$\sqrt[5]{0/000001} \bigcirc 0/1$

۹ قرار دهید $\sqrt[5]{a} = \square$. اکنون با توجه به تعریف مشخص کنید \square^5 برابر چه عددی است؟ بنابراین داریم $(\sqrt[5]{a})^5 = \dots$ دربارهٔ $(\sqrt[4]{a})^4$ چه می‌توان گفت؟

خواندنی



حنا - نخستین بزغاله
نسبیه‌سازی شده خاورمیانه



پایا - نخستین گوساله
نسبیه‌سازی شده خاورمیانه

سلول، واحد تشکیل دهنده بافت‌های بدن است. هر بافت سلول‌های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می‌تواند به سلول‌های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول‌ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول‌های بدن را دارد. دانشمندان می‌گویند این سلول‌ها می‌توانند امکان معالجه بیماری‌هایی را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان‌های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول‌های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست‌شناسی و پزشکی است. این سلول‌ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می‌شود. پیشرفت در زمینه سلول‌های بنیادی تنها متکی بر علم پزشکی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند پلیمر، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول‌های بنیادی پیشرفت‌های چشمگیری داشته‌اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول‌های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می‌شود.

درس دوم: ریشه نام

فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشه ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های دوم	ریشه سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌های ششم	ریشه هفتم	ریشه‌های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ و $-\sqrt{64} = -8$		$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[5]{64}$			

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ یا همان و هستند؛ زیرا $2^6 = 64$ و $(-2)^6 = 64$.
 درباره ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟
 به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$ ، درباره ریشه نام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟
 در حالت کلی تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$ ، درباره تعداد ریشه‌های نام a چه می‌توان گفت؟

۲ جدول زیر را که درباره ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشه دوم	ریشه سوم	ریشه چهارم	ریشه پنجم	ریشه ششم	ریشه هفتم	ریشه هشتم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$			

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان برسد و مساوی ۶۴- شود.
 درباره ریشه‌های نام ۶۴- ($n \in \mathbb{N}$) بحث کنید.

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، درباره ریشه نام a چه می‌توان گفت؟

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه نام n عدد a می‌نامیم. هرگاه $b^n = a$

$a > 0$	n زوج	a دارای دو ریشه نام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a = 81$ $n = 4$	۸۱ دارای دو ریشه چهارم $\sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است
	n فرد		$a =$ $n =$	
$a < 0$	n زوج	ریشه نام وجود ندارد	$a =$ $n =$	
	n فرد		$a =$ $n =$	

کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\begin{array}{cccc} \sqrt[3]{125} = & \sqrt[5]{-32} = & \sqrt[3]{128} = & \sqrt[4]{256} = \\ \sqrt[9]{-1} = & \sqrt[4]{625} = & -\sqrt[4]{16} = & \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \\ \sqrt[7]{-128} = & \sqrt[3]{-0.001} = & -\sqrt{1} = & \sqrt[6]{0} = \end{array}$$

۲ الف) می دانید که $\sqrt{x^2} = |x|$ درباره $\sqrt[4]{x^4}$ چه حدسی می زنید؟ درستی حدس خود را درباره چند عدد آزمایش کنید.

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[4]{(-3)^4} = -3 & \sqrt[5]{35} = 3 & \sqrt[6]{(-2)^6} = -2 \\ \sqrt[4]{(-3)^4} = 3 & \sqrt[5]{(-3)^5} = -3 & \sqrt[6]{(-2)^6} = 2 \end{array}$$

پ) به طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n} = \dots\dots\dots$ ؛ و اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = \dots\dots\dots$ ،

ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$$

ث) در قسمت (ت) تساوی به ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟

شعاعیت

در سال نهم دیدید که:

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab} \quad \text{برای هر دو عدد } a \text{ و } b$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{برای هر دو عدد مثبت } a \text{ و } b$$

آیا رابطه بالا درباره $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ نیز برقرار می باشد؟ مثال بزنید.

با توجه به اینکه $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ یک عدد زوج است، باید a و b باشند.

