

# حرکت نوسانی

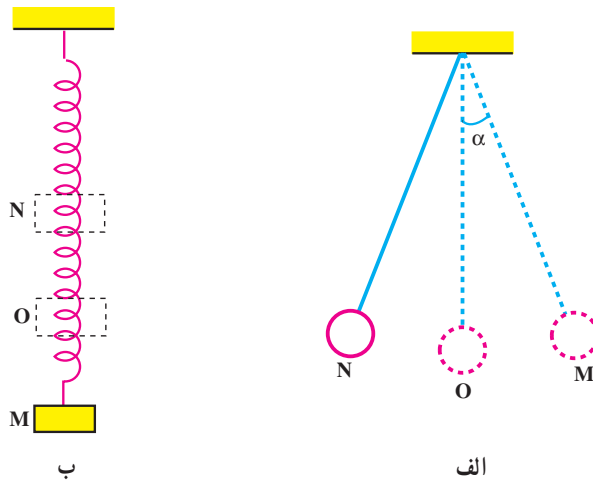


۳

فصل

## حرکت نوسانی

**نگاهی به فصل:** گردش زمین به دور خورشید، گردش ماه به دور زمین، ضربان قلب انسان، ارتعاش تارهای کمانچه، تار و یا سه تار، بالا و پایین رفتن تاب بازی، پیدایش فصل های سال، طلوع و غروب خورشید، یا حرکت یک آونگ ساده (شکل ۱-۳-الف)، حرکت وزنه ای که به یک فنر متصل است (شکل ۱-۳-ب) و مثال های بسیار دیگری مانند اینها، حرکت های دوره ای هستند که با گذشت زمان بارها تکرار می شوند. در حرکت های دوره ای، متحرک پس از طی زمان معینی به وضعیت اولیه برمی گردد و حرکت خود را از نو آغاز می کند. در این فصل پس از معرفی پدیده های دوره ای به توصیف حرکت هماهنگ ساده می پردازیم؛ زیرا شناخت و بررسی این حرکت، پایه و اساس مناسبی برای درک امواج و انتشار آنها فراهم می کند.



شکل ۱-۳

### ۱-۳-۱- حرکت هماهنگ ساده

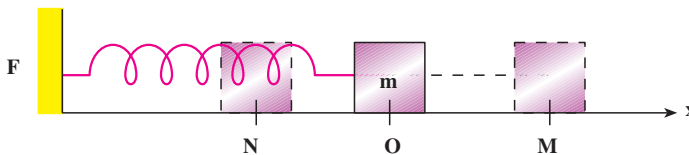
یک حرکت نوسانی را **هماهنگ ساده** می نامیم؛ وقتی مسیر رفت و برگشت متحرک روی یک پاره خط حول نقطه ای واقع در وسط آن باشد. برای مثال، حرکت آونگ (شکل ۱-۳-الف)، وقتی زاویه  $\alpha$  خیلی کوچک باشد، به گونه ای که بتوان تاثرات و سینوس آن را برابر گرفت و همچنین بالا و

پایین رفتن وزنه آویخته به فنر (شکل ۱-۳-ب). در این دو حرکت، متحرک، در بازه‌های زمانی یکسان، از ابتدای پاره خط، یعنی از نقطه M به نقطه N می‌رود و برمی‌گردد و به این ترتیب، حول نقطه O واقع در وسط پاره خط نوسان می‌کند. از این پس دستگاهی را که دارای حرکت هماهنگ ساده است نوسانگر هماهنگ ساده می‌نامیم. نوسانگر وزنه-فنر در شکل ۱-۳-ب الگوی مناسبی برای بررسی حرکت نوسانی ساده است. ابتدا برخی مفهومی‌ها را در این حرکت معرفی می‌کنیم.

**دوره و بسامد:** در حرکت هماهنگ ساده بازه زمانی بین دو وضعیت یکسان و متوالی را دوره می‌نامیم. به عبارت دیگر دوره، زمان یک نوسان (زمان یک رفت و برگشت به وضع قبلی) است و با T نشان داده می‌شود. همچنین تعداد دوره‌ها یا تعداد نوسان‌ها را در یک ثانیه بسامد می‌نامیم و آن را با f نشان می‌دهیم. یکای بسامد در SI،  $s^{-1}$  است که هرتز (Hz) نامیده می‌شود. با توجه به تعریف دوره، معلوم می‌شود که بسامد وارون دوره است:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1-3)$$

**دامنه نوسان:** جسمی به جرم m را در نظر بگیرید که به سرآزاد یک فنر متصل است و می‌تواند در راستای محور x، روی یک سطح افقی که اصطکاک آن ناچیز است، جابه‌جا شود (شکل ۲-۳). در حالتی که فنر طول عادی خود را دارد برابند نیروهای وارد به جسم صفر و در نتیجه جسم در حال تعادل است.



شکل ۲-۳

حال اگر مبدأ محور مختصات، یعنی نقطه O را منطبق بر مکان جسم در حالت تعادل اختیار نماییم و سپس جسم را تا نقطه M به سمت راست بکشیم و سپس رها کنیم، جسم حول وضع تعادلش (نقطه O) با حرکت هماهنگ ساده شروع به نوسان می‌کند. در ضمن نوسان جسم، فاصله آن از مبدأ تغییر می‌کند، اما هیچ‌گاه فاصله آن از مبدأ بیش از OM یا ON نمی‌شود. این بیشترین فاصله نوسانگر از مبدأ را دامنه می‌نامیم و معمولاً آن را با A نشان می‌دهیم.

