

# حرکت شناسی در دو بعد



## فصل



## حرکت شناسی در دو بعد

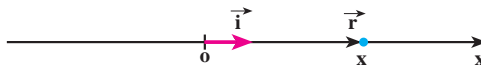
**نگاهی به فصل :** دربارهٔ حرکت‌هایی که در اطراف ما رخ می‌دهد، اغلب پرسش‌های زیادی برای ما مطرح می‌شود. پرسش‌هایی چون: سیاره‌ها در چه مسیرهایی به دور خورشید حرکت می‌کنند؟ چرا هنگامی که فتری را می‌کشیم و رها می‌کنیم نوسان می‌کند؟ ماهواره‌ها را چگونه در مدار زمین قرار می‌دهند؟ و... پاسخ این پرسش‌ها را باید در علم مکانیک جست و جو کرد. علمی که در آن حرکت اجسام مورد بررسی قرار می‌گیرد. هنگامی که چگونگی حرکت را توصیف می‌کنیم، با بخشی از علم مکانیک سروکار داریم که حرکت شناسی نامیده می‌شود. بخش دیگری از علم مکانیک دینامیک است که به بررسی رابطهٔ بین حرکت و نیرو می‌پردازد. به این موضوع در فصل بعد خواهیم پرداخت. در فیزیک (۲) و آزمایشگاه تا اندازه‌ای حرکت‌شناسی در یک بُعد را مورد بررسی قرار دادیم، با کمیت‌های مکان، جابه‌جایی، سرعت متوسط و... آشنا شدیم و حرکت یکنواخت و حرکت با شتاب ثابت بر روی یک خط راست را نیز بررسی کردیم. ما در زندگی روزمره بیشتر با حرکت‌هایی که در دو بعد و سه بعد انجام می‌شوند، سروکار داریم و بررسی آنها اهمیت زیادی دارد. از این رو، در این فصل، پس از یادآوری مطالبی که در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه خوانده‌اید، به بررسی حرکت در دو بعد می‌پردازیم.

### ۱-۱- حرکت در یک بعد

در شکل ۱-۱ جسمی بر روی محور  $x$  نمایش داده شده است. مکان جسم در این شکل با بردار  $\vec{r}$  مشخص شده است. بردار  $\vec{r}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{r} = x \vec{i} \quad (1-1)$$

در این رابطه  $\vec{i}$  بردار یکه در جهت محور  $x$  است.



شکل ۱-۱

هنگامی که جسم روی محور  $x$  حرکت می‌کند، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می‌کند، برای توصیف حرکت جسم، یعنی برای مشخص کردن بردار مکان جسم در لحظه  $t$  کافی است که  $x$  را به صورت تابعی از زمان داشته باشیم:

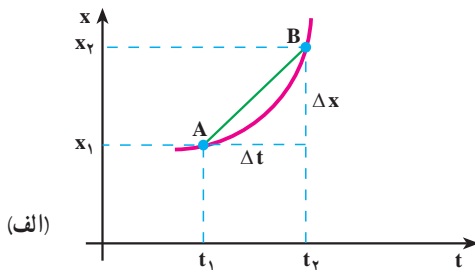
$$x = f(t) \quad (2-1)$$

این رابطه، معادله حرکت جسم نامیده می‌شود.

در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که حرکت جسم را می‌توان به صورت نموداری در دستگاه مختصات مکان-زمان نمایش داد. به عبارت دیگر، این نمودار با رسم تابع  $x = f(t)$  در دستگاه مختصات  $x-t$  به دست می‌آید.

### تمرین ۱-۱

معادله حرکت جسمی در یک بعد در SI با رابطه  $x = -t^2 + 6t - 8$  بیان شده است. الف) نمودار مکان-زمان آن را رسم کنید. ب) بردار مکان جسم را در زمان‌های  $t = 0, 1, 3$  (s) روی محور  $x$  نمایش دهید.



شکل ۲-۱

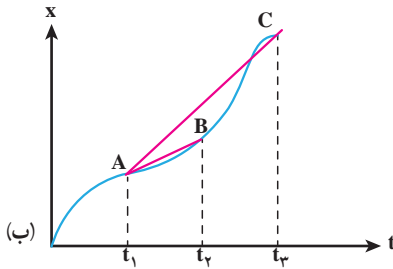
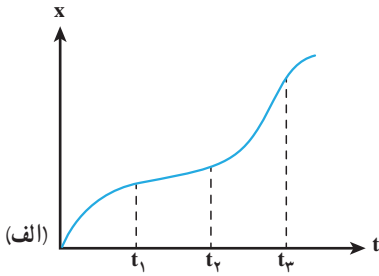
### سرعت متوسط: نمودار مکان-زمان

جسمی در شکل ۲-۱ الف نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل ۲-۱ ب نشان داده شده است، متحرک در لحظه  $t_1$  در مکان  $x_1$  (نقطه A) روی نمودار مکان-زمان و در لحظه  $t_2$  در مکان  $x_2$  (نقطه B) قرار دارد.

در این شکل،  $\Delta x = x_2 - x_1$  مقدار جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی  $\Delta t = t_2 - t_1$ ، و نسبت  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  که شیب خط AB در دستگاه مکان-زمان است، سرعت متوسط متحرک نامیده می‌شود؛ این کمیت را با  $\bar{v}_x$  نشان دادیم:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3-1)$$

زیرنویس  $x$  مشخص می‌کند که حرکت در راستای محور  $x$  انجام می‌شود.



شکل ۳-۱

در نمودار شکل ۳-۱ الف سرعت متوسط را در بازه‌های  $t_2 - t_1$  و  $t_3 - t_1$  با هم مقایسه کنید.

**پاسخ:** در شکل ۳-۱ ب خط‌های AB و AC به ترتیب بین دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  و دو لحظه  $t_1$  و  $t_3$  رسم شده‌اند. شیب پاره خط AB برابر سرعت متوسط در بازه  $t_2 - t_1$  است و شیب پاره خط AC برابر سرعت متوسط در بازه  $t_3 - t_1$  است. و چون شیب پاره خط AC بیشتر از شیب پاره خط AB است، بنابراین سرعت متوسط در بازه  $t_3 - t_1$  بزرگ‌تر از سرعت متوسط در بازه  $t_2 - t_1$  است.

معادله حرکت جسمی در SI با رابطه  $x = 2t^2 + 1$  بیان شده است. سرعت متوسط آن را در بازه‌های زمانی الف) ۱ تا ۲ ثانیه، ب) ۱ تا ۱/۱ ثانیه، پ) ۱ تا ۱/۰۱ ثانیه و ت) ۱ تا ۱/۰۰۱ ثانیه به دست آورید. ث) از این مثال به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

**پاسخ:** الف)

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\bar{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{9 - 3}{2 - 1} = 6 \text{ m/s}$$

$$\bar{v}_x = \frac{3/42 - 3}{1/1 - 1} = 4/2 \text{ m/s} \quad \text{ب)}$$

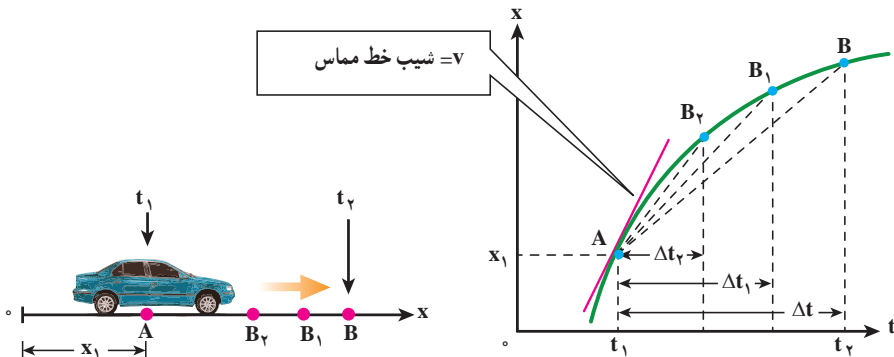
$$\bar{v}_x = \frac{3/0402 - 3}{1/01 - 1} = 4/02 \text{ m/s} \quad \text{پ)}$$

$$\bar{v}_x = \frac{3/004002 - 3}{1/001 - 1} = 4/002 \text{ m/s} \quad \text{ت)}$$

ث) همان‌طور که دیدیم سرعت متوسط در بازه‌های زمانی کوچک و کوچک‌تر به یک مقدار مشخص میل می‌کند.

