

فصل

چهارم

تعیین موقعیت و امتدادهای مبنا



- پس از آموزش و مطالعه این فصل از فراگیرنده انتظار می‌رود بتواند :
- ۱- راهکار کلی مربوط به ترسیم یک امتداد در یک سیستم مختصات دو بعدی و اندازه‌گیری ژیزمان و زاویه حامل آن با استفاده از نقاله را شرح دهد.
 - ۲- محاسبات مربوط به یک طول و ژیزمان امتداد در یک سیستم مختصات دو بعدی را انجام دهد.
 - ۳- بحث و بررسی مربوط به ترسیم یک امتداد در یک سیستم مختصات دو بعدی و اندازه‌گیری ژیزمان و زاویه حامل آن با استفاده از نقاله را شرح دهد.
 - ۴- راهکار کلی مربوط به تعیین ربع مختصاتی، زاویه حامل و ژیزمان یک امتداد را با معلوم بودن مختصات دو نقطه روی این امتداد شرح دهد.
 - ۵- محاسبات مربوط به تعیین ربع مختصاتی، زاویه حامل و ژیزمان یک امتداد را با معلوم بودن مختصات دو نقطه روی این امتداد انجام دهد.
 - ۶- بحث و بررسی مربوط به تعیین ربع مختصاتی، زاویه حامل و ژیزمان یک امتداد را با معلوم بودن مختصات دو نقطه روی این امتداد شرح دهد.
 - ۷- راهکار کلی مربوط به محاسبه و انتقال ژیزمان اضلاع یک چند ضلعی را با داشتن ژیزمان امتداد اول شرح دهد.
 - ۸- محاسبات مربوط به انتقال ژیزمان اضلاع یک چند ضلعی را با داشتن ژیزمان امتداد اول انجام دهد.
 - ۹- بحث و بررسی مربوط به محاسبه و انتقال ژیزمان اضلاع یک چند ضلعی را با داشتن ژیزمان امتداد اول شرح دهد.

مطالب پیش نیاز

- قبل از مطالعه این فصل از فراگیرنده انتظار می‌رود با مطالب زیر آشنا باشد :
- ۱- آشنایی با فصل چهارم کتاب «نقشه برداری عمومی»
 - ۲- آشنایی با فصل پنجم کتاب «هندسه»
 - ۳- آشنایی با دایره مثلثاتی و ربع‌های آن در کتاب «ریاضی ۲ و ۳»

● از نظر ریاضی هر تابع، فرمول و مدل ریاضی در یک فضای مناسب تعریف می شود که به آن سطح مبنای محاسبات ریاضی (دیتوم) می گویند.

● برای زمین، سطوح مبنای مختلفی تعریف شده است. از جمله سطوح مبنایی زمین و مهمترین آن ها می توان به سطح مستوی (سطح افقی و صاف)، سطح ژئوئید و سطح بیضوی اشاره کرد که سطح مستوی و سطح بیضوی را سطح مبنای مسطحاتی و ژئوئید را سطح مبنای ارتفاعی در نظر گرفته اند.

● منظور از تعیین موقعیت در نقشه برداری عبارت است از مشخص کردن مختصات نقاط در یک سیستم مختصات معلوم، اما قبل از تعیین مختصات یک نقطه، ابتدا باید یک سیستم مختصات تعریف کنیم. به عبارت دیگر اعتبار مختصات یک نقطه، از وجود سیستم مختصات آن است.

● برای تعریف یک سیستم مختصات لازم است که به سؤالاتی از این قبیل پاسخ داده شود:

– مبدأ سیستم کجاست؟

– محورهای سیستم نسبت به هم چگونه اند؟

– محورهای سیستم، مستقیم الخط هستند و یا منحنی الخط؟

– پارامترهای تعیین موقعیت هر نقطه در این سیستم کدامند؟

– سیستم مختصات، راست گرد است و یا چپ گرد؟

● منظور از نقاط کنترل در نقشه برداری، نقاطی است که مختصات مسطحاتی و یا ارتفاعی آن ها و یا مختصات سه بعدی (مسطحاتی و ارتفاعی) آن ها نسبت به یک سیستم مختصات مشخص دقیقاً معلوم باشد. به مجموعه ای از این نقاط که تشکیل خطوط و زوایایی را می دهند، شبکه نقاط کنترل می گویند. شبکه نقاط کنترل در واقع اسکلت اصلی یک پروژه نقشه برداری می باشد.

● چنانچه در یک شبکه، فقط x و y نقاط تعیین شده باشد، به آن شبکه کنترل افقی و یا شبکه کنترل دو بعدی می گویند. اگر فقط ارتفاع نقاط تعیین شده باشد به آن شبکه کنترل ارتفاعی یا شبکه ترازبایی و بالآخره اگر طول، عرض و ارتفاع (x, y, z) هر سه معلوم شده باشد، به آن شبکه سه بعدی می گویند.

● از انواع امتدادهای مبنا در نقشه برداری می توان شمال حقیقی، شمال مغناطیسی و شمال شبکه را نام برد.

● ژیزمان عبارت است از زاویه ای که هر امتداد با امتداد شمال شبکه و در جهت عقربه ساعت می سازد و آن را با G نمایش می دهند.

- در تعریف ژیزمان سه نکته اساسی را باید در نظر گرفت :
 - ژیزمان، یک زاویه افقی بین یک امتداد مبنا و امتداد مورد نظر است.
 - مبدأ اندازه گیری (امتداد مبنا) ژیزمان همواره شمال شبکه (محور Y نقشه) است.
 - ژیزمان در جهت حرکت عقربه های ساعت اندازه گیری می شود.
- در صورتی که ژیزمان امتدادی چون AB معلوم فرض شود (G_{AB}) ژیزمان معکوس آن را به صورت ژیزمان BA خوانده و به شکل (G_{BA}) نشان می دهیم که مقدار آن از رابطه زیر قابل محاسبه است :

$$G_{BA} = G_{AB} \pm 180^\circ$$

- که در این رابطه، چنانچه G_{AB} کوچکتر از 180° باشد، از علامت + و در صورتی که G_{AB} مساوی و یا بزرگتر از 180° باشد، از علامت - استفاده می شود.
- به کوچکترین زاویه ای که هر امتداد با محور Y ها می سازد، زاویه حامل آن امتداد می گویند که با V نمایش داده می شود. برای محاسبه زاویه حامل از رابطه زیر استفاده می شود :

$$V_{AB} = \tan^{-1} \left| \frac{\Delta X_{AB}}{\Delta Y_{AB}} \right|$$

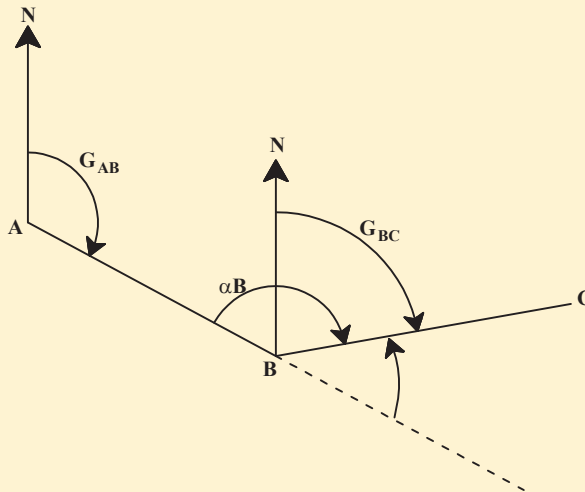
- ژیزمان هر امتداد را از روی مختصات دو نقطه از آن امتداد می توان محاسبه کرد. البته ابتدا زاویه حامل امتداد را مشخص کرده و سپس با توجه به اینکه امتداد در کدام ربع مختصات قرار دارد، ژیزمان را به دست می آوریم.
- جدول زیر ارتباط بین ژیزمان و زاویه حامل را در چهار ربع مختصاتی نشان می دهد :

| رابطه ژیزمان و زاویه حامل | ربع مختصات |
|-------------------------------|------------|
| $G_{AB} = V_{AB}$ | ربع اول |
| $G_{AB} = 180^\circ - V_{AB}$ | ربع دوم |
| $G_{AB} = 180^\circ + V_{AB}$ | ربع سوم |
| $G_{AB} = 360^\circ - V_{AB}$ | ربع چهارم |

● برای انتقال ژیزمان و به عبارتی برای محاسبه ژیزمان یک امتداد از روی ژیزمان امتداد قبل، مطابق شکل زیر کافی است که ابتدا زاویه انحراف Δ را محاسبه کرده و سپس از رابطه زیر مقدار ژیزمان امتداد را مشخص کرد.

$$G_{AB} = \text{معلوم}$$

$$G_{BC} = G_{AB} - \Delta \quad \left. \begin{array}{l} \Delta = 180^\circ \text{ یا } (200\text{grad}) - \alpha_B \end{array} \right\} G_{BC} = G_{AB} - (180^\circ - \alpha_B) = G_{AB} + \alpha_B - 180^\circ$$



مثال ۴-۱: ترسیم یک امتداد در یک سیستم مختصات دکارتی دوبعدی و

اندازه‌گیری ژیزمان و زاویه حامل آن با استفاده از نقاله

مختصات دو نقطه $A(1000, 1000)$ و $B(1050, 1070)$ معلوم می‌باشند، مطلوب است ترسیم

امتداد AB در یک سیستم مختصات دکارتی (قائم الزاویه) با مقیاس ۱:۱۰۰۰

راهکار کلی:

۱- محاسبه ابعاد مناسب کاغذ برای ترسیم: برای ترسیم امتداد AB در یک سیستم

دکارتی ابتدا ابعاد کاغذ مناسب برای ترسیم را مشخص کنید. برای این کار می‌توانید طول امتداد AB

را از روی مختصات آن پیدا کرده و سپس این طول را در مقیاس خواسته شده ضرب کنید. با این کار

معلوم می‌شود که امتداد AB در روی کاغذ چند سانتی‌متر است، حال با توجه به این مقدار می‌توانید

کاغذ مناسب را انتخاب کنید.

$$L_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

مقیاس $\times L_{AB}$ = طول امتداد روی کاغذ

۲- تعیین مبدأ مختصات: اکنون محورهای مختصات X و Y را با استفاده از خط‌کش و

گونیا به صورت کاملاً عمود بر هم ترسیم کرده و سپس با توجه به مختصات نقاط A و B کوچک‌ترین

مختصات X و Y را مشخص کرده و سپس مبدأ مختصات را عددی رند و کوچک‌تر از آن‌ها در نظر

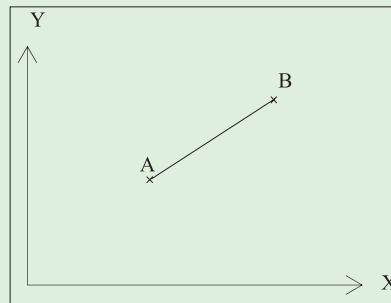
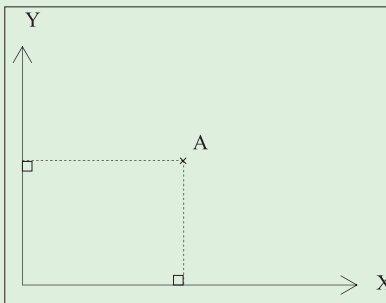
بگیرید.

