بخش اول

هندسه

و

ترسیمات دوبعدی

مقدمه

ترسیم نقشه یا نقشه‌کشی یعنی بیان کالبد یک پدیده (یک شیء، یک بنا، یک شهر و ...) به زبان تصویر.

هر تصویری از اشکال تشکیل شده و انسان از دیرباز برای تعریف و بیان اشکال، دانش هندسه را بنیان‌گذارده است. آن بخش از هندسه که شاید متشکل از ابتدایی‌ترین مفاهیم این دانش باشد، با قدمتی چندهزارساله، با نام هندسهٔ مسطحه و در ادامهٔ آن هندسهٔ فضایی، مبنای دانش نقشه‌کشی است.

بنابراین هرکس در هر زمینه‌ای نیاز به ترسیم یا فهم یک نقشه داشته باشد، ناگزیر به آشنایی و درک مبانی و قضایای ابتدایی هندسه است. یک نقشه‌بردار که نقشه عوارض و پستی و بلندی بخشی از سطح زمین را تهیه می‌کند، یک شهرساز که نقشهٔ یک شهر را طراحی و ترسیم می‌کند، یک مهندس معمار که نقشهٔ یک ساختمان راطرح می‌کند، هم‌چنین یک مهندس مکانیک، یک طراح صنعتی و مانند آنها، همگی نیازمند داشتن دانش لازم در هندسه هستند.

هرچه ما نسبت به مبانی و روابط هندسی دانش بیش‌تر و درک عمیق‌تری داشته باشیم در کار نقشه‌کشی موفق‌تر هستیم. به این دلیل اولین بخش از کتاب ترسیم فنی و نقشه‌کشی اختصاص به یادآوری احکام مهم و اولیهٔ هندسه دارد.

این بخش به چهار فصل تقسیم شده است.

فصل اول از ترسیمات پایه آغاز می‌شود و در ادامه ضمن آشنایی بیش‌تر با مثلث، به عنوان یکی از مهم‌ترین اشکال پایه در هندسه ترسیمی، و یادآوری تعدادی از قضایای مهم هندسی در قالب مثال‌ها و تمرین‌هایی، انواع ترسیمات مرتبط با مثلث را تمرین می‌کنیم.

در فصل دوم موضوع تقارن در اشکال مطرح می‌شود و با درک مفهوم تقارن محوری و مرکزی چگونگی ترسیم اشکال متقارن را یاد می‌گیریم.

فصل سوم اختصاص به چند ضلعی‌ها و چهارضلعی‌های تعریف شده دارد و با یادآوری بعضی از قضایای هندسی ترسیم چندضلعی‌های منتظم و چهارضلعی‌ها را تمرین می‌کنیم.

در فصل چهارم دایره، به عنوان شکل پایه و مهم دیگری در ترسیمات، معرفی شده و با یادآوری برخی قضایا و تمرین دربارهٔ آنها و همچنین تعریف بیضی و چگونگی ترسیم آن، مهارت خود را در ترسیم به‌تدریج بالا خواهیم برد.

فصل اول

ترسیمات پایه و مثلث

هدف‌های رفتاری : پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :

ــ ترسیمات ابتدایی و پایه را با صحت و دقت انجام دهد.

ــ با استفاده از ویژگی‌های مثلث هر مثلثی را با اطلاعات داده شده ترسیم کند.

ــ با درک مفهوم تشابه بتواند مشابه اشکال داده شده را ترسیم کند.

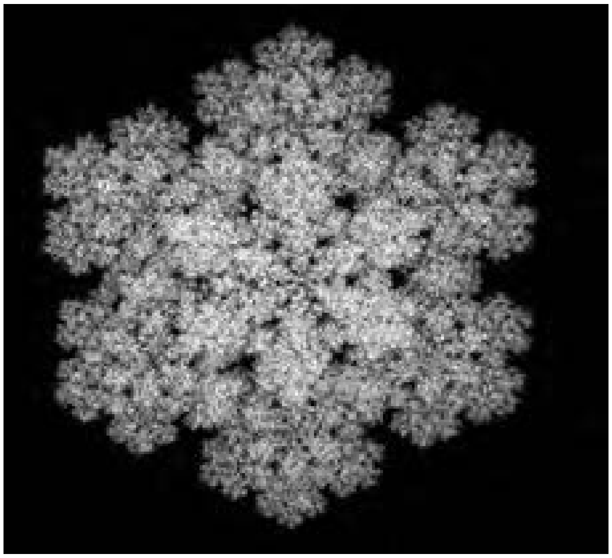
ــ با درک مفاهیم خطوط اصلی در مثلث، آنها را در هر مثلثی ترسیم نماید.

طبیعت، شکل، اندازه و نظم

بزرگ‌ترین معلم انسان خداوند حکیم است و دفتر طبیعت کتاب بزرگ و گسترده‌ای است که او در برابر انسان گشوده تا با بهره‌گیری از موهبت هوش و عقل رازهای آن را یک به یک بشکافد و راه به نور و عالم بالا گشاید.

یکی از ویژگی‌های پدیده‌های طبیعی وجود نوعی نظم در آنهاست. این نظم حاصل وجود نسبت و رابطه مابین اجزاء و اندازه آنهاست.

هندسه که به معنای اندازه است دانشی است که بشر در جهت درک و شناخت و تبیین و تقلید از انواع شکل‌هایی که در طبیعت با آنها روبه‌رو بوده، بنیان‌گذارده است. دانشی که در طول زمان عمق و گسترش زیادی یافته است.



هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ شرقی یا ایرانی

ردپای توجه انسان به هندسه در آثاری از دوره غارنشینی یافته شده است. آثار به‌جامانده از تمدن بابلیان، متعلق به چهارهزار سال قبل از میلاد مسیح حاکی از آن است که آنها برای رفع نیازهای خود در زمینه مساحی، نقشه‌برداری و ساختمان از هندسه و روابط هندسی بهره می‌برده‌اند و سعی در محاسبه مساحت دایره و عدد پی کرده‌اند. هم‌چنین در تمدن‌های مصر، هندوچین هندسه در عمل نقش مؤثری در شکل‌دهی به مصنوعات تولیدشده توسط آنها داشته است.

اما دانش هندسه مبتنی بر برهان و اثبات را یونانیان در حدود دوهزار و پانصد سال پیش تدوین نموده‌اند که به هندسهٔ اقلیدسی معروف است. همان هندسه‌ای که در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید. شاید شنیده باشید که از قرن هفدهم به بعد با بسط دانش در همهٔ زمینه‌ها از جمله ریاضیات، دانش هندسه نیز بسط پیدا کرد و انواع دیگر هندسه[1] بنیان گذاشته شد.

هریک از انواع هندسه، که ظاهراً مبانی بعضی از آنها در تناقض با یکدیگر است، در مقیاس ویژه‌ای از فیزیک و جهان هستی کاربرد دارند. هندسهٔ اقلیدسی در مقیاس فضای زیست انسان کاربرد دارد از آن‌رو با وجود کشف هندسه‌های جدید، هم‌چنان اهمیت و قدرت خود را حفظ کرده است.

علاوه بر هندسهٔ اقلیدسی نوعی هندسهٔ ترسیمی که جنبهٔ عملی و کاربردی داشته در شرق به‌کار می‌رفته است که ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی، ریاضیدان ایرانی قرن چهارم، آن را در رساله‌ای به زبان عربی با نام «اشکال هندسی که عمل‌کنندگان و صنعتگران بدان نیاز دارند» مدون کرده است[2]. در این نوع هندسه، که ریشه آن احتمالاً در همان تمدن‌های شرقی می‌باشد، بعضی از ترسیمات اثبات هندسی ندارند. یعنی مشابه ترسیمات هندسهٔ اقلیدسی نیستند که به دلیل اثبات هندسی کاملاً و صددرصد دقت داشته باشند، بلکه تقریبی هستند اما عدم دقت آنها به‌قدری ناچیز است که در عمل به هیچ وجه ادراک نمی‌شود. بنابراین در مقیاس اشکال و احجام به‌کاررفته در معماری کاملاً کاربرد دارند.[3]

اغلب مطالب این فصل را هنرجویان در طول دوران تحصیلی راهنمایی و اول متوسطه فراگرفته‌اند، آنچه در این‌جا ذکر می‌شود مروری همراه با تمرینات کاربردی مربوط به آنهاست. لذا حل تمرینات با درک مفاهیمی که در قالب یادآوری آمده است ضروری می‌باشد.

۱ــ از جمله هندسهٔ تحلیلی، هندسهٔ ریمانی و هندسهٔ نااقلیدسی

۲ــ «فی ما یحتاج الیه العمال و الصناع من الاشکال الهندسیه» این رساله توسط آقای سید علی رضا جذبی به عبارت روز برگردان شده و انتشارات سروش آن را در سال ۱۳۶۹ با عنوان هندسه ایرانی (کاربرد هندسه در عمل) چاپ کرده است.

۳ــ در این فصل روش‌های ترسیمی ارائه شده برگرفته از هردو هندسه است و یادگیری آنها ما را در ترسیمات دوبعدی که اساس ترسیمات سه‌بعدی نیز هست یاری می‌کند.

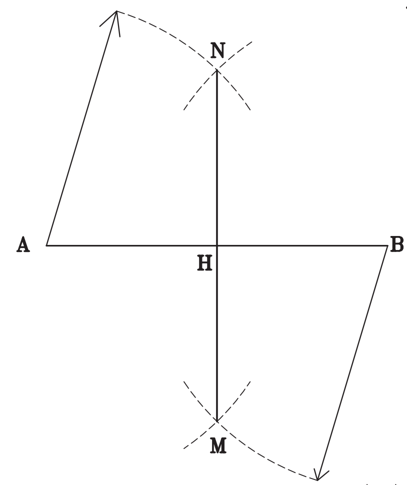
ترسیمات پایه

ترسیم خطی عمود بر خط دیگر

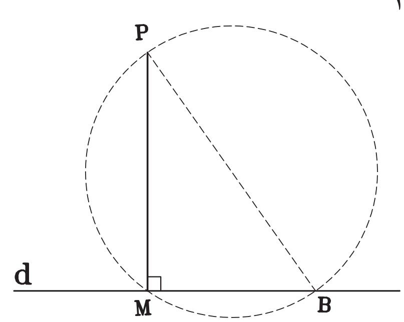
می‌دانید زاویهٔ ۹۰ درجه زاویهٔ ویژه‌ای است. فضا با سه بردار عمود برهم مشخص می‌شود. بنابراین ترسیم دقیق زاویهٔ ۹۰درجه یا ترسیم دو خط عمود برهم بسیار مهم است.