**سرعت لحظه‌ای :** دیدیم که سرعت متوسط بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، شیب خطی

است که نمودار مکان - زمان را در آن دو نقطه قطع می‌کند. اکنون می‌خواهیم ببینیم از دید هندسی با کوچک شدن تدریجی  $\Delta t$ ، سرعت متوسط به چه صورتی درمی‌آید. به این منظور نمودار مکان - زمان ۴-۱ را در نظر بگیرید. از این شکل درمی‌یابیم اگر بازه زمانی  $\Delta t$  کوچک و کوچک‌تر شود، نقطه B به نقطه A نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و سرانجام خط AB در نقطه A بر نمودار مماس می‌گردد. شیب خط مماس را در این حالت، سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه  $t_1$  می‌نامیم.



شکل ۴-۱ شکل سمت چپ، اتومبیلی را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کند. شکل سمت راست، نمودار مکان - زمان حرکت اتومبیل را نشان می‌دهد. با کوچک شدن  $\Delta t$ ، B به A نزدیک شده و خط واصل در حالت  $\Delta t \rightarrow 0$  تبدیل به خط مماس بر منحنی می‌شود و شیب آن، سرعت لحظه‌ای را نشان می‌دهد.

به عبارت دیگر، هنگامی که  $t_1$  به  $t_2$  نزدیک می‌شود، یعنی وقتی  $\Delta t$  به سمت صفر میل می‌کند،  $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  سرعت لحظه‌ای جسم را در لحظه  $t_1$  به دست می‌دهد. پس، سرعت لحظه‌ای حد سرعت متوسط است هنگامی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می‌کند. سرعت لحظه‌ای را با  $v_x$  نمایش می‌دهیم؛

در نتیجه داریم :

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4-1)$$

در درس ریاضی دیده‌اید که این حد، برابر مشتق تابع x نسبت به زمان است که به صورت زیر

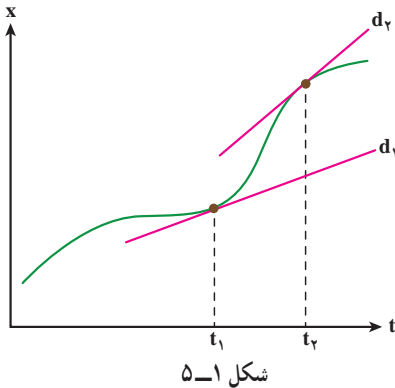
نوشته می‌شود :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (5-1)$$

اگر  $x = f(t)$  معلوم باشد، از رابطه ۵-۱ می‌توان  $v_x$  را به صورت تابعی از زمان به دست آورد، این تابع، معادله سرعت نامیده می‌شود. در حالت حدی وقتی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می‌کند، وتر AB

در نقطه A بر نمودار مکان - زمان مماس می شود. این، همان تعبیر هندسی مشتق است که در درس ریاضی خوانده اید. از این به بعد، سرعت لحظه ای را - به اختصار - سرعت می نامیم.

### مثال ۳-۱

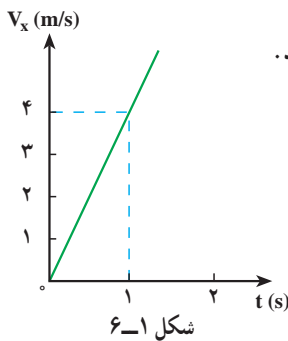


شکل ۵-۱

در شکل ۵-۱ مماس  $d_1$ ، در لحظه  $t_1$  و مماس  $d_2$  در لحظه  $t_2$  نشان داده شده است. در کدام لحظه سرعت بیشتر است؟  
**پاسخ:** همان طور که در شکل دیده می شود شیب  $d_2$  بیشتر از شیب  $d_1$  است و بنابراین  $v_2 > v_1$  است (سرعت در لحظه  $t_2$  بیشتر از سرعت در لحظه  $t_1$  است).

### مثال ۴-۱

در مثال ۲-۱، معادله حرکت متحرک به صورت  $x = 2t^2 + 1$  است. الف) معادله سرعت آن را به دست آورید. ب) نمودار سرعت - زمان را برای آن رسم کنید. پ) سرعت متحرک را در لحظه  $t = 1$  s به دست آورید.



شکل ۶-۱

### پاسخ

الف) با استفاده از رابطه ۵-۱ داریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t$$

ب) نمودار سرعت - زمان به صورت خط راستی است که از مبدأ دستگاه  $v-t$  می گذرد.

$$v_x = 4t \quad \text{پ)}$$

$$t = 1\text{ s} \Rightarrow v_x = 4\text{ m/s}$$

این نتیجه را می توانستیم از مثال ۲-۱ نیز حدس بزنیم؛ زیرا در آن مثال، با نزدیک

شدن  $t_2$  به  $t_1$ ، سرعت متوسط جسم نیز به مقدار  $4 \text{ m/s}$  (سرعت جسم در لحظه  $t = 1 \text{ s}$ ) نزدیک می شود.

بردار سرعت متحرک را در حرکت یک بعدی می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\vec{v} = v_x \vec{i} \quad (6-1)$$

هنگامی که جسم در جهت مثبت محور  $x$  حرکت می کند،  $v_x$  مثبت است (چرا؟) و در نتیجه بردار سرعت جسم در جهت این محور قرار می گیرد. هنگامی که جسم در خلاف جهت مثبت محور  $x$  حرکت می کند،  $v_x$  منفی است و بردار سرعت در جهت عکس این محور قرار می گیرد.

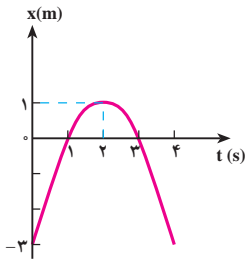
### مثال ۵-۱

معادله حرکت جسمی در SI با رابطه  $x = -t^2 + 4t - 3$  بیان شده است. الف) معادله سرعت آن را به دست آورید. ب) نمودارهای مکان-زمان و سرعت-زمان متحرک را در ۴ ثانیه اول رسم کنید. پ) مسیر حرکت جسم را رسم و چگونگی حرکت را توصیف کنید.

#### پاسخ

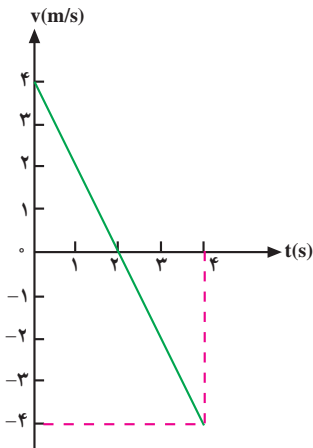
الف) با استفاده از رابطه ۵-۱ داریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2t + 4$$



شکل ۷-۱

ب) نمودار مکان-زمان متحرک به صورت یک سهمی است (شکل ۷-۱) که بیشینه آن در لحظه  $t = 2 \text{ s}$  است (چرا؟). همچنین جسم در لحظه های  $t = 1 \text{ s}$  و  $t = 3 \text{ s}$  در مبدأ و در لحظه  $t = 0$ ، در نقطه  $x = -3 \text{ m}$  قرار دارد.

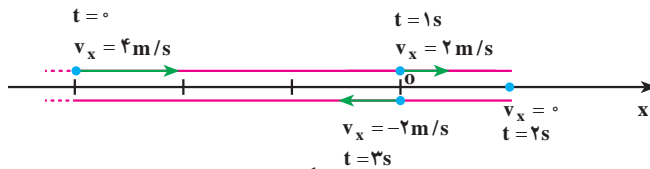


شکل ۸-۱

نمودار سرعت-زمان متحرک به صورت یک خط راست است (شکل ۸-۱) که در بند الف) معادله آن را به دست آوردیم.