**نیروی بازگرداننده:** در شکل ۲-۳، جهت نیروی فنر همواره به گونه‌ای است که می‌خواهد جسم را به حالت تعادل (نقطه O) برگرداند، این نیرو، نیروی بازگرداننده نامیده می‌شود. نیروی بازگرداننده فنر با تغییر طول فنر، متناسب است و از رابطه زیر که به قانون هوک معروف است، به دست می‌آید:

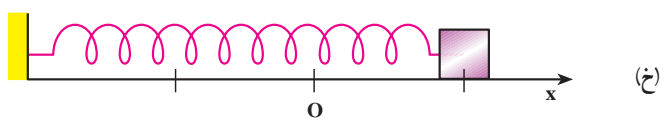
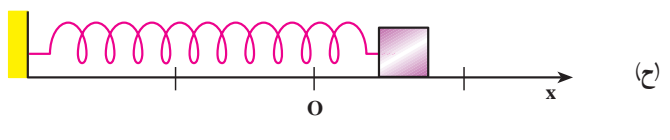
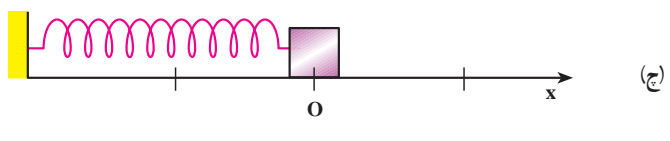
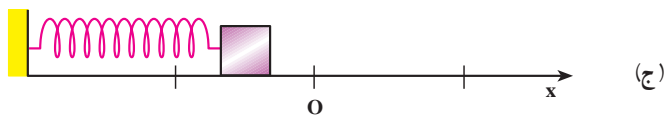
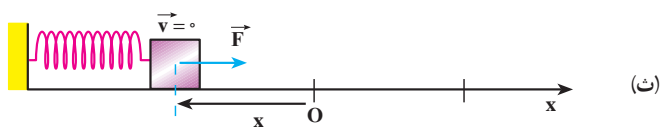
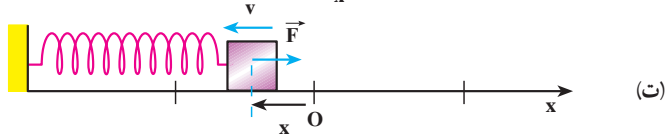
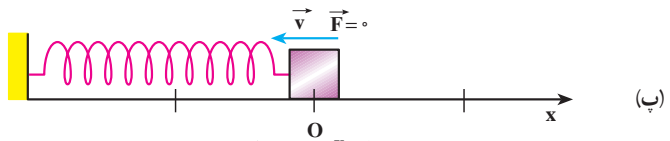
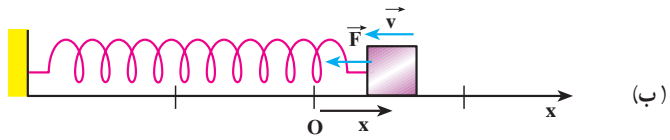
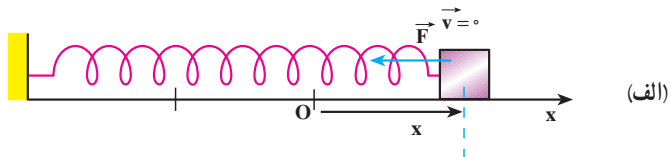
$$F = -kx \quad (2-3)$$

در این رابطه،  $x$  تغییر طول فنر،  $F$  نیروی بازگرداننده فنر و  $k$  ثابت تناسب است که به ویژگی‌های فنر بستگی دارد و آن را ثابت نیروی فنر می‌نامیم. یکای  $k$  در SI نیوتون بر متر ( $N/m$ ) است. علامت منفی در رابطه ۲-۳ نشان می‌دهد که جهت نیروی بازگرداننده فنر همواره خلاف جهت بردار مکان جسم است. هر دستگاهی که نیروی بازگرداننده آن از قانون هوک پیروی کند، حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت.

حال اثر نیروی بازگرداننده را در نوسانگر وزنه - فنر، در یک دوره، بررسی می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۳-۳ الف تا پ دیده می‌شود، اگر جسم را پس از خارج کردن از وضع تعادل رها کنیم، تحت اثر نیروی بازگرداننده به طرف وضع تعادل خود (نقطه O) برمی‌گردد و پس از رسیدن به نقطه O، به سبب داشتن انرژی جنبشی، به حرکتش به سمت چپ ادامه می‌دهد (شکل پ). از این لحظه به بعد، مکان و سرعت جسم منفی و نیروی بازگرداننده در جهت محور  $x$  و مثبت است. بنا به قانون دوم نیوتون، چون شتاب با نیروی برآیند هم جهت است در این مرحله از حرکت شتاب نیز مثبت است. اما چون سرعت آن منفی است، حرکت جسم کند شونده است (شکل ت)؛ یعنی از سرعت آن کاسته می‌شود و در یک لحظه به صفر می‌رسد. در این لحظه فنر بیشترین فشردگی یا تغییر طول را دارد و نیروی بازگرداننده بیشینه است (شکل ث).

### فعالیت ۱-۳

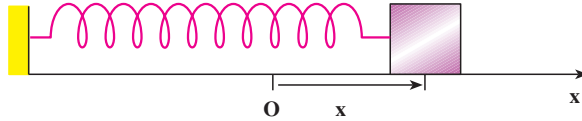
دیدیم در لحظه‌ای که فنر بیشترین فشردگی را پیدا می‌کند سرعت نوسانگر به صفر می‌رسد. اکنون با توجه به شکل‌های ۳-۳ ج تا خ نیروی وارد بر نوسانگر و همچنین مکان، سرعت و شتاب نوسانگر را پس از لحظه مذکور بررسی کنید.



شکل ۳-۳

### ۲-۳- معادله حرکت هماهنگ ساده

یک نوسانگر را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳-۴ در فاصله  $x$  از وضع تعادل قرار دارد.



