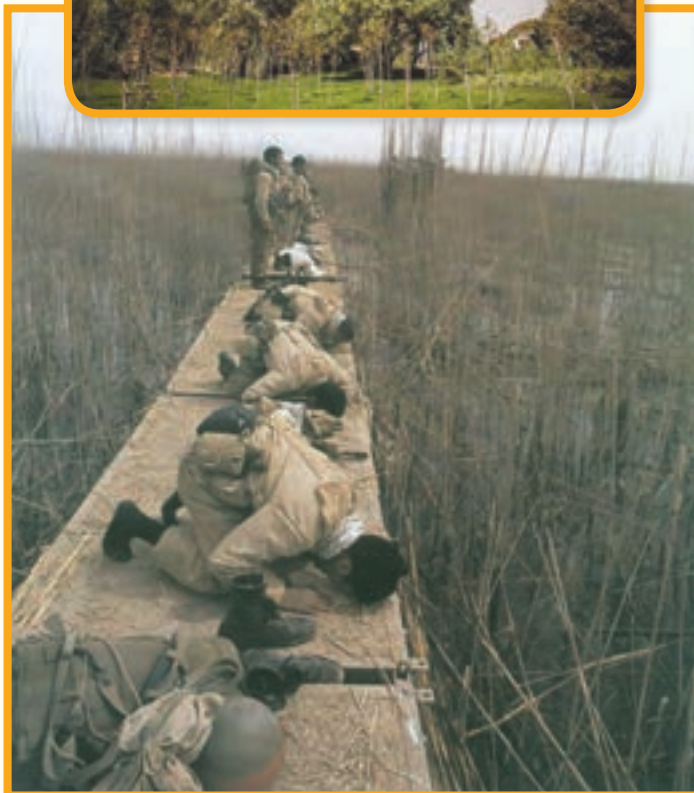


پل طبیعت (تهران)



پل



پل ها نقش اساسی در زندگی انسان دارند. انواع مختلفی از پل ها وجود دارند و در موارد زیادی نیروهای وارد بر آنها از فرمول هایی به دست می آید که بایک عبارت گویا بیان می شوند. مثلاً در مورد پل های عابر پیاده بار محاسباتی از دستور $200 + \frac{1500}{L+50}$ به دست می آید که در آن L طول بار گذاری شده بر حسب متر است.

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت های گویا

مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتی متر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{2}{3}$ باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر x را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن $x+4$ است و نسبت عرض به طول را می توان با $\frac{x}{x+4}$ نمایش داد؛ بنابراین :

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8 \quad \text{طول} = 12$$

عبارت $\frac{x}{x+4}$ را، که نسبت دو چندجمله ای است، عبارت گویا می نامیم.

به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد.

از عبارت های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر استفاده می شود؛ به طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت v_1 طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت v_2 بازگشته است، از رابطه $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ به دست می آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال های دیگر از این قرار است :

$\frac{a+b}{2}$	میانگین حسابی دو عدد	$\frac{2k}{v^2}$	محاسبه جرم یک جسم با
	a و b		سرعت v و انرژی جنبشی k

با توجه به تعریف بالا عبارت های زیر گویا هستند :

$$\frac{2x-5}{5x^3-2x^2+1} \quad \text{و} \quad \frac{x+5}{x-1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{4} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \frac{x-3}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad \frac{10}{x+2} \quad \text{و} \quad \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \quad \text{و} \quad \frac{xy^2}{(x-y)^2} \quad \text{و} \quad \frac{x^3}{1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b} \quad \text{و} \quad x^2+2x-7$$

اما عبارت های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

کدام یک از عبارت های زیر گویاست؟

$$\frac{7}{x-1} \text{ و } \frac{x+6}{3} \text{ و } \frac{ah}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3}+x}{5} \text{ و } \frac{\sqrt{2x}}{25} \text{ و } \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y}+1}{x^2} \text{ و } \frac{x-5}{\sqrt{3}+1} \text{ و } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ و } \frac{mn+n^2}{5-n} \text{ و } 14 \text{ و } \frac{3-a}{2+x}$$

فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید :

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$						

به ازای $x=3$ مخرج عبارت گویای $\frac{x+5}{x-3}$ مساوی صفر می شود و همان گونه که از قبل می دانید، $\frac{8}{0}$ به عنوان عدد تعریف نمی شود.