پ) با توجه به این نمودارها ملاحظه می‌شود که متحرک در لحظه  $t = 0$  در مکان  $x = -3\text{m}$  قرار دارد و با سرعت  $4\text{m/s}$  در جهت محور  $x$  حرکت می‌کند؛ سپس سرعت آن به تدریج، کاهش می‌یابد (شیب مماس بر نمودار مکان-زمان در شکل ۱-۷ به تدریج، کم می‌شود) تا در لحظه  $t = 2\text{s}$  که سرعت آن صفر می‌شود. می‌توان گفت شیب مماس بر نمودار مکان-زمان در این لحظه صفر می‌شود.

از لحظه  $t = 2\text{s}$  به بعد متحرک برمی‌گردد و در خلاف جهت محور  $x$  شروع به حرکت می‌کند و  $v_x$  منفی می‌شود. در برگشت، اندازه سرعت افزایش می‌یابد و در لحظه  $t = 3\text{s}$  دوباره از مبدأ می‌گذرد. در این لحظه سرعت آن  $-2\text{m/s}$  است. مسیر حرکت جسم در شکل ۱-۹ رسم شده و بردار سرعت آن نیز روی شکل نمایش داده شده است.



شکل ۱-۹

در شکل ۱-۹ باید مسیر روی محور  $x$  رسم شود، ولی ما برای اینکه مسیر را بهتر مشخص کنیم، آن را در بالا و پایین این محور رسم کرده‌ایم. ملاحظه می‌شود که در تمام مسیر رفت و برگشت، معادله مکان و معادله سرعت جسم، به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x = -t^2 + 4t - 3$$

$$v_x = -2t + 4$$

### مثال ۱-۷

متحرکی با سرعت ثابت  $5\text{m/s}$ ، در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می‌کند. این متحرک در لحظه  $t = 0$  از نقطه  $x = 10\text{m}$  می‌گذرد. الف) معادله حرکت را بنویسید. ب) تعیین کنید که متحرک در چه زمانی به مبدأ مختصات می‌رسد.

### پاسخ

الف) در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که معادله حرکت یکنواخت یک جسم روی خط راست با رابطه



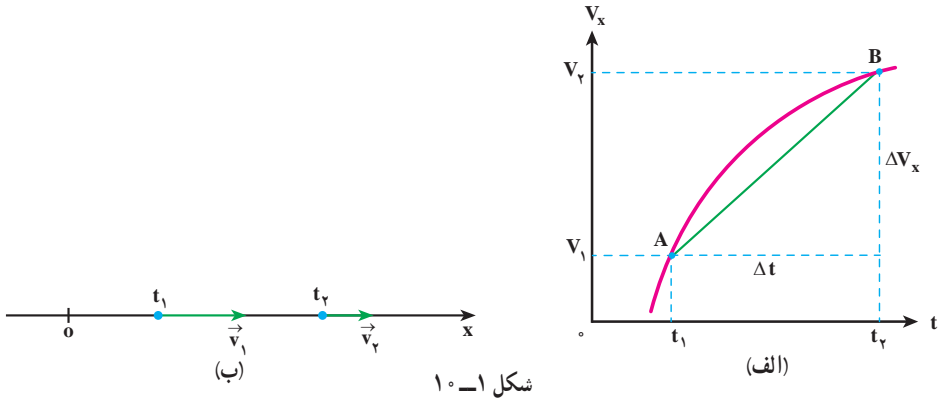
$$x = v_x t + x_0 \quad (7-1)$$

بیان می‌شود که در آن  $v_x$  سرعت (ثابت) جسم و  $x_0$  مکان جسم در لحظه  $t = 0$  است. در نتیجه، چون در این مثال،  $x_0 = +1.0 \text{ m}$  و  $v_x = -5 \text{ m/s}$  است، معادله حرکت جسم به صورت زیر خواهد بود.

$$x = -5t + 1.0 \quad (\text{ب})$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = -5t + 1.0 \Rightarrow t = 0.2 \text{ s}$$

**شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای:** می‌دانید هنگامی که سرعت جسم تغییر می‌کند، حرکت را شتاب‌دار می‌نامند. در شکل ۱-۱ الف نمودار سرعت-زمان یک حرکت شتاب‌دار و در شکل ۱-۱ ب بردار سرعت متحرک، در زمان‌های  $t_1$  و  $t_2$ ، نشان داده شده است.

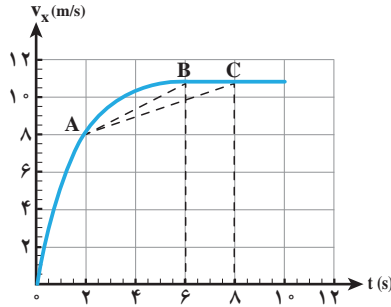


همچنین می‌دانید که  $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$  را تغییر سرعت متحرک در بازه زمانی  $\Delta t$  و نسبت  $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$  را که شیب خط AB در نمودار سرعت-زمان است، شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی می‌نامند. این کمیت را با نماد  $\bar{a}$  نشان می‌دهیم؛ در نتیجه داریم:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (8-1)$$

### مثال ۷-۱

نمودار سرعت-زمان متحرکی که در راستای محور  $x$  حرکت می‌کند، به صورت شکل ۱-۱۱ است. شتاب متوسط این متحرک را در بازه‌های زمانی بین ۲s و ۶s، و بین ۲s و ۸s تعیین و با هم مقایسه کنید.



شکل ۱-۱۱

**پاسخ:** شیب پاره خط AB برابر شتاب متوسط متحرک در بازه بین ۲s و ۶s، و شیب پاره خط AC برابر شتاب متوسط متحرک در بازه بین ۲s و ۸s است. بنابراین شتاب متوسط در بازه زمانی نخست برابر است با:

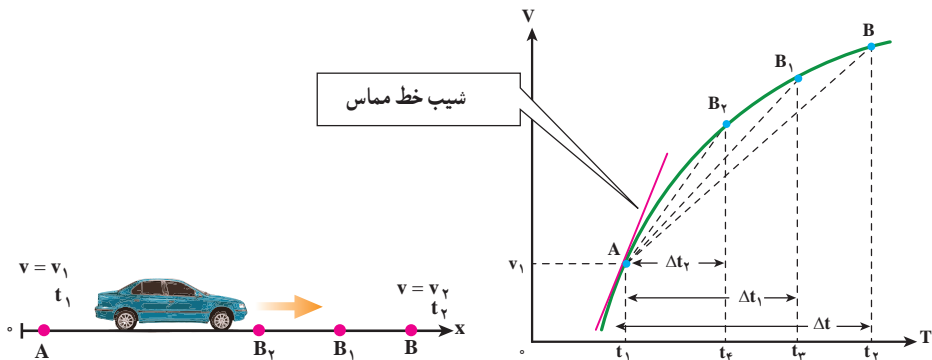
$$\bar{a}_1 = \text{شیب } AB \approx \frac{11-8}{6-2} = \frac{3}{4} \text{ m/s}^2$$

و شتاب متوسط در بازه زمانی دوم چنین می شود:

$$\bar{a}_2 = \text{شیب } AC \approx \frac{11-8}{8-2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2$$

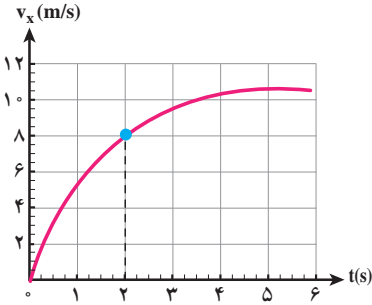
بنابراین  $\bar{a}_1 > \bar{a}_2$  است.