شکل ۳-۴

بنا به رابطه ۲-۳ نیروی وارد بر وزنه در این لحظه  $F = -kx$  است؛ اگر جرم وزنه  $m$  باشد بنا به قانون دوم نیوتون داریم:

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = -\frac{k}{m}x \quad (۳-۳)$$

بنا به آنچه در فصل ۱ دیدیم، شتاب مشتق دوم مکان نسبت به زمان است؛ یعنی:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

بنابراین  $x = f(t)$  باید به صورتی باشد که مشتق دوم آن نسبت به زمان، با علامت منفی، با  $x$  متناسب باشد. با توجه به این که تابع سینوسی که در درس ریاضی خوانده‌اید، همین ویژگی را دارد، معادله حرکت هماهنگ ساده باید به صورت زیر باشد\*:

$$x = A \sin \omega t \quad (۴-۳)$$

اگر از رابطه ۳-۴ دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t$$

با توجه به رابطه ۳-۴ می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

\* در برنامه درسی این کتاب همواره فرض می‌شود که نوسانگر در مبدأ زمان، در مبدأ مکان بوده و در جهت مثبت محور  $x$  است.

از مقایسه رابطه اخیر با رابطه ۳-۳ نتیجه زیر حاصل می شود.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5-3)$$

$\omega$  را بسامد زاویه ای می نامیم. یکای بسامد زاویه ای رادیان بر ثانیه است. در رابطه ۳-۴،  $x$  مکان متحرک در لحظه  $t$  و  $A$  دامنه نوسان است (چرا؟) همچنین  $\phi = \omega t$  فاز حرکت در لحظه  $t$  می باشد؛ اگر در لحظه  $t_1$  فاز حرکت:

$$\phi_1 = \omega t_1$$

و در لحظه  $t_2$  فاز حرکت

$$\phi_2 = \omega t_2$$

باشد، تغییر فاز بین دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  برابر است با:

$$\Delta\phi = \omega t_2 - \omega t_1 = \omega(t_2 - t_1)$$

یا

$$\Delta\phi = \omega\Delta t \quad (6-3)$$

در رابطه ۳-۶ اگر  $\Delta t = 1s$  باشد،  $\Delta\phi = \omega$  می شود؛ یعنی، بسامد زاویه ای ( $\omega$ ) تغییر فاز در هر ثانیه است.

**رابطه بسامد زاویه ای و دوره تناوب:** چون دوره تناوب تابع سینوسی،  $2\pi$  است باید در هر دوره

(یعنی در زمان  $T$ ) فاز به اندازه  $2\pi$  تغییر کند. بنابراین، با توجه به رابطه ۳-۶ می توان چنین نوشت:

$$\Delta\phi = \omega T = 2\pi$$

و از آنجا

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (7-3)$$

اکنون با توجه به رابطه های ۳-۵ و ۳-۷ رابطه های زیر به دست می آید:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8-3)$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9-3)$$

رابطه ۳-۸ نشان می دهد که دوره به ویژگی های فیزیکی نوسانگر بستگی دارد؛ چنان که اگر وزنه را تغییر دهیم ( $m$  تغییر کند) یا فنر را عوض کنیم ( $k$  تغییر کند) دوره و در نتیجه بسامد نوسان های دستگاه،

تغییر می‌کند. از طرف دیگر دوره و بسامد به دامنه بستگی ندارد؛ به همین دلیل گفته می‌شود که بسامد یک نوسانگر از ویژگی‌های ساختاری آن نوسانگر است و بسامد طبیعی آن نامیده می‌شود.

### مثال ۱-۳

معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت زیر است.

$$x = 0.05 \sin 6\pi t$$

الف) دامنه، دوره و بسامد این حرکت چه مقدار است؟

ب) مکان نوسانگر را در لحظه صفر و در لحظه  $\frac{1}{36}$  ثانیه به دست آورید.

**پاسخ**

الف) با توجه به معادله ۳-۴ و رابطه ۳-۷ نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$A = 0.05 \text{ m} \quad \text{دامنه:}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 6\pi \Rightarrow T = \frac{1}{3} \text{ s} \quad \text{دوره:}$$

$$f = \frac{1}{T} = 3 \text{ Hz} \quad \text{بسامد:}$$

$$x_0 = 0.05 \sin 6\pi \times 0 = 0.05 \times 0 = 0 \quad \text{ب)}$$

$$x = 0.05 \sin 6\pi \times \frac{1}{36} \Rightarrow x = 0.05 \sin \frac{\pi}{6} = 0.025 \text{ m}$$

### مثال ۲-۳

دامنه نوسان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای ۲ cm و بسامد آن ۲ Hz است. معادله

حرکت آن را بنویسید.

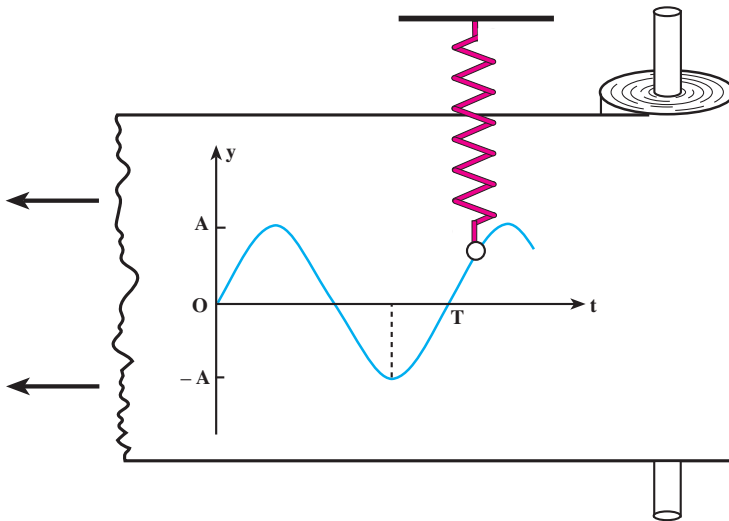
$$A = 0.02 \text{ m}, f = 2 \text{ Hz}, \omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 4\pi \text{ rad/s}, \quad \text{پاسخ}$$

$$x = A \sin \omega t \Rightarrow x = 0.02 \sin 4\pi t$$



## رسم نمودار یک نوسانگر هماهنگ ساده: یکی از روش‌های نمایش نمودار مکان-زمان

حرکت نوسانگر هماهنگ ساده در شکل ۳-۵ نشان داده شده است.