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{\dots\dots\dots} = 6$$

درباره $\sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{ab}$ چه می‌توان گفت؟

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ مثالی از a و b مثبت و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است. به‌طور کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & a, b > 0 \text{ و } n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{ab} & a, b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد} \end{cases}$$

قرارداد: به‌طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم:

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عددهای منفی بی‌معنا هستند. پس هرگاه \sqrt{x} نوشتیم، از آن می‌فهمیم که $x \geq 0$ است. تساوی‌های فوق را می‌توان به‌صورت مقابل نمایش داد:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

کار در کلاس

۱) آیا $\sqrt[5]{2^5}$ و $\sqrt[3]{2^5}$ با هم برابرند؟ درباره $(\sqrt[4]{-2})^4$ و $\sqrt[4]{(-2)^4}$ چه می‌توان گفت؟

۲) با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[5]{2})^3 &= \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \\ &= \sqrt[5]{2^3} \end{aligned}$$

۳) درستی رابطه $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقاردهای مختلف به m, k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	زوج n	$a > 0$	$n=4$ $a=2$	$\sqrt[4]{2^4} = 2$ ($2 = 2 $)
		$a < 0$	$n=4$ $a=-2$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ ($2 = -2 $)
	فرد n	$a > 0$	$n=3$ $a=2$	$\sqrt[3]{2^3} =$ ()
		$a < 0$	$n=3$ $a=-2$	$\sqrt[3]{(-2)^3} =$ ()

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	زوج n	$a > 0$	$n=4$ $a=16$	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$
		$a < 0$	$n=4$ $a=-16$	تعریف نشده $\rightarrow \sqrt[4]{-16}^4$
	فرد n	$a > 0$	$n=3$ $a=8$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 =$
		$a < 0$	$n=3$ $a=-8$	$(\sqrt[3]{-8})^3 =$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

۱ الف) یکی از علامت‌های < یا > را در \square قرار دهید.

$$(\frac{1}{5})^2 \square (\frac{1}{5})^3 \qquad \sqrt{\frac{1}{25}} \square \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$$

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در \square قرار دهید.

$$a^2 \square a^3 \qquad \sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

۲ فرض کنیم $a = -1$ است، در \square علامت مناسب را قرار دهید.

$$\sqrt[3]{a} \square \sqrt[5]{a} \qquad \sqrt[5]{a} \square \sqrt[11]{a}$$

$$a^2 \square a^3 \qquad a^3 \square a^5$$

۳ با توجه به تعریف ریشه $(\sqrt[n]{a} = b \text{ اگر } b^n = a)$ ، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[3]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[5]{2^{-5}} = \qquad \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \qquad \sqrt[4]{3^{-4}} =$$

۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به طوری که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو مثبت اند).

درس سوم: توان‌های گویا

فعالیت



پدر محمد یک زیست‌شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود. وزن باکتری‌ها در لحظه شروع ۱ گرم است؛ بنابراین وزن باکتری‌ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت n برابر 2^n گرم می‌شود:

$$1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$$

محمد از پدرش پرسید: «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت: تو فکر می‌کنی وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

محمد گفت: حدس می‌زنم وزن آنها $2^{\frac{1}{2}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{1}{2}$ است.

پدرش گفت: $2^{\frac{1}{2}}$ چقدر است؟

محمد گفت: نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت وزن باکتری‌ها b برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها باید برابر $b \times b = b^2$ شود. اما می‌دانیم پس از یک ساعت وزن باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $b^2 = 2$ ؛ یعنی $b = \sqrt{2}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجه جالبی است! $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. مشابه این رابطه را می‌توانیم برای توان‌های دیگر نیز تعریف کنیم: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ ، $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$ ؛ همچنین برای عددهای دیگر $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ ، می‌توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر $a < 0$ در این صورت $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود، به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{1}{4}}$ تعریف نمی‌شوند.

فعالیت

۱) توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$\begin{array}{ccc} 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} & 3^{\frac{1}{2}} = & 4^{\frac{1}{4}} = \\ 5^{\frac{1}{7}} = & 5^{\frac{1}{2}} = & (-3)^{\frac{1}{5}} = \\ 6^{\frac{1}{4}} = & 81^{\frac{1}{4}} = & (-5)^{\frac{1}{4}} = \end{array}$$

۲) کدام درست است؟

الف) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$ ب) $\sqrt[5]{-32} = -2$

فعالیت

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می‌کنیم؟

در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3 \quad (\text{قاعده ضرب توان})$$

در مورد توان‌های گویا هم می‌توانیم به طریق مشابه عمل کنیم:

$$2^{\frac{6}{3}} = 2^{2 \times \frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2} \quad \quad \quad 5^{\frac{8}{3}} = 5^{8 \times \frac{1}{3}} = (5^8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^8}$$

به‌طور کلی:

هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان‌دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$\begin{array}{ccc} 2^{\frac{3}{2}} \text{ (پ)} & 3^{\frac{2}{7}} \text{ (ب)} & 5^{\frac{2}{5}} \text{ (الف)} \\ (-3)^{\frac{2}{3}} \text{ (ج)} & 16^{\frac{1}{4}} \text{ (ث)} & (-6)^{\frac{2}{7}} \text{ (ت)} \end{array}$$

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a > 0$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم:

- ۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$
- ۲) $(a^r)^s = a^{rs}$
- ۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

باکتری‌ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و می‌توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود و بعد از ۲۰ دقیقه دیگر به چهار باکتری تبدیل می‌شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری‌ها دو برابر می‌شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می‌آید. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری‌ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البته عملاً چنین اتفاقی نمی‌افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می‌شود و دیگر قادر به تولید مثل بیشتر نخواهند بود. اگرچه بعضی از باکتری‌ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیاری از باکتری‌ها مفیدند. باکتری‌ها در تهیه فراورده‌های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری‌هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری‌ها در پاکسازی آب‌ها و خاک‌های آلوده به آلاینده‌های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری‌ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم‌های آبی و خشکی) دارند. مهم‌ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری‌ها صورت می‌گیرد.

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} \qquad 3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3} = 3 \sqrt[4]{3}$$

$$4^{\frac{1}{5}} = \qquad 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{4}} = \qquad 4^{\frac{5}{8}} = \qquad (4 \times 2)^{\frac{1}{3}} =$$

$$5^{\frac{4}{3}} = \qquad (16^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{4}} = \qquad 6^{\frac{2}{8}} = \qquad 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} =$$

۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{2^5} = \qquad \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \qquad \sqrt[3]{-1} =$$

$$\sqrt[5]{19} = \qquad \sqrt[5]{64} = \qquad \sqrt[3]{-27} = \qquad \sqrt[5]{\sqrt{5}} =$$

۳ جدول‌های زیر را کامل کنید :

$a > 0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = 5$	5^3	$\frac{1}{5^3}$

$a < 0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = -5$	$(-5)^3$	$\frac{1}{(-5)^3}$	تعریف نمی‌شود	$(-5)^2 = 25$

فعالیت

۱ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ است. تساوی را کامل کنید ($a > 0$).

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \dots$$

۲ دبیر: به خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فرجه زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً $\sqrt[4]{81} = 3$

به علاوه در تعریف نمای کسری $a^{\frac{1}{n}}$ باید a عددی مثبت فرض شود. اکنون $\sqrt[4]{(-3)^4}$ را به دست آورید.

نسترن: اگر جای توان‌ها را مانند توان‌های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دبیر: این کار را انجام می‌دهم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} = \left[(-3)^{\frac{1}{4}} \right]^4 = (-3)^{\frac{1}{4} \times 4} = (-3)^1 = -3$$

نسترن: فکر کنم متوجه اشکال کار شده‌ام. ما حق نداریم بنویسیم $(-3)^{\frac{1}{4}}$ چون در تعریف $a^{\frac{1}{n}}$ گفتیم a باید مثبت باشد.

دبیر: آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمیده: بهتر است اول $(-3)^4$ را حساب کنیم، یعنی

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$$

دبیر: آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می‌توانید، همان‌گونه که قبلاً گفتیم چون ۴ عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$$

۳ با توجه به فعالیت ۱ در صفحه قبل تساوی‌ها را کامل کنید.

$$(5^2)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}}$$
 (الف)

$$(4^7)^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[5]{4})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[25]{4} = 4^{\frac{1}{25}} = 4^{\frac{1}{5 \times 5}}$$
 (ب)

پ) اکنون برای هر عدد $a > 0$ ، به ازای هر دو عدد گویای غیر صحیح r و s درستی تساوی $(a^r)^s = a^{rs}$ را برای $r = \frac{1}{p}$ و $s = \frac{1}{q}$ ، تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{q}} = (\sqrt[q]{a})^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{pq}}$$

تمرین

۱ هر یک از توان‌های کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$$\begin{array}{ccccc} 16^{\frac{1}{2}} = & 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = & 5^{\frac{1}{2}} = & 4^{\frac{3}{7}} = & (4^2)^{\frac{2}{3}} = \\ a^{\frac{2}{7}} = & & 3^{\frac{1}{2}} = & 4^{\frac{2}{3}} = & \\ 32^{-\frac{1}{5}} = & & 32^{\frac{2}{5}} = & 17^{-\frac{1}{2}} = & \end{array}$$

۲ هر یک از رادیکال‌ها را به صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایه عدد مثبت باشد.