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آنها مخرج کسر صفر می شود؛ به عبارت دیگر این مقادیر را نمی توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال : عبارت گویای $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

حل : چه مقادیری مخرج کسر را صفر می کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم؛ یعنی :

$$(x-1)(x+2)=0$$

از طرفی وقتی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا :

$$\begin{cases} (x-1)=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ (x+2)=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای $x=1$ و $x=-2$ تعریف نشده است.

کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\frac{8x+5}{2}$

ب) $\frac{7+x}{x}$

ج) $\frac{2b+1}{2b-1}$

د) $\frac{3x}{x^2+4}$

ه) $\frac{x}{x^2-1}$

و) $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$

ساده کردن یک عبارت گویا

کسر $\frac{36}{48}$ با کسرهای $\frac{9}{12}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{18}{24}$ و $\frac{3}{4}$ مساوی است. بین این کسرها $\frac{3}{4}$ کسری است که

دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می‌توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0 \text{ و } C \neq 0 \text{ و } C \text{ چند جمله‌ای هستند})$$

فعالیت

هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است، راه حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\frac{18y^3}{6 \cdot y^5} = \frac{3}{10y^2}$

ب) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x+1)\cancel{(x+3)}} = \frac{x+3}{x+1}$

$$\text{ج) } \frac{y^2 - 9}{3y + 9} = \frac{(y+3)(y-3)}{3(y+3)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{د) } \frac{8ab^5}{2^5 a^2 b^3} = \frac{2b^2}{1}$$

$$\text{هـ) } \frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$$

کار در کلاس

۱- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید :

$$\text{الف) } \frac{m^2 - 16}{4 - m}$$

$$\text{ب) } \frac{6m + 18}{7m + 21}$$

$$\text{ج) } \frac{a^2 - 5a - 14}{a^2 + a - 2}$$

$$\text{د) } \frac{x^4 - y^4}{y - x}$$

۲- عبارت $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده ؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

$$\text{الف) } \frac{a+ax}{a} = a + x$$

$$\text{ب) } \frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1 + x$$

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

$$\text{الف) } \frac{5x}{3ab^2}$$

$$\text{ب) } \frac{2y}{y(2y-6)}$$

$$\text{ج) } \frac{2P}{P^2 - P - 12}$$

$$\text{د) } \frac{2x+5}{x}$$

$$\text{هـ) } \frac{x^2 - 1}{x + 5}$$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

$$\text{الف) } \frac{3-x}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{ب) } \frac{4x^2 + 8x}{12x + 24}$$

$$\text{ج) } \frac{24x^2}{12x^2 - 6x}$$

$$\text{د) } \frac{y^3 - 2y^2 - 3y}{y^2 + y}$$

$$\text{هـ) } \frac{1-t^4}{t^2 + 1}$$

$$\text{ز) } \frac{6a^4 b^2}{4ab^4}$$

۳- عبارت‌هایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{2y+3}{2y-3}$

ب) $\frac{2y-3}{3-2y}$

ج) $\frac{2y+3}{3+2y}$

د) $\frac{2y+3}{-2y-3}$

۴- هر یک از عبارت‌های داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

۱) $\frac{a-2}{a+5}$	۲) $\frac{a+2}{a+5}$	۳) $\frac{2-a}{a+5}$
۴) $\frac{-a-2}{-a-5}$	۵) $\frac{a-2}{-a-5}$	۶) $\frac{2-a}{-a-5}$