۳- تعیین محل دقیق نقاط در سیستم و ترسیم امتداد: حال با استفاده از اشل

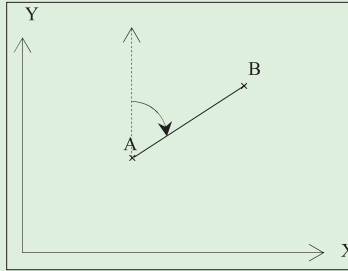
(خط‌کش مقیاس) مختصات‌های X و Y هر کدام از نقاط را با توجه به مبدأیی که انتخاب کردید، روی

محورهای مختصات پیدا کرده و در نهایت با استفاده از گونیا، محل نقاط را در سیستم مشخص کنید

و سپس این دو نقطه را به هم وصل کنید.



۴- برای اندازه‌گیری زاویه حامل و ژیزمان از نقاله استفاده کنید. برای این کار از نقطه A موازی محور Y خطی ترسیم نمایید. حال با توجه به تعریف ژیزمان و زاویه حامل به راحتی می‌توان زوایای مربوطه را با نقاله اندازه‌گیری کنید.




روش حل :

$$L_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = \sqrt{(1050 - 1000)^2 + (1070 - 1000)^2}$$

$$L_{AB} = 86.02 \text{ m} = 8602 \text{ cm}$$

$$L_{AB} \times \text{مقیاس} = 8602 \times \frac{1}{1000} = 8.602 \text{ cm} \approx 9 \text{ cm}$$

بحث و بررسی 

بنابراین طول خط AB روی کاغذ تقریباً برابر ۹ سانتی‌متر است. حال می‌توان کاغذی در نظر گرفت که این امتداد به راحتی در آن ترسیم گردد. برای این مثال می‌توان کاغذ A_۴ را در نظر گرفت. پس از ترسیم محورهای مختصات نوبت به تعیین مبدأ سیستم می‌رسد. مختصات X دو نقطه را در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌بینید مختصات X نقطه A از مختصات X نقطه B کمتر است. هم‌چنین مختصات Y نیز برای نقطه A کمتر از مختصات Y نقطه B است. پس مبدأ مختصات را با توجه به آنچه که گفته شد، به صورت عددی رند و کوچکتر از مختصات‌های گفته شده در نظر بگیرید به طوری که تمام طول خط AB را بتوان در کاغذ ترسیم نمود. به عنوان مثال در اینجا می‌توان مختصات مبدأ را (۹۵°, ۹۵) در نظر گرفت.

تمرین کلاسی مثال ۴ - ۱

۱- مختصات دو نقطه F(۸۵۴, ۱۴۳۲) و E(۹۸°, ۱۲°۵) معلوم می‌باشند، مطلوب است ترسیم

امتداد EF در یک سیستم مختصات دکارتی (قائم الزاویه) با مقیاس ۱: ۷۵

مثال ۴-۲: تعیین ربع مختصاتی یک امتداد و زاویه حامل و ژیزمان یک

امتداد با معلوم بودن مختصات دو نقطه روی امتداد

مختصات دو نقطه $A(1000, 1000)$ و $B(1050, 1070)$ معلوم می‌باشند، مطلوب است:

الف) تعیین کنید امتداد AB در کدام ربع مختصاتی قرار دارد.

ب) زاویه حامل امتداد AB را محاسبه کنید.

ج) ژیزمان امتداد AB را محاسبه کنید.

راهکار کلی:

منظور از تعیین ربع مختصاتی یک امتداد، یعنی این که این مختصات در کدام ربع قرار دارد.

بنابراین کافی است که ابتدا ΔX و ΔY امتداد AB را به دست آورید و با توجه به علامت آن‌ها و جدول

زیر ربع مختصاتی را مشخص کنید.

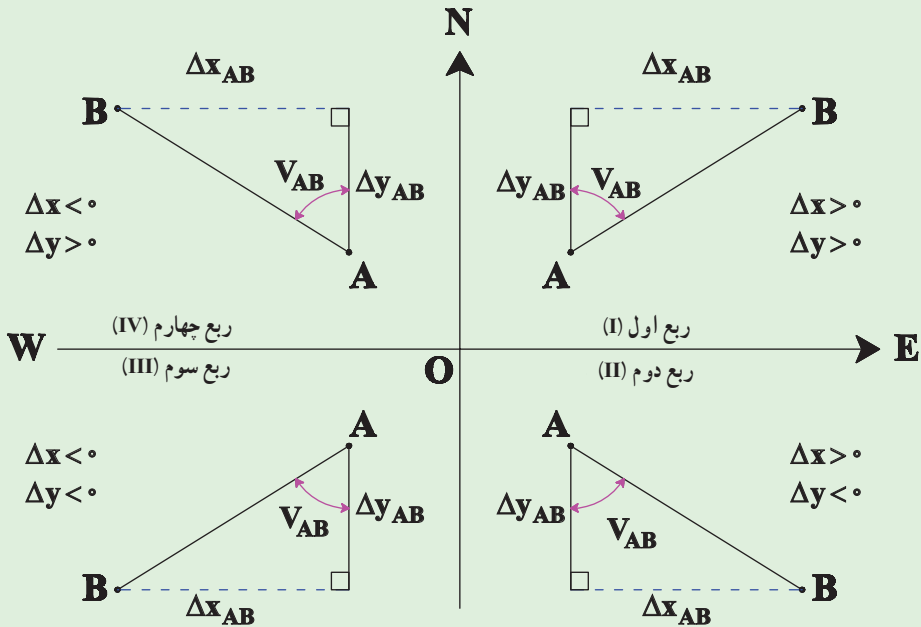
| علامت ΔY | علامت ΔX | ربع مختصات |
|------------------|------------------|------------|
| + | + | اول |
| - | + | دوم |
| - | - | سوم |
| + | - | چهارم |

زاویه حامل را از رابطه زیر بدست آورید:

$$V_{AB} = \tan^{-1} \left| \frac{\Delta X_{AB}}{\Delta Y_{AB}} \right|$$

و در پایان با توجه به ربعی که امتداد در آن قرار دارد و همچنین زاویه حامل که از رابطه بالا آن را

محاسبه کردید می‌توانید مقدار ژیزمان را به دست آورید. با توجه به جدول و شکل صفحه بعد داریم:





روش حل :

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_{AB} &= X_B - X_A = 1050 - 1000 = +50\text{m} \\ \Delta Y_{AB} &= Y_B - Y_A = 1070 - 1000 = +70\text{m} \end{aligned} \right\} \text{ ربع اول}$$

$$V_{AB} = \text{tg}^{-1} \left| \frac{50}{70} \right| = 35^\circ 32' 16''$$

$$G_{AB} = V_{AB} \rightarrow G_{AB} = 35^\circ 32' 16''$$

بحث و بررسی : 

ژیزمان و زاویه حامل محاسبه شده در این مثال را با مقادیری که با مقاله در مثال قبل اندازه گیری کردید مقایسه کنید. آیا اختلافی مشاهده می کنید؟ 

تمرین‌های کلاسی مثال ۴ - ۲

۱- دو نقطه کنترل $(۱۲۵۰/۲۳)$ و $(۱۵۲۰/۲۰)$ A و $(۴۵۲/۱۲)$ و $(۸۵۲/۳۲)$ B را در نظر بگیرید.

مطلوب است :

الف) تعیین ربع مختصاتی امتداد AB.

ب) محاسبه زاویه حامل امتداد AB.

ج) محاسبه ژیزمان امتداد AB.

۲- سه نقطه کنترل $(۱۰۰, ۱۰۰)$ A و $(۱۵۰, ۲۰۰)$ B و $(۳۰۰, ۱۰۰)$ C تشکیل یک مثلث

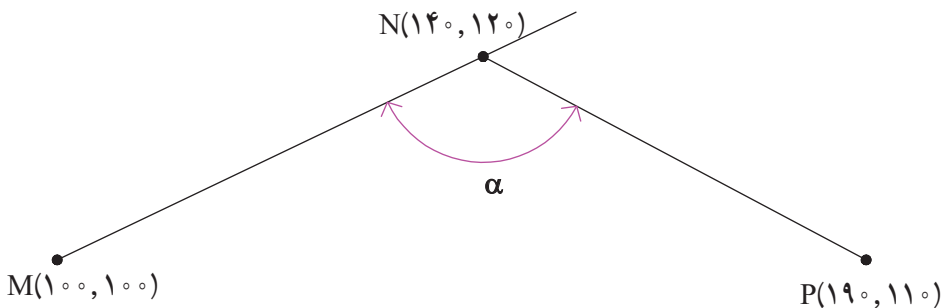
می‌دهند. مطلوب است :

الف) ترسیم این مثلث در یک سیستم مختصات دوبعدی قائم الزاویه به مقیاس $۱/۲۰۰۰$

ب) محاسبه ژیزمان اضلاع AB و BC و CA

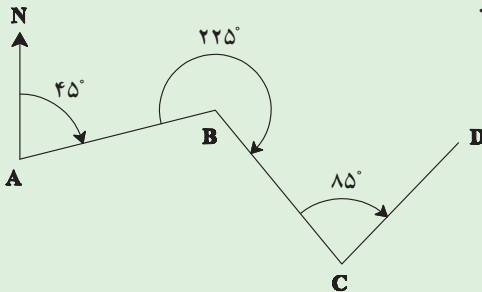
ج) محاسبه زوایای داخلی مثلث ABC و کنترل محاسبات.

۳- در شکل زیر زاویه α چند درجه است؟



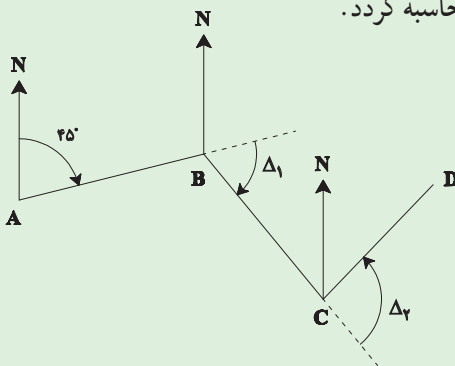
مثال ۳-۴ : انتقال ژیزمان

مطابق شکل زیر ژیزمان امتداد AB و همچنین زوایای رئوس B و C معلوم است. ژیزمان امتدادهای BC و CD را بدست آورید.



راهکار کلی :

همانطور که در کتاب نقشه برداری عمومی خواندید، برای انتقال ژیزمان و محاسبه ژیزمان ضلع بعدی باید مقدار زاویه انحراف Δ را ابتدا محاسبه کرده و جهت آن را تعیین کنید، دیدید که زمانی که زاویه انحراف ساعت گرد بود، آن را مثبت در نظر گرفته و با ژیزمان ضلع قبل که معلوم است جمع می کنیم و در حالتی که زاویه انحراف Δ خلاف حرکت ساعت باشد، آن را منفی در نظر گرفته و از ژیزمان ضلع قبل کم می کنیم تا ژیزمان ضلع بعد محاسبه گردد.



$$G_{BC} = G_{AB} + \Delta_1$$

$$G_{CD} = G_{BC} - \Delta_2$$

زوایای انحراف Δ_1 و Δ_2 به راحتی از روی زوایای رئوس B و C محاسبه می شوند.