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} & \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}} = & \sqrt{a} = \\ \sqrt[4]{a^3} = & \sqrt[3]{a^2} = & \sqrt[5]{a^0} = \end{array}$$

۳ می‌دانیم

$$\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \quad \sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

آیا تساوی $\sqrt[n]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است ($a > 0$)؟ n, m, k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابرند.

۴ فرض کنیم $a = 64$ ، $r = \frac{1}{3}$ و $s = \frac{1}{4}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

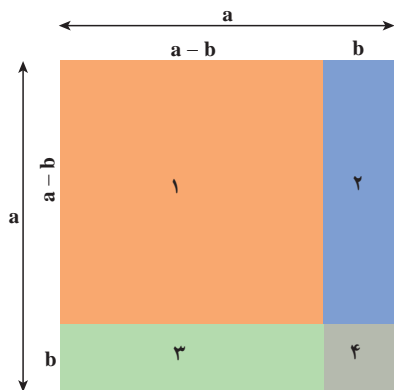
اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ حساب کنید.

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \quad \sqrt{\sqrt{81}} =$$

درس چهارم: عبارتهای جبری

شعاعیت



$$S_1 = (a-b)^2$$

$$S_1 = S - S_2 - S_3 - S_4$$

$$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

(1) و (2) $\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (۱)

اتحاد گفته می‌شود؟

در حقیقت می‌توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به دست آورد. برای مثال اگر $a = \frac{1}{5}$ و $b = 3$ اختیار شود.

$$\left(\frac{1}{5} + 3\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times 3 + 3^2$$

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25}$$

یا اگر در رابطه (۱) به جای b ، $-b$ قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

گاهی هم دو اتحاد (۱) و (۲) را با هم می‌نویسیم:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (3)$$

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به دست آورید.

۱ با محاسبه $(a+b)^3$ اتحاد دیگری به دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$= (\quad)(a+b) = \dots\dots\dots$$

که با جمع جملات مشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم:

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - \dots\dots\dots + \dots\dots\dots - b^3$$

۲ یک بار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره ۲ (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$$

$$= (\quad)(a-b) =$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه فوق را بنویسیم، مثلاً

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \quad (4)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ را به حاصل ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارتهای $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند. تجزیه برخی عبارتهای جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های بیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$$

مثال ۱

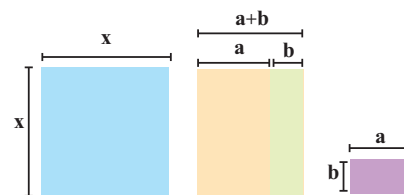
عبارت $2x^2 + 3x + 1$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم:

$$2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + x$$

$$= (x+1)^2 + x(x+1)$$

$$= (x+1)(x+1+x) = (x+1)(2x+1)$$

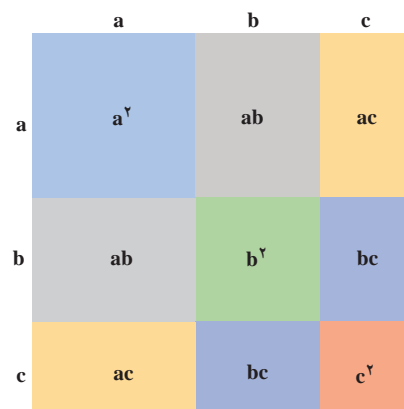


مثال ۲

عبارت $a^3 - 2ab + a^2b - 2b^2$ را تجزیه کنید:

$$a^3 - 2ab + a^2b - 2b^2 = a^2(a+b) - 2b(a+b)$$

$$= (a^2+b)(a^2-2b)$$



کار در کلاس

۱ حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + \dots$$

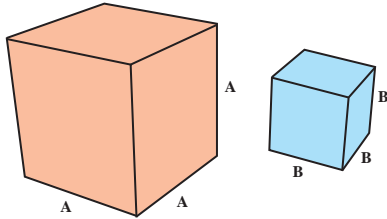
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) =$$

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارتهای $a^3 + b^3$ و $a^3 - b^3$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به دست آورید.