۵- از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$

ب) $\frac{zx+y}{t}$

ج) $\frac{1}{t} \times z(x+y)$

د) $z \times \frac{x+y}{t}$

ه) $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$

و) $\frac{zx}{t} + y$

۶- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

الف) $\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{}}{z(z^2+1)}$

ب) $\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{x^2-x-6}$

ج) $\frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5}(\boxed{})$

د) $\frac{(x-5)(\boxed{})}{(x-2)(x-5)} = x+1$

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا را همانند عددهای گویا می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. در مورد عددهای گویا قوانین زیر را داریم:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

(b, d ≠ 0) (b, c, d ≠ 0)

در ضمن در مورد عبارات گویا هم هر جا که امکان داشته باشد، می‌توان عبارت را ساده کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از ضرب‌ها و یا تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است، راه‌حل را کامل و حاصل عبارت را ساده کنید.

الف) $\frac{xy^3}{x^2z^2} \times \frac{yz^3}{xy^2} = \frac{yz}{x}$

ب) $\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15} = \frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{(x+3)(x-5)} = \frac{x}{x-5}$

ج) $\frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} = \frac{x-6}{(x-6)(x-6)} \times \frac{(x-3)(x+6)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+4}$

د) $\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^3} = \frac{4x^2}{3xy} \times \frac{y^3}{8x} = \frac{y^2}{6}$

هـ) $\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \div \frac{a^2+3a+2}{a-4} = \frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \times \frac{a-4}{a^2+3a+2}$

$$= \frac{(a+1)(a-5)}{a(a-4)} \times \frac{a-4}{(a+1)(a+2)} = \frac{a-5}{a+2}$$

حاصل عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\frac{a^2 - a - 6}{a + 3} \times \frac{a + 3}{a^2 - 4}$

ب) $\frac{a^2b + ab^2}{a} \times \frac{3ab}{(a + b)^2}$

ج) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \div \frac{x + 1}{x + 5}$

د) $\frac{4x^4}{3xy^2} \div \frac{8x}{9y^5}$

جمع و تفریق عبارتهای گویا

جمع و تفریق عبارتهای گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویاست؛ در مورد عددهای گویا داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

و

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$(b \neq 0)$$

$$(b, d \neq 0)$$

به طریق مشابه می‌توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است راه حل را کامل، و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن ارائه کنید.

الف) $\frac{3x + 7}{x + 2} + \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 + 2x - 3}{x + 2} = \frac{\quad}{\quad}$

ب) $\frac{3x + 7}{x + 2} - \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 - (2x - 3)}{x + 2} = \frac{x + 10}{x + 2}$

ج) $\frac{a^2 - 20}{a^2 - 4} + \frac{a - 2}{a + 2} = \frac{a^2 - 20 + (a - 2)^2}{a^2 - 4}$
 $= \frac{\quad}{\quad} = \frac{2a^2 - 4a - 16}{\quad} = \frac{2(a^2 - 2a - 8)}{\quad}$

$$= \frac{2(a - 4)(\quad)}{(a + 2)(a - 2)} = \frac{\quad}{\quad}$$

د) $\frac{2}{x + 2} - \frac{x - 1}{x + 4} = \frac{\quad}{\quad}$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{7}{10} + \frac{9}{5} = \frac{\quad}{10}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{3} = \frac{\quad}{\quad}$$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$

ب) $\frac{6}{5x} - \frac{4}{x}$

ج) $\frac{2x^2-16}{x^2-4} - \frac{x+4}{x+2}$

د) $\frac{7}{x^2-x-2} + \frac{x}{x^2+4x+3}$

ساده کردن عبارت‌های مرکب

هنگام ساده کردن هر عبارت گویای مرکب، همانند کسره‌های مرکب می‌توان صورت و مخرج را جداگانه ساده و سپس آنها را برهم تقسیم کرد و یا از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیر صفر) ضرب کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هریک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هر جا لازم است راه حل را کامل کنید. ($x \neq 0$)