شکل ۳-۵

در این روش، نوار کاغذی روی استوانه‌ای که در امتداد قائم قرار دارد پیچیده شده است. استوانه می‌تواند به‌طور یکنواخت حول محورش بچرخد. نوسانگر وزنه-فنر در امتداد قائم طوری نصب شده است که وزنه متصل به آن به وسیله نوک یک مداد با نوار کاغذی در تماس است. اگر نوسانگر ساکن باشد و نوار کاغذی به سمت چپ کشیده شود نوک مداد یک خط افقی (محور زمان) روی نوار ثبت می‌کند. اگر نوار ساکن باشد و نوسانگر را به نوسان درآوریم، نوک مداد خطی در امتداد قائم رسم می‌کند، که نشان‌دهنده جابه‌جایی نوسانگر است. حال اگر نوار کاغذی را با سرعت ثابت بکشیم و در همان حال نوسانگر را به نوسان واداریم نمودار حرکت هماهنگ ساده که یک نمودار سینوسی است رسم می‌شود، محور افقی زمان حرکت و محور قائم مکان متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد.

شما در درس ریاضی با چگونگی رسم نمودار تابع سینوسی آشنا شده‌اید. به همان ترتیب هم می‌توان نمودار حرکت هماهنگ ساده را به کمک نقطه‌یابی رسم کرد. برای این کار نقطه‌های پیشینه، کمینه و محل برخورد نمودار را با محور زمان معلوم نموده و با مشخص کردن آنها در صفحه مختصات  $x-t$  نمودار را رسم می‌کنیم. به مثال‌هایی در این باره توجه کنید:

### مثال ۳-۳

دوره و دامنه نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به ترتیب  $0.2\text{s}$  و  $6\text{cm}$  است. معادله حرکت این نوسانگر را بنویسید و نمودار مکان-زمان آن را رسم کنید.

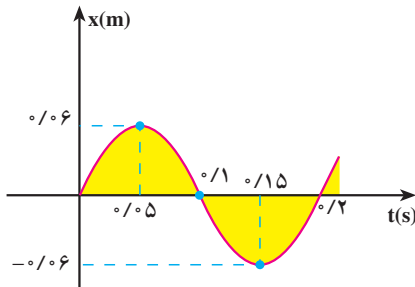
پاسخ

$$T = 0.2\text{s}, A = 0.06\text{m}, \omega = 10\pi\text{rad/s}$$

$$x = A\sin\omega t \Rightarrow x = 0.06\sin 10\pi t \quad \text{معادله حرکت:}$$

برای رسم نمودار تغییرات  $x$  بر حسب  $t$  به کمک نقطه‌یابی به ترتیب زیر، عمل

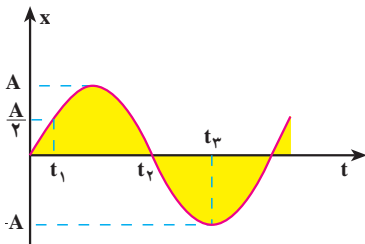
می‌کنیم:



شکل ۳-۶

t(s)	x(m)
0	0
$\frac{T}{4} = 0.05$	$0.06 = +A$
$\frac{T}{2} = 0.1$	0
$\frac{3T}{4} = 0.15$	$-0.06 = -A$
$T = 0.2$	0

### مثال ۳-۴



شکل ۳-۷

نمودار شکل ۳-۷ مربوط به حرکت هماهنگ ساده‌ای است که دوره آن  $0.2\text{s}$  ثانیه است. زمان‌های  $t_1$  و  $t_2$  و  $t_3$  را به دست آورید.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \cdot \pi \text{ rad/s} \Rightarrow x = A \sin 1 \cdot \pi t$$

پاسخ

با توجه به شکل ۳-۷ در لحظه  $t_1$  مکان برابر  $A/2$  است؛ بنابراین:

$$+\frac{A}{2} = A \sin 1 \cdot \pi t_1 \Rightarrow \sin 1 \cdot \pi t_1 = \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot \pi t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{6} \text{ s}$$

در لحظه  $t_2$  مکان صفر است؛ بنابراین:

$$0 = A \sin 1 \cdot \pi t_2$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \pi t_2 = 0 \quad \text{یا} \quad 1 \cdot \pi t_2 = \pi$$

از تساوی  $1 \cdot \pi t_2 = 0$  زمان  $t_2$  صفر به دست می‌آید، در حالی که در شکل  $t_2$

مثبت است؛ بنابراین:

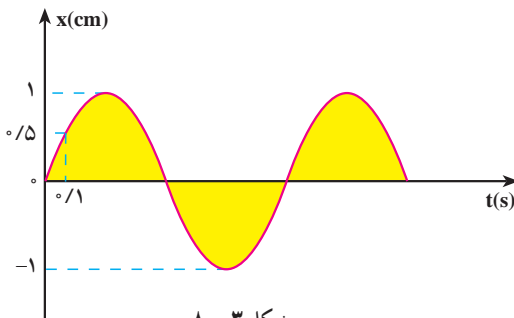
$$1 \cdot \pi t_2 = \pi \Rightarrow t_2 = \frac{1}{1} \text{ s}$$

در لحظه  $t_3$  مکان  $-A$  است؛ بنابراین:

$$-A = A \sin 1 \cdot \pi t_3 \Rightarrow \sin 1 \cdot \pi t_3 = -1$$

$$1 \cdot \pi t_3 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_3 = \frac{3}{2} \text{ s}$$

### تمرین ۳-۱



نمودار مکان-زمان نوسانگری

در شکل ۳-۸

رسم شده است. مطلوب است:

الف) دوره حرکت

ب) مکان نوسانگر در لحظه

$$t = 0.5 \text{ s}$$

### ۳-۳- معادله‌های سرعت و شتاب در حرکت هماهنگ ساده

**الف) معادله سرعت:** با توجه به این که سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است با مشتق‌گیری

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = A\omega \cos \omega t \quad (۱۰-۳)$$

معادله ۱۰-۳ نشان می‌دهد که سرعت به ازای  $\cos \omega t = \pm 1$  بیشینه می‌شود؛ پس داریم:

$$v_{\max} = A\omega \quad (۱۱-۳)$$

در لحظه‌ای که  $\cos \omega t = \pm 1$  است،  $\sin \omega t = 0$  و در نتیجه  $x = 0$ ؛ یعنی، سرعت بیشینه مربوط به لحظه‌ای است که نوسانگر در حال گذر از وضع تعادل است.