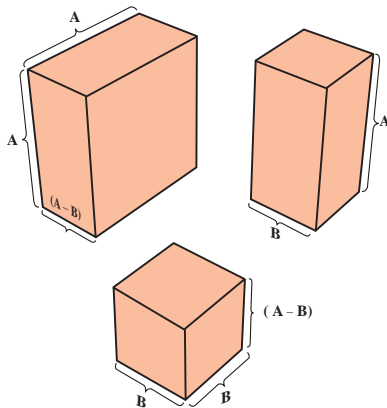
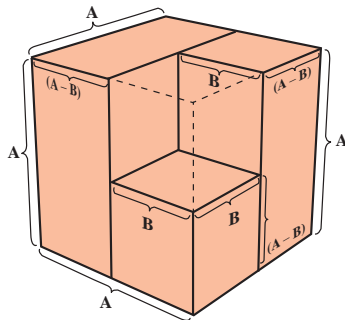
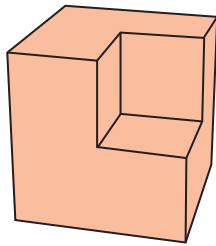
۳ عبارتهای زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$



$A^3 - B^3$



$$\begin{aligned} 8x^3 - 27 &= (2x)^3 - 3^3 \\ &= (2x - 3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2] \\ &= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) \end{aligned}$$

$$x^2 + 1 =$$

$$x^3 - 8 =$$

$$x^3 - 125 =$$

$$x^6 - 1 =$$

شعائیت

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به‌خاطر دارید :

$$12 = 3 \times 4$$

هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک شمارندهٔ عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵ و مشابه این در اتحاد مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

هر یک از عبارتهای $a - b$ و $a + b$ یک شمارندهٔ $a^2 - b^2$ است. همچنین $a^2 - b^2$ هم مضرب $a - b$ و هم مضرب $a + b$ است.

آیا $a + b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارتهای جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به‌دست می‌آیند :

..... و $(a + b)(a - b)$ و $-(a + b)$ و $(a + b)(a + b)^2$ و $2(a + b)$ و $a + b$: بعضی از مضرب‌های $a + b$

بعضی از مضرب‌های $a - b$ را بنویسید.

۲ دو عبارت بنویسید که $a - b$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

۳ عبارت $9a^2 - 1$ مضرب کدام یک از عبارتهاست؟

الف) $a - 1$ ب) $3a - 1$ پ) $9a^2 + 3a + 1$

ت) $3a + 1$

نکته : عبارت $\sqrt{3}(a + b)$ یک مضرب $a + b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴ کدام یک از عبارتهای زیر گویا هستند؟

الف) $\frac{3x - \sqrt{7}}{x^2}$ ب) $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$ پ) $\sqrt[3]{x} - 1$ ت) $\sqrt{x^2} + x - 1$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدرهایی از متغیر که مخرج آن صفر می شود، تعریف نمی گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدرهایی از x تعریف نمی شود؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

۶ حاصل کسرهایی زیر را به دست آورید و ساده کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1}$

ب) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}$

مثال

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2}-1)((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)} + \frac{1}{x-1} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (x+1)}{(x^2-1)} = \dots\dots\dots$$

کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

الف) $\frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$

ب) $\frac{x^3 - 1}{(x-1)^3}$

پ) $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$

ت) $\frac{y^5 - y}{y^3 + y^2 + y}$

ث) $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y} = \frac{y(y^4 - y^2 - 12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2 - 4)(y^2 + 3)}{8y(y+2)} = \dots\dots\dots$

۲ در اتحاد

$$a^2 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

قرار دهید $a = \sqrt[3]{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$(\sqrt[3]{x^2})^3 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1) (\quad)$

$x^2 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1) (\quad)$

۳ گویا کردن مخرج‌های گنگ: صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارتهایی ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \dots\dots\dots (x \neq 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dots\dots\dots$$

تمرین

۱ هر یک از عبارتها را تا حد ممکن (به عبارتهای گویا) تجزیه کنید.

- الف) $x^6 - y^6$ ب) $x^4 - y^4$ پ) $x^2 + y^2$

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

- الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$ ب) $\frac{1}{\sqrt{x} - 2}$ پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$ ت) $\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5x}{x - 1}$

۳ بعضی از ضرب‌های عددی را با استفاده از اتحادها می‌توان به صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضرب‌ها را ذهنی انجام دهید.

$$16 \times 14 = (15 + 1)(15 - 1) = 15^2 - 1 = 224 \text{ (الف)}$$

ب) 105^2

پ) 1007^2

ت) 99^2

۴ کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$$

۵ عبارت $a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3$ را تجزیه کنید.

خواندنی

* سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

یک سه‌تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

* (جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد:

$$(1/0.1)^{365} = 37/8$$

$$(0.99)^{365} = 0.03$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(1/0.1)^{330}$ و $(0.99)^{330}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره‌وری) کار افزایش می‌یابد.

شما هم داستانی در باب توان‌ها بنویسید.

* (مثلث خیام)

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟

می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

$$= (\quad) (a+b)$$

=