روش حل :

$$\Delta_1 = \angle B - 180^\circ = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$$

$$\Delta_2 = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

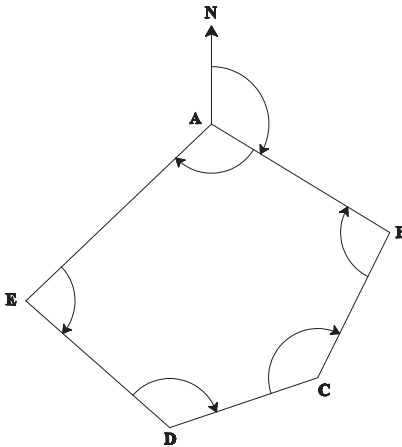
$$G_{BC} = 45^\circ + 75^\circ = 120^\circ$$

$$G_{CD} = 120^\circ - 95^\circ = 25^\circ$$

تمرین‌های کلاسی مثال ۴ - ۳

- ۱- ژیزمان امتداد AB برابر $245/253^\circ$ گراد و زاویه رئوس B و C راست گرد و به ترتیب برابر $245/2452$ و $11^\circ/7885$ گراد اندازه‌گیری شده‌اند. مطلوب است ترسیم کروکی این مثال و محاسبه ژیزمان امتداد BC و CD.
- (راهنمایی: منظور از زاویه راست گرد یعنی هنگامی که دوربین در نقطه B مستقر است به نقطه A صفر صفر کند. زاویه B و زاویه C به صورت ساعتگرد اندازه‌گیری شده‌اند.)

۲- با توجه به شکل زیر ژیزمان کلیه امتدادها را مشخص کنید.



$$A(100, 100) \quad B(325, 55)$$

$$\angle A = 105.2369$$

$$\angle B = 95.2356$$

$$\angle C = 135.5448$$

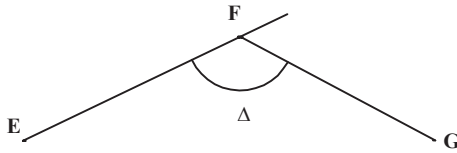
$$\angle D = 120.2350$$

$$\angle E = 143.7477$$

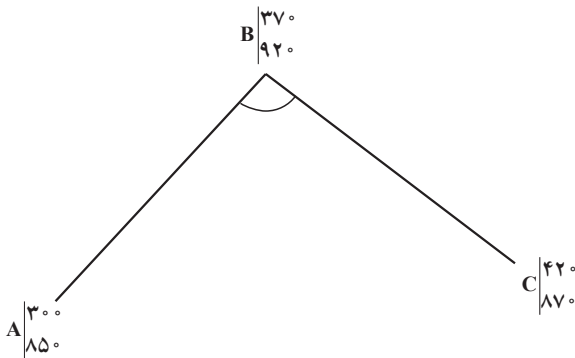
- ۳- در پیمایش بسته ABCD اطلاعات به دست آمده در جدول خلاصه شده است. زاویه حامل و طول DA و ژیزمان کلیه امتدادها را محاسبه نمایید.

| ژیزمان | زاویه حامل | فاصله | امتداد |
|--------|--------------------|-------|--------|
| ? | N $11^\circ 10'$ W | ۷۵۱ | AB |
| ? | N $63^\circ 43'$ E | ۳۹۲ | BC |
| ? | S $10^\circ 50'$ E | ۵۶۱ | CD |
| ? | ? | ? | DA |

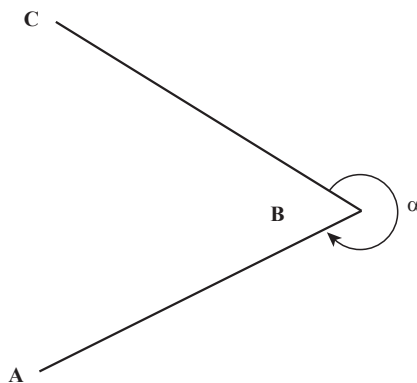
۴- ژیزمان امتداد EF مساوی ۵۵/۲۲ و ژیزمان امتداد FG مساوی ۱۵۰ گراد است. زاویه Δ بین این دو امتداد چند گراد است؟



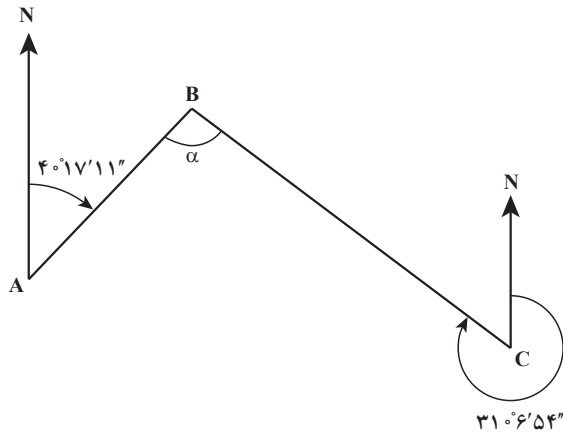
۵- با توجه به مختصات‌های داده شده زاویه \hat{B} را محاسبه کرده و شکل مربوطه را با مقیاس $\frac{1}{2000}$ ترسیم نمایید.



۶- در شکل زیر اگر: $A (5^\circ \text{ و } 100^\circ)$ ، $B (12^\circ \text{ و } 118^\circ)$ و $C (7^\circ \text{ و } 25^\circ)$ بر حسب متر باشند، جهت پیاده کردن نقطه A مطلوب است محاسبه مقدار زاویه α .



۷- مطلوب است مقدار زاویه α به گراد.



۸- نشان دهید که می توان ژیزمان را در حالت کلی از رابطه زیر به دست آورد.

$$G_n = G_{n-1} \pm \alpha_n \pm 180^\circ$$

α_n زاویه رأس است.

(راهنمایی: از روش Δ استفاده شده و مقادیر Δ جای گذاری شود.)

تعیین مختصات ایستگاهی



هدف‌های رفتاری

- پس از آموزش و مطالعه این فصل از فراگیرنده انتظار می‌رود بتواند :
- ۱- راهکار کلی مربوط به مراحل محاسبه یک پیمایش باز را شرح دهد.
 - ۲- مراحل محاسبات مربوط به یک پیمایش باز را به درستی انجام دهد.
 - ۳- بحث و بررسی مربوط به مراحل محاسبه یک پیمایش باز را شرح دهد.
 - ۴- راهکار کلی مربوط به مراحل محاسبه یک پیمایش بسته را شرح دهد.
 - ۵- مراحل محاسبات مربوط به یک پیمایش بسته را به درستی انجام دهد.
 - ۶- بحث و بررسی مربوط به مراحل محاسبه یک پیمایش بسته را شرح دهد.

مطالب پیش نیاز

- قبل از مطالعه این فصل از فراگیرنده انتظار می‌رود با مطالب زیر آشنا باشد :
- ۱- آشنایی با فصل چهارم کتاب «نقشه برداری عمومی»
 - ۲- آشنایی با فصل پنجم کتاب «نقشه برداری عمومی»

- پیمایش : مجموعه عملیاتی که برای تعیین موقعیت مسطحاتی یک سری نقاط دنبال هم (نقاط ایستگاهی) در یک منطقه از زمین انجام می گیرد، پیمایش گفته می شود.
- در پیمایش برای اینکه بتوان ابتدا سیستم مختصات دو بعدی مورد نظر را مشخص نمود، به حداقل دو نقطه با مختصات معلوم (یک نقطه با مختصات معلوم و یک امتداد معلوم) در آن سیستم مختصات نیاز می باشد.
- پیمایش معمولاً به دو حالت باز و بسته تقسیم بندی می شود.
- پیمایش باز : اگر پیمایش از یک نقطه با مختصات معلوم و یا مفروض شروع و به نقطه ای با مختصات مجهول (نامعلوم) پایان یابد، به آن پیمایش باز می گویند.
- پیمایش بسته (Closed traverse) : در دو حالت زیر پیمایش را بسته می گویند :
 - ۱- پیمایش از یک نقطه با مختصات معلوم (مفروض) شروع شود و به همان نقطه ختم گردد. به چند ضلعی بسته که در این حالت ایجاد می شود پلیگون (Polygon) می گویند.
 - ۲- پیمایش از یک نقطه با مختصات معلوم شروع شود و به نقطه دیگری با مختصات معلوم برسد. به این حالت پیمایش اتصالی (Link traverse) می گویند.
- از پیمایش بسته (پلیگون) معمولاً در مناطقی که طول و عرض منطقه تقریباً مساوی است استفاده می شود. همچنین در مناطقی که نقاط با مختصات معلوم در دسترس نیست می توان با فرضی گرفتن مختصات نقطه اول از این نوع پیمایش استفاده کرد. البته این حالت فقط برای نقشه برداری مناطق کوچک کاربرد دارد.
- مراحل کلی پیمایش عبارتند از :
 - الف) شناسایی (ب) اندازه گیری ها و مشاهدات پیمایش (ج) محاسبات
 - الف) شناسایی : در این مرحله گروه شناسایی با مراجعه مستقیم به محلی که قرار است پیمایش انجام شود، منطقه را شناسایی کرده و در نهایت از موقعیت نقاط موجود یک کروکی تهیه می کنند.
 - ب) اندازه گیری ها و مشاهدات پیمایش : پس از ایجاد و استحکام نقاط پیمایش، گروه نقشه بردار به محل مراجعه کرده و با توجه به کروکی و نام نقاط، طول افقی همه اضلاع و همچنین زاویه افقی همه رئوس پیمایش و ریزمان یکی از اضلاع موردنظر (که معمولاً ضلع اول می باشد) نیز اندازه گیری می شود.

● زاویه‌هایی که در پیمایش اندازه‌گیری می‌شوند معمولاً زاویه به راست (Clockwise angle) هستند. زاویه به راست در محاسبات پیمایش همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود.

● منظور از زاویه به راست، زاویه‌ای است که یک امتداد نسبت به امتداد قبل و در جهت عقربه ساعت (جهت راست) می‌سازد.

● ج) محاسبات پیمایش: برای شروع محاسبات لازم است مختصات یکی از ایستگاه‌های پیمایش (معمولاً نقطه اول) و همچنین ژیزمان یکی از اضلاع پیمایش (معمولاً ضلع اول) معلوم باشد.

● محاسبه مختصات در پیمایش باز را می‌توان در سه مرحله خلاصه کرد:

۱- محاسبه ژیزمان کلیه اضلاع پیمایش با استفاده از ژیزمان ضلع اول و زاویه به راست رؤس پیمایش.

۲- محاسبه ΔX و ΔY کلیه اضلاع پیمایش.