در شکل ۱-۱۰ هم هنگامی که  $\Delta t$  بسیار کوچک و کوچک تر می شود، نقطه B به نقطه A نزدیک و نزدیک تر می شود و سرانجام خط AB در نقطه A بر نمودار سرعت - زمان مماس می گردد. شیب خط مماس بر نمودار در نقطه A را شتاب لحظه ای جسم در لحظه  $t_1$  می نامیم (شکل ۱-۱۲).

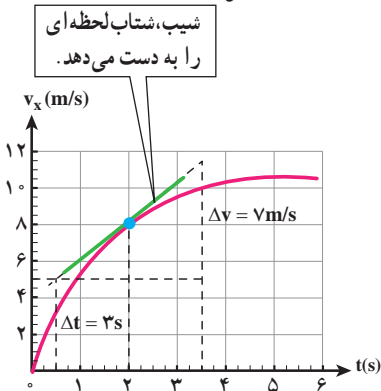


شکل ۱۲-۱۰ سمت چپ اتومبیلی را نشان می دهد که در راستای محور x حرکت می کند. شکل سمت راست، نمودار سرعت - زمان اتومبیل را نشان می دهد. با کوچک شدن  $\Delta t$ ، B به A نزدیک شده و در حالت  $\Delta t \rightarrow 0$ ، خط واصل تبدیل به خط مماس می شود و شیب آن، شتاب لحظه ای را نشان می دهد.

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند در شکل ۱۳-۱ نشان داده شده است. شتاب این متحرک را در  $t=2s$  تعیین کنید.



شکل ۱۳-۱



شکل ۱۴-۱

**پاسخ:** شتاب متحرک در  $t=2s$  برابر شیب این منحنی در  $t=2s$  است.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{7m/s}{3} = 2/3 m/s^2$$

توجه کنید که در حل این مسئله می توانستید از مختصات هر دو نقطه دلخواه دیگری از خط مماس نیز استفاده کنید.

اکنون می توان شتاب لحظه ای را، مانند سرعت لحظه ای، به طور دقیق تعریف کرد که: هنگامی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند،  $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$  شتاب لحظه ای جسم را در لحظه  $t_1$  به دست می دهد. به عبارت دیگر، شتاب لحظه ای حد شتاب متوسط است هنگامی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند. شتاب لحظه ای را با  $a_x$  نمایش می دهیم. در نتیجه داریم:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (9-1)$$

به بیان ریاضی، شتاب لحظه ای مشتق سرعت نسبت به زمان است. از این به بعد برای اختصار

شتاب لحظه‌ای را شتاب می‌نامیم. اکنون با استفاده از رابطه‌های ۱-۵ و ۱-۹ شتاب را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

### مثال ۱-۹

معادله حرکت جسمی در SI به صورت  $x = t^2 - 6t^2 + 9t$  بیان شده است. الف) شتاب متوسط آن را در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه به دست آورید. ب) شتاب آن را در لحظه‌های  $t = 0$  و  $t = 1$  ثانیه پیدا کنید.

### پاسخ

الف) برای به دست آوردن شتاب متوسط در این بازه زمانی لازم است سرعت متحرک را در لحظه‌های  $t = 1s$  و  $t = 2s$  داشته باشیم. ابتدا معادله سرعت را به دست می‌آوریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

از این معادله در لحظه‌های  $t = 1s$  و  $t = 2s$  به ترتیب، مقادیر  $0$  (صفر) و  $-3 \text{ m/s}$  برای سرعت به دست می‌آید. در نتیجه برای شتاب متوسط خواهیم داشت:

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{-3 - 0}{2 - 1} = -3 \text{ m/s}^2$$

ب) ابتدا معادله شتاب متحرک را می‌نویسیم:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6t - 12$$

با استفاده از این رابطه، شتاب متحرک در لحظه‌های  $t = 0s$  و  $t = 1s$  به چنین به دست می‌آید:

$$t = 0s \rightarrow a_x = -12 \text{ m/s}^2$$

$$t = 1s \rightarrow a_x = -6 \text{ m/s}^2$$

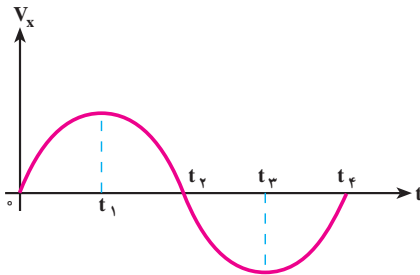
بردار شتاب را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} \quad (1-10)$$

در این رابطه اگر  $a_x$  مثبت باشد،  $\vec{a}$  در جهت محور  $x$  و اگر منفی باشد در خلاف جهت محور

$x$  قرار می‌گیرد.

## تمرین ۲-۱



شکل ۱-۱۵

نمودار سرعت - زمان متحرکی در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است. تعیین کنید در چه بازه زمانی بردار شتاب در جهت محور  $x$  و در کدام بازه زمانی در خلاف جهت محور  $x$  است.

هنگامی که اندازه سرعت متحرکی زیاد می شود حرکت را تندشونده و هنگامی که اندازه سرعت متحرکی کاهش می یابد، حرکت را کندشونده می نامند.

## فعالیت ۱-۱

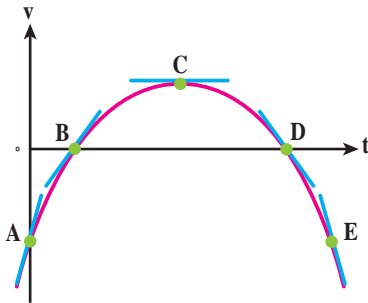
در تمرین ۲-۱، سرعت متحرک در بازه زمانی  $0$  تا  $t_1$  مثبت است.  $a_x$  نیز مثبت است؛ زیرا شیب مماس بر نمودار در این بازه زمانی مثبت است و حرکت تندشونده است. حاصل ضرب  $a_x v_x$  نیز مثبت است. اکنون جاهای خالی را در گزاره های زیر پر کنید.

الف) در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  سرعت متحرک ..... است.  $a_x$  ..... است. حرکت ..... است. حاصل ضرب  $a_x v_x$  ..... است.

ب) در بازه زمانی  $t_2$  تا  $t_3$  سرعت متحرک ..... است.  $a_x$  ..... است. حرکت ..... است. حاصل ضرب  $a_x v_x$  ..... است.

پ) در زمان های بزرگ تر از  $t_3$ ، سرعت متحرک ..... است.  $a_x$  ..... است. حرکت ..... است. حاصل ضرب  $a_x v_x$  ..... است.

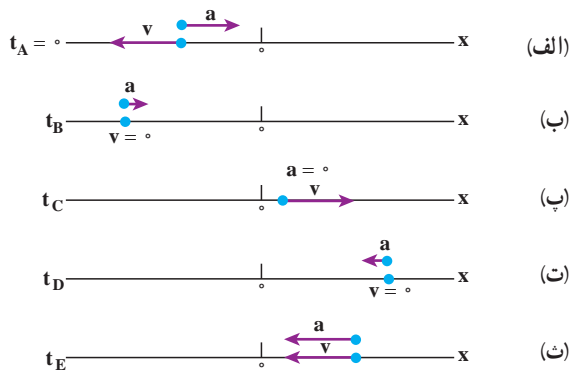
در فعالیت ۱-۱ ملاحظه می کنید که وقتی  $a_x v_x > 0$  باشد حرکت تندشونده و وقتی  $a_x v_x < 0$  باشد، حرکت کندشونده است.



شکل ۱۶-۱

شکل ۱۶-۱ نمودار سرعت - زمان متحرکی است که در راستای محور  $x$  حرکت می‌کند. درباره علامت‌های شتاب و سرعت متحرک و تندشونده یا کندشونده بودن حرکت اظهار نظر کنید.