#### تمرین ۲-۳

الف) به کمک رابطه‌های ۳-۴ و ۳-۱۰ نشان دهید که  $v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$  است.

ب) به کمک رابطه اخیر معلوم کنید که در چه مکانی سرعت نوسانگر صفر و یا بیشینه است؟

**ب) معادله شتاب:** می‌دانیم که شتاب مشتق سرعت نسبت به زمان، یا مشتق دوم مکان نسبت به

زمان است؛ در نتیجه با استفاده از رابطه ۳-۴ یا ۳-۱۰ داریم:

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t \quad (۱۲-۳)$$

معادله ۱۲-۳ نشان می‌دهد که در حرکت هماهنگ ساده، شتاب نیز به‌طور دوره‌ای تغییر می‌کند

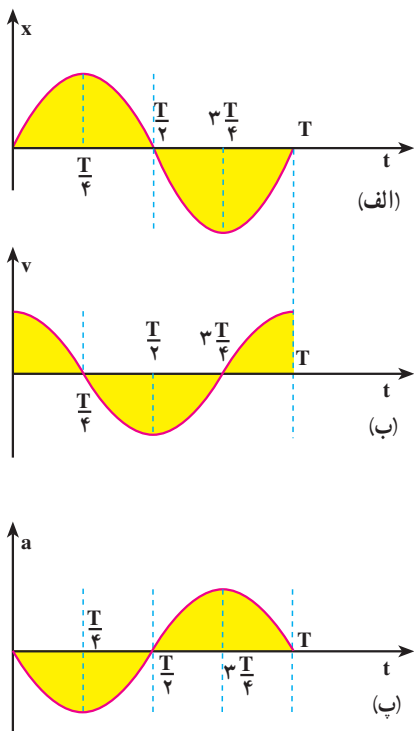
و بیشینه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a_{\max} = A\omega^2 \quad (۱۳-۳)$$

با استفاده از رابطه ۳-۴ می‌توان رابطه ۱۲-۳ را به صورت زیر نوشت:

$$a = -\omega^2 x \quad (۱۴-۳)$$

که رابطه شتاب را با مکان نوسانگر به دست می‌دهد. این رابطه همچنین نشان می‌دهد که بردار شتاب در خلاف جهت بردار مکان است.



شکل ۹-۳

در شکل‌های ۳-۹ الف - ب و پ، به ترتیب، نمودارهای مکان-زمان و سرعت-زمان و شتاب-زمان برای حرکت هماهنگ ساده‌ای که معادله آن به صورت  $x = A \sin \omega t$  است نشان داده شده است.

همان‌طور که در این نمودارها دیده می‌شود در لحظه  $t = 0$ ،  $x = 0$  است. در این لحظه سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است. در لحظه  $\frac{T}{4}$ ،  $x$  بیشینه و مثبت، سرعت صفر و شتاب بیشینه و منفی است. در لحظه  $\frac{T}{2}$ ،  $x = 0$ ، سرعت بیشینه و منفی و شتاب صفر است. در لحظه  $\frac{3T}{4}$ ،  $x$  بیشینه و منفی، سرعت صفر و شتاب بیشینه و مثبت است. در لحظه  $T$ ،  $x$  صفر، سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است.

### مثال ۳-۵

دامنه یک نوسانگر وزنه - فنر،  $5 \text{ cm}$  است. اگر جرم وزنه  $20 \text{ g}$  و ثابت فنر  $2 \text{ N/m}$  باشد:

الف) بیشینه سرعت و شتاب در SI چه اندازه است؟

ب) در لحظه‌ای که مکان نوسانگر  $4 \text{ cm} +$  است، سرعت و شتاب آن را به دست آورید.

پاسخ  
الف)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0.02}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$v_{\max} = A\omega = 0.05 \times 10 = 0.5 \text{ m/s}$$

$$a_{\max} = A\omega^2 = 0.05 \times 100 = 5 \text{ m/s}^2$$

ب) در تمرین ۱-۳ دیدیم که  $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$  ، بنابراین

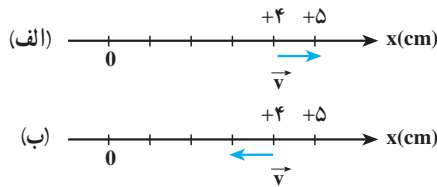
$$v = \pm 10 \sqrt{(0.05)^2 - (0.04)^2} = \pm 0.3 \text{ m/s}$$

علامت ( $\pm$ ) نشان دهنده این است که در مکان  $x = +4 \text{ cm}$  ممکن است سرعت در جهت محور  $x$  یا در خلاف جهت محور  $x$  باشد؛ یعنی، در لحظه ای که  $x = +4 \text{ cm}$  است؛ ممکن است متحرک در حال دور شدن از مبدأ باشد که در این صورت  $v = +0.3 \text{ m/s}$  است و یا در حال نزدیک شدن به مبدأ باشد که در این صورت  $v = -0.3 \text{ m/s}$  . این وضعیت به ترتیب، در شکل های ۱-۳ الف و ۱-۳ ب نشان داده شده است.

$$a = -\omega^2 x = -100 \times 0.04 = -4 \text{ m/s}^2$$

پس معلوم می شود در مکان  $x = +4 \text{ cm}$  شتاب منفی و در خلاف جهت محور

$x$  است.