۳- محاسبه مختصات نقاط ایستگاه‌های پیمایش.

● ژیزمان یک امتداد را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$G = G_{\text{امتداد قبلی}} \pm 180^\circ \pm (\text{زاویه به راست رأس} + \text{امتداد بعدی})$$

● با استفاده از رابطه زیر می‌توان ΔX و ΔY کلیه امتدادها را محاسبه کرد:

$$\begin{cases} \Delta X_i = L_i \times \sin G_i \\ \Delta Y_i = L_i \times \cos G_i \end{cases}$$

● پس از محاسبه ΔX و ΔY با استفاده از روابط کلی زیر مختصات نقاط رؤس پیمایش را

محاسبه می‌کنیم. به عنوان مثال برای نقطه B داریم:

$$X_B = X_A + \Delta X_{AB}$$

$$Y_B = Y_A + \Delta Y_{AB}$$

● در محاسبه ژیزمان اضلاع در پیمایش باز، از روی جهت حرکت پیمایش و همچنین جهت محاسبات می‌توان زاویه به راست را تعیین کرد.

● مجموع زوایای یک چند ضلعی در فضای ایده‌آل و بدون خطای ریاضی از رابطه زیر به دست

می‌آید:

$$\text{جمع زوایای داخلی} = (n - 2) \times 180^\circ$$

$$\text{جمع زوایای خارجی} = (n + 2) \times 180^\circ$$

● مقدار خطای بست زاویه‌ای در یک پیمایش بسته از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$e_{\alpha} = \sum \alpha_i - (n \pm 2) \times 180^{\circ}$$

● مقدار مجاز خطای بست زاویه‌ای در یک پیمایش بسته از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$e_{\max} = \pm 2.5 \times d_{\alpha} \times \sqrt{\frac{n}{m}}$$

● مقدار تصحیح برای زوایا از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C = \frac{-e_{\alpha}}{n}$$

● پس از تصحیح زوایا، با معلوم بودن ژیزمان امتداد اول، سایر ژیزمان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

● طول‌های اندازه‌گیری شده در پیمایش مانند زوایای اندازه‌گیری شده دارای مقادیری خطا

می‌باشند که در محاسبه ΔX و ΔY خطایی ایجاد می‌کنند که به آن خطای بست موضعی (خطای بست طولی) می‌گویند.

● خطای بست موضعی (خطای بست طولی) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$e_{X,Y} = \sqrt{(\sum \Delta X_i^2 + \sum \Delta Y_i^2)}$$

● خطای نسبی بست (دقت پیمایش) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$e_s = \frac{e_{X,Y}}{\sum L_i}$$

● تعدیل برای هر ضلع در دو جهت X و Y اعمال می‌شود و مقدار آن از رابطه زیر به دست

می‌آید:

$$\begin{cases} C_x = \frac{-L_i}{\sum L} \times \sum \Delta X \\ C_y = \frac{-L_i}{\sum L} \times \sum \Delta Y \end{cases}$$

که با مقادیر ΔX و ΔY جمع شده و مقادیر تعدیل شده آنها به دست می‌آیند:

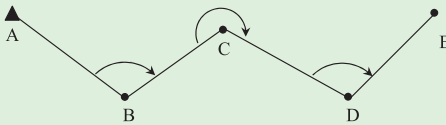
$$\Delta X_{\text{تصحیح نشده}} + C_x = \Delta X_{\text{تصحیح شده}}$$

$$\Delta Y_{\text{تصحیح نشده}} + C_y = \Delta Y_{\text{تصحیح شده}}$$

و در پایان X و Y را به راحتی می‌توان از روی این مقادیر بدست آورد.

مثال ۵-۱: پیمایش باز

مطابق شکل زیر به منظور ایجاد تعدادی نقطه کنترل، یک پیمایش باز انجام شده است. مختصات نقطه A برابر $(100, 100)$ و $G_{AB} = 140^\circ$ می باشد. مطلوب است محاسبه مختصات نقاط مجهول در این پیمایش.



$$AB = 135m \quad \angle B = 120^\circ$$

$$BC = 125m \quad \angle C = 240^\circ$$

$$CD = 185m \quad \angle D = 100^\circ$$

$$DE = 150m$$

راهکار کلی:

برای راحتی کار و جلوگیری از اشتباه در محاسبات، ابتدا معلومات مسئله را در جدولی مطابق زیر وارد می کنیم:

| ایستگاه | زاویه | ژیزمان | طول | ΔX | ΔY | X | Y |
|---------|-------------|-------------|---------|------------|------------|---------|---------|
| A | | 140° | 135.000 | | | 100.000 | 100.000 |
| B | 120° | | 125.000 | | | | |
| C | 240° | | 185.000 | | | | |
| D | 100° | | 150.000 | | | | |
| E | | | | | | | |

مرحله اول:

مرحله اول، محاسبه ژیزمان کلیه اضلاع پیمایش می باشد. یعنی ابتدا ستون سوم از جدول بالا را تکمیل می کنیم.

در فصل پیش با روش محاسبه ژیزمان یک امتداد از روی امتداد قبلی آن آشنا شدید. همانطور که گفته شد با معلوم بودن ژیزمان امتداد قبلی و زاویه به راست رئوس، ژیزمان امتداد بعدی را می توان از رابطه صفحه بعد محاسبه کرد:

$$G = (G_{\text{امتداد قبلی}} + \text{زاویه به راست رأس}) \pm 180^\circ$$

امتداد بعدی

به عبارتی می توان نوشت :

$$G_{BC} = (G_{AB} + \alpha_B) \pm 180^\circ$$

$$G_{CD} = (G_{BC} + \alpha_C) \pm 180^\circ$$

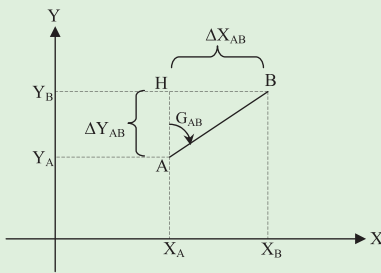
$$G_{DE} = (G_{CD} + \alpha_D) \pm 180^\circ$$

زوایای α_B و α_C و α_D در روابط فوق همان زاویه به راست در رأس های B و C و D می باشند که در رابطه ژیزمان همواره مثبت در نظر گرفته می شوند.

مرحله دوم:

در این مرحله ΔX و ΔY کلیه اضلاع پیمایش محاسبه می شود به عبارتی ستون های پنجم و ششم در این مرحله تکمیل می شوند.

برای محاسبه ΔX و ΔY می توان یک رابطه کلی به دست آورد. به شکل زیر دقت کنید: فرض کنید AB یکی از اضلاع پیمایش باشد، مطابق شکل مثلث AHB یک مثلث قائم الزاویه است، بنابراین داریم:



$$\sin G_{AB} = \frac{HB}{AB} \rightarrow HB = AB \times \sin G_{AB}$$

$$\cos G_{AB} = \frac{AH}{AB} \rightarrow AH = AB \times \cos G_{AB}$$

اما همانطور که در شکل مشاهده می کنید، HB همان ΔX_{AB} و AH همان ΔY_{AB} می باشد.

پس می توان نوشت :

$$\Delta X_{AB} = AB \times \sin G_{AB}$$

$$\Delta Y_{AB} = AB \times \cos G_{AB}$$

این روابط کلی هستند، بنابراین برای سایر اضلاع نیز می‌توان این روابط را نوشت :

$$\Delta X_{BC} = BC \times \sin G_{BC}$$

$$\Delta Y_{BC} = BC \times \cos G_{BC}$$

$$\Delta X_{CD} = CD \times \sin G_{CD}$$

$$\Delta Y_{CD} = CD \times \cos G_{CD}$$

$$\Delta X_{DE} = DE \times \sin G_{DE}$$

$$\Delta Y_{DE} = DE \times \cos G_{DE}$$

مرحله سوم:

در این مرحله به راحتی می‌توان مختصات نقاط مجهول را با استفاده از روابط بدیهی زیر بدست

آورد:

$$X_B = X_A + \Delta X_{AB}$$

$$Y_B = Y_A + \Delta Y_{AB}$$

$$X_C = X_B + \Delta X_{BC}$$

$$Y_C = Y_B + \Delta Y_{BC}$$

$$X_D = X_C + \Delta X_{CD}$$

$$Y_D = Y_C + \Delta Y_{CD}$$

$$X_E = X_D + \Delta X_{DE}$$

$$Y_E = Y_D + \Delta Y_{DE}$$

روش حل :

مرحله اول : محاسبه ژیزمان اضلاع

$$G_{BC} = (140^\circ + 120^\circ) - 180^\circ = 80^\circ$$

$$G_{CD} = (80^\circ + 240^\circ) - 180^\circ = 140^\circ$$

$$G_{DE} = (140^\circ + 100^\circ) - 180^\circ = 60^\circ$$

| ایستگاه | زاویه | ژیزمان | طول (m) | $\Delta X(m)$ | $\Delta Y(m)$ | X(m) | Y(m) |
|---------|-------|--------|---------|---------------|---------------|---------|---------|
| A | | 140° | 135.000 | | | 100.000 | 100.000 |
| B | 120° | 80° | 125.000 | | | | |
| C | 240° | 140° | 185.000 | | | | |
| D | 100° | 60° | 150.000 | | | | |
| E | | | | | | | |

مرحله دوم : محاسبه ΔX و ΔY اضلاع

$$\Delta X_{AB} = 135 \times \sin 140^\circ = 86.776$$

$$\Delta Y_{AB} = 135 \times \cos 140^\circ = -103.416$$

$$\Delta X_{CD} = 185 \times \sin 140^\circ = 118.916$$

$$\Delta Y_{CD} = 185 \times \cos 140^\circ = -141.718$$

$$\Delta X_{BC} = 125 \times \sin 80^\circ = 123.101$$

$$\Delta Y_{BC} = 125 \times \cos 80^\circ = 21.706$$

$$\Delta X_{DE} = 150 \times \sin 60^\circ = 129.904$$

$$\Delta Y_{DE} = 150 \times \cos 60^\circ = 75.000$$

| ایستگاه | زاویه | ژیزمان | طول (m) | $\Delta X(m)$ | $\Delta Y(m)$ | X(m) | Y(m) |
|---------|-------|--------|---------|---------------|---------------|---------|---------|
| A | | 140° | 135.000 | 86.776 | -103.416 | 100.000 | 100.000 |
| B | 120° | 80° | 125.000 | 123.101 | 21.706 | | |
| C | 240° | 140° | 185.000 | 118.916 | -141.718 | | |
| D | 100° | 60° | 150.000 | 129.904 | 75.000 | | |
| E | | | | | | | |

مرحله سوم : محاسبه مختصات نقاط

$$X_B = 100 + 86.776 = 186.776$$

$$Y_B = 100 + (-103.416) = -3.416$$

$$X_D = 309.877 + 118.916 = 428.803$$

$$Y_D = 18.290 + (-141.718) = -123.428$$

$$X_C = 186.776 + 123.101 = 309.887$$

$$Y_C = -3.416 + 21.706 = 18.290$$

$$X_E = 428.803 + 129.904 = 558.707$$

$$Y_E = -123.428 + 75.000 = -48.428$$

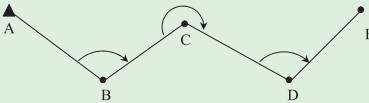
| ایستگاه | زاویه | ژیزمان | طول (m) | $\Delta X(m)$ | $\Delta Y(m)$ | X(m) | Y(m) |
|---------|-------|--------|---------|---------------|---------------|---------|----------|
| A | | 140° | 135.000 | 86.776 | 103.416 | 100.000 | 100.000 |
| B | 120° | 80° | 125.000 | 123.101 | 21.706 | 186.776 | -3.416 |
| C | 240° | 140° | 185.000 | 118.916 | -141.718 | 309.877 | 18.290 |
| D | 100° | 60° | 150.000 | 129.904 | 75.000 | 428.803 | -123.428 |
| E | | | | | | 558.707 | -48.428 |

بحث و بررسی:



در محاسبه ژیزمان اضلاع برای پیمایش باز، همانند حالتی که در پیمایش بسته گفته شد از روی جهت حرکت پیمایش و همچنین جهت محاسبات می توان زاویه به راست را تعیین کرد. در این مثال حرکت از چپ به راست است، بنابراین زوایای بالایی، زاویه به راست هستند که در محاسبات ژیزمان هم با علامت مثبت قرار داده می شوند.