شکل‌های ۱ــ۱، ۲ــ۱ و ۳ــ۱ نحوهٔ ترسیم دو خط عمود برهم را نشان می‌دهد.

در شکل ۱ــ۱ پاره‌خط MN بر وسط خط AB عمود شده است.



شکل ۱ــ۱

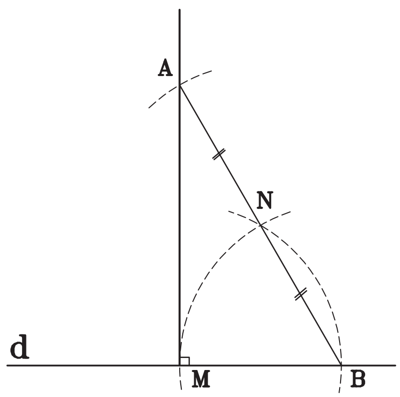


شکل ۲ــ۱

در شکل ۲ــ۱ از نقطه P خارج خط d بر آن عمود کرده‌ایم.

آیا می‌توانید شیوه ترسیم را پیدا کنید؟

در شکل ۳ــ۱ از نقطه M روی خط d عمودی بر خط d ترسیم شده است.



شکل ۳ــ۱

مراحل ترسیم به این ترتیب است :

نقطه B را به دلخواه روی خط d انتخاب می‌کنیم.

از B و M قوس‌هایی به شعاع BM رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ N قطع کنند.

از B به N وصل می‌کنیم و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه A برسیم اگر از A به M وصل کنیم AM در نقطهٔ M بر خط d عمود است.

دقت کنید که می‌توانید نقطه A را بر امتداد BN هم از طریق اندازه‌گیری و هم بدون استفاده از خط‌کش مدرج و با قوس زدن پیدا کنید.

تمرین : در شکل ۴ــ۱ از سه نقطه A روی خط، B و C خارج خط سه خط بر خط d عمود کنید.

شکل ۴ــ۱

ترسیم خطی به موازات خط دیگر

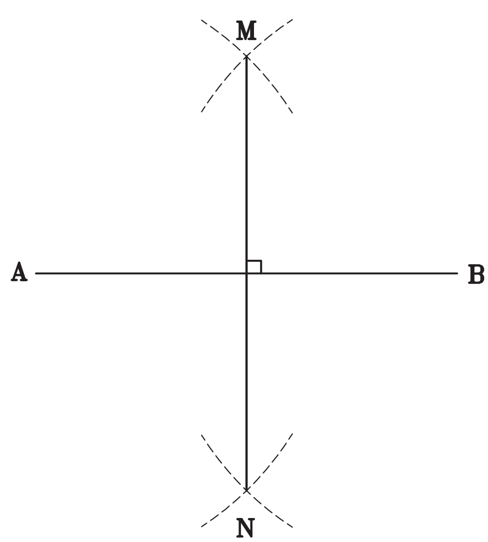
می‌دانید دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند آیا می‌توانید با استفاده از این قضیه و نحوهٔ ترسیم دو خط عمود بر هم، دو خط موازی با هم بکشید؟

تمرین : دو خط موازی رسم کنید که فاصلهٔ آنها از هم ۳ سانتی‌متر باشد.

تقسیم یک پاره‌خط به دو قسمت مساوی (عمودمنصف یک خط)

به شکل ۵ــ۱ توجه کنید این شکل طریقهٔ ترسیم عمودمنصف یک پاره‌خط را نشان می‌دهد. آیا می‌توانید بگویید چرا پاره‌خط MN عمودمنصف پاره‌خط AB است؟

از روش فوق می‌توانیم هنگامی که ابزاری مانند خط‌کش مدرج نداریم برای تقسیم یک پاره‌خط به دو قسمت مساوی استفاده کنیم. اگر دقیق ترسیم کنیم، این روش از اندازه‌گیری می‌تواند دقیق‌تر باشد.



شکل ۵ــ۱

تمرین : خطی به طول ۷/۳ سانتی‌متر ترسیم کنید و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید.

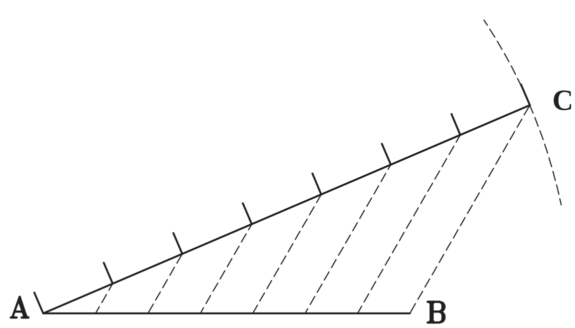
تقسیم یک پاره‌خط به n قسمت مساوی

با روش ترسیم عمودمنصف‌ها می‌توان هر پاره‌خط را به تقسیماتی با توان ۲ (دو، چهار، هشت، شانزده) تقسیم کرد اما این راه اولاً وقت‌گیر است، ثانیاً کلی نیست. یعنی نمی‌توانیم یک پاره‌خط را به تقسیمات فرد یا مثلاً به شش یا ده و ... تقسیم کرد.

مثال : می‌خواهیم پاره‌خطی به طول ۱۰/۲ سانتی‌متر را به ۷ قسمت مساوی تقسیم کنیم. اگر طول خط ۷ یا ۱۴ یا حتی ۱۰/۵ و به‌طور کلی ضریبی از ۷ بود و ما خط‌کش مدرجی با تقسیمات میلی‌متری نیز داشتیم، تقسیمات عملی بود اما طول خط ضریبی از ۷ نیست.

به شکل ۶ــ۱ توجه کنید پاره‌خط AB به ۷ قسمت مساوی تقسیم شده است. چگونه عمل کرده‌ایم؟ به ترسیم دقت کنید. طول خط AC را خود انتخاب کرده و آن را به ۷ قسمت کرده‌ایم. آن‌گاه از انتهای خط یعنی نقطه C به انتهای خط مفروض یعنی B وصل کرده و از نقاط تقسیم پاره‌خط‌هایی به موازات BC ترسیم کرده‌ایم. خط AB به آسانی به ۷ قسمت مساوی تقسیم شده است. در این روش ترسیم در واقع از قضیه تالس استفاده کرده‌ایم.

سؤال : اگر خط‌کش مدرج هم نداشته باشیم آیا باز هم می‌توانیم هر پاره‌خطی را به هر چند قسمت مساوی که بخواهیم تقسیم کنیم؟



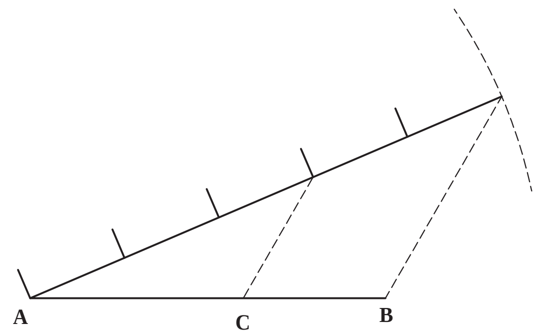
شکل ۶ــ۱

تمرین : بدون استفاده از خط‌کش مدرج خطی به طول دلخواه را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنید.

تقسیم یک پاره‌خط به یک نسبت مشخص

برای تقسیم پاره‌خط به یک نسبت مشخص باز هم می‌توان از راه حل بالا کمک گرفت.

به شکل ۷ـ۱ توجه کنید پاره‌خط AB که طول آن ۴۷ میلی‌متر است به نسبت ۲ و ۳ تقسیم شده است.

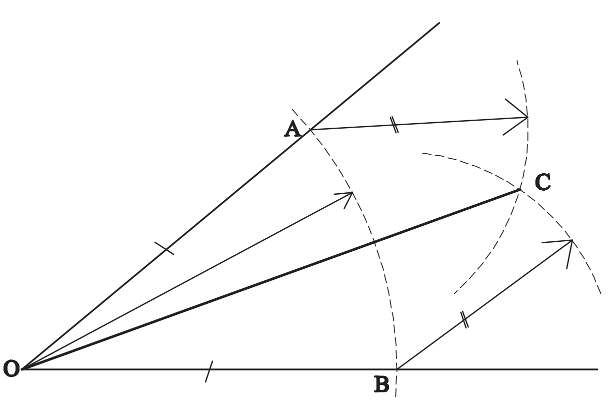


شکل ۷ـ۱

تمرین : خطی به طول دلخواه ترسیم کنید آن‌گاه آن را به نسبت ۳ و ۴ تقسیم کنید. آیا می‌شود بدون استفاده از خط‌کش مدرج آن را انجام داد؟

تقسیم یک زاویه به دو قسمت مساوی (نیمساز یک زاویه)

به شکل ۸ـ۱ توجه کنید طریقهٔ ترسیم نیمساز زاویه را نشان می‌دهد. می‌توانید بگویید چرا نیم‌خط OA نیمساز زاویه O است؟



شکل ۸ـ۱

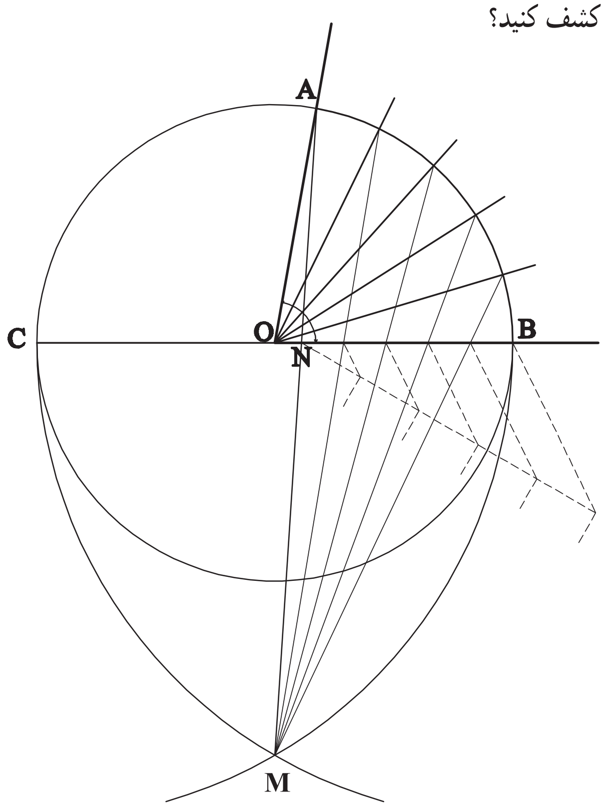
تمرین : یک مثلث دلخواه ترسیم کنید. آن‌گاه هر زاویه آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید. نیمسازها را تا ضلع مقابل هر زاویه ادامه دهید. آیا یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند؟ تقاطع این خطوط در یک نقطه نشانه دقت بالای شما است.