**پاسخ:** خط‌های مماس بر منحنی در نقاط  $A, B, C, D, E$  رسم شده که شیب این خط‌ها نشان‌دهنده شتاب در آن نقطه‌ها است. از روی شکل درمی‌یابیم که شیب در نقاط  $B, A$  مثبت، در نقطه  $C$  برابر صفر و در نقطه‌های  $E, D$  منفی است. بنابراین شتاب در نقطه‌های  $B, A$  مثبت، شتاب در نقطه  $C$  برابر صفر و در نقطه‌های  $E, D$  منفی است. در حالی که همان‌طور که از شکل مشخص است، سرعت در نقطه‌های  $E, A$  منفی، در نقطه‌های  $D, B$  مثبت است. بنابراین مکان، سرعت و شتاب ذره روی محور  $x$  با شکل‌های زیر سازگارند.



شکل ۱۷-۱

در (الف)  $v < 0, a > 0$  و در نتیجه  $av < 0$  و حرکت کندشونده است. در (ب)  $a > 0, v = 0$  و متحرک در سکون لحظه‌ای و در آستانه حرکت در جهت  $+x$  است. در (پ)  $a = 0$

$v > 0$  است. در (ت)  $v = 0$ ,  $a < 0$  متحرک به طور لحظه‌ای ساکن و در آستانه حرکت در جهت  $-x$  است. در (ث)  $v < 0$ ,  $a < 0$  و در نتیجه  $av > 0$  و حرکت تندشونده است.

## مثال ۱۱-۱

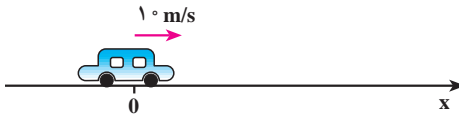
خودرویی با سرعت  $10 \text{ m/s}$  در حال حرکت است. راننده ترمز می‌کند و سرعت خودرو با شتاب  $2 \text{ m/s}^2$  کاهش می‌یابد. الف) چه زمانی طول می‌کشد تا خودرو متوقف شود؟ ب) در این بازه زمانی خودرو چه مسافتی را می‌پیماید؟

### پاسخ

الف) در کتاب فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که در حرکت با شتاب ثابت معادله سرعت به صورت زیر است:

$$v_x = a_x t + v_{0x} \quad (11-1)$$

که در آن  $a_x$  شتاب (ثابت) جسم و  $v_{0x}$  سرعت جسم در لحظه  $t = 0$  است. در شکل ۱۸-۱ حرکت خودرو را در جهت محور  $x$  در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۱۸-۱

بنابراین  $v_{0x} = +10 \text{ m/s}$  و چون حرکت کندشونده است، علامت  $a_x$  مخالف علامت  $v_{0x}$  است؛ در نتیجه  $a_x = -2 \text{ m/s}^2$ . با استفاده از معادله سرعت داریم:

$$v_x = -2t + 10$$

هنگامی که خودرو متوقف می‌شود  $v_x = 0$  است؛ در نتیجه:

$$0 = -2t + 10 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

ب) می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، معادله حرکت به صورت زیر است:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t \quad (12-1)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} (-2)(5)^2 + 10(5) + 0 = 25 \text{ m}$$

این نتیجه را می‌توانستیم از رابطه مستقل از زمان زیر نیز به دست آوریم:

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x(x - x_0) \quad (13-1)$$

$$0 - (10)^2 = 2(-2)(\Delta x) \Rightarrow \Delta x = 25 \text{ m}$$

## سقوط آزاد

سقوط آزاد نمونه‌ای طبیعی از حرکت یک بُعدی با شتاب ثابت است. اگر جسمی را در امتداد قائم رو به بالا یا رو به پایین پرتاب کنید، در صورتی که بتوان از تأثیرات هوا چشم‌پوشی کرد، سرعت جسم با آهنگ ثابت و معینی تغییر می‌کند. در واقع گالیله نخستین کسی بود که استدلال کرد تمام اجسام در نبود مقاومت هوا با شتاب ثابتی سقوط می‌کنند.



این شتاب برای همه اجسام یکسان و بزرگی آن در نزدیکی سطح زمین تقریباً برابر  $9.8 \text{ m/s}^2$  است. شکل ۱۹-۱ نشان می‌دهد که پر و یک سیب در شرایط خلأ نسبی با شتاب یکسانی سقوط می‌کنند.

شکل ۱۹-۱- یک پر و یک سیب در شرایط خلأ نسبی با شتاب یکسانی سقوط می‌کنند. این شتاب، فاصله میان عکس‌های متوالی را افزایش داده است.

همان‌طور که گفتیم در سقوط آزاد، جابه‌جایی در راستای قائم (محور  $y$ ) است و بنابراین مکان متحرک با  $y$  نشان داده می‌شود. به این ترتیب معادله‌های حرکت شتاب ثابت که در فیزیک ۲ و آزمایشگاه با آنها آشنا شدیم برای سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین نیز به کار می‌آیند. یعنی کافی است حرکت را به جای محور  $x$  در راستای محور قائم ( $y$ ) در نظر بگیریم، به طوری که جهت  $+y$  رو به بالا باشد. با این انتخاب، شتاب سقوط آزاد همواره منفی است (یعنی در خلاف جهت مثبت محور  $y$  است). بنابراین ذره چه رو به بالا و چه رو به پایین حرکت کند  $a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$  است. به این ترتیب، کافی است در معادله‌های حرکت شتاب ثابت  $x$  را به  $y$  و  $a$  را به  $-g$  تبدیل کنیم تا معادله‌های سقوط آزاد به دست آیند:

$$v = -gt + v_0 \quad (14-1)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \quad (15-1)$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \quad (16-1)$$



همان طور که گفتیم شتاب همواره منفی و رو به پایین است، ولی سرعت می تواند مثبت یا منفی باشد. در حین بالا رفتن، سرعت مثبت است ولی این سرعت مثبت کاهش می یابد تا اینکه به طور لحظه ای صفر شود. در حین پایین آمدن، سرعت منفی است ولی بزرگی آن افزایش می یابد.

### مثال ۱۲-۱

سنگی را از بالای ساختمان بلندی به ارتفاع ۴۵ m رها می کنیم، الف) سنگ پس از چه زمانی به زمین می رسد؟ ب) سرعت آن، هنگام رسیدن به زمین چقدر است؟  
( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### پاسخ

الف) برای بررسی حرکت سقوط آزاد اجسام، محور  $y$  را در راستای قائم و رو به بالا و مبدأ آن را نقطه رها کردن جسم در نظر می گیریم. در این صورت، معادله حرکت با شتاب ثابت ۱-۱۵ به صورت زیر به دست می آید:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$-45 = -\frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

ب) با استفاده از معادله سرعت ۱-۱۱ داریم:

$$v = -gt$$

$$v = -10 \times 3 = -30 \text{ m/s}$$

### فعالیت ۲-۱



شکل ۱-۲۰

از دوست خود بخواهید، مطابق شکل ۱-۲۰، خط کش مدرج بلندی را بین انگشتان شما نگه دارد و در یک لحظه آن را رها کند. چگونه می توانید زمان واکنش خود را (یعنی زمانی که طول می کشد تا پس از مشاهده رها شدن خط کش، آن را بگیرید) اندازه گیری کنید؟

سنگی را با سرعت  $20 \text{ m/s}$  در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به بالاترین ارتفاع برسد؟ (ب) سنگ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (پ) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به نقطه پرتاب برگردد؟ (ت) سرعت سنگ در این نقطه چقدر است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### پاسخ

(الف) محور  $y$  را روبه بالا و مبدأ آن را در نقطه پرتاب فرض می‌کنیم. در نتیجه، در لحظه پرتاب داریم  $v_{y0} = +20 \text{ m/s}$  و  $y_0 = 0$ . در شروع حرکت، جسم در جهت محور  $y$  حرکت می‌کند، با استفاده از رابطه‌های ۱-۱۵ و ۱-۱۴ داریم:

$$y = -5t^2 + 20t$$

$$v_y = -10t + 20$$

در بالاترین نقطه،  $v_y = 0 \text{ m/s}$ ، در نتیجه:

$$0 = -10t + 20 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

(ب) بالاترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد از معادله حرکت به دست می‌آید:

$$y = -5(2)^2 + 20(2) = 20 \text{ m}$$

(پ) در بازگشت سنگ به نقطه پرتاب، داریم  $y = 0$ ، در نتیجه:

$$-5t^2 + 20t = 0$$

$$t(-5t + 20) = 0 \quad \text{و یا}$$

جواب‌های این معادله  $t = 0$  و  $t = 4 \text{ s}$  است.  $t = 0$  مربوط به لحظه پرتاب است

و  $t = 4 \text{ s}$  زمانی است که طول می‌کشد تا سنگ به نقطه پرتاب برگردد.