شکل ۱-۳

### ۳-۴- انرژی مکانیکی نوسانگر (دستگاه جرم - فنر)

در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم، هنگامی که فنری فشرده یا کشیده می شود در آن انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می شود؛ می توان نشان داد مقدار این انرژی از رابطه زیر به دست می آید :

$$U_e = \frac{1}{2} kx^2$$

با جای گذاری  $x$  از معادله ۳-۴ خواهیم داشت :

$$U_e = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega t \quad (۱۵-۳)$$

با استفاده از رابطه ۳-۵ می توان نوشت :

$$U_e = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t \quad (۱۶-۳)$$

از طرفی با توجه به رابطه ۳-۱۰ انرژی جنبشی این نوسانگر از رابطه زیر به دست می آید :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t \quad (۱۷-۳)$$

بنابراین، انرژی مکانیکی، یعنی مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی این نوسانگر به ترتیب زیر به دست می آید :

$$E = U_e + K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t]$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (۱۸-۳)$$

از رابطه های ۳-۱۵ و ۳-۱۷ می توان دریافت که انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر وزنه - فنر با زمان تغییر می کنند؛ یعنی، در لحظه ای که نوسانگر در فاصله x از مبدأ قرار دارد، بخشی از انرژی آن به صورت پتانسیل و بقیه به صورت جنبشی است. اما رابطه ۳-۱۸ نشان می دهد که انرژی مکانیکی نوسانگر مستقل از زمان است.

اگر چه ما انرژی مکانیکی را برای نوسانگر وزنه - فنر محاسبه کردیم، ولی می توان نشان داد که برای هر نوع نوسانگر ساده دیگری نیز، انرژی مکانیکی با مربع دامنه و مربع بسامد متناسب است.

### تمرین ۳-۳

الف) رابطه انرژی جنبشی نوسانگر ساده را بر حسب مکان نوسانگر (x) به دست آورید و با استفاده از آن و همچنین رابطه انرژی پتانسیل نوسانگر نشان دهید که انرژی مکانیکی آن به مکان بستگی ندارد.

ب) با استفاده از رابطه ای که به دست آوردید، مشخص کنید که در چه مکانی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر صفر و یا بیشینه است.

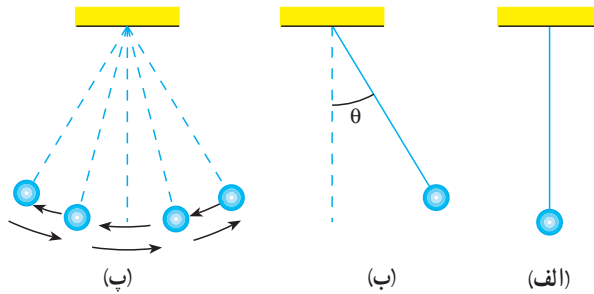
### تمرین ۳-۴

نمودار تغییرات  $U_e$  و K و E را نسبت به مکان برای یک دوره نوسانگر ساده

رسم کنید.

### ۳-۵- آونگ ساده

آونگ ساده وزنه کوچکی است به جرم  $m$  که با نخ سبکی به یک نقطه آویخته شده است. در حالت تعادل، آونگ در امتداد قائم قرار دارد (شکل ۳-۱۱-الف). اگر وزنه را پس از خارج کردن آونگ از وضع تعادل رها کنیم (شکل ۳-۱۱-ب) حول وضع تعادلش نوسان می‌کند (شکل ۳-۱۱-پ). در نوسان آونگ، نیروی بازگرداننده، مؤلفه نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر است.



شکل ۳-۱۱

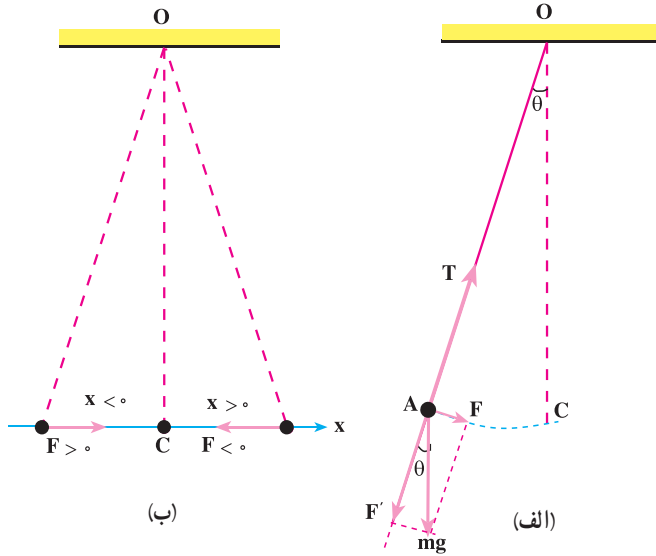
اگر زاویه انحراف اولیه از وضع قائم ( $\theta$ ) به اندازه کافی کوچک باشد، مسیر حرکت وزنه تقریباً یک پاره خط افقی است (شکل ۳-۱۲-ب). در این صورت، وزنه مانند وزنه متصل به فنر یک حرکت هماهنگ ساده با دامنه کم (حرکت نوسانی کم دامنه) انجام می‌دهد.

محاسبه دوره آونگ ساده کم دامنه: در آونگ ساده اگر اصطکاک قابل چشم‌پوشی و جرم نخ ناچیز باشد، بر وزنه آونگ نیروی وزن ( $m\vec{g}$ ) و نیروی کشش نخ ( $\vec{T}$ ) وارد می‌شود. همان‌طور که شکل ۳-۱۲-الف نشان می‌دهد نیروی کشش نخ در امتداد نخ است و در هر لحظه بر مسیر حرکت وزنه عمود است. بنابراین، در راستای مماس بر مسیر، مؤلفه ندارد. مؤلفه نیروی وزن در امتداد مماس بر مسیر  $F = mg \sin\theta$  و در امتداد عمود بر مسیر  $F' = mg \cos\theta$  است. مؤلفه مماس بر مسیر که نیروی بازگرداننده است می‌خواهد آونگ را به وضع تعادل برگرداند.