تقسیم یک زاویه به n قسمت مساوی[1]

با ترسیم متوالی نیمسازهای یک زاویه مشابه آن چه درباره تقسیم یک پاره‌خط دیدید می‌توان یک زاویه را به چهار، هشت، شانزده و ... تقسیم نمود. اما اگر بخواهیم زاویه‌ای را به پنج یا شش قسمت تقسیم کنیم چه؟

حقیقت این است که نمی‌توان با روشی علمی که اثبات هندسی داشته باشد هر زاویه‌ای را به چند قسمت مساوی تقسیم کرد. اما جوزانی در کتاب خود روش ترسیمی را ارائه داده است که با خطای بسیار جزئی زاویه را به چند قسمت تقسیم می‌کند.

به شکل ۹ـ۱ توجه کنید. می‌خواهیم زاویه AOB را به پنج قسمت مساوی تقسیم کنید. آیا می‌توانید شیوه ترسیم را کشف کنید؟



شکل ۹ـ۱

۱ـ این طریقه ترسیم از کتاب جوزانی است.

دقت کنید مراحل زیر در تقسیم زاویه انجام شده است.

۱ــ به مرکز O رأس زاویه دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم.

۲ــ یکی از اضلاع زاویه را امتداد داده تا دایره را در نقطه C قطع کند.

۳ــ به مرکز B و شعاع قطر دایره قوسی می‌زنیم.

۴ــ به مرکز C و شعاع قطر دایره قوس دیگری می‌زنیم تا قوس اول را در نقطه M قطع کند.

۵ــ از M به A وصل می‌کنیم تا OB را در نقطه N قطع کند.

۶ــ پاره‌خط BN را به پنج قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.

۷ــ از نقطه M به نقاط تقسیم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط P ، Q ، R و S قطع کنند.

۸ــ اگر از O به نقاط S ، R ، Q ، P وصل کنیم زاویه به ۵ قسمت مساوی با خطای بسیار جزئی تقسیم شده است.

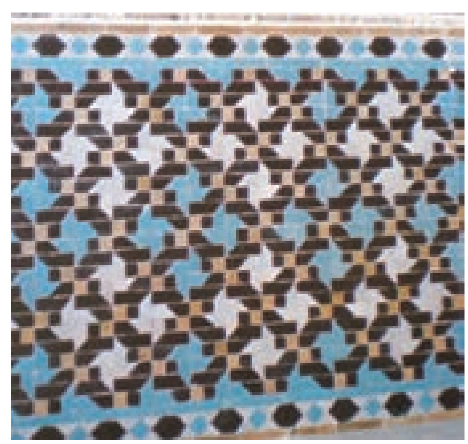
تمرین منزل

۱ــ یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنید و هریک از اضلاع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید. از هر نقطه تقسیم به موازات دو ضلع دیگر خطوطی رسم کنید. چند مثلث به‌وجود آمده است؟ آیا همه آنها متساوی‌الاضلاع هستند؟

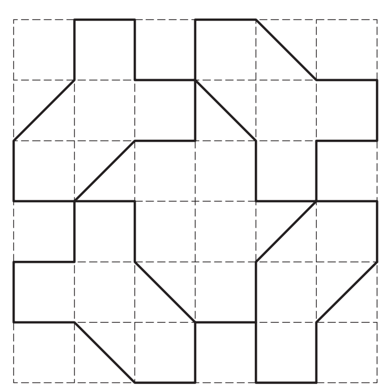
۲ــ یک زاویه منفرجه یا باز ترسیم کنید. آن را به ۷ قسمت مساوی تقسیم کنید.

۳ــ نقش داده شده شکل ۱۰ــ۱ــ الف را در کادر ۱۶× ۱۶ با دقت ترسیم کنید.

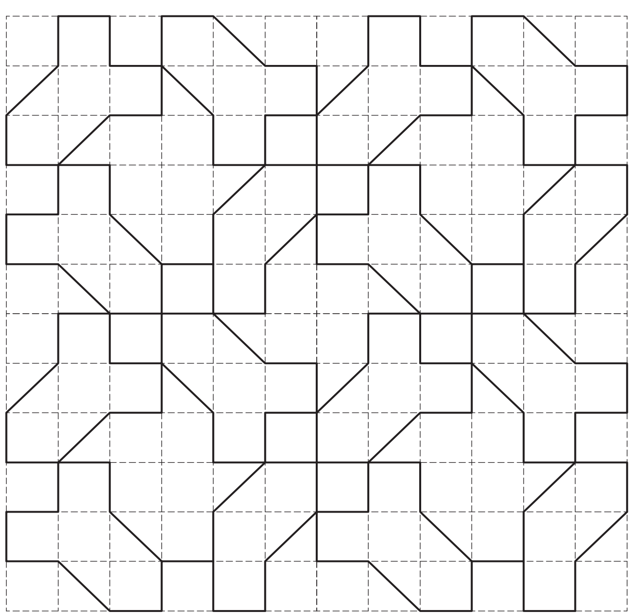
طریقه ترسیم در شکل‌های ۱۰ــ۱ ــ ب و ۱۰ــ۱ــ ج نشان داده شده است.



(الف)



(ب)



(ج)

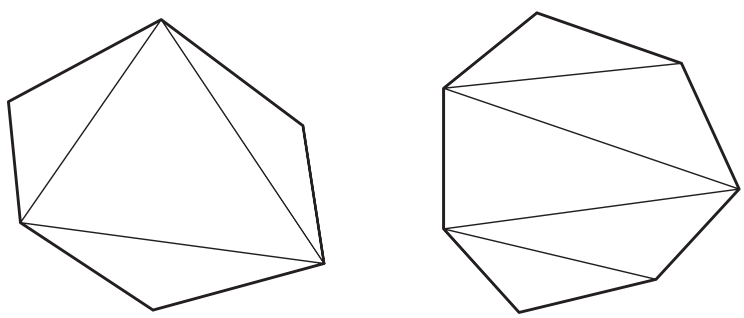
شکل ۱۰ــ۱

مثلث

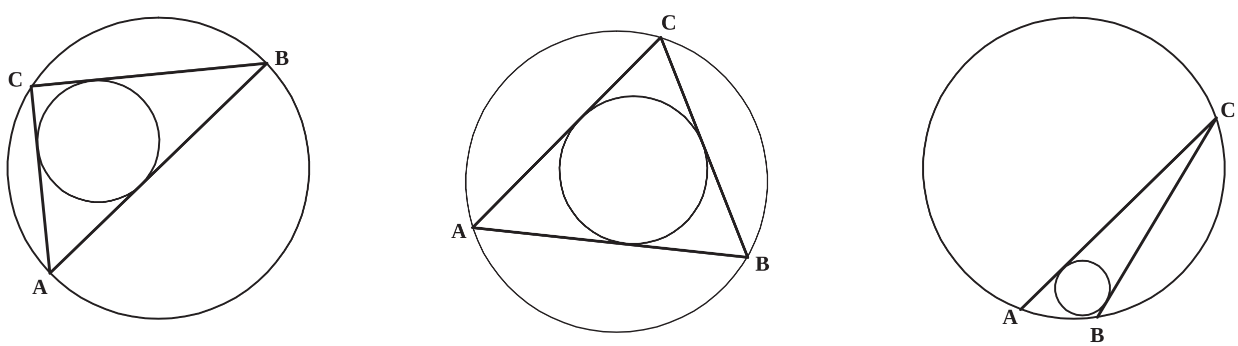
مثلث ساده‌ترین شکل هندسی است. هر شکلی که از چند خط راست بسته تشکیل شده باشد، قابل تبدیل به تعدادی مثلث است (شکل ۱۱ــ۱). مثلث تنها شکلی است که همه انواع آن قابل محاط در دایره است. هم‌چنین همهٔ انواع آن می‌توانند محیط بر یک دایره باشند (شکل ۱۲ــ۱).

این ویژگی صرفاً مخصوص مثلث یا سه‌ضلعی است. در انواع دیگر چندضلعی فقط چندضلعی‌های منتظم هستند که هم محیط بر یک دایره و هم قابل محاط در یک دایره می‌باشند.

مثلث به دلیل ویژگی‌هایش اهمیت خاصی در ترسیمات دارد. در ادامه این فصل با یادآوری تعریف مثلث و تعدادی از احکام مرتبط با آن، سعی می‌کنیم شناخت بهتری از آن به‌دست آوریم که در ترسیمات بعدی به‌کار می‌آیند.



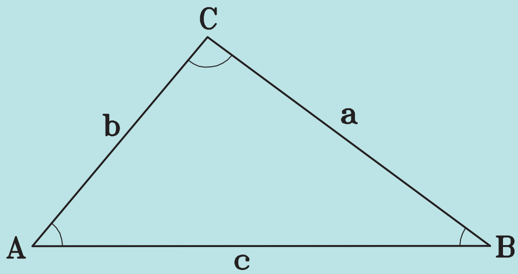
شکل ۱۱ــ۱



شکل ۱۲ــ۱

تعریف مثلث

یادآوری



شکل ۱۳ــ۱

اگر سه خط دوبه دو یکدیگر را قطع کنند، شکل ایجاد شده را مثلث می‌نامند (شکل ۱۳ــ۱).

هر مثلث دارای خواص زیر است :

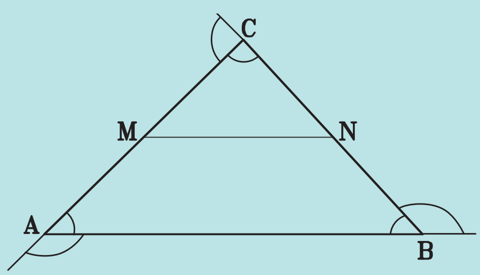
سه زاویه داخلی و سه زاویه خارجی دارد.

مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است.

در هر مثلث اندازه زاویه خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاور آن، برابر است.

پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم آن مثلث موازی و اندازه آن برابر نصف اندازه ضلع سوم است (شکل ۱۴ــ۱).

$$\frac{CN}{CB}=\frac{CM}{CA}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{2}$$



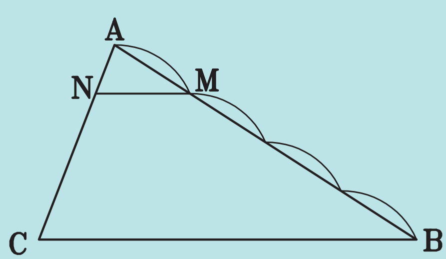
شکل ۱۴ــ۱

تمرین : مثلث ABC مفروض است در درون آن چند مثلث می‌توان رسم کرد که یکی از اضلاع آن نصف BC باشد؟ آنها را رسم کنید.

یادآوری

خطی که موازی یک ضلع مثلث باشد و دو ضلع دیگر آن مثلث را قطع کند، آن دو ضلع را به یک نسبت تقسیم می‌کند (شکل ۱۵ــ۱).

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{NM}{CB}$$

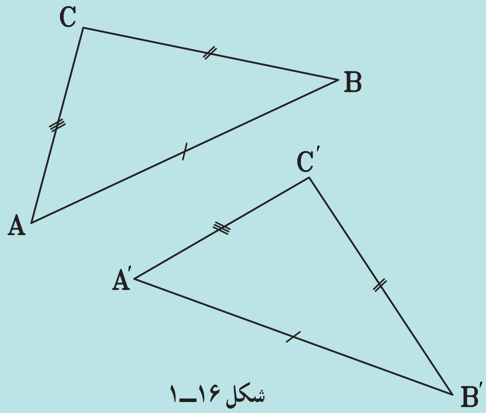


شکل ۱۵ــ۱

تمرین : در شکل ۱۵ــ۱ خط MN به موازات BC ترسیم شده است. AM یک چهارم AB است. اگر طول MN، ۲ واحد باشد ضلع BC چند واحد است؟

تساوی در مثلث‌ها

یادآوری

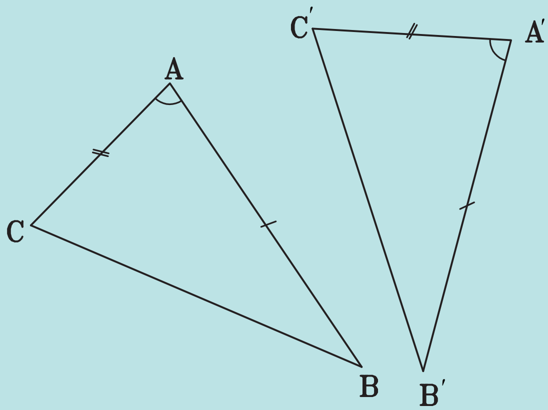


شکل ۱۶ــ۱

هر دو مثلث در سه حالت با هم مساویند :

حالت اول : تساوی سه ضلع (ض ض ض)

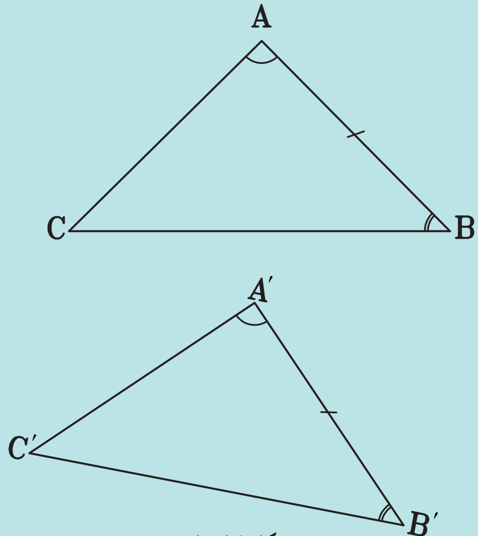
اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر، برابر باشند، آن دو مثلث باهم برابرند (شکل ۱۶ــ۱).



شکل ۱۷ــ۱

حالت دوم : تساوی دو ضلع و زاویه بین آنها (ض ز ض)

اگر دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی دیگر، برابر باشند آن دو مثلث باهم برابرند (شکل ۱۷ــ۱).



شکل ۱۸ــ۱

حالت سوم : تساوی دوزاویه و ضلع بین (ز ض ز)

اگر دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث باهم برابرند (شکل ۱۸ــ۱).

انواع مثلث (مثلث‌های خاص)

یادآوری

به یاد دارید که مثلث با توجه به ویژگی اضلاع یا زوایایش به سه نوع ویژه نام‌گذاری می‌شود.

الف) مثلث قائم‌الزاویه

ب) مثلث متساوی‌الساقین

ج ــ مثلث متساوی‌الاضلاع

واضح است که مثلثی که هیچ‌یک از ویژگی های سه نوع مثلث فوق را ندارد، مثلث مختلف‌الاضلاع است.

ترسیم مثلث

برای ترسیم مثلث به اطلاعاتی نیاز داریم که در تساوی دو مثلث لازم است.

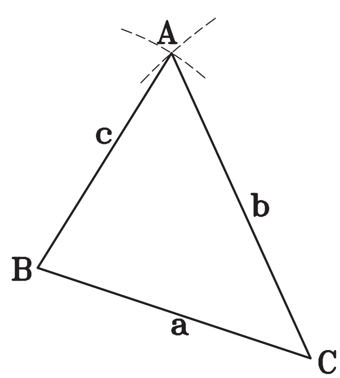
الف) داشتن سه ضلع : برای ترسیم مثلثی با داشتن سه ضلع مراحل زیر می‌باید طی شود :

۱ــ ترسیم خطی به طول یکی از اضلاع معلوم

۲ــ ترسیم قوسی به شعاع یکی دیگر از سه ضلع و به مرکز یک سر پاره‌خط ضلع اول

۳ــ ترسیم قوسی دیگر به شعاع طول ضلع سوم و به مرکز سر دیگر پاره‌خط ضلع اول

۴ــ اتصال نقطهٔ تقاطع دو قوس به دوسر پاره‌خط یعنی ضلع اول (مطابق شکل ۱۹ــ۱).



شکل ۱۹ــ۱

تمرین : مثلثی به اضلاع ۳۴، ۵۳ و ۴۱ میلی‌متر را رسم کنید.

توجه داشته باشید که ترسیم خوب یعنی ترسیمی صحیح با حداکثر دقت، نظافت و سرعت.

ب) داشتن دو زاویه و ضلع بین آنها : با توجه به راه حل بالا آیا می‌توانید از طریق داشتن دو زاویه و ضلع بین مثلث را ترسیم کنید؟

ترسیم چنین مثلثی نیز آسان است. ابتدا خطی به طول ضلع معلوم می‌کشیم، هریک از دوسر ضلع را رأس یکی از زوایای معلوم قرار داده و زاویه را ترسیم می کنیم. محل تقاطع دو ضلع زاویه‌ها رأس سوم مثلث را می‌سازد.

تمرین : در یک مثلث متساوی‌الساقین ضلع قاعده ۶سانتی‌متر و زاویهٔ رأس ۳۰درجه است، مثلث را ترسیم کنید. چگونه عمل می‌کنید؟

سه ضلع مثلث را نداریم. بنابراین باید از طریق دو زاویه و ضلع بین عمل کنیم.

آیا دو زاویهٔ بین دوساق و قاعدهٔ مثلث را داریم؟

آیا می‌شود این دو زاویه را پیدا کرد؟

دقت کنید که چگونه می‌توانیم با استفاده از قضایایی که دربارهٔ مثلث می‌دانیم به اندازهٔ دو زاویه پی‌ببریم.

الف) مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

ب) در مثلث متساوی‌الساقین زوایای بین قاعده و هریک از دو ساق باهم برابرند.

پس ۱۵۰=۳۰−۱۸۰مجموع دو زاویه

۷۵=۲ : ۱۵۰ اندازهٔ هریک از دو زاویه

حال دو زاویه و ضلع بین دو زاویهٔ مثلث را داریم و مثلث قابل ترسیم است.

ج) داشتن دو ضلع و زاویه بین آنها : به‌نظر می‌رسد ترسیم مثلثی با داشتن دو ضلع و زاویهٔ معلوم بین دو ضلع بسیار ساده باشد. آن را با طول اضلاع دلخواه و زاویه دلخواه رسم کنید.

تمرین : مثلثی رسم کنید که یک زاویه آن ۴۵ درجه، یکی از اضلاع مجاور به این زاویه ۳۲ میلی‌متر و ضلع دیگر مجاور به این زاویه ۴۸ میلی‌متر باشد.

تمرین منزل

مثلث‌های زیر را ترسیم کنید :

یک مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع ۳/۵ سانتی‌متر

یک مثلث متساوی‌الساقین با طول ساق ۶/۲ سانتی‌متر و زاویهٔ بین دو ساق ۶۰

یک مثلث متساوی‌الساقین با طول ساق ۶ و زاویهٔ بین قاعده و ساق ۳۰

یک مثلث قائم‌الزاویه با طول وتر ۵ و یک زاویهٔ ۴۰ درجه

یک مثلث قائم‌الزاویه با طول ضلع ۳/۵ و یک ضلع ۴/۴

یک مثلث قائم‌الزاویه با طول وتر ۵ و یک ضلع ۴

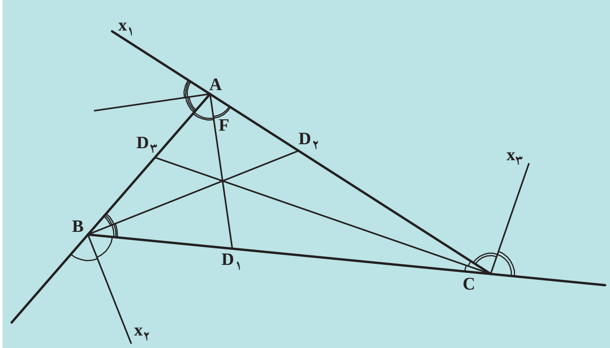
خطوط اصلی و مهم در مثلث

یادآوری

نیمساز

پاره‌خطی که زوایای داخلی هر مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، نیمساز داخلی مثلث می‌نامند.

همچنین خط‌هایی که زوایای خارجی هر مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، نیمساز خارجی مثلث نامیده می‌شود (شکل ۲۰ــ۱).



شکل ۲۰ــ۱

تحقیق کنید زاویه بین نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس مثلث چند درجه است؟

تمرین

۱ــ از مثلث ABC اطلاعات زیر را داریم :

زاویهٔ A ۶۰ درجه طول ضلع AB ۴ سانتی‌متر و طول نیمساز زاویهٔ ۳A سانتی‌متر. آیا می‌توانیم مثلث را ترسیم کنیم؟ چگونه؟ آن را رسم کنید.

۲ــ مثلثی رسم کنید که اضلاع آن ۲۳ و ۳۴ و ۴۵ میلی‌متر باشد. نیمسازهای زوایای داخلی آن را ترسیم کنید. آیا نیمسازها یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند؟

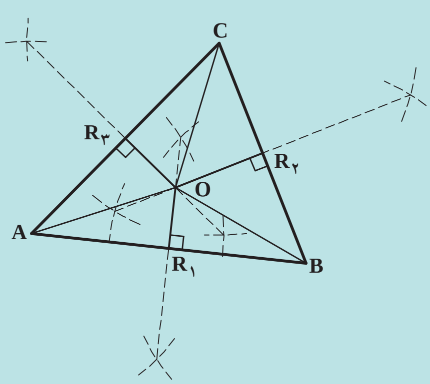
اگر چنین نیست یک بار دیگر با دقت بیشتری آن را انجام دهید. زیرا :

نیمسازهای داخلی یک مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند یا هم رسند.

عمودمنصف

یادآوری

عمودمنصف هر ضلع مثلث، خطی است که از وسط ضلع می‌گذرد و بر آن عمود است (شکل ۲۱ــ۱۰).



شکل ۲۱ــ۱

تمرین : یک مثلث رسم کنید. عمودمنصف‌های هر ضلع را ترسیم نمایید.

آیا عمودمنصف‌ها یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند؟

اگر صحیح و دقیق ترسیم کرده باشید. هرسه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. زیرا :

سه عمودمنصف اضلاع مثلث هم رسند.

فاصله نقطه O محل تقاطع عمودمنصف‌ها را تا رأس‌های مثلث اندازه بگیرید. آیا باهم مساویند؟

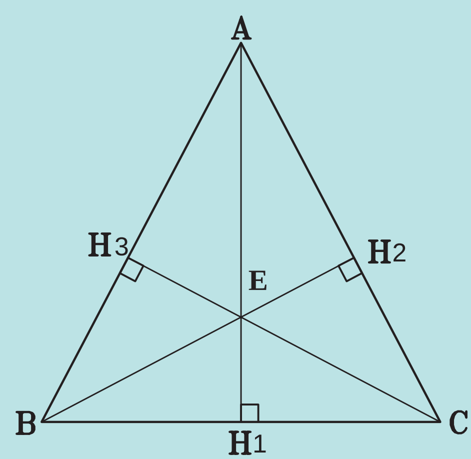
می‌توانید به مرکز O و شعاع AO یک دایره رسم کنید. آیا این دایره از دو رأس دیگر مثلث گذشته است؟

تمرین : عمودمنصف‌های یک مثلث قائم‌الزاویه را ترسیم کنید و مشابه تمرین بالا عمل کنید.

ارتفاع

یادآوری

ارتفاع‌های مثلث : ارتفاع هر ضلع مثلث پاره‌خطی است عمود بر آن ضلع، که یک سر آن پای عمود و سر دیگر آن رأس مقابل به آن ضلع است. در شکل ۲۲ــ۱ ، AH_1 ، BH_2، CH_3 سه ارتفاع مثلث ABC است.



شکل ۲۲ــ۱

تمرین : مثلثی با اندازه‌های دلخواه رسم کنید. ارتفاع اضلاع آن را با دقت ترسیم کنید. آیا سه ارتفاع یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند؟

این نقطه در داخل مثلث است یا در خارج آن؟

در رابطه با ارتفاع‌های مثلث توجه کنید.

ارتفاع‌های یک مثلث هم رسند.

می‌توانید مثلثی رسم کنید که نقطه تقاطع ارتفاع‌های آن در خارج مثلث باشد؟

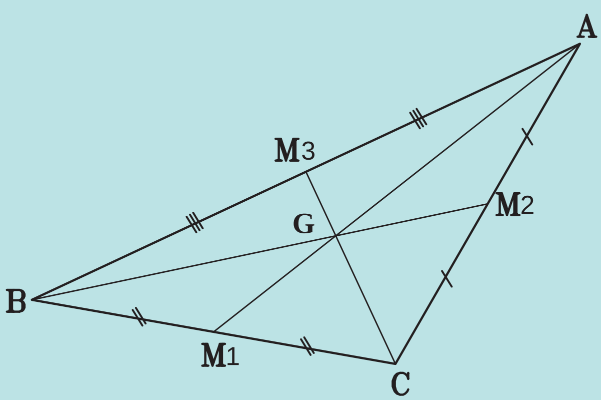
چه نوع مثلثی است که نقطه تقاطع ارتفاع‌های آن بر یک رأس آن واقع شده است؟

میانه

یادآوری

میانه مثلث پاره‌خطی است که یک سر آن رأس و سر دیگر آن وسط ضلع مقابل به آن رأس باشد.

در شکل ۲۳ــ۱ اگر نقاط M_1 ، M_2 و M_3 به ترتیب در وسط اضلاع BC ، AC و AB باشند، پاره‌خط‌های AM_1 و BM_2 و CM_3 سه میانه مثلث ABC هستند.



شکل ۲۳ــ۱

مثلثی با ابعاد دلخواه رسم کنید.

با تقسیم هر ضلعِ آن به دو قسمت مساوی، وسط هر ضلع را به دست آورید.

آن‌گاه میانه‌های مثلث را ترسیم کنید.

با دقتی که در ترسیم داشته‌اید حتماً میانه‌ها یکدیگر را در

یک نقطه قطع کرده‌اند. زیرا :

میانه‌ها در هر مثلث هم‌رسند، یعنی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

حال مثلث دیگری تا حدامکان بزرگ رسم کنید و میانه‌های آن را ترسیم کنید. آن‌گاه هر میانه را با روشی که در تقسیم یک خط آموخته‌اید، به سه قسمت مساوی تقسیم کنید. به چه نتیجه‌ای رسیده‌اید؟

آیا یکی از نقاط تقسیم سه میانه نقطه تقاطع سه میانه نیست؟

حتماً چنین است. زیرا :

سه میانه هر مثلث هم‌رسند. نقطه همرس، هر میانه را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، در شکل ۲۳ــ۱ سه میانه مثلث ABC در نقطه G هم‌رسند و $AG=۲GM$، $BG=۲GM_۱$ و $CG=۲GM_۲$ است.

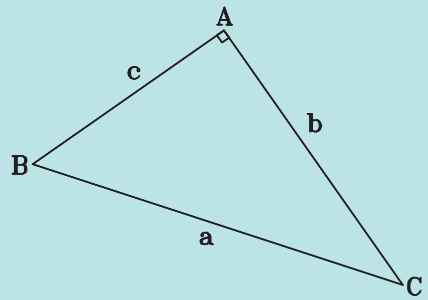
تمرین : می‌خواهیم مثلث ABC را ترسیم کنیم اما اطلاعات ما از این مثلث عبارت است از :

AB ۴۳ میلی‌متر، AC ۳۴ میلی‌متر و میانه ضلع AB یعنی AM ۲۸ میلی‌متر، آیا می‌توانیم مثلث را ترسیم کنیم؟ کمی فکر کنید و آن را ترسیم کنید.

برخی از ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه

یادآوری

قضیه فیثاغورث : در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر با مجموع مربع دو ضلع برابر است. در شکل ۲۴ــ۱ مثلث ABC قائم‌الزاویه است. بنابراین $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ است.



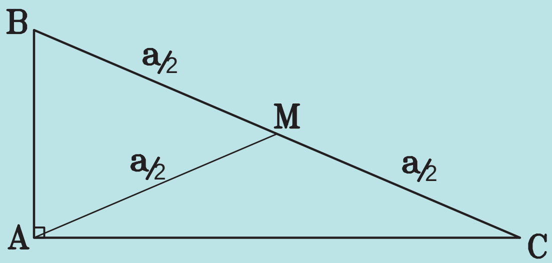
شکل ۲۴ــ۱

تمرین : مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یکی از اضلاع آن ۳ و ضلع دیگر آن ۴ سانتی‌متر باشد. ترسیم را با دقت انجام دهید بعد از ترسیم وتر آن را اندازه بگیرید. آیا قضیه فیثاغورث در مورد آن صدق می‌کند؟ می‌توانید بدون اندازه‌گیری ارتفاع وارد بر وتر آن را اندازه بگیرید؟ از مساحت مثلث قائم‌الزاویه کمک بگیرید.

یادآوری

در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

در شکل ۲۵ــ۱ $\overline{AM}$ میانه وارد بر وتر $\overline{BC}$ است. بنابراین $AM=\frac{BC}{۲}$ و یا $AM=BM=CM$ است.



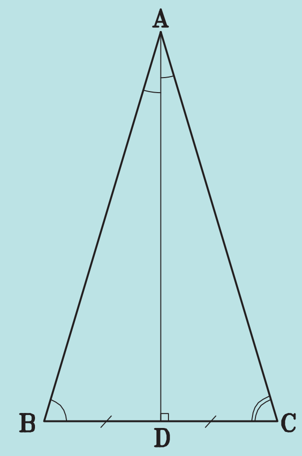
شکل ۲۵ــ۱

تمرین : مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر آن ۴ سانتی‌متر و یکی از اضلاع آن ۲ سانتی‌متر باشد.

برخی از ویژگی مثلث متساوی‌الساقین

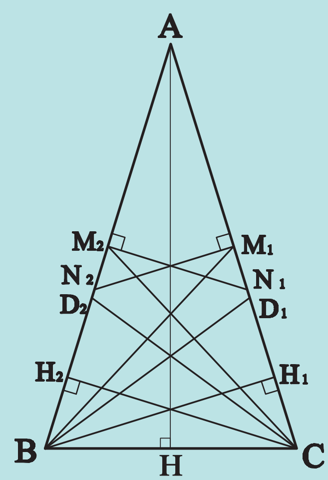
یادآوری

در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه رأس، ارتفاع و میانه وارد بر قاعده و عمودمنصف قاعده برهم منطبق‌اند. در شکل ۲۶ــ۱، $\angle B=\angle C$ و $\overline{AD}$ نیمساز زاویه رأس است. بنابراین AD ارتفاع و میانه وارد بر قاعده و همچنین عمودمنصف قاعده است.



شکل ۲۶ــ۱

در مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ نیمسازهای دو زاویه مجاور به قاعده باهم، اندازه ارتفاع‌ها و میانه‌های وارد بر ساق‌ها باهم، و اندازه عمودمنصف‌های دوساق که بین دو ساق محصور است باهم، برابرند (شکل ۲۷ــ۱).



شکل ۲۷ــ۱

تمرین : از یک مثلث متساوی‌الساقین طول قاعده و ارتفاع وارد بر ساق را داریم. آیا مثلث قابل ترسیم است؟ اگر قاعده آن ۵ و ارتفاع وارد بر ساق ۴ سانتی‌متر باشد مثلث را ترسیم کرده و ارتفاع، نیمساز، میانه و عمودمنصف آن را ترسیم کنید.

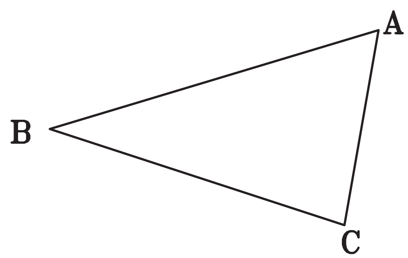
تمرین منزل

۱ــ چند مثلث قائم‌الزاویه می‌توان رسم کرد. که یکی از سه ضلع آن دو برابر ضلع دیگر باشد. یکی را با ابعاد دلخواه رسم کنید.

۲ــ در شکل ۲۸ــ۱ ضلع BC و همچنین نقطه O همرسی سه میانه از مثلث ABC مشخص است، رأس A از مثلث را مشخص کنید.

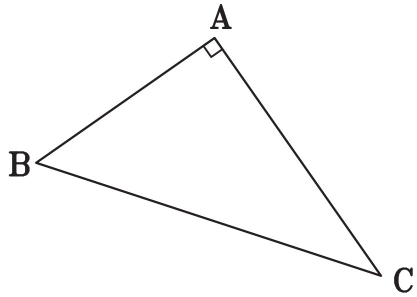
شکل ۲۸ــ۱

۳ــ در شکل ۲۹ــ۱ مثلث ABC را به چهار مثلث طوری تقسیم کنید که رأس A در آنها مشترک و مساحت چهار مثلث برابر باشد.



شکل ۲۹ــ۱

۴ــ در شکل زیر در مثلث قائم‌الزاویه ABC با رسم ارتفاع AH، سه مثلث قائم‌الزاویه متشابه ایجاد می‌شود. آن سه مثلث را مشخص کنید و تناسب بین اضلاع آنها را بنویسید.



شکل ۳۰ــ۱

فصل دوم

تقارن

هدف‌های رفتاری : پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :

۱ــ با به کارگیری مفهوم تقارن قرینهٔ اشکال را نسبت به محور تقارن تعیین شده رسم نماید.

۲ــ با استفاده از مفهوم تقارن مرکزی قرینه هر شکلی را نسبت به مرکز تقارن تعیین شده رسم نماید.

۳ــ با تشخیص تقارن در اشکال مختلف، مرکز یا محورهای تقارن آنها را مشخص سازد.

تقارن

در طبیعت به کرات با شکل‌هایی مواجه شده‌ایم که به‌نظر می‌رسد می‌توانند به دو شکل کاملاً مساوی و مشابه هم تقسیم شوند. این موضوع در شکل بسیاری از پدیده‌های مادی دیده می‌شود. به تصاویر زیر نگاه کنید. آیا این مفهوم را می‌توانید در آنها پیدا کنید؟

شکل ۱ــ۲

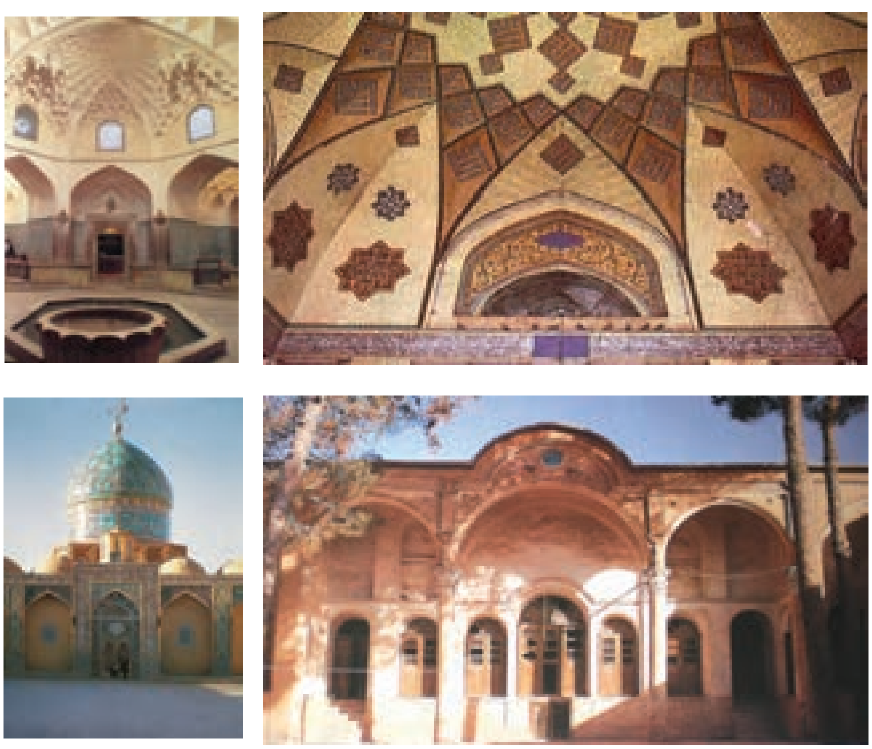
خطی که شکل را به دو بخش مشابه هم یا مساوی تقسیم می‌کند **محور تقارن** آن نامیده می‌شود.

آیا می‌توانید محور تقارن تصاویر صفحهٔ قبل را مشخص کنید؟

یک شکل می‌تواند چند محور تقارن داشته باشد. در شکل **۲ــ۲** چند محور تقارن تشخیص می‌دهید؟

شکل ۲ــ۲

تقارن در پدیده‌های طبیعی در مقیاس‌های خرد و کلان، بسیار دیده می‌شود. انسان نیز که آموزه‌های اصلی و مهم خود را از طبیعت و به عبارت دقیق‌تر از خداوند، خالق حکیم عالم می‌گیرد در مصنوعات ساخت خود از تقارن بهره زیادی برده است. تقارن یکی از آسان‌ترین راه‌ها برای ایجاد ایستایی در احجام است همچنان که یکی از راه‌های ساده ایجاد تعادل بصری در شکل و فرم است. از آن‌رو در عرصه هنر از جمله در معماری بسیار دیده می‌شود.



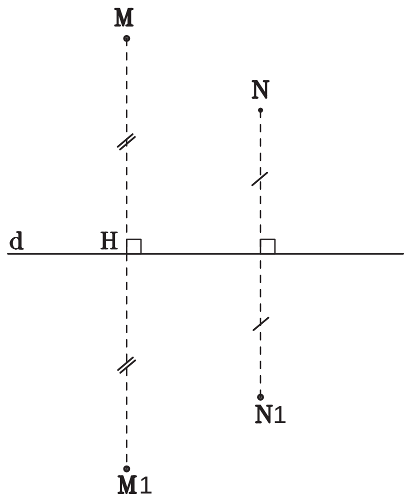
شکل ۳ــ۲

درک مفهوم تقارن برای کسی که با طراحی و ترسیم نقشه‌های معماری سروکار دارد لازم و مهم است. حال به قضایایی مربوط به تقارن توجه کنید :

تقارن محوری

خط d و نقطه M از یک صفحه در شکل ۴ــ۲ مفروض است. اگر از نقطه M عمود MH را به خط d رسم کنیم و به اندازه خودش ($MH=M_1H$) امتداد دهیم تا نقطه M_1 به دست آید، نقطه را قرینه محوری نقطه M_1 نسبت به محور d می‌نامند.

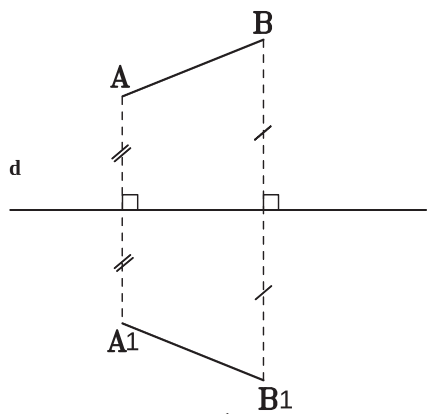
این تقارن را تقارن محوری و خط d را محور تقارن می‌نامند.



شکل ۴ ــ ۲

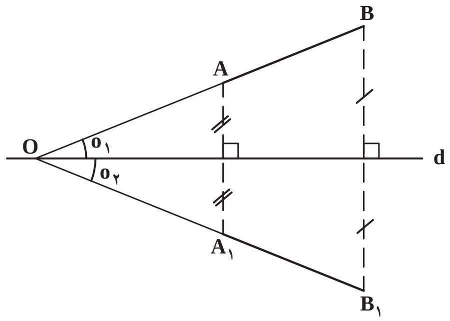
تحقیق کنید N_1 قرینهٔ محوری نقطه N هست یا خیر؟

قرینه محوری هر پاره‌خط، با آن پاره‌خط برابر است. در شکل ۵ ــ ۲ $\overline{A_1B_1}$ قرینه $\overline{AB}$ نسبت به محور تقارن d است. بنابراین $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$ است.



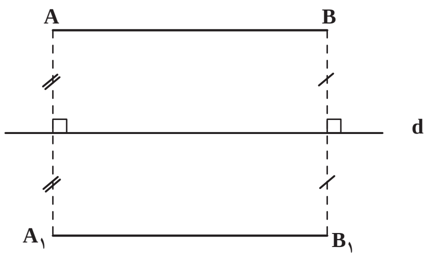
شکل ۵ ــ ۲

هر خط غیرموازی با محور تقارن، و قرینه آن، با آن محور هم‌رسند و با محور تقارن زاویه‌های مساوی ایجاد می‌کنند. در شکل ۶ــ۲ $\overline{A_1B_1}$ قرینه $\overline{AB}$ نسبت به محور تقارن d است. اگر این دو خط را امتداد دهیم، در نقطه O واقع بر محور تقارن، هم‌رسند و $\angle O_1=\angle O_2$ است.



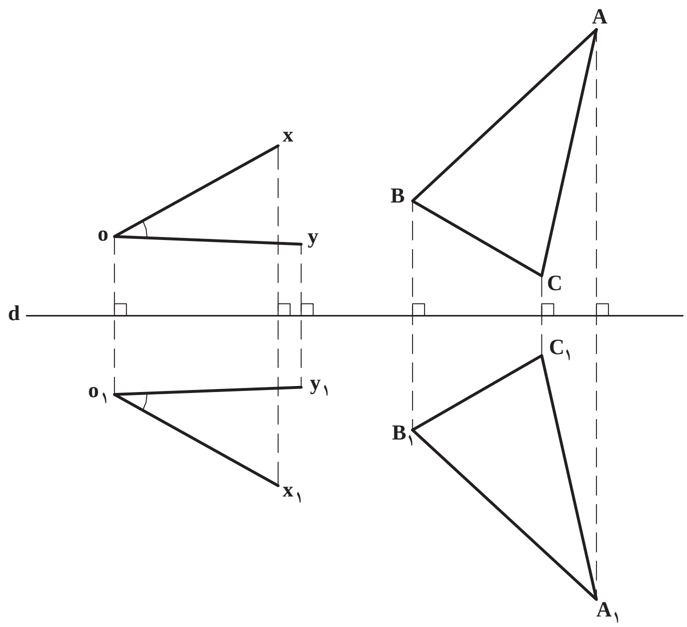
شکل ۶ ــ ۲

هر خط موازی با محور تقارن، و قرینه آن، با آن محور موازی هستند و فاصله آن دو، تا محور، برابر است. در شکل ۷ــ۲ خط A_1B_1 قرینه محوری خط AB است. چون AB موازی محور d است، بنابراین خط A_1B_1 هم، موازی آن محور است و فاصله هردو خط تا محور یکسان است.



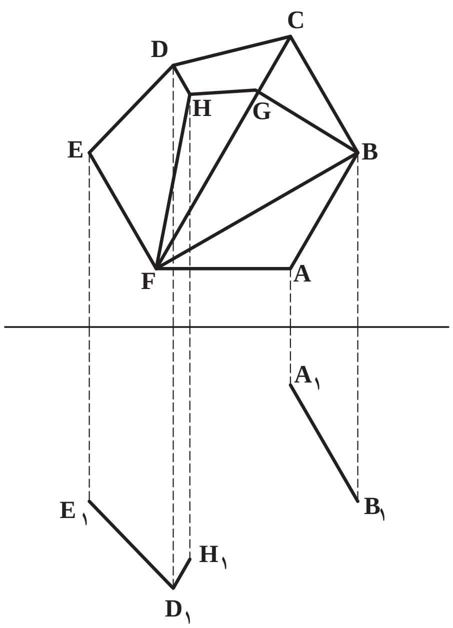
شکل ۷ ــ ۲

قرینه محوری هر شکل هندسی با خود شکل برابر است در شکل ۸ ــ ۲ قرینه محوری هر شکل نسبت به محور d رسم شده است. بنابراین $\angle O=\angle O_1$ و $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ است.

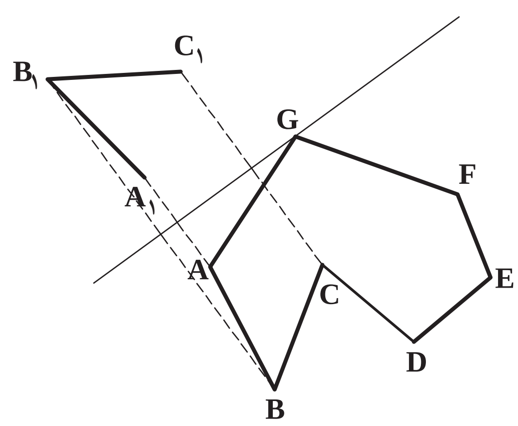


شکل ۸ــ۲

تمرین : قرینه شکل‌های زیر را نسبت به محور تقارن مشخص شده ترسیم کنید.



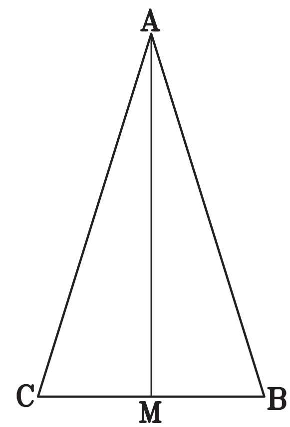
شکل ۱۰ــ۲



شکل ۹ــ۲

محور تقارن یک شکل هندسی

اگر خطی یک شکل هندسی را طوری به دو نیم تقسیم کند که هر نیمهٔ شکل، قرینه محوری نیمهٔ دیگر آن شکل نسبت به آن خط باشد، آن خط را محور تقارن آن شکل می‌نامند. در شکل ۱۱ــ۲، $\overline{AM}$ میانه وارد بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین ΔABC که نیمساز، ارتفاع و عمودمنصف هم هست، محور تقارن آن مثلث است. زیرا دو نیمهٔ آن مثلث نسبت به $\overline{AM}$ قرینه محوری هستند.



شکل ۱۱ــ۲

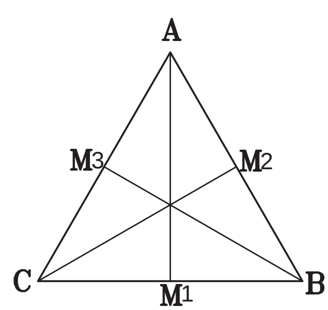
تمرین

۱ــ یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک محور تقارن آن را رسم کنید. آیا آنچه رسم کرده‌اید تنها محور تقارن آن است؟

می‌بینید که مثلث متساوی‌الاضلاع سه محور تقارن دارد. پس شکل‌هایی هست که بیش از یک محور تقارن دارد.

۲ــ یک دایره رسم کنید و محور تقارن آن را ترسیم کنید. دایره چند محور تقارن دارد؟

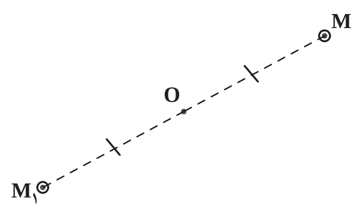
هر قطر دایره یک محور تقارن آن است. دایره بی‌نهایت قطر دارد، بنابراین دایره تنها شکلی است که بی‌نهایت محور تقارن دارد.



شکل ۱۲ــ۲

تقارن مرکزی

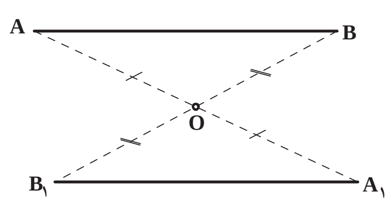
اگر از نقطه M به نقطه O وصل کنیم و به اندازه خودش (MO) امتداد دهیم تا نقطه M_1 به دست آید، در این صورت نقطه M_1 را قرینه مرکزی نقطه M نسبت به مرکز تقارن O می‌نامیم. بنابراین نقطه M هم، قرینه مرکزی نقطه M_1 نسبت به مرکز تقارن O است (شکل ۱۳ــ۲). این تقارن را تقارن مرکزی می‌نامند.



شکل ۱۳ــ۲

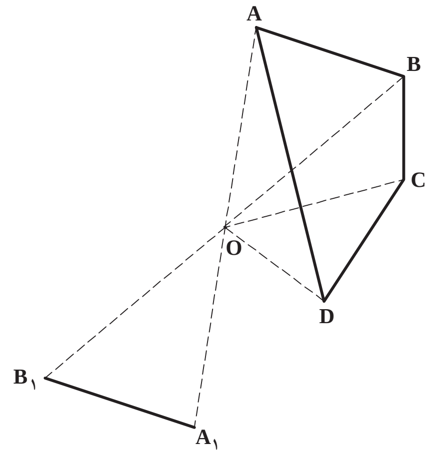
دانستید که اگر یک نقطه را به مرکز تقارن وصل کرده و به اندازه خودش امتداد دهیم قرینه نقطه به دست می‌آید. هر شکلی از تعدادی نقطه تشکیل شده است. بنابراین اگر این عمل را در مورد هر نقطه یک شکل تکرار کنیم قرینه شکل نسبت به مرکز تقارن حاصل می‌شود.

قرینه مرکزی هر پاره‌خط، پاره‌خطی است مساوی و موازی با آن پاره‌خط. در شکل ۱۴ــ۲ $\overline{A_1B_1}$ قرینه $\overline{AB}$ نسبت به مرکز تقارن O است که باهم مساوی و موازی هستند.



شکل ۱۴ــ۲

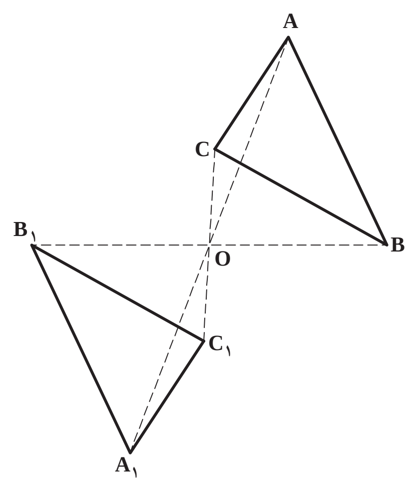
تمرین : قرینه شکل ۱۵ــ۲ را نسبت به مرکز تقارن O ترسیم کنید. به شکل قرینه توجه کنید، آیا به‌نظر نمی‌رسد که با شکل اول مساوی باشد؟



شکل ۱۵ــ۲

به قضیه زیر توجه کنید :

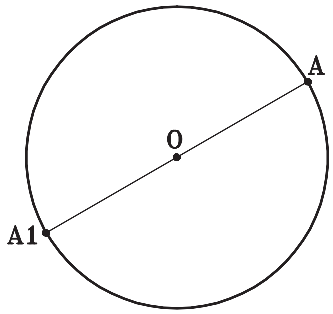
قرینه مرکزی هر شکل هندسی، با خود آن شکل هندسی برابر است. در شکل ۱۶ــ۲ قرینه مرکزی مثلث ΔABC نسبت به مرکز تقارن O، مثلث $\Delta A_1B_1C_1$ است و $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ است.



شکل ۱۶ــ۲

مرکز تقارن یک شکل هندسی

اگر قرینه هر نقطه از یک شکل هندسی نسبت به نقطه O در صفحه شکل، نقطه‌ای از خود شکل باشد. نقطه O را مرکز تقارن آن شکل هندسی می‌نامند. در شکل ۱۷ــ۲ نقطه O مرکز دایره، مرکز تقارن دایره است. زیرا قرینه هر نقطه از دایره نسبت به نقطه O، واقع بر دایره است.

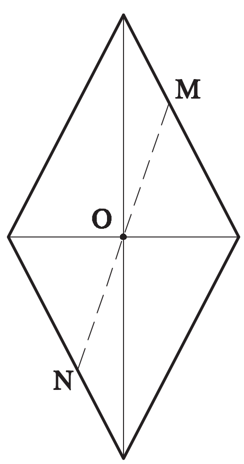


شکل ۱۷ــ۲

شکل ۱۸ــ۲ یک لوزی است که اقطار آن ترسیم شده است. مشاهده می‌کنید که اقطار لوزی محورهای تقارن آن نیز هستند. حال نقطه M را روی یکی از اضلاع آن انتخاب کنید و از آن به مرکز لوزی وصل نمایید، آن را ادامه دهید تا ضلع روبه‌روی آن را در N قطع کند، دو پاره‌خط OM و ON را اندازه بگیرید آیا باهم مساویند؟

نقطه دیگری را امتحان کنید آیا به همین نتیجه می‌رسید؟

بنابراین محل تقاطع اقطار لوزی مرکز تقارن آن هم هست.

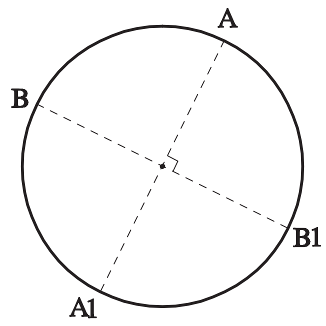


شکل ۱۸ــ۲

به قضیه زیر توجه کنید :

هر شکل هندسی که حداقل دارای دو محور تقارن عمودبرهم باشد، دارای مرکز تقارن است و محل برخورد آن دو محور، مرکز تقارن آن شکل هندسی است. در شکل ۱۹ــ۲ دایره دارای بی‌نهایت دو محور عمودبرهم است که محل برخورد آنها (مرکز دایره) مرکز تقارن آن دایره است.

از تقارن مرکزی هم مشابه تقارن محوری در معماری استفاده می‌شود (شکل ۲۰ـ۲).

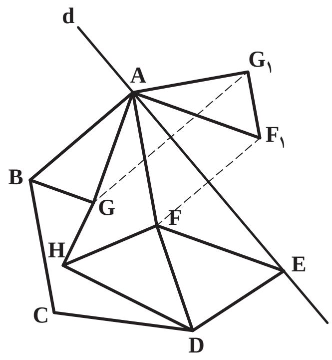


شکل ۱۹ـ۲

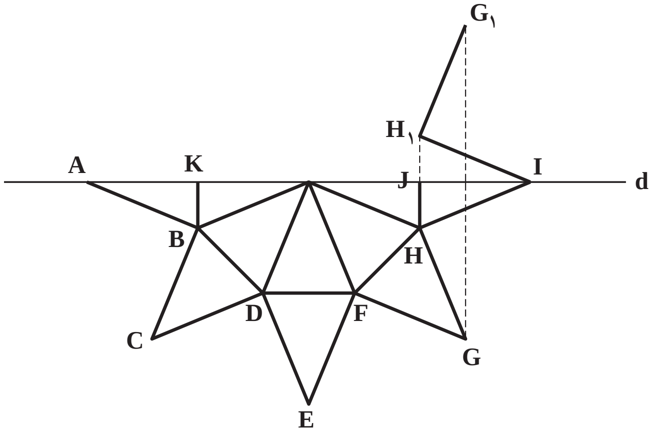
شکل ۲۰ـ۲

تمرین منزل

۱ــ قرینه هریک از شکل‌های ۲۱ــ۲ و ۲۲ــ۲ را نسبت به محور تقارن مشخص شده dتکمیل کنید.

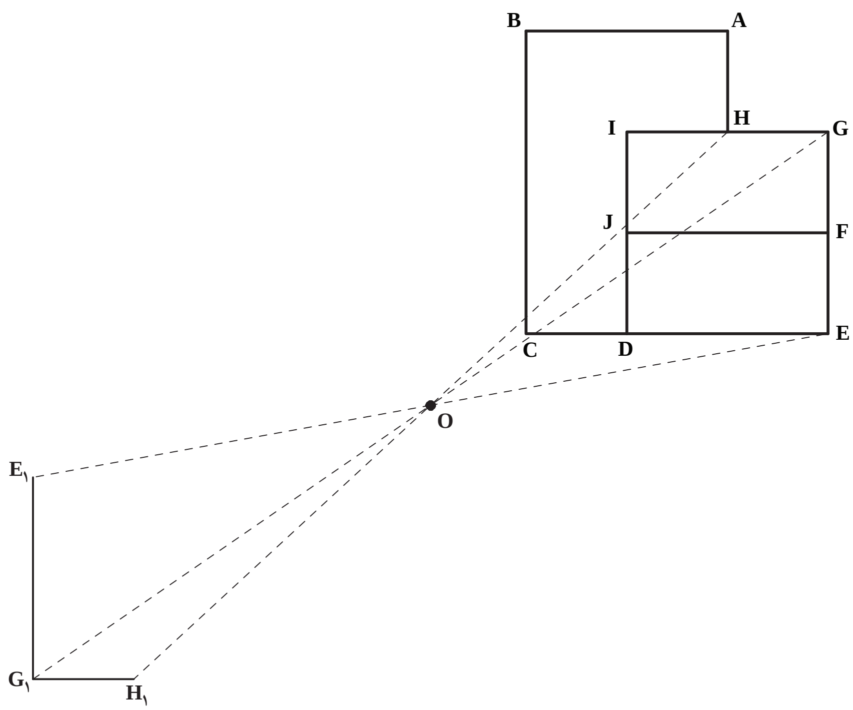


شکل ۲۲ــ۲

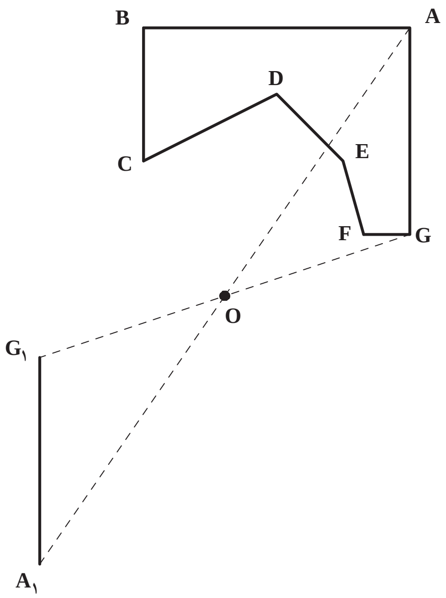


شکل ۲۱ــ۲

۲ــ قرینه هریک از شکل‌های ۲۳ــ۲ و ۲۴ــ۲ را نسبت به مرکز تقارن داده شده (O) تکمیل کنید.

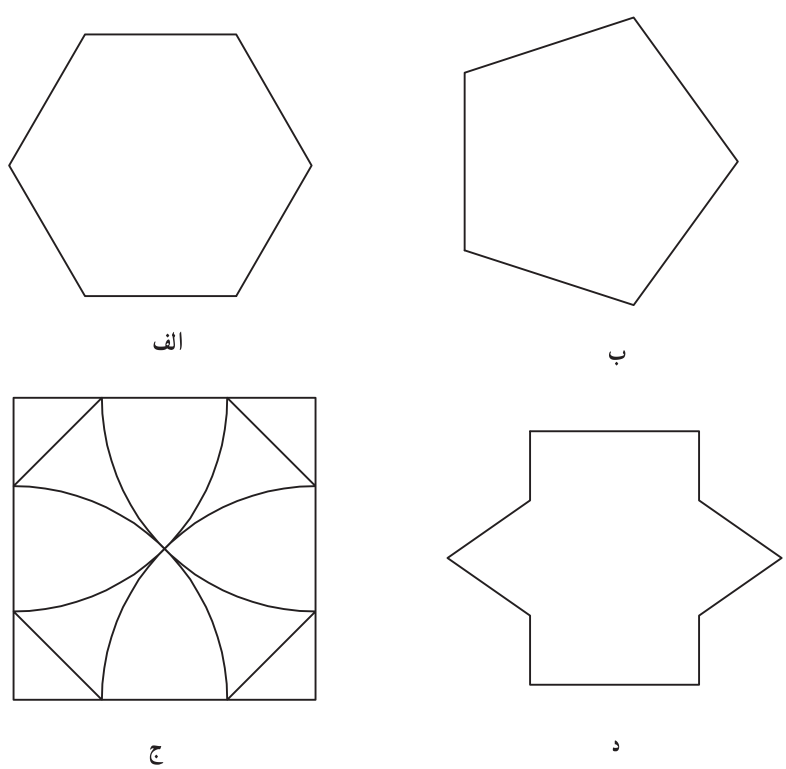


شکل ۲۳ــ۲



شکل ۲۴ـ۲

۳ـ در هریک از شکل‌های زیر مرکز یا محور تقارن آن رامشخص کنید. در صورت متعدد بودن محورهای تقارن همه را مشخص کنید.



شکل ۲۵ـ۲