(ت) سرعت متحرک در این لحظه از معادله سرعت به دست می‌آید:

$$v_y = -10(4) + 20 = -20 \text{ m/s}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که در هنگام بازگشت سنگ به نقطه پرتاب،

سوی سرعت آن، رو به پایین است. ملاحظه می‌شود که با معادله‌های حرکت و سرعت، می‌توان چگونگی حرکت سنگ را در هر لحظه از رفت و برگشت، توصیف کرد.

### مثال ۱۴-۱

از بالای ساختمانی به ارتفاع  $50\text{ m}$  سنگی را در راستای قائم با سرعت  $15\text{ m/s}$ ، به بالا پرتاب می‌کنیم. چه مدت زمانی طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد؟

#### پاسخ

محور مختصات را رو به بالا و مبدأ آن را در بالای ساختمان در نظر می‌گیریم. در نتیجه، معادله حرکت سنگ به صورت زیر است:

$$y = -5t^2 + 15t$$

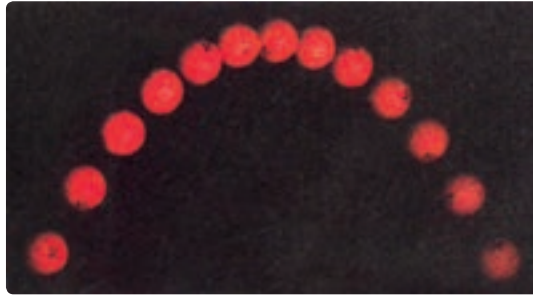
در پایین ساختمان  $y = -50\text{ m}$ ، در نتیجه:

$$-50 = -5t^2 + 15t$$

با حل این معادله، دو مقدار  $t = -2\text{ s}$  و  $t = 5\text{ s}$  به دست می‌آید؛ چون حرکت از لحظه  $t = 0$  شروع شده است، جواب اول قابل قبول نیست؛ در نتیجه زمان رسیدن سنگ به زمین  $5\text{ s}$  است.

### ۱-۲- حرکت در دو بُعد یا حرکت در صفحه

در بخش ۱-۱ حرکت در یک بعد را مرور کردیم. در این بخش به بررسی حرکت در صفحه که آن را حرکت دو بُعدی نیز می‌نامیم، می‌پردازیم. حرکت گلوله تویی که شلیک می‌شود و یا حرکت یک سیاره به دور خورشید و یا حرکت اتومبیل در پیچ جاده و ... مثال‌هایی از حرکت دوبعدی هستند.



شکل ۱-۲۱- مسیر توپ گلف

مکان جسم در یک صفحه، با بردار  $\vec{r}$  نمایش داده می‌شود. این بردار را می‌توان به صورت

زیر نوشت :

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (17-1)$$

که در آن  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  به ترتیب بردارهای یکه در جهت‌های  $x$  و  $y$  هستند.

چون هنگام حرکت جسم، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می‌کند، برای مشخص کردن مکان

جسم در حین حرکت، کافی است که مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  را به صورت تابع‌هایی از زمان داشته باشیم :

$$x = f(t) \text{ و } y = g(t) \quad (18-1)$$

رابطه‌های ۱-۱۸ معادله‌های حرکت یک جسم را در دو بُعد نشان می‌دهند. واضح است که

در حرکت دو بعدی، بردار مکان نیز تابعی از زمان است :

$$\vec{r} = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j} \quad (19-1)$$

**جابه‌جایی و سرعت متوسط :** برای بررسی حرکت جسم روی مسیری مطابق شکل ۱-۲۲،

فرض کنید متحرکی در لحظه  $t_1$  در نقطه  $A$  (مکان  $r_1$ ) و در لحظه  $t_2$  در نقطه  $B$  (مکان  $r_2$ ) باشد. برداری

که از  $A$  به  $B$  رسم می‌شود جابه‌جایی (تغییر مکان) جسم را در بازه زمانی  $\Delta t = t_2 - t_1$  نمایش می‌دهد.

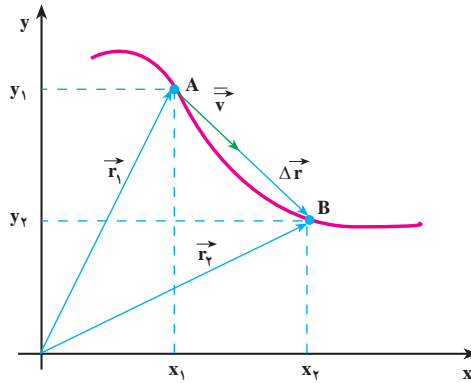
این بردار که در شکل ۱-۲۲ رسم شده است از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (20-1)$$

$$\Delta \vec{r} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j})$$

$$\Delta \vec{r} = (\Delta x) \vec{i} + (\Delta y) \vec{j} \quad (21-1)$$

در رابطه ۲۱-۱،  $\Delta x = x_2 - x_1$  و  $\Delta y = y_2 - y_1$  است.



شکل ۲۲-۱- بردار سرعت متوسط و بردار تغییر مکان هم جهت اند.

سرعت متوسط جسم در یک بازه زمانی معین، همانند حالت یک بعدی، به صورت زیر تعریف

می شود :

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (22-1)$$

با استفاده از رابطه ۲۱-۱ داریم :

$$\vec{v} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \vec{i} + \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \vec{j} \quad (23-1)$$

اگر  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  را با  $\bar{v}_x$  و  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  را با  $\bar{v}_y$  نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$\vec{v} = (\bar{v}_x) \vec{i} + (\bar{v}_y) \vec{j} \quad (24-1)$$

### پرسش ۱-۱

رابطه ۲۲-۱ نشان می دهد که سرعت متوسط، کمیتی برداری است و  $\vec{v}$  با  $\Delta \vec{r}$

هم جهت است؛ چرا؟

معادله‌های حرکت جسمی در دو بُعد، در SI به صورت زیر است :

$$x = 2t \text{ و } y = -t^2 + 4t$$

الف) بردار مکان جسم را در لحظه‌های  $t_1 = 1\text{ s}$  و  $t_2 = 2\text{ s}$  به دست آورید.

ب) سرعت متوسط آن را در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه تعیین و بزرگی آن را حساب کنید.

**پاسخ**

الف) در  $t_1 = 1\text{ s}$  :

$$x_1 = 2\text{ m و } y_1 = +3\text{ m}$$

$$\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$x_2 = 4\text{ m و } y_2 = 4\text{ m}$$

به همین ترتیب در  $t_2 = 2\text{ s}$  :

$$\vec{r}_2 = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

ب) در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2\text{ m}$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 4 - 3 = 1\text{ m}$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2}{1} = 2\text{ m/s}$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1}{1} = 1\text{ m/s}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

و در نتیجه

$$(\bar{v})^2 = (\bar{v}_x)^2 + (\bar{v}_y)^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$\bar{v} = \sqrt{5} \approx 2.23\text{ m/s}$$

**سرعت لحظه‌ای :** در شکل ۱-۲۳ نمودار حرکت جسمی روی یک مسیر خمیده در صفحه

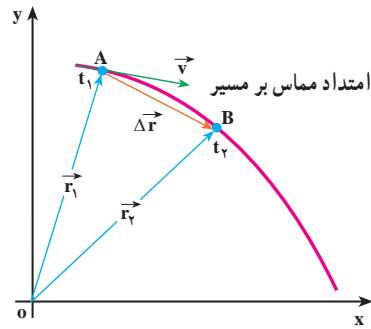
xoy نشان داده شده است. مکان جسم در دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  مشخص شده است. پیش‌تر گفتیم که بردار

سرعت متوسط در یک بازه زمانی معین، با بردار جابه‌جایی مربوط به آن، هم‌جهت است. همچنین

می‌دانید هنگامی که بازه زمانی  $\Delta t$ ، کوچک و کوچک‌تر شود، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای

نزدیک و نزدیک تر می شود؛ یعنی، بردار سرعت لحظه‌ای حد بردار سرعت متوسط است وقتی  $\Delta t$  به سمت صفر، میل می کند:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{v}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (25-1)$$



شکل ۱-۲۳- سرعت لحظه‌ای در امتداد مماس بر مسیر حرکت است.