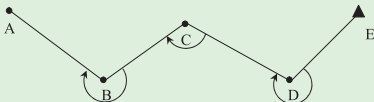
جهت پیمایش و انجام محاسبات



زوایای مشاهده شده در شکل، زاویه به راست هستند.

اما چنانچه جهت پیمایش و محاسبات از راست به چپ باشد، در این حالت زوایای پایینی زاویه به راست هستند و در رابطه ژیزمان، باید با علامت مثبت قرار داده شوند.

جهت پیمایش و انجام محاسبات



زوایای مشاهده شده در شکل، زاویه به راست هستند.

تمرین‌های کلاسی مثال ۵ - ۱

۱- اطلاعات طول و زاویهٔ مربوط به یک پیمایش باز مطابق جدول زیر مشاهده شده است، مختصات نقاط مجهول را محاسبه کنید. (همهٔ زوایا در حالت زاویه به راست هستند). $A(15^\circ, 12^\circ)$ ، $G_{AB} = 120^\circ 25' 50''$

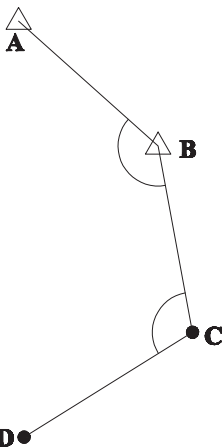
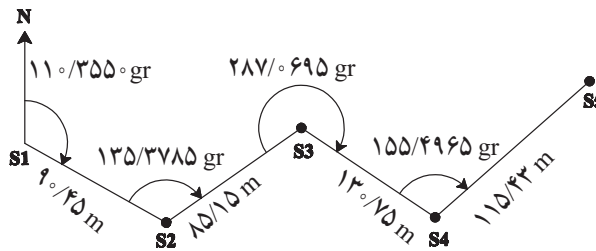
| | |
|--------------------------|---------------------------------|
| $AB = 235.452 \text{ m}$ | $\angle B = 240^\circ 25' 35''$ |
| $BC = 125.800 \text{ m}$ | $\angle C = 120^\circ 45' 50''$ |
| $CD = 385.215 \text{ m}$ | $\angle D = 200^\circ 25' 26''$ |
| $DE = 150.215 \text{ m}$ | |

۲- یک عملیات پیمایش باز مطابق شکل زیر انجام گرفته. هرگاه مختصات ایستگاه شروع $S_1(1500, 1500)$ متر باشد، مطلوب است:

الف) تنظیم جدول پیمایش باز

ب) محاسبهٔ مختصات ایستگاه‌های S_2 و S_3 و S_4 و S_5 (زوایا بر حسب گراد و طول‌ها بر حسب

متر هستند.)



۳- در پیمایشی که مطابق شکل روبرو صورت گرفته

است، مختصات $A(1000, 1000)$ و مختصات $(115^\circ, 95^\circ)$

B می‌باشد. مختصات نقاط C و D را به دست آورید.

$$\alpha_1 = 140.2738$$

$$\alpha_2 = 112.3893$$

$$L_{BC} = 179 \text{ m}$$

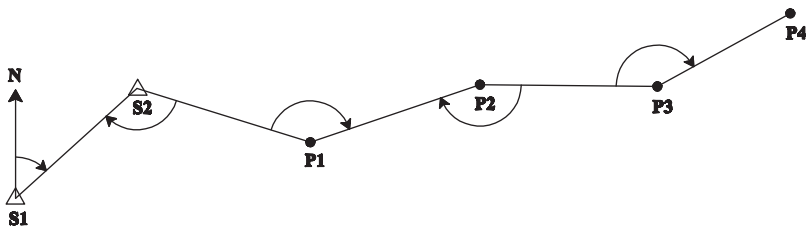
$$L_{CD} = 210 \text{ m}$$

۴- در پیمایش باز شکل زیر با توجه به مختصات معلوم نقاط S_1 و S_2 مختصات نقاط مجهول P_1 و P_2 و P_3 و P_4 را بر حسب متر محاسبه کنید.

$$S_1 = (1000, 1000) \quad S_2 = (2000, 2000)$$

$$S_2 = 128.6659^\circ \quad \angle P_1 = 152.8713^\circ \quad \angle P_2 = 161.3517^\circ \quad \angle P_3 = 151.5844^\circ$$

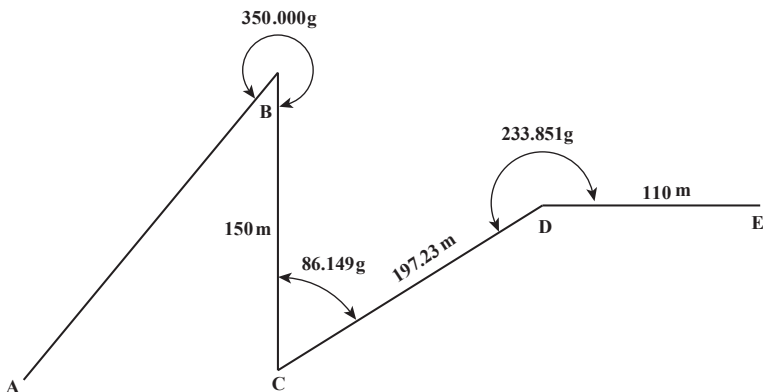
$$L_{P_3P_4} = 766.463 \quad L_{S_2P_1} = 1422.98 \quad L_{S_2P_1} = 1021.39 \quad L_{P_2P_3} = 1443.893$$



۵- در پیمایش باز زیر مختصات نقاط A و B به ترتیب برابر $(100, 100)$ و $(250, 250)$ متر می باشد، با توجه به زاویه های مشخص شده در کروکی زیر مختصات سایر نقاط را محاسبه کنید.

$$\hat{B} = 35^\circ, \hat{C} = 66/149g, \hat{D} = 233/851g$$

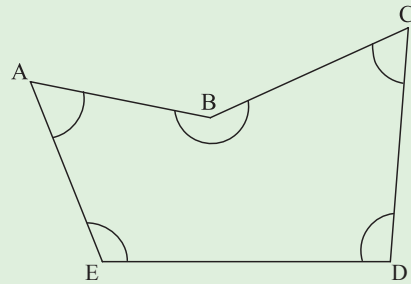
$$L_{BC} = 150m, L_{CD} = 197/23m, L_{DE} = 110m$$



مثال ۵-۲: پیمایش بسته

مطابق شکل زیر یک عمل پیمایش بسته انجام گرفته است. با فرض اینکه مختصات نقطه A برابر (E, D, C, B) و $(X=1000000, Y=908980)$ و $G_{AB}=106^{\circ}23'45''$ باشد، مختصات نقاط دیگر (E, D, C, B) را محاسبه کنید. دقت زاویه‌ای دوربین را $10''$ ثانیه در نظر بگیرید.

| طول | زاویه |
|--------------|--------------------------|
| AB = 690.880 | A = $64^{\circ}53'00''$ |
| BC = 616.050 | B = $206^{\circ}34'45''$ |
| CD = 677.970 | C = $64^{\circ}20'45''$ |
| DE = 970.260 | D = $107^{\circ}33'45''$ |
| EA = 783.320 | E = $96^{\circ}38'15''$ |



راهکار کلی:

الف) مرحله تعدیل و سرشکنی خطای بست زاویه‌ای:

مجموع زوایای یک چند ضلعی در فضای ایده‌آل و بدون خطای ریاضی از رابطه زیر به دست

می‌آید:

$$\text{جمع زوایای داخلی} = (n-2) \times 180^{\circ}$$

$$\text{جمع زوایای خارجی} = (n+2) \times 180^{\circ}$$

که در آن n تعداد اضلاع چند ضلعی است.

بنابراین برای هر پیمایش چند ضلعی می‌توان این مقدار را معیاری برای درستی زوایای

اندازه‌گیری شده در نظر گرفت. به عبارتی با مقایسه این مقدار با جمع زوایای مشاهده شده، می‌توان

خطای بست زاویه‌ای را به دست آورد، بنابراین:

$$e_{\alpha} = \sum \alpha_i - (n \pm 2) \times 180^{\circ} : \text{خطای بست زاویه‌ای}$$

$\sum \alpha_i$

مجموع زوایای پلیگون

$$(n \pm 2) \times 180^{\circ}$$

مجموع زوایای پلیگون بدون خطا



نکته: از رابطه $(n+2) \times 18^\circ$ زمانی که زاویه پلیگون، زاویه خارجی است استفاده می‌شود.
از رابطه $(n-2) \times 18^\circ$ زمانی که زاویه پلیگون، زاویه داخلی است استفاده می‌شود.

بعد از محاسبه خطای بست زاویه‌ای باید مقدار آن را مورد ارزیابی قرار داده و با مقدار مجاز آن مقایسه کنید.

در صورتی می‌توان این خطا را پذیرفت که مقدار آن کوچکتر و یا مساوی مقدار مجاز باشد. مقدار مجاز خطای بست زاویه‌ای از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$e_{\max} = \pm 2.5 \times d_\alpha \times \sqrt{\frac{n}{m}} \quad \text{مقدار مجاز خطای بست زاویه‌ای}$$

d_α دقت زاویه‌ای دوربین

n تعداد اضلاع چند ضلعی

m دفعات قرائت زاویه هر رأس

در صورتی که خطای بست زاویه‌ای قابل قبول باشد باید آن را بین زوایای پلیگون سرشکن کرده و زوایای تعدیل شده را به دست آورد.

برای به دست آوردن مقدار تصحیح برای هر زاویه، کافی است خطای بست را بر تعداد زوایای موجود با علامت مخالف تقسیم کنیم. سپس این مقدار تصحیح را با مقدار هر زاویه جمع می‌کنیم.