دیدیم که اگر زاویه انحراف آونگ از وضع تعادل ( $\theta$ ) کوچک باشد، مسیر حرکت وزنه تقریباً یک خط راست افقی است؛ در این صورت، اگر طول آونگ را با  $l$  نمایش دهیم،  $\sin\theta \approx \theta = \frac{x}{l}$  است و می‌توان نوشت:

$$|F| = mg\theta = mg \frac{x}{l}$$





شکل ۱۲-۳

همان گونه که در شکل ۱۲-۳-ب دیده می‌شود مؤلفه نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر و همواره در خلاف جهت بردار مکان است. بنابراین:

$$F = -mg \frac{x}{l}$$

همان طور که می‌بینید، نیروی بازگرداننده از قانون هوک (رابطه ۳-۲) پیروی می‌کند و حرکت آونگ ساده کم دامنه یک حرکت هماهنگ ساده است. اکنون با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F = ma \Rightarrow -mg \frac{x}{l} = ma$$

$$a = -\frac{g}{l}x \quad (۱۹-۳)$$

از رابطه ۱۴-۳ و ۱۹-۳ نتیجه می‌گیریم که:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

و

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (۲۰-۳)$$

### مثال ۷-۳

اندازه دوره و بسامد حرکت نوسانی کم دامنه یک آونگ ساده به طول  $40\text{ cm}$  چقدر است؟ ( $g = 10\text{ m/s}^2$ ).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

پاسخ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{10}} = 2\pi \times \frac{2}{10} \approx 1.25\text{ s} \quad \text{و} \quad f = \frac{1}{T} = 0.8\text{ Hz}$$

### مثال ۷-۳

طول آونگ ساده کم دامنه باید چند سانتی متر باشد تا بتواند در هر دقیقه  $30$  نوسان انجام دهد؟ ( $\pi^2 = 10$  و  $g = 9.8\text{ m/s}^2$ ).

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60}{30} = 2\text{ s}$$

پاسخ

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$4 = 4 \times 10 \times \frac{l}{9.8} \quad \Rightarrow \quad l = 0.98\text{ m} = 98\text{ cm}$$

### فعالیت ۲.۳

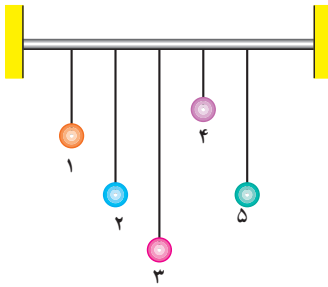
- به کمک یک گلوله و قطعه نخ به طول  $40\text{ cm}$  آونگ ساده ای بسازید و دوره آن را به ترتیب با زاویه های انحراف  $4$ ،  $6$  و  $20$  درجه اندازه بگیرید.
  - گلوله آونگی را که ساخته اید به ترتیب، با چند گلوله دیگر تعویض کنید. سپس دوره هر یک را با زاویه انحراف  $6$  درجه اندازه بگیرید.
  - طول آونگ هایی را که ساخته اید تغییر دهید و دوره نوسان آنها را با زاویه انحراف  $6$  درجه اندازه بگیرید.
- نتیجه فعالیت گروه را در کلاس به بحث بگذارید.

به کمک یک آونگ ساده شتاب گرانش را در محل سکونت خود اندازه‌گیری کنید. روش کار و نتیجه اندازه‌گیری را به کلاس گزارش کنید.

### ۳-۶- تشدید

در بخش‌های قبل دیدیم که وقتی یک نوسانگر ساده نظیر آونگ و یا دستگاه وزنه - فنر را از وضع تعادل منحرف می‌کنیم و آن را برای نوسان آزاد می‌گذاریم، دستگاه حول وضع تعادل خود شروع به نوسان می‌کند. این حرکت نوسانی، نوسان طبیعی یا آزاد دستگاه نامیده می‌شود. بسامد (یا دوره) نوسان طبیعی از ویژگی‌های ساختاری نوسانگر است؛ مثلاً، بسامد آونگ ساده کم دامنه به طول آونگ (I) بستگی دارد؛ یعنی، اگر با دادن انرژی به یک آونگ دامنه نوسان آن را افزایش دهیم (به طوری که زاویه انحراف آونگ کوچک باقی بماند) بسامد نوسان‌های آن تغییر نمی‌کند، در حالی که برای تغییر بسامد، لازم است طول آونگ را تغییر دهیم.

هنگامی که نوسانگر را از حالت تعادل خارج می‌کنیم و آن را به نوسان درمی‌آوریم، به علت نیروهای اتلافی از قبیل اصطکاک و مقاومت هوا، دامنه نوسان آن به تدریج کاهش می‌یابد و دستگاه پس از چند نوسان می‌ایستد. این نوسان‌ها را نوسان میرا می‌نامیم. ساده‌ترین مثال برای نوسان میرا آونگ ساده و نیز تاب بازی در بوستان‌هاست. می‌دانید هنگامی که تاب را به نوسان درمی‌آوریم و آن را رها می‌کنیم پس از تعدادی نوسان می‌ایستد؛ ولی اگر بخواهیم تاب به نوسان خود ادامه دهد باید به آن نیرو وارد کنیم؛ مثلاً، می‌توانیم پس از یک رفت و برگشت، هنگامی که تاب می‌خواهد نوسان بعدی را شروع کند به آن نیرو وارد کنیم. در این حالت دوره وارد کردن نیرو با دوره نوسان تاب برابر است. با اعمال این نیرو دامنه نوسان افزایش می‌یابد و به یک مقدار بیشینه می‌رسد و از این پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد. در این حالت نیروی اعمال شده اثر نیروهای اتلافی را خنثی می‌کند.



شکل ۳-۱۳

مطابق شکل ۳-۱۳ به یک طناب افقی آونگ‌های ساده‌ای با طول‌های متفاوت ولی جرم یکسان بیاویزید، به طوری که طول آونگ‌های شماره ۲ و ۵ با یکدیگر برابر باشد. اکنون آونگ شماره ۵ را از وضع تعادل خارج و آن را رها کنید. حرکت چهار آونگ دیگر را به دقت مشاهده و تجزیه و تحلیل کنید و نتیجه کار گروه را به کلاس گزارش دهید.