به عبارت دیگر می توان گفت که «سرعت لحظه‌ای، مشتق بردار مکان جسم، نسبت به زمان است»:

$$\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt} \quad (26-1)$$

در حدی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل کند، با استفاده از رابطه ۱-۲۱ می توان سرعت لحظه‌ای جسم را برحسب مؤلفه‌های آن در دو امتداد x و y به دست آورد:

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}\right) \vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right) \vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_x) \vec{i} + (v_y) \vec{j} \quad (27-1)$$

در شکل ۱-۲۳ می بینید که وقتی  $t_2$  به سمت  $t_1$  میل کند، راستای بردار جابه‌جایی  $\Delta \vec{r}$ ، به سمت راستای مماس بر منحنی مسیر، در نقطه A میل خواهد کرد. بنابراین، چون بردار سرعت متوسط همواره هم جهت با جابه‌جایی است، در حدی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند، بردار سرعت لحظه‌ای بر مسیر حرکت در نقطه A مماس خواهد شد. بدین ترتیب می توان گفت هنگامی که جسم روی یک مسیر خمیده حرکت می کند، جهت بردار سرعت آن که همواره بر مسیر حرکت مماس است، در هر لحظه تغییر می کند. از این پس، برای اختصار، بردار سرعت لحظه‌ای را سرعت می نامیم.

خودرویی در یک صفحه افقی که آن را در اینجا صفحه  $xOy$  می‌نامیم، حرکت می‌کند. معادله‌های حرکت آن در SI به صورت زیر است:

$$x = 6t + 5 \text{ و } y = 4t^2$$

بزرگی سرعت خودرو را در  $t = 1 \text{ s}$  به دست آورید.

**پاسخ**

با استفاده از رابطه ۱-۲۷ مؤلفه‌های سرعت به دست می‌آید:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6 \text{ m/s}$$

ملاحظه می‌شود که مؤلفه افقی سرعت مقدار ثابتی دارد و تابع زمان نیست. به همین ترتیب برای مؤلفه قائم سرعت داریم:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 8t$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود این مؤلفه، تابع زمان است و بزرگی آن در  $t = 1 \text{ s}$

برابر است با:

$$v_y = 8 \text{ m/s}$$

پس بزرگی سرعت در  $t = 1 \text{ s}$  برابر است با:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$$

### شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

می‌دانید وقتی که سرعت جسم در حال حرکت تغییر می‌کند، حرکت را شتاب‌دار می‌گویند. البته این تغییر سرعت می‌تواند به معنای تغییر در بزرگی سرعت، تغییر در جهت سرعت و یا هر دو باشد. دیدیم که وقتی مسیر حرکت جسم خمیده است، جهت سرعت آن الزاماً تغییر می‌کند. بنابراین، حرکت بر روی مسیر منحنی، حرکتی شتاب‌دار است. حتی اگر بزرگی سرعت هم تغییر نکند.



دو حرکت شتاب دار مثال بزنید که در آنها، بزرگی سرعت تغییر نکند.

در شکل ۱-۲۴ الف بردارهای سرعت در دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  روی مسیر نشان داده شده است. برای محاسبه تغییر سرعت در بازه زمانی  $\Delta t = t_2 - t_1$  بردارهای مساوی با  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  را مطابق شکل ۱-۲۴ ب از مبدأ مشترک O رسم می کنیم و  $\Delta \vec{v}$  را به دست می آوریم. در اینجا نیز، مشابه حرکت یک بعدی، بردار شتاب متوسط را در بازه زمانی  $\Delta t$  به صورت زیر تعریف می کنیم:

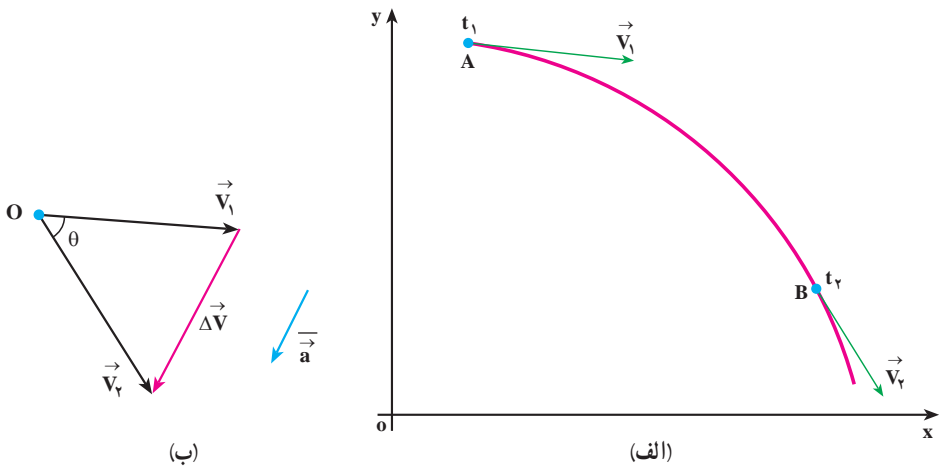
$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1-28)$$

با استفاده از رابطه ۱-۲۷ داریم:

$$\vec{a} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right) \vec{i} + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right) \vec{j}$$

که آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{a} = (\bar{a}_x) \vec{i} + (\bar{a}_y) \vec{j} \quad (1-29)$$



شکل ۱-۲۴ بردار شتاب متوسط با  $\Delta \vec{v}$  هم جهت است.

شتاب لحظه ای در لحظه  $t_1$  را نیز می توان به صورت حد شتاب متوسط، هنگامی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند، تعریف کرد؛ یعنی:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (30-1)$$

با توجه به مفهوم مشتق، رابطه ۱-۳۰ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (31-1)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2(\vec{r})}{dt^2} \quad (32-1)$$

به کمک رابطه ۱-۲۹ می توانیم بنویسیم:

$$\vec{a} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right) \vec{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right) \vec{j} \quad (33-1)$$

که در آن  $\frac{dv_y}{dt} = a_y$  و  $\frac{dv_x}{dt} = a_x$  مؤلفه های شتاب لحظه ای هستند.

در نتیجه می توان نوشت:

$$\vec{a} = (a_x) \vec{i} + (a_y) \vec{j} \quad (34-1)$$

رابطه ۱-۲۸ نشان می دهد که  $\vec{a}$  و  $\Delta \vec{v}$  هم جهت اند، ولی همان طور که در شکل ۱-۲۴ ب نشان داده شده است، در حرکت روی مسیر خمیده، معمولاً بردار شتاب متوسط  $\vec{a}$ ، با بردارهای سرعت، ( $\vec{v}_1$  یا  $\vec{v}_2$ ) هم جهت نیست؛ درحالی هم که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند و بردار  $\vec{v}_2$  به بردار  $\vec{v}_1$  بسیار نزدیک می شود، شتاب لحظه ای با سرعت لحظه ای نیز معمولاً هم جهت نخواهد بود، ولی به کمک رابطه ۱-۳۳ و با داشتن معادله سرعت، جهت بردار شتاب لحظه ای را که از این پس آن را به اختصار شتاب خواهیم نامید، می توان به دست آورد.