به عبارتی با این کار به هر رأس، سهم مساوی از تصحیح را اعمال می‌کنیم. بنابراین مقدار تصحیح برای زوایا از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = \frac{-e_\alpha}{n} \quad \text{مقدار تصحیح برای زوایا}$$

e_α خطای بست زاویه‌ای

n تعداد زوایا

در نتیجه برای هر زاویه خواهیم داشت:

$$\alpha_i' = \alpha_i + (C)$$

روش حل :

الف) مرحلهٔ تعدیل و سرشکنی خطای بست زاویه‌ای :

$$\sum \alpha_i = 64^\circ 53' 00'' + 206^\circ 34' 45'' + 64^\circ 20' 45'' + 107^\circ 33' 45'' + 96^\circ 38' 15''$$

$$\sum \alpha_i = 540^\circ 00' 30''$$

$$e_\alpha = 540^\circ 00' 30'' - (5-2) \times 180^\circ = +00^\circ 00' 30''$$

$$e_{\max} = \pm 2.5 \times 10 \times \sqrt{\frac{5}{1}} \approx \pm 56'' \rightarrow e_\alpha < e_{\max}$$

$$C = -\frac{+30''}{5} = -6''$$

حالا مقدار تصحیح را با تک تک زوایا جمع می‌کنیم تا زوایای تعدیل شده محاسبه شود. جهت کنترل، بعد از اعمال مقدار تصحیح به زوایا، یک بار دیگر آنها را جمع می‌کنیم. در صورتی که مقدار حاصل جمع زوایای جدید با مقدار واقعی آن برابر بود، این اعداد را به عنوان مقدار درست برای هر زاویه در نظر می‌گیریم.

$$64^\circ 53' 00'' + (-6'') = 64^\circ 52' 54''$$

$$206^\circ 34' 45'' + (-6'') = 206^\circ 34' 39''$$

$$64^\circ 20' 45'' + (-6'') = 64^\circ 20' 39''$$

$$107^\circ 33' 45'' + (-6'') = 107^\circ 33' 39''$$

$$96^\circ 38' 15'' + (-6'') = 96^\circ 38' 09''$$

$$\sum \alpha_i = 540^\circ 00' 00''$$

از این پس اطلاعات موجود را در جدولی مطابق زیر وارد کرده و محاسبات را ادامه می‌دهیم.
(در ادامهٔ حل مسأله جابه‌جایی‌هایی در سرستون‌ها دیده می‌شود که هر دو شکل ارائه شده صحیح می‌باشند.)

| نقاط ایستگاه | زاویهٔ تعدیل شده | زیزمان | طول | ΔX | C_x | ΔX_c | ΔY | C_y | ΔY_c | X | Y |
|--------------|------------------|--------|-----|------------|-------|--------------|------------|-------|--------------|---|---|
| A | | | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

ب) مرحله محاسبه ΔX و ΔY کلیه اضلاع:
 راهکار کلی:

برای محاسبه ΔX و ΔY اضلاع پیمایش، ابتدا باید ژیزمان کلیه اضلاع را از روی ژیزمان معلوم ضلع اول و زوایای تعدیل شده در مرحله قبل محاسبه کنیم. روش محاسبه ژیزمان اضلاع را در فصل ۴ کتاب «نقشه برداری عمومی» آموختید. همانطور که گفته شد، ژیزمان اضلاع را از رابطه زیر می توان محاسبه کرد:

$$G_{\text{امتداد بعدی}} = (G_{\text{امتداد قبلی}} + \text{زاویه به راست رأس}) \pm 180^\circ$$

به عبارتی می توان نوشت:

$$G_{BC} = (G_{AB} + \alpha_B) \pm 180^\circ$$

$$G_{CD} = (G_{BC} + \alpha_C) \pm 180^\circ$$

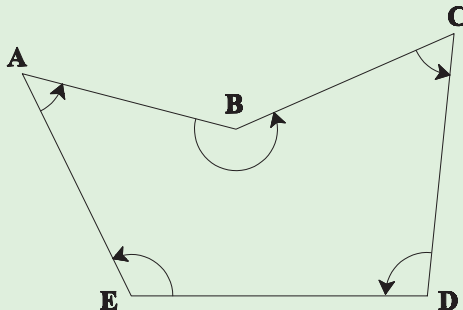
$$G_{DE} = (G_{CD} + \alpha_D) \pm 180^\circ$$

$$G_{EA} = (G_{DE} + \alpha_E) \pm 180^\circ$$

نکته ای که باید به آن توجه داشت این است که زاویه رؤس α در این رابطه، زاویه به راست در نظر گرفته شده اند و چنانچه زاویه های پیمایش، زاویه به راست نباشند، در این رابطه منفی می شوند. به عبارتی رابطه بالا به صورت زیر تبدیل می شود:

$$G_{\text{امتداد بعدی}} = (G_{\text{امتداد قبلی}} + \text{زاویه به راست رأس}) \pm 180^\circ$$

در این مثال مطابق شکل زیر، جهت حرکت و محاسبات پیمایش در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت است، بنابراین زوایای داخلی قرائت شده برای پیمایش زاویه به راست نیستند. در نتیجه زوایا در رابطه ژیزمان، منفی در نظر گرفته می شوند.



پس از محاسبه ژیزمان‌ها، با استفاده از رابطه زیر، ΔX و ΔY اضلاع را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta X_i = L_i \times \sin G_i \\ \Delta Y_i = L_i \times \cos G_i \end{cases}$$

طول ضلع i ام: L_i

ژیزمان ضلع i ام: G_i

روش حل:


(ب) مرحله محاسبه ΔX و ΔY کلیه اضلاع پیمایش:

$$G_{BC} = (106^\circ 23' 45'' - 206^\circ 34' 39'') + 180^\circ = 79^\circ 49' 06''$$

$$G_{CD} = (79^\circ 49' 06'' - 64^\circ 20' 39'') + 180^\circ = 195^\circ 28' 27''$$

$$G_{DE} = (195^\circ 28' 27'' - 107^\circ 33' 39'') + 180^\circ = 267^\circ 54' 48''$$

$$G_{EA} = (267^\circ 54' 48'' - 96^\circ 38' 09'') + 180^\circ = 351^\circ 16' 39''$$

نکته:  برای اطمینان از درستی محاسبات، ژیزمان AB را مجدداً محاسبه کرده و با مقدار

معلوم آن مقایسه می‌کنیم:

$$G_{AB} = G_{EA} + \alpha_A \pm 180^\circ$$

$$G_{AB} = 351^\circ 16' 39'' - 64^\circ 52' 54'' - 180^\circ = 106^\circ 23' 45''$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، همان مقدار برای ژیزمان AB به دست آمد که خود نشان دهند

درستی محاسبات ژیزمان می‌باشد. در اینجا ستون‌های دوم و سوم جدول پیمایش مطابق شکل زیر

تکمیل می‌شوند:

| نقاط ایستگاه | زاویه تعدیل شده | ژیزمان |
|--------------|------------------------|----------------------|
| A | | $106^\circ 23' 45''$ |
| B | $206^\circ 34' 39''$ | $79^\circ 49' 06''$ |
| C | $64^\circ 20' 39''$ | $195^\circ 28' 27''$ |
| D | $107^\circ 33' 39''$ | $267^\circ 54' 48''$ |
| E | $96^\circ 38' 09''$ | $351^\circ 16' 39''$ |
| A | $64^\circ 52' 54''$ | $106^\circ 23' 45''$ |
| B | | |
| جمع | $\sum a_i = 540^\circ$ | |

حال با استفاده از طول‌های اضلاع و ژیزمان محاسبه شده برای هر ضلع می‌توان ΔX و ΔY اضلاع را به دست آورد:

$$\begin{cases} \Delta X_{AB} = 690.880 \times \sin 106^\circ 23' 45'' = +662.785 \\ \Delta Y_{AB} = 690.880 \times \cos 106^\circ 23' 45'' = -194.767 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta X_{BC} = 616.050 \times \sin 79^\circ 49' 06'' = +606.349 \\ \Delta Y_{BC} = 616.050 \times \cos 79^\circ 49' 06'' = -108.899 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta X_{CD} = 677.970 \times \sin 195^\circ 28' 27'' = -180.885 \\ \Delta Y_{CD} = 677.970 \times \cos 195^\circ 28' 27'' = -653.394 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta X_{DE} = 971.260 \times \sin 267^\circ 54' 48'' = -970.616 \\ \Delta Y_{DE} = 971.260 \times \cos 267^\circ 54' 48'' = -35.365 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta X_{EA} = 783.320 \times \sin 351^\circ 16' 39'' = -118.790 \\ \Delta Y_{EA} = 783.320 \times \cos 351^\circ 16' 39'' = +774.260 \end{cases}$$

در اینجا ستون‌های پنجم و ششم جدول پیمایش مطابق شکل زیر تکمیل می‌شوند:

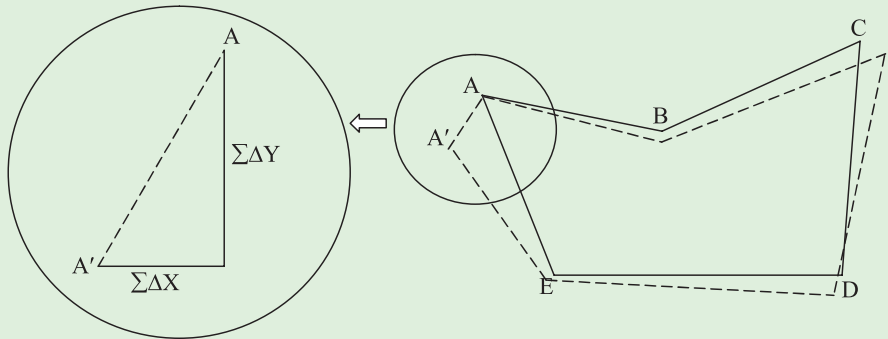
| نقاط ایستگاه | زاویه تعدیل شده | ژیزمان | طول | ΔX | ΔY |
|--------------|--------------------------|----------------------|---------|------------|------------|
| A | | $106^\circ 23' 45''$ | 690.880 | 662.785 | -195.016 |
| B | $206^\circ 34' 39''$ | $79^\circ 49' 06''$ | 616.050 | 606.349 | 108.899 |
| C | $64^\circ 20' 39''$ | $195^\circ 28' 27''$ | 677.970 | -180.885 | -653.394 |
| D | $107^\circ 33' 39''$ | $267^\circ 54' 48''$ | 970.260 | -969.617 | -35.328 |
| E | $96^\circ 38' 09''$ | $351^\circ 16' 39''$ | 783.320 | -118.790 | 774.260 |
| A | $64^\circ 52' 54''$ | $106^\circ 23' 45''$ | | | |
| B | | | | | |
| جمع | $\Sigma a_i = 540^\circ$ | | | | |

ج) مرحلهٔ تعدیل و سرشکنی خطای بست طولی:

همانطور که مشاهده کردید، خطای زاویه‌ای موجود در پیمایش چنانچه در حد مجاز باشد، بین رأس‌های پیمایش تعدیل می‌شود ولی این بدین معنی نیست که این خطا حذف می‌شود بلکه سرشکنی این خطا فقط به رابطهٔ هندسی حاکم بر شکل تحقق بخشیده است. به عبارتی این خطا هنوز در پیمایش وجود دارد. همچنین طول‌های اندازه‌گیری شده در پیمایش نیز مانند زوایای اندازه‌گیری شده دارای مقادیری خطا می‌باشند که در محاسبه ΔX و ΔY خطایی ایجاد می‌کنند که به آن خطای بست موضعی (خطای بست طولی) می‌گویند. از آنجا که پیمایش به صورت یک چند ضلعی بسته است یعنی از یک نقطه شروع شده و به همان نقطه ختم می‌گردد، پس باید جمع جبری اختلاف مختصات نقاط متوالی پیمایش یعنی مقادیر $\sum \Delta x_i$ و $\sum \Delta y_i$ مساوی صفر شوند. اما به دلیل آنکه طول‌ها و زوایا دارای مقادیری خطا هستند که این خود خطایی در محاسبه ΔX و ΔY ایجاد می‌کند، در نتیجه این شرط برقرار نمی‌شود. بنابراین $\sum \Delta x_i$ و $\sum \Delta y_i$ بیانگر مقادیر خطا در جهت محور x و y می‌باشند. به عبارتی نشان می‌دهند که نقاط پیمایش چه مقدار در اثر خطای طول و زاویه جابه‌جا شده‌اند. بنابراین خطای بست موضعی در پیمایش بسته پلیگون، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$e_{X,Y} = \sqrt{(\sum \Delta X_i)^2 + (\sum \Delta Y_i)^2}$$

شکل زیر که در آن خطاهای طول و زاویه با اغراق ترسیم شده‌اند، به وضوح، مطالب گفته شده در بالا را نشان می‌دهد:



همانطور که در شکل صفحه قبل مشاهده می کنید، به دلیل وجود خطاهای موجود در پیمایش، نقطه A و A' بر هم منطبق نمی شوند، به ضلع AA' ضلع خطا می گویند و طول آنکه از رابطه بالا به دست می آید، همان خطای بست موضعی پیمایش می باشد.

از تقسیم طول ضلع خطا (خطای بست طولی) بر مجموع اضلاع پیمایش، خطای نسبی بست (دقت پیمایش) به دست می آید که خود معیاری است برای ارزیابی دقت کار و مجاز بودن خطای بست. در اکثر کارهای عمرانی خطای نسبی بست طولی $1/50000$ یا کمتر، خطای قابل قبول تلقی می شود. در صورتی که این مقدار در حد مجاز باشد، می توان آن را سرشکن کرد.

$$e_s = \frac{e_{X,Y}}{\sum L_i}$$

روش های مختلفی برای تعدیل خطای بست طولی وجود دارد که در این کتاب یکی از آنها را شرح می دهیم.

این روش که به روش قطب نما (compass) معروف است خطای بست را به نسبت طول اضلاع پیمایش بین اضلاع سرشکن می کند. به عبارتی در این روش، فرض بر آن است که تأثیر خطاهای اندازه گیری زاویه و طول با هم برابرند. امروزه وسایل دقیق اندازه گیری طول به تحقق این فرض کمک کرده است. تعدیل برای هر ضلع در دو جهت X و Y اعمال می شود و مقدار آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} C_x = \frac{-L_i}{\sum L} \times \sum \Delta X \\ C_y = \frac{-L_i}{\sum L} \times \sum \Delta Y \end{cases}$$

$\sum L$: مجموع طول های پیمایش بسته

که با مقادیر ΔX و ΔY جمع شده و مقادیر تعدیل شده آنها به دست می آیند:

$$C_x + \text{تصحیح نشده } \Delta X = \text{تصحیح شده } \Delta X$$

$$C_y + \text{تصحیح نشده } \Delta Y = \text{تصحیح شده } \Delta Y$$

و در پایان X و Y را به راحتی می توان از روی این مقادیر به دست آورد.

روشن حل :

ج) مرحله تعدیل و سرشکنی خطای بست طولی :

| نقاط ایستگاه | زاویه تعدیل شده | ژیزمان | طول | ΔX | ΔY |
|--------------|--------------------------|------------|---------|----------------------------|----------------------------|
| A | | | | | |
| B | 206°34'39" | 106°23'45" | 690.880 | 662.785 | -195.016 |
| C | 64°20'39" | 79°49'06" | 616.050 | 606.349 | 108.899 |
| D | 107°33'39" | 195°28'27" | 677.970 | -180.885 | -653.394 |
| E | 96°38'09" | 267°54'48" | 970.260 | -969.617 | -35.328 |
| A | 64°52'54" | 351°16'39" | 783.320 | -118.790 | 774.260 |
| B | | 106°23'45" | | | |
| جمع | $\Sigma a_i = 540^\circ$ | | | $\Sigma \Delta X = -0.158$ | $\Sigma \Delta Y = -0.579$ |

$$\Sigma \Delta X = 662.785 + 606.349 + (-180.885) + (-969.617) + (-118.790)$$

$$\Sigma \Delta X = -0.158$$

$$\Sigma \Delta Y = (-195.016) + 108.899 + (-653.394) + (-35.328) + (774.260)$$

$$\Sigma \Delta Y = -0.579$$

$$e_{X,Y} = \sqrt{(-0.158)^2 + (-0.579)^2} = 0.6002\text{m} = 60.02\text{cm}$$

$$e_s = \frac{0.600}{3738.480} \approx \frac{1}{6230}$$

همانطور که مشاهده می کنید خطای نسبی (دقت) این پیمایش ۱:۶۲۳۰ است که دقت بالایی

محسوب می شود.

حال مقدار تصحیح ΔX و ΔY را برای هر ضلع پیمایش را به صورت زیر محاسبه می کنیم :

$$\left\{ \begin{array}{l} CX_{AB} = \frac{-690.880}{3738.480} \times -0.158 = 0.029\text{m} \\ CY_{AB} = \frac{-690.880}{3738.480} \times -0.579 = 0.107\text{m} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} CX_{BC} = \frac{-616.050}{3738.480} \times -0.158 = 0.026\text{m} \\ CY_{BC} = \frac{-616.050}{3738.480} \times -0.579 = 0.096\text{m} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} CX_{CD} = \frac{-677.970}{3738.480} \times -0.158 = 0.029\text{m} \\ CY_{CD} = \frac{-677.970}{3738.480} \times -0.579 = 0.105\text{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} CX_{DE} = \frac{-670.260}{3738.480} \times -0.158 = 0.041\text{m} \\ CY_{DE} = \frac{-670.260}{3738.480} \times -0.579 = 0.150\text{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} CX_{EA} = \frac{-783.320}{3738.480} \times -0.158 = 0.033\text{m} \\ CY_{EA} = \frac{-783.320}{3738.480} \times -0.579 = 0.121\text{m} \end{cases}$$

| نقاط ایستگاه | زاویه تعدیل شده | زیزمان G_i | طول L_i | ΔX | ΔY | C_x | C_y |
|--------------|--------------------------|----------------------|-----------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| A | | $106^\circ 23' 45''$ | 690.880 | 662.785 | -195.016 | 0.029 | 0.107 |
| B | $206^\circ 34' 39''$ | $79^\circ 49' 06''$ | 616.050 | 606.349 | 108.899 | 0.026 | 0.096 |
| C | $64^\circ 20' 39''$ | $195^\circ 28' 27''$ | 677.970 | -180.885 | -653.394 | 0.029 | 0.105 |
| D | $107^\circ 33' 39''$ | $267^\circ 54' 48''$ | 970.260 | -969.617 | -35.328 | 0.041 | 0.150 |
| E | $96^\circ 38' 09''$ | $351^\circ 16' 39''$ | 783.320 | -118.790 | 774.260 | 0.033 | 0.121 |
| A | $64^\circ 52' 54''$ | $106^\circ 23' 45''$ | | | | | |
| B | | | | | | | |
| جمع | $\Sigma a_i = 540^\circ$ | | | $\Sigma = -0.158$ | $\Sigma = -0.579$ | $\Sigma = 0.158$ | $\Sigma = 0.579$ |

نکته: برای کنترل محاسبات اگر C_x ها و C_y ها را با هم جمع کنید، باید به ترتیب با مقدار $\Sigma \Delta X$ و $\Sigma \Delta Y$ برابر شود. ✓

اکنون مقادیر تصحیح C_x و C_y را با مقادیر ΔX و ΔY جمع جبری می کنیم تا ستون های نهم و دهم یعنی ΔX_c و ΔY_c تکمیل شوند:

$$\begin{cases} \Delta X_{C_{AB}} = 662.785 + 0.029 = 662.814 \\ \Delta Y_{C_{AB}} = -195.016 + 0.107 = -194.909 \end{cases}$$


$$\begin{cases} \Delta X_{C BC} = 606.349 + 0.026 = 606.375 \\ \Delta Y_{C BC} = 108.899 + 0.096 = 108.995 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta X_{C CD} = -180.885 + 0.029 = -180.856 \\ \Delta Y_{C CD} = -653.394 + 0.105 = -653.289 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta X_{C DE} = -969.617 + 0.041 = -969.576 \\ \Delta Y_{C DE} = -35.328 + 0.150 = -35.178 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta X_{C EA} = -118.790 + 0.033 = -118.757 \\ \Delta Y_{C EA} = -774.260 + 0.121 = 774.381 \end{cases}$$

| نقاط ایستگاه | زاویه تعدیل شده | زیمان G_i | طول L_i | ΔX | ΔY | C_x | C_y | ΔX_c | ΔY_c |
|--------------|--------------------------|----------------------|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------|--------------|
| A | | $106^\circ 23' 45''$ | 690.880 | 662.785 | -195.016 | 0.029 | 0.107 | -662.814 | -194.909 |
| B | $206^\circ 34' 39''$ | $79^\circ 49' 06''$ | -616.050 | 606.349 | 108.899 | 0.026 | 0.096 | 606.375 | 108.995 |
| C | $64^\circ 20' 39''$ | $195^\circ 28' 27''$ | -677.970 | -180.885 | -653.394 | 0.029 | 0.105 | -180.856 | -653.289 |
| D | $107^\circ 33' 39''$ | $267^\circ 54' 48''$ | -970.260 | -969.617 | -35.328 | 0.041 | 0.150 | -969.576 | -35.178 |
| E | $96^\circ 38' 09''$ | $351^\circ 16' 39''$ | -783.320 | -118.790 | 774.260 | 0.033 | 0.121 | -118.757 | 774.381 |
| A | $64^\circ 52' 54''$ | $106^\circ 23' 45''$ | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| جمع | $\Sigma a_i = 540^\circ$ | | | $\Sigma = -0.158$ | $\Sigma = -0.579$ | $\Sigma = +0.158$ | $\Sigma = +0.579$ | $\Sigma = 0$ | $\Sigma = 0$ |

نکته: برای کنترل محاسبات، چنانچه ستون‌های ΔX_c و ΔY_c را جمع ببندید حاصل برابر صفر می‌گردد. 