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \text{الف)} \quad & \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)} = \frac{\quad}{x-1} \\
 \text{ب)} \quad & \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{x^2 - x - 6}{x^2}}{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \div \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} \\
 & = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}
 \end{aligned} \right\} ۱)
 \end{aligned}$$

$$۲) \left\{ \begin{array}{l} \text{الف) } \frac{\frac{۲}{a} - \frac{۳}{a+۱}}{\frac{۲}{a+۱} - \frac{۳}{a}} = \frac{a(\frac{۲}{a} - \frac{۳}{a+۱})}{a(\frac{۲}{a+۱} - \frac{۳}{a})} = \frac{۲(a+۱) - ۳a}{۲a - ۳(a+۱)} = \frac{۲a + ۲ - ۳a}{۲a - ۳a - ۳} = \frac{-a + ۲}{-a - ۳} \\ \text{ب) } \frac{\frac{۲}{a} - \frac{۳}{a+۱}}{\frac{۲}{a+۱} - \frac{۳}{a}} = \frac{۲(a+۱) - ۳a}{۲a - ۳(a+۱)} = \frac{-a + ۲}{-a - ۳} \\ a \neq ۰ \text{ و } a \neq -۱ \end{array} \right.$$

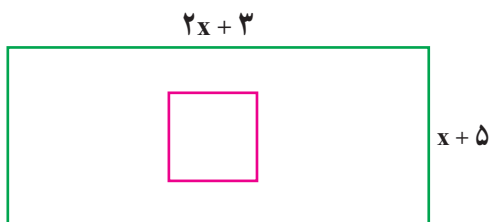
کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید. (مخرج همه کسرها مخالف صفر فرض شده است)

$$\text{الف) } \frac{n - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} =$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} =$$

فعالیت



طول ضلع مربع داخل مستطیل، نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل $\frac{۵}{۲۶}$ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

راه حل را کامل کنید و توضیح دهید: چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و حل معادله، پاسخ به دست می آید؟

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{x+5}{2}$$

$$\text{مساحت مربع} = \left(\frac{x+5}{2} \right)^2$$

$$\frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{5}{26} \quad \text{و} \quad () () = \text{مساحت مستطیل}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{4() (2x+3)} = \frac{5}{26} \Rightarrow \frac{x+5}{4x+6} = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

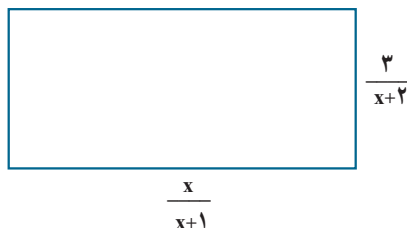
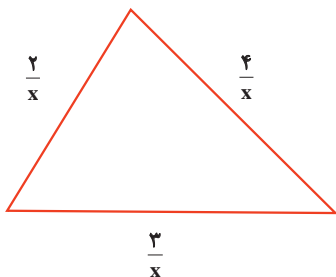
$$\Rightarrow 7x = 35 \Rightarrow x = 5$$

طول =

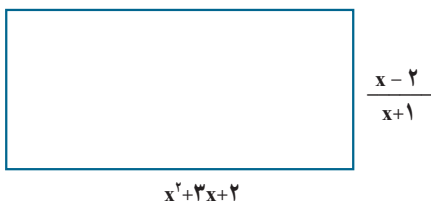
عرض =

کار در کلاس

۱- محیط هر شکل را بر حسب x به دست آورید و آن را ساده کنید. ($x > 0$)



۲- مساحت مستطیل زیر را بر حسب x به دست آورید. ($x > 2$)



تمرین

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (در همه تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف) $\frac{a^2 - 16}{a + 4} \times \frac{a + 2}{a^2 - 8a + 16}$

ب) $\frac{m^2 - 49}{m + 1} \div \frac{7 - m}{m^2 - 1}$

ج) $\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x + 18}$

د) $\frac{1 - c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1 - 2c + c^2}$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$

ب) $\frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay}$

ج) $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

د) $\frac{4+x^2-2x}{2+x} - 2-x$

۳- فقط یکی از عبارت‌های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$\frac{a^2+5}{a^2}$ و $\frac{a^2+3}{3}$ و $\frac{a^2+b^2}{a^2}$ و $\frac{a^2-5a}{a}$