### مثال ۱-۱۷

معادله حرکت دو بعدی جسمی در SI به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 2.0t^2 \\ y = -5t^3 \end{cases}$$

بردارهای سرعت و شتاب این جسم را در لحظه  $t = 1$  s به دست آورید. آیا این

دو بردار هم جهت اند؟

## پاسخ

برای تعیین بردار سرعت، ابتدا مؤلفه‌های  $v_x$  و  $v_y$  را در  $t = 1$  s به دست

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4 \cdot t \Rightarrow v_x = 4 \text{ m/s} \quad \text{می‌آوریم:}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -15t^2 \Rightarrow v_y = -15 \text{ m/s}$$

بنابراین بردار سرعت لحظه‌ای در  $t = 1$  s چنین خواهد بود:

$$\vec{v} = 4 \cdot \vec{i} - 15 \cdot \vec{j}$$

برای تعیین بردار شتاب نیز ابتدا مؤلفه‌های شتاب، یعنی  $a_x$  و  $a_y$ ، را به دست

می‌آوریم. مؤلفه افقی شتاب، ثابت است:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -30t$$

$a_y$  تابع زمان است و در  $t = 1$  s برابر است با:

$$a_y = -30 \text{ m/s}^2$$

با توجه به مقدارهای  $a_x$  و  $a_y$  در لحظه فوق، بردار شتاب در  $t = 1$  s نیز نوشته

می‌شود:

$$\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{j}$$

زاویه‌ای که بردارهای سرعت و شتاب در لحظه  $t = 1$  s با محور افقی می‌سازند

به ترتیب برابرند با:

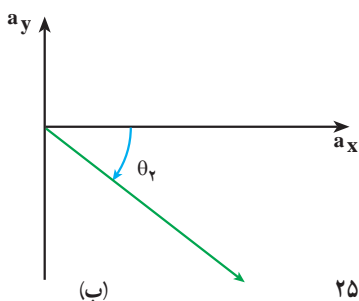
$$\tan \theta_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-15}{4}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{-15}{4} \approx -75^\circ$$

$$\tan \theta_2 = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-30}{4}$$

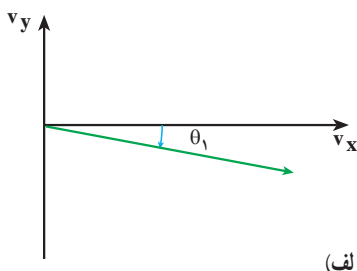
$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{-30}{4} \approx -87^\circ$$

با مقایسه زاویه‌های  $\theta_1$  و  $\theta_2$  در شکل ۱-۲۵ می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای سرعت و شتاب در این لحظه هم جهت نیستند.



(ب)

شکل ۱-۲۵



(الف)

## تمرین‌های فصل اول

۱- معادله حرکت جسمی در SI به صورت  $x = t^2 - 3t^3$  است. مطلوب است:

(الف) بزرگی سرعت متوسط جسم در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه

(ب) بزرگی سرعت متحرک در لحظه  $t = 4$  s

۲- جسمی با سرعت ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند. جسم در لحظه  $t = 2$  s در مبدأ

مختصات و ۲ ثانیه بعد در  $x = -6$  m است.

(الف) معادله حرکت جسم را بنویسید.

(ب) مکان جسم را در لحظه  $t = 3$  s به دست

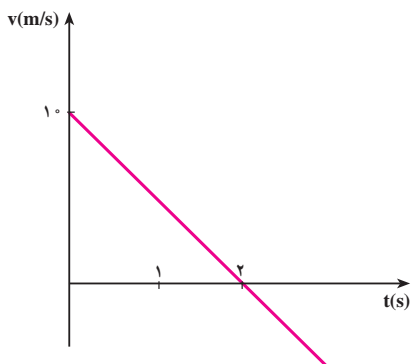
آورید.

۳- نمودار سرعت - زمان متحرکی در

شکل ۱-۲۶ داده شده است. اگر متحرک در

لحظه  $t = 0$  s، در  $x = 2$  m باشد، معادله حرکت آن

را به دست آورید.



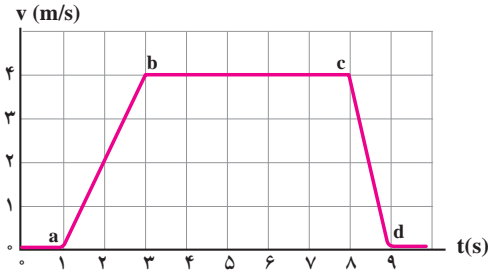
شکل ۱-۲۶

۴- معادله حرکت متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت:  $x = 2t^2 + 4t$

است.

(الف) شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه

(ب) شتاب متحرک در لحظه  $t = 3$  s را به دست آورید.



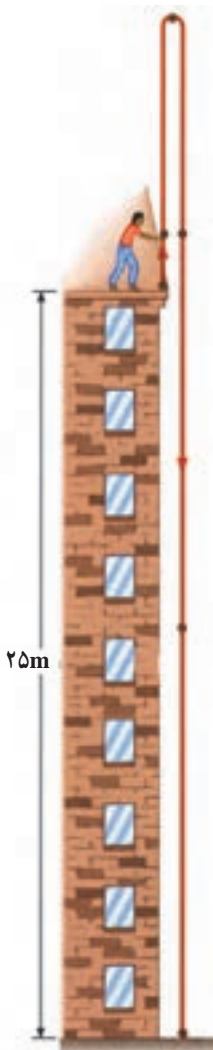
شکل ۱-۲۷

۵- نمودار سرعت- زمان آسانسوری مطابق شکل ۱-۲۷ است. نمودار شتاب- زمان آن چگونه می شود و در مورد کندشونده یا تندشونده بودن حرکت اظهار نظر کنید.

۶- خودرویی در پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب  $2 \text{ m/s}^2$  شروع به حرکت می کند. در همین لحظه کامیونی با سرعت ثابت  $36 \text{ km/h}$  از کنار آن می گذرد. الف) نمودارهای مکان- زمان و سرعت- زمان را برای خودرو و کامیون رسم کنید.

ب) پس از چه مدتی، خودرو به کامیون می رسد؟

۷- در شکل ۱-۲۸ تویی در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می شود. توپ پس از ۴ ثانیه به محل پرتاب برمی گردد. توپ الف) با چه سرعتی پرتاب شده است؟ ب) تا چه ارتفاعی بالا می رود؟ پ) با چه سرعتی به زمین می رسد؟ ت) بعد از چند ثانیه به زمین می رسد؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



شکل ۱-۲۸

۸- مثالی ذکر کنید که در آن سرعت یک جسم در یک لحظه، صفر ولی جسم در آن لحظه دارای شتاب باشد.

۹- کانگورو می تواند از مانعی به ارتفاع  $2/5$  متر بپرد. الف) سرعت آن را هنگام بلند شدن از زمین حساب کنید. ب) سرعت آن را به هنگام بازگشت به زمین محاسبه کنید. فرض کنید حرکت کانگورو در راستای قائم است.

۱۰- بردارهای مکان ذره متحرکی در لحظه‌های  $t_1 = 5s$  و  $t_2 = 25s$  به ترتیب  $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 14\vec{j}$  و  $\vec{r}_2 = 8\vec{i} + 6\vec{j}$  است. بزرگی سرعت متوسط این ذره را بین دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  به دست آورید. با رسم یک نمودار، جهت  $\vec{v}$  را نشان دهید.

۱۱- معادله حرکت جسمی با دو رابطه زیر، در SI داده شده است:

$$y = 2t^2 + 1, x = 6t$$

الف) معادله سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در  $t = 2s$  محاسبه کنید.

ب) بردار سرعت متوسط جسم را بین لحظه‌های  $t = 1$  و  $t = 2$  ثانیه برحسب بردارهای یکگه  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  بنویسید.