در این فعالیت با نوسان آونگ شماره ۵ آونگ‌های ۱ و ۳ و ۴ نیز به نوسان درمی‌آیند، اما پس از چند نوسان می‌ایستند؛ ولی آونگ شماره ۲ که دوره آن با آونگ شماره ۵ یکسان است، در مدت طولانی‌تری می‌ایستد؛ نتیجه این که:

اگر به نوسانگری یک نیروی دوره‌ای اعمال شود، در صورتی که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر یکسان باشد، دامنه نوسان تا مقدار بیشینه‌ای افزایش می‌یابد و از آن پس، حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد. در این صورت می‌گوییم پدیده تشدید رخ داده است. در حالتی هم که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر برابر نیست، انرژی به نوسانگر منتقل می‌شود؛ مثلاً، در فعالیت ۳-۴ به آونگ‌های ۱ و ۳ و ۴ انرژی منتقل می‌شود و آنها را به حرکت درمی‌آورد. ولی بیشترین انرژی در حالت تشدید به نوسانگر منتقل می‌شود (مانند آونگ ۲).

### پرسش ۳-۱

اگر نیروی اتلافی به نوسانگر وارد نشود، پیش‌بینی می‌کنید، در اثر تشدید، نوسانگر چگونه رفتار کند؟

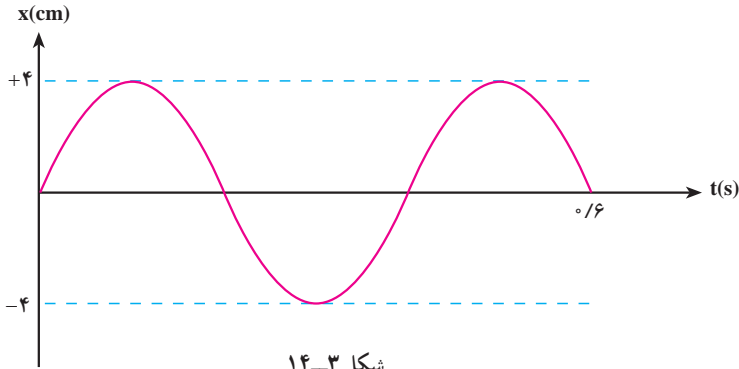
پدیده تشدید ممکن است مفید و یا برعکس مشکل‌زا باشد؛ مثلاً، در ساعت کوکی این پدیده مفید است. فنر کوک شده یک نیروی دوره‌ای بر رفاصک ساعت اعمال می‌کند که بسامد آن با بسامد نوسان رفاصک برابر است و در نتیجه تشدید رخ می‌دهد و باعث می‌شود که حرکت نوسانی رفاصک ادامه یابد. پدیده تشدید ممکن است اثر مخرب نیز داشته باشد و باعث تخریب ساختمان‌ها و تأسیسات شود.

- ۱- توضیح دهید در حرکت هماهنگ ساده وزنه - فنر، اگر دامنه نوسان دو برابر شود، چه تغییری در دوره، بیشینه سرعت و انرژی مکانیکی نوسانگر ایجاد می‌شود؟
  - ۲- جهت سرعت و شتاب را در حرکت هماهنگ ساده، در دو حالت الف و ب، با هم مقایسه کنید و درباره نتیجه این مقایسه توضیح دهید.
  - الف) نوسانگر به مبدأ (وضع تعادل) نزدیک می‌شود.
  - ب) نوسانگر از مبدأ دور می‌شود.
  - ۳- آیا در حرکت هماهنگ ساده اندازه و جهت نیروی بازگرداننده ثابت است؟ آیا امکان دارد این نیرو با بردار مکان جسم از مبدأ هم جهت باشد؟ توضیح دهید.
  - ۴- اگر بیشینه سرعت نوسانگر وزنه - فنری دو برابر شود، انرژی کل آن چند برابر می‌شود؟
  - ۵- در لحظه‌ای که انرژی جنبشی یک نوسانگر وزنه - فنر ۳ برابر انرژی پتانسیل آن است مکان نوسانگر چند برابر دامنه نوسان آن است؟ سرعت و شتاب نوسانگر در این لحظه به ترتیب، چند برابر بیشینه سرعت و بیشینه شتاب نوسانگر است؟
  - ۶- دامنه نوسان یک حرکت هماهنگ ساده  $m \cdot 10^{-2} \times 3$  و بسامد آن ۵ هرتز است. معادله حرکت این نوسانگر را بنویسید و نمودار مکان - زمان آن را در یک دوره رسم کنید.
  - ۷- معادله حرکت، سرعت و شتاب هماهنگ ساده‌ای را بنویسید که دامنه آن ۴ cm و دوره آن ۴ s است. نمودار مکان - زمان، سرعت - زمان و شتاب - زمان را در یک دوره رسم کنید.
  - ۸- معادله حرکت هماهنگ ساده یک نوسانگر در SI به صورت  $x = 0.05 \sin(2\pi t)$  است.
- الف) در چه زمانی پس از لحظه صفر، برای اولین بار سرعت نوسانگر به بیشترین مقدار خود می‌رسد؟
- ب) در چه فاصله‌ای از مبدأ انرژی جنبشی نوسانگر برابر با انرژی پتانسیل آن خواهد شد؟

۹- نمودار مکان- زمان نوسانگر مطابق شکل ۳-۱۴ است :

الف) معادله‌های حرکت و سرعت و شتاب این نوسانگر را بنویسید.

ب) چه زمانی پس از لحظه صفر، برای اولین بار به ترتیب، سرعت و شتاب آن بیشینه می‌شود؟



۱۰- پیستون‌های یک اتومبیل ۴ سیلندر در حالت خلاص تقریباً حرکت نوسانی ساده دارند.

اگر دامنه نوسان آنها ۵۰ میلی‌متر و بسامد آن ۱۱۰ هرتز باشد، کمیت‌های زیر را به دست آورید.

الف) بیشینه سرعت پیستون‌ها

ب) بیشینه شتاب نوسان آنها