۴- از میان عبارت‌های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{x+3}{y+3}$

ب) $\frac{3-x}{3-y}$

ج) $\frac{3x}{3y}$

د) $\frac{x^3}{y^3}$

ه) $\frac{a^2x}{a^2y}$

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

الف) $-\frac{x+3}{x+5}$

ب) $-\frac{x-3}{x+5}$

ج) $\frac{x-3}{x+5}$

د) $-\frac{3-x}{x+5}$

۶- کدام یک از عبارت‌های زیر به درستی ساده شده است؟

الف) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5$ ب) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$

۷- اگر $A=a^2-b^2$ و $B=a^2+b^2$ و $C=2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2-B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

۸- کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح کنید. (همه عبارت‌های جبری تعریف شده فرض می‌شود).

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$

ب) $\frac{x^{13}}{x^{20}} = x^7$

ج) $\frac{a}{5} - \frac{7-b}{5} = \frac{a-7-b}{5}$

د) $\frac{a-b}{b-a} = 1$

هـ) $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$

و) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$

ز) $\frac{ca + cb}{c + cd} = \frac{a + b}{d}$

ح) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.
۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف) $\frac{\frac{a-a^2}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1} - a}$

ب) $\frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{\frac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}}$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که :

الف) حاصل ضرب آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود.

ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

۱۲- عرض مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.
مساحت مستطیل $x^2 - 9$ است.

$$A = x^2 - 9$$

۱- تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای (در تمام این درس مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

- برای تقسیم دو یک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{7x^3}{y} \quad \text{و} \quad \frac{-18a^2xz^4}{27x^6z} = \frac{-2a^2z^3}{3x^5}$$

مثال

۲- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

اگر a و b و c اعدادی صحیح و d عددی صحیح و غیر صفر باشد، داریم:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

به طور مشابه برای تقسیم چند جمله‌ای $12x^3 - 18x + 2$ بر 6 به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{12x^3 - 18x + 2}{6} = \frac{12x^3}{6} - \frac{18x}{6} + \frac{2}{6} = 2x^3 - 3x + \frac{1}{3}$$

فعالیت

توضیح دهید: هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است؟ جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف) $\frac{2a^4 + 5a^3 - 8a}{4a^2} = \frac{2a^4}{4a^2} + \frac{5a^3}{4a^2} - \frac{8a}{4a^2} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{4}a - \frac{2}{a}$

ب) $\frac{14x^3yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{14x^3yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z}$
 $= \frac{7x}{y} - \frac{3}{2} + \frac{3z}{2}$

ج) $(8y^3 - 4y^2 + 12y) \div (-4y^2) = \frac{8y^3 - 4y^2 + 12y}{-4y^2}$

$$= \frac{8y^3}{-4y^2} - \frac{4y^2}{-4y^2} + \frac{12y}{-4y^2} = -2y + 1 - \frac{3}{y}$$

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-21a^5b^4c}{28ab^6}$

ب) $\frac{24x^6y - 2z + 3xyz}{x^2z}$

۳- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای

اگر تقسیم مقابل را در نظر بگیریم :

$$\begin{array}{r} 26 \quad | \quad 8 \\ -24 \quad 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

عدد ۲۶ را مقسوم، ۸ را مقسوم علیه، ۳ را خارج قسمت و ۲ را باقی مانده می‌نامیم. رابطه‌های تقسیم بالا به صورت زیر است :

$$\begin{cases} 3 \times 8 + 2 = 26 \\ 2 < 8 \end{cases}$$

مثال : چند جمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را بر چند جمله‌ای $x - 5$ تقسیم کنید.

چند جمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را مقسوم و $x - 5$ را مقسوم علیه می‌نامیم. در اولین گام باید مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان‌های متغیر موجود (در اینجا x) از بزرگ به کوچک مرتب کرد. در مثال ما چندجمله‌ای‌های موردنظر مرتب شده هستند.