در پایان با معلوم بودن مختصات نقطه اول (A) و ستون‌های ΔX_c و ΔY_c ، مختصات سایر نقاط را محاسبه کرده و ستون‌های یازدهم و دوازدهم جدول را تکمیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} X_B = X_A + \Delta X_{C AB} = 100.000 + 662.814 = 762.814 \\ Y_B = Y_A + \Delta Y_{C AB} = -194.909 + 908.980 = 714.071 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_C = X_B + \Delta X_{C BC} = 762.814 + 606.375 = 1369.189 \\ Y_C = Y_B + \Delta Y_{C BC} = 714.071 + 108.995 = 823.066 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_D = X_C + \Delta X_{C CD} = 1369.189 - 180.856 = 1188.333 \\ Y_D = Y_C + \Delta Y_{C CD} = 823.066 - 653.289 = 169.777 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_E = X_D + \Delta X_{C DE} = 1188.333 - 969.576 = 218.757 \\ Y_E = Y_D + \Delta Y_{C DE} = 169.777 - 35.178 = 134.599 \end{cases}$$

تمرین‌های کلاسی مثال ۵ - ۲

۱- در یک پیمایش بسته (چهار ضلعی) زوایا تصحیح شده و طول‌ها طبق جدول ذیل اندازه‌گیری شده است. با توجه به این که زوایا با دستگاه تنودلیتی با مقدار خطای زاویه‌ای اندازه‌گیری شده $d\alpha = 0^{\circ} 0' 40''$ و ژیزمان امتداد AB برابر $7^{\circ} 11'$ و مختصات نقطه A برابر $(500, 500)$ متر باشد، مطلوب است:

الف) محاسبه و کنترل خطای بست پیمایش. ب) تکمیل جدول پیمایش.

| طول | ژیزمان | زوایای تعدیل شده | ایستگاه |
|--------|-----------------|------------------------|---------|
| ۱۰۷/۸۶ | $7^{\circ} 11'$ | | A |
| ۹۲/۵۱ | | $100^{\circ} 07' 00''$ | B |
| ۱۲۸/۱۷ | | $87^{\circ} 40' 46''$ | C |
| ۱۰۸/۵۵ | | $80^{\circ} 41' 12''$ | D |
| | | $91^{\circ} 31' 2''$ | A |

۲- یک عملیات پیمایش بسته مطابق شکل زیر انجام شده است. در صورتی که نقطه A به مختصات $(1000, 1000)$ متر و ژیزمان AB برابر 45° درجه باشد، مطلوب است تنظیم جدول پیمایش و محاسبه سایر ایستگاه‌ها.

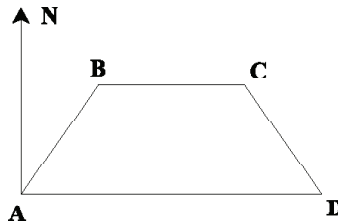
$$\angle A = 45^{\circ} \quad \angle B = 135^{\circ} \quad \angle C = 135^{\circ} \quad \angle D = 45^{\circ}$$

$$AB = 35.36 \text{ m}$$

$$BC = 50 \text{ m}$$

$$CD = 35.36 \text{ m}$$

$$DA = 100 \text{ m}$$



۳- در یک عملیات پیمایش بسته پس از انجام محاسبات جدول پیمایش مقادیر ΔX ها و ΔY ها برابر زیر شده است :

$$\Delta X_1 = 79.589, \quad \Delta X_2 = 19.780, \quad \Delta X_3 = -104.725, \quad \Delta X_4 = 5.326$$

$$\Delta Y_1 = 9.547, \quad \Delta Y_2 = 69.812, \quad \Delta Y_3 = 34.304, \quad \Delta Y_4 = -113.675$$

مطلوب است :

الف) محاسبه خطای بست موضعی پیمایش

ب) در صورت قابل قبول بودن خطای بست موضعی پیمایش، مقادیر تصحیح ΔX ها و ΔY ها را محاسبه کنید.

۴- در یک پیمایش بسته به طول $445/277$ متر مقادیر ΔX و ΔY ها به ترتیب زیر می باشد :

$$\Delta X_{DA} = -104/36 \quad \Delta X_{CD} = -62/44 \quad \Delta X_{BC} = 115/34 \quad \Delta X_{AB} = 51/49$$

و و و

$$\Delta Y_{DA} = +46/33 \quad \Delta Y_{CD} = -94/45 \quad \Delta Y_{BC} = -34/66 \quad \Delta Y_{AB} = 82/72$$

مطلوب است :

الف) محاسبه خطای بست موضعی پیمایش

ب) دقت پیمایش (خطای نسبی) را محاسبه کنید، آیا مجاز به سرشکنی خطای بست موضعی

پیمایش می باشیم؟

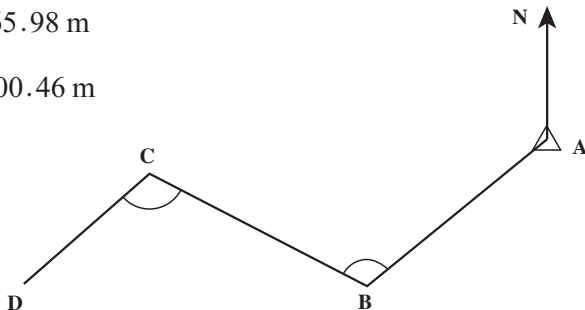
۵- در پیمایش باز داده شده زیر اگر مختصات نقطه A برابر $A(1000, 1500)$ متر باشد با توجه

به طول ها و زوایای برداشت شده مختصات نقاط B, C, D را در جدول پیمایش تنظیم و محاسبه نمایید.

$$G_{AB} = 200^\circ \quad L_{AB} = 150.25 \text{ m}$$

$$\hat{B} = 120^\circ 10' 40'' \quad L_{BC} = 165.98 \text{ m}$$

$$\hat{C} = 145^\circ 40' 25'' \quad L_{CD} = 100.46 \text{ m}$$



۶- در پیمایش بسته ABCDEA زوایای داخلی هر رأس را محاسبه و پس از کنترل زوایا، خطای بست موضعی پیمایش و دقت پیمایش را محاسبه کنید.

| امتداد | فاصله | ژیزمان |
|--------|-------|--------|
| AB | ۵۲۰ | ۹۲° |
| BC | ۶۳۴ | ۱۷۴° |
| CD | ۵۸۰ | ۲۲۰° |
| DE | ۱۲۳۲ | ۲۷۹° |
| EA | ۱۳۴۸ | ۴۸° |

۷- جدول داده شده، مختصات رئوس پیمایش یک پنج ضلعی بسته می‌باشد. این پلیگون بسته

را با مقیاس $\frac{1}{۱۰۰۰}$ ترسیم نمایید.

| نقاط P | X | Y |
|--------|---------|---------|
| A | 1000 | 1000 |
| B | 1050.50 | 1040.30 |
| C | 1110.60 | 995.80 |
| D | 1070.20 | 950.40 |
| E | 1000 | 955.70 |

۸- جدول داده شده مختصات رئوس یک پیمایش چهارضلعی بسته را نشان می‌دهد

در صورتی که مبدأ مختصات (۹۳۰ و ۹۸۰) متر باشد پیمایش را با مقیاس $\frac{1}{۳۰۰۰}$ ترسیم نمایید.

| نقاط | X(m) | Y(m) |
|------|---------|---------|
| A | ۱۰۰۰ | ۱۰۰۰ |
| B | ۱۰۸۰/۳۰ | ۱۱۲۰/۷۲ |
| C | ۱۲۵۰ | ۱۰۶۰/۳۰ |
| D | ۱۱۳۰/۶۰ | ۹۶۰/۴۵ |

۹- زاویه‌های داخلی یک پیمایش هفت ضلعی بسته را با دوربینی با دقت زاویه‌ای ۱۵ ثانیه اندازه‌گیری نموده‌ایم و جمع زاویه‌های اندازه‌گیری شده "۴۲' ۰۰° ۰۰°" به دست آمده است. اگر هر زاویه را ۳ مرتبه اندازه‌گیری نموده باشیم مطلوب است:

الف) آیا خطای زاویه‌ای پیمایش در حد مجاز می‌باشد؟

ب) مقدار تصحیح برای هر زاویه را محاسبه کنید.

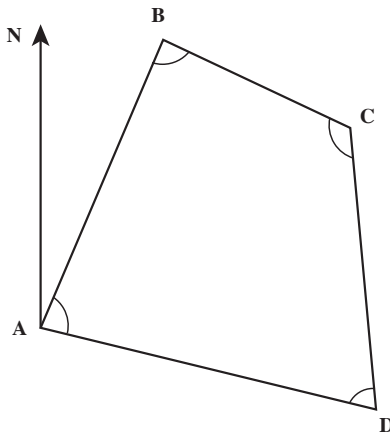
۱۰- مشاهدات یک پیمایش بسته با کروکی زیر به صورت جدول زیر می‌باشد، مطلوب است:

الف) محاسبه خطای بست موضعی و خطای نسبی پیمایش

ب) محاسبه مختصات تصحیح شده نقاط

ج) رسم پلیگون با مقیاس $\frac{1}{1000}$

| نقاط | طول (m) | زاویه‌های تعدیل شده (داخلی) | ژیزمان (درجه) | ΔX | ΔY | C_x | C_y | x | y |
|------|---------|-----------------------------|---------------|------------|------------|-------|-------|------|------|
| A | ۴۰/۵۹ | ۸۶° ۵۸' | ۳° ۰۰' | | | | | ۱۰۰m | ۱۰۰m |
| B | ۳۱/۹۵ | ۸۵° ۸' | | | | | | | |
| C | ۴۰ | ۱۲۳° ۱۲' | | | | | | | |
| D | ۵۰/۹ | ۶۴° ۴۲' | | | | | | | |
| A | | | | | | | | | |



۱۱- زوایای یک سه ضلعی به وسیله زاویه یاب به روش کوپل طبق جدول زیر برداشت شده است مطلوب است :

الف) محاسبه مقدار زوایای سه ضلعی

ب) اگر دقت زاویه ای $da = 1'$ دقیقه گرادی باشد خطای بست زاویه ای را محاسبه کنید.

ج) در صورت قابل قبول بودن خطای زاویه ای آنرا سرشکن و زوایای تصحیح شده را محاسبه نمایید.

| ایستگاه S | نقاط P | دایره به چپ L | دایره به راست R | میانگین | مقدار زاویه α | مقدار تصحیح | زاویه تصحیح شده |
|--------------|-----------|------------------|--------------------|---------|-------------------------|----------------|--------------------|
| A | B | 20 | 220.002 | | | | |
| | C | 90.405 | 290.409 | | | | |
| B | C | 120 | 319.996 | | | | |
| | A | 210.584 | 10.582 | | | | |
| C | A | 220 | 20.004 | | | | |
| | B | 259.014 | 59.020 | | | | |

