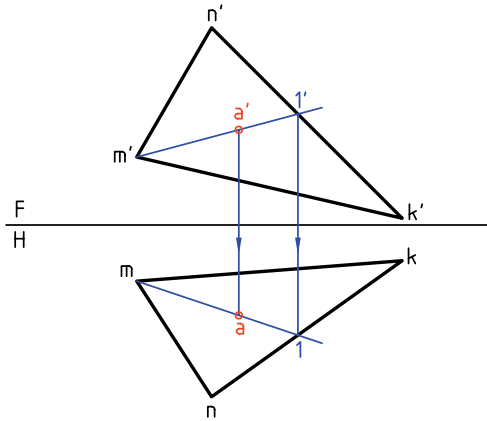


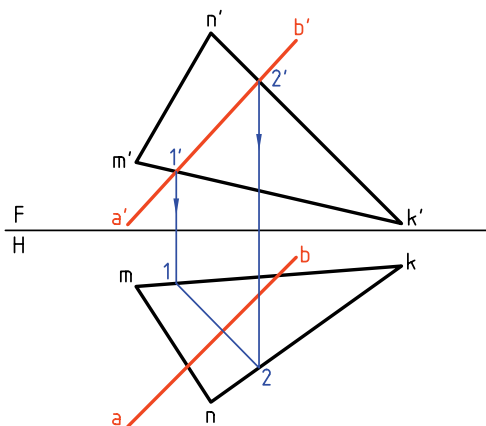
کافی است که خطی دلخواه متعلق به صفحه را از  $a'$  بگذرانیم، آن گاه تصویر افقی خط را به دست آوریم. زیرا روی آن است و با رابط به دست خواهد آمد.



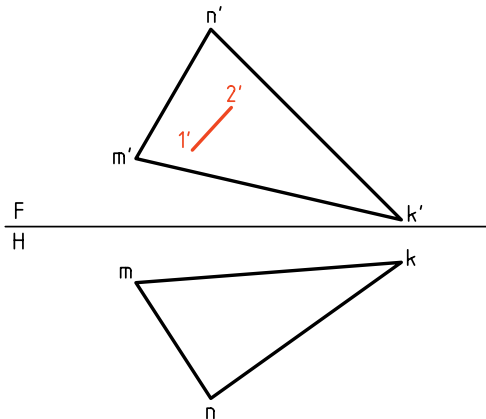
اکنون می توان مسئله ی اصلی را به روش خط کمکی حل کرد.

### اصول کار

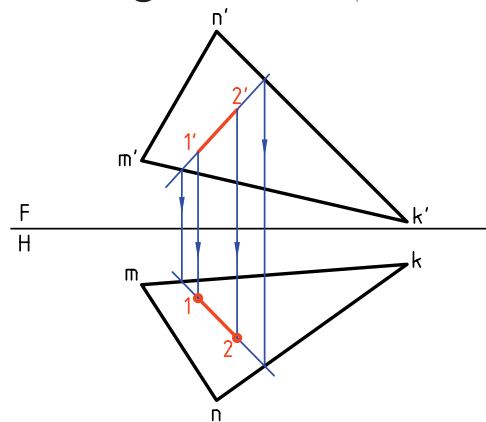
- نمای روبه روی خط را خطی از صفحه فرض می کنیم.  
 - با این فرض نمای افقی آن را به دست آوریم. اگر نمای افقی خط فرضی یعنی  $\overline{12}$  در محدوده ی مثلث با  $ab$  متقاطع باشد، خط و صفحه برخورد دارند. در شکل،  $\overline{12}$  با  $ab$  برخورد دارد.



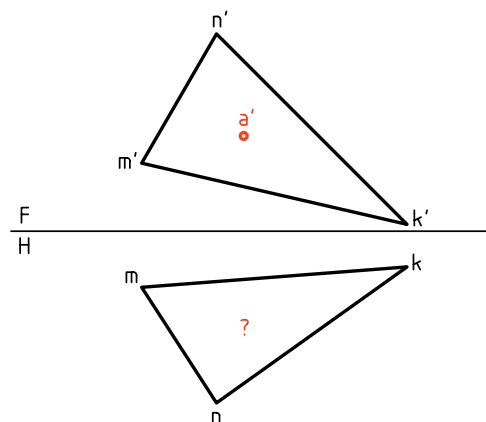
۱. نمای روبه روی یک خط از صفحه ی  $MNK$  معلوم است، نمای افقی آن را تعیین کنید.



اگر از نقطه های  $1'$  و  $2'$  رابط کنیم، به نقطه ی معینی نمی رسیم. پس ابتدا خط را از دو سمت ادامه می دهیم تا با اضلاع  $m'k'$  و  $n'k'$  برخورد کند. آن گاه از آن نقطه ها به سمت پایین رابط می کنیم. پاره خط  $\overline{12}$  پاسخ مورد نظر است.



۲. نمای روبه روی یک نقطه از صفحه ی  $MNK$  معلوم است. تصویر افقی را به دست آورید.

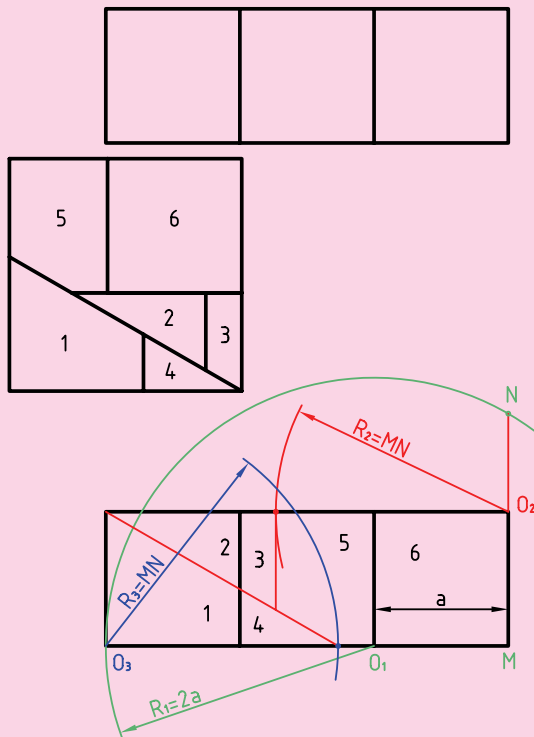


## ابوالوفا بوزجانی<sup>۱</sup>

ابوالوفا محمدبن یحیی بن اسماعیل ابن عباس بوزجانی، مشهور به حاسب (متولد ۳۲۸ هجری قمری در روستای بوزجان خراسان، وفات ۳۸۷ هجری قمری در بغداد)، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس برجسته‌ی ایرانی منشأ نوآوری‌ها و پژوهش‌های زیادی به‌ویژه در هندسه و ریاضیات و نجوم بوده است.

تقسیم و ترکیب اشکال هندسی از جمله مواردی است که ابوالوفا بوزجانی به آن علاقه‌مند بود، در قرن حاضر نیز اندیشمندان اروپایی کوشیده‌اند تا روش‌هایی ارائه نمایند که با حداقل تقسیم و ترکیب، تبدیل اشکال هندسی را انجام دهند.

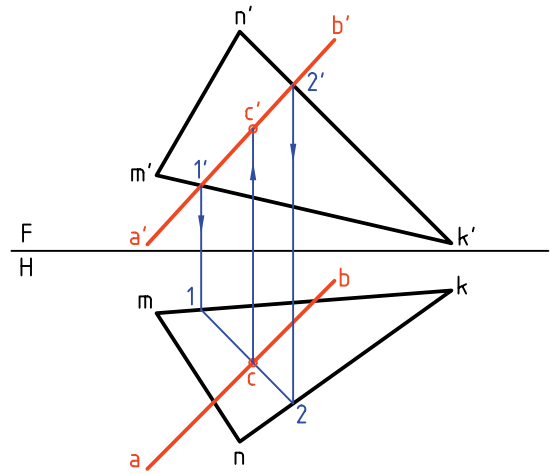
در این راه می‌توان قضیه‌ی تقسیم و تبدیل سه مربع به یک مربع مطرح‌شده از طرف بوزجانی را با حداقل شش برش نام برد.



۱. منبع: کتاب هندسه ایرانی. (ترسیم بر اساس اصول نقشه‌کشی ایزو)

– نقطه‌ی تقاطع را  $c$  می‌نامیم.

– به کمک رابط  $c'$  را در نمای روبه‌رو مشخص می‌کنیم. به این ترتیب،  $cc'$  نقطه‌ی برخورد است.



۱. می‌توان حل مسئله را از نمای افقی هم شروع کرد. اگر در همین نمونه دقت کنید، آغاز کار از نمای روبه‌رو بهتر است. آیا می‌توانید بگویید چرا؟

۲. شرط برخورد خط و صفحه، برخورد  $12$  با  $\overline{ab}$  است که باید در محدوده‌ی  $mnk$  واقع شود.

– اگر برخورد  $12$  با  $\overline{ab}$  بیرون از  $mnk$  باشد چه حالتی است؟

– اگر  $12$  با  $\overline{ab}$  موازی شود چه می‌گویید؟

– آیا ممکن است که  $12$  با  $\overline{ab}$  قرار گیرد؟ در

این مورد چه توضیحی دارید؟

# دستور کار شماره ۱

برخورد خط و صفحه را رسم کنید.



(۲۰ دقیقه)

فیلم آموزشی



مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

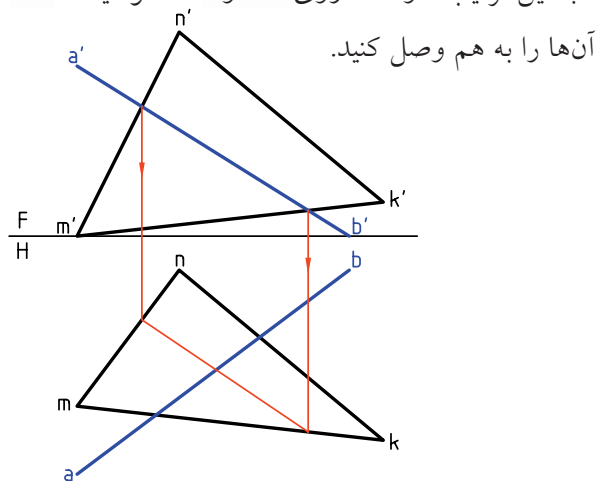
مراحل ترسیم

۱. کاغذ A4 را به صورت افقی بچسبانید.

۲. با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰، شکل را رسم کنید.

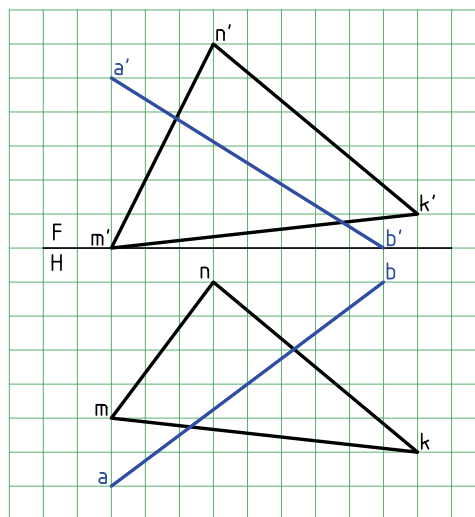
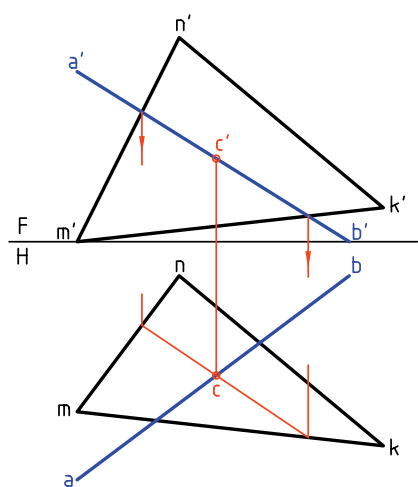
۳. آیا می‌توانید نوع خط و صفحه را تعیین کنید.

۴. به این ترتیب، دو نقطه روی  $mk$  و  $nm$  خواهید داشت.



۵. از این اتصال، نقطه‌ای در نمای افقی به دست می‌آید. آن را  $c$  بنامید.

۶. از  $c$  به نمای روبه‌رو رابط کنید.  $c'$  حاصل خواهد شد.



۷. خط را، خطی از صفحه در نظر بگیرید و از نمای روبه‌رو به سمت نمای افقی رابط کنید.

## دستور کار شماره ۲

با ترسیم برخورد خط و صفحه را نمایش دهید.



(۲۰ دقیقه)

فیلم آموزشی

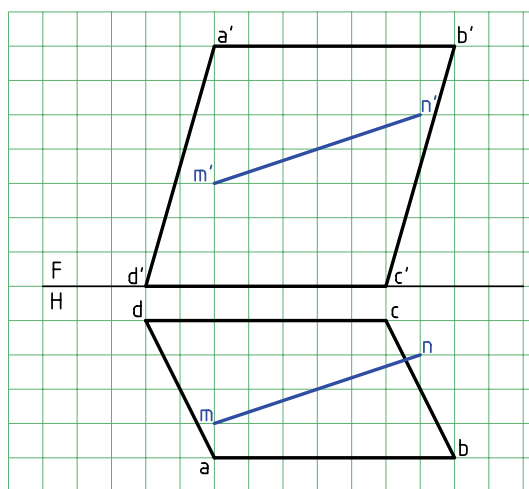
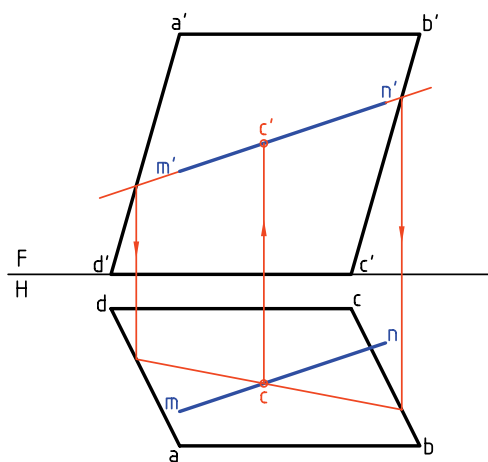


مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

### مراحل ترسیم

۲. خط  $m'n'$  را خطی از صفحه فرض کنید و نمای افقی را به دست آورید.
- $c$  را نام گذاری کنید.
- از  $c$  به سمت بالا رابط کنید.
- $c'$  را نام گذاری کنید.

۱. کاغذ  $A4$  را به صورت افقی بچسبانید.
- با در نظر گرفتن هر مربع برابر  $10$  شکل را رسم کنید.
- آیا می توانید نوع خط و صفحه را تعیین کنید؟



## دستور کار شماره‌ی ۳

برخورد خط و صفحه را رسم کنید.



(۲۵ دقیقه)

فیلم آموزشی

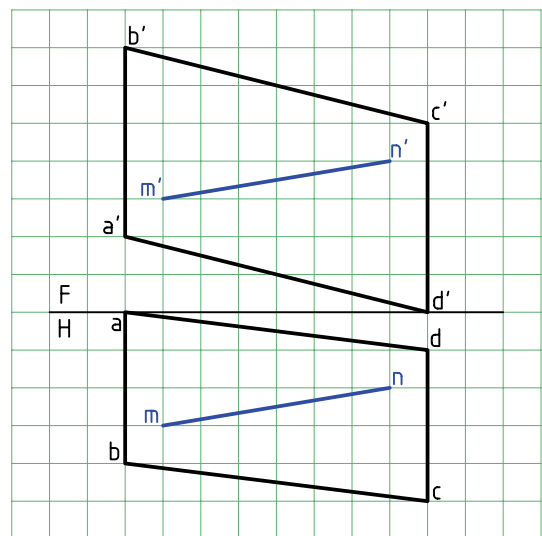
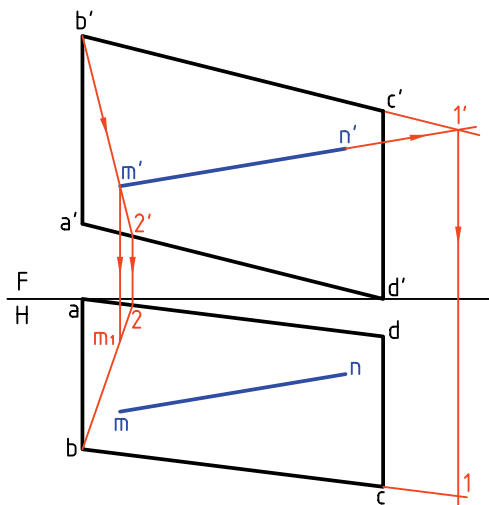


مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

### مراحل ترسیم

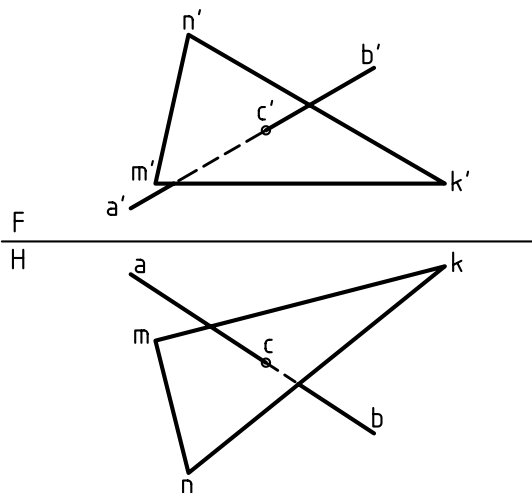
۲. به دلیل نیمرخ بودن خط‌های  $\overline{CD}$  و  $\overline{AB}$  نمی‌توان به سادگی به حل مسئله رسید. پس:  $m'n'$  را از سمت راست امتداد دهید تا به  $l'$  برسید.  $l'$  را بنویسید.

۱. کاغذ  $A4$  را به حالت افقی بچسبانید. - شکل موجود را با در نظر گرفتن هر مربع برابر  $10^\circ$  رسم کنید. - چه تفاوتی بین این مسئله و مسائل قبل حس می‌کنید؟

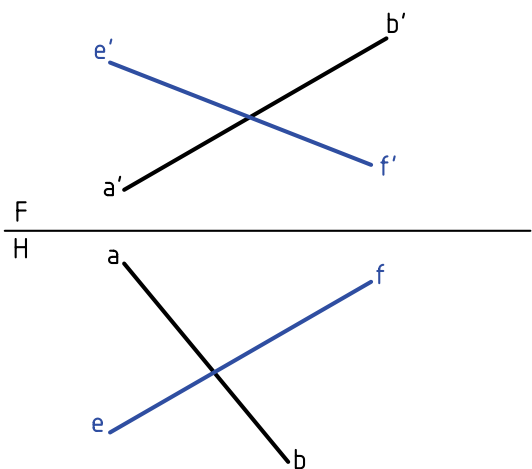


به این ترتیب در نقشه‌ای که رسم می‌شود باید تکلیف دید یا ندید بودن خط مشخص شود. اصول کار ساده است و در دو جمله خلاصه می‌شود:

در نمای روبه‌رو نقطه‌ای دیده می‌شود که بُعد بیشتر دارد.  
در نمای افقی نقطه‌ای دیده می‌شود که ارتفاع بیشتر دارد.



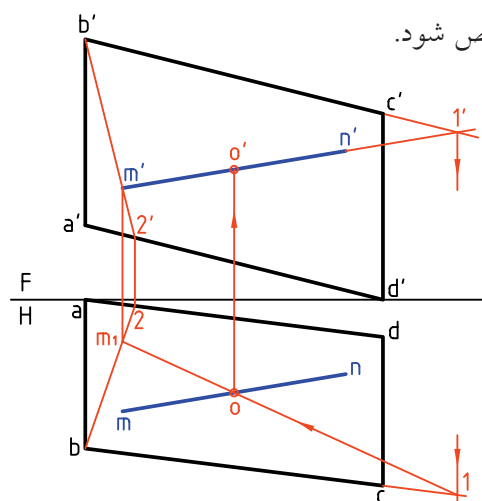
در شکل، دو خط  $EF$  و  $AB$  در نظر گرفته شده‌اند. روشن است که این دو خط برخورد ندارند. چون اگر برخورد داشته باشند باید نقطه‌ی تقاطع ظاهری در نمای روبه‌رو با نقطه‌ی تقاطع ظاهری در نمای افقی روی یک رابط قرار داشته باشند.



از  $b'$  به  $m'$  وصل کنید. ادامه دهید تا به  $2'$  برسید.  $2'$  را بنویسید.

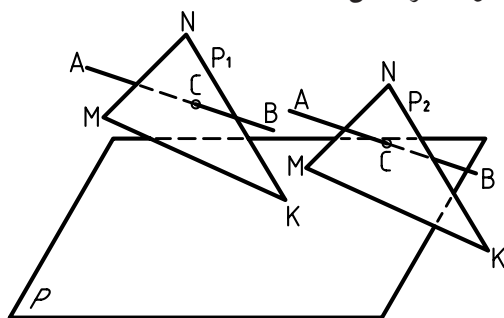
1 و 2 را در نمای افقی نام‌گذاری کنید.  
 $m_1$  را روی  $\overline{b_2}$  به دست آورید.

۳. پاره خط  $\overline{m_1 n_1}$  را در نمای افقی رسم کنید.  $\overline{m_1 n_1}$  در حقیقت تصویر  $\overline{m'n'}$  است به شرط آن که  $m'n'$  در صفحه فرض شود. از  $o$  که در نمای افقی به دست آمده، رابط کنید تا  $o'$  هم مشخص شود.



### دید و ندید کردن اصول دید و ندید

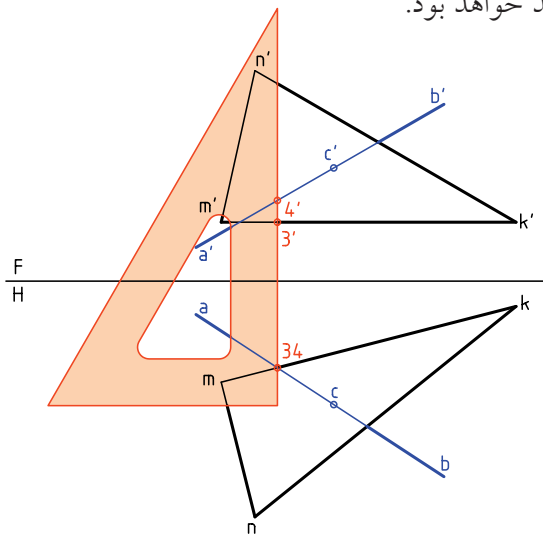
در شکل، پاره خط  $AB$  و صفحه‌ی  $MNK$  متقاطع هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، همواره قسمتی از خط در پشت صفحه مخفی است. در این حال، اگر خط در حالت دید است، وقتی به نقطه‌ی برخورد می‌رسد دیگر دیده نمی‌شود و برعکس.



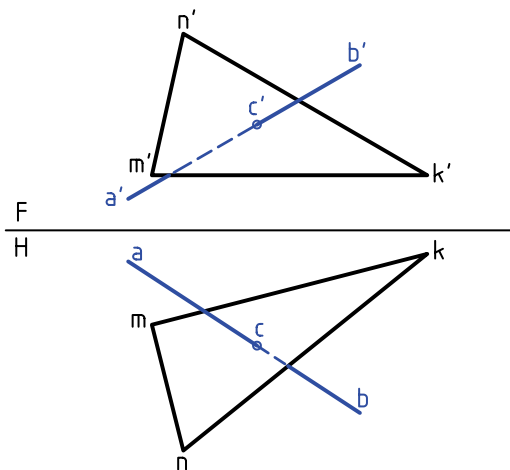


نشان می‌دهد، بُعد 1 روی  $\overline{ab}$  بیشتر از بعد 2 روی  $nk$  است. پس در نمای روبه‌رو و در نقطه‌ی فرضی،  $a'b'$  دید است که تا  $c'$  ادامه خواهد داشت.

اکنون برای تحقیق قسمت‌های دید و ندید در نمای افقی، خط‌کش را در یک نقطه‌ی برخورد ظاهری در نمای افقی قرار می‌دهیم. هر نقطه که ارتفاع بیشتر داشته باشد، دید خواهد بود.