اکنون اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم؛ یعنی : $\frac{2x^2}{x} = 2x$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ + 2x^2 - 10x \quad \quad 2x \\ \hline \end{array}$$

حاصل ضرب $2x$ در $x - 5$ را به دست می‌آوریم و آن را از عبارت مقسوم کم می‌کنیم :

$$2x^2 - 7x - 15 - (2x^2 - 10x) = 2x^2 - 7x - 15 - 2x^2 + 10x = 3x - 15$$

برای آسان تر شدن، می‌توانیم پس از محاسبه حاصل ضرب $2x$ در $x - 5$ ، در کادر بالا علامت

عبارت حاصل را قرینه کنیم و محاسبه را انجام دهیم؛ یعنی :

$$\begin{array}{r|l}
 \cancel{2x^2} - 7x - 15 & x - 5 \\
 + \cancel{2x^2} - 10x & 2x \\
 \hline
 & 3x - 15
 \end{array}$$

اکنون دوباره $3x - 15$ را بر $x - 5$ تقسیم و مراحل قبل را تکرار می‌کنیم؛ یعنی اولین جمله عبارت $3x - 15$ را بر اولین جمله $x - 5$ تقسیم می‌کنیم. توجه داریم که این چند جمله‌ای‌ها نیز باید برحسب توان‌های نزولی مرتب شده باشند؛ داریم:

$$\frac{3x}{x} = 3$$

این تقسیم‌ها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یا باقیمانده صفر شود یا درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 - 7x - 15 & x - 5 \\
 \pm 2x^2 \mp 10x & 2x + 3 \\
 \hline
 & 3x - 15 \\
 & \pm 3x \mp 15 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

وقتی باقیمانده صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

فعالیت

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف)

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 - 3x^2 + x + 7 & x^2 - 2 \\
 \pm 4x^3 & \boxed{} - 3 \\
 \hline
 & -3x^2 + 9x + 7 \\
 & -3x^2 + \boxed{} \\
 \hline
 & \boxed{} + 1
 \end{array}$$

باقیمانده این تقسیم چیست؟

ب)

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 - 5x - 24 & x - 8 \\
 + x^2 - 8x & \boxed{} + \boxed{} \\
 \hline
 & 3x - 24 \\
 & + 3x - 24 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. راه حل را کامل کنید.

$$\begin{array}{r}
 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad -3 + 2x^2 \\
 \underline{10x^4 - 3x^2 + 2x - 19} \quad | \quad 2x^2 - 3 \\
 +10x^4 - 15x^2 \quad | \quad 5x^2 + \square \\
 \hline
 12x^2 + 2x - 19 \\
 +12x^2 - 18 \\
 \hline
 2x - \square
 \end{array}$$

رابطه های تقسیم:

$$(5x^2 + \square)(2x^2 - 3) + 2x - \square$$

$$=$$

$$= 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19$$

و درجه چند جمله ای $2x - \square$ از درجه $2x^2 - 3$ کمتر است.

کار در کلاس

تقسیم های زیر را انجام دهید.

الف) $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \quad | \quad 2 - x$

ب) $-x^3 - 12 + 8x \quad | \quad x + 6$

تمرین

۱- تقسیم های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-2x^2y^3z^5}{18xz^5}$

ب) $\frac{2a^3y - a^4y^2 + 15xy}{-5y^2}$

ج) $(x^2 - 27) \div (x - 2)$

د) $(3y^2 - 10y - 24) \div (3y - 4)$

ه) $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad | \quad x + 3$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط

$$-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5 \quad | \quad 1 - x^3$$

تقسیم نشان دهید.

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با $2x^2 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این

جعبه x و طول آن $x + 4$ باشد، عرض آن را به دست آورید.

۴- اگر چند جمله ای $10x + a - 23x^2 + 20x^2 + 4x + 3$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید.

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 9x + 9$ را بر هر یک از عبارت های زیر به دست آورید.

$2x + 3$ و $2x - 3$ و $x - 3$ و $x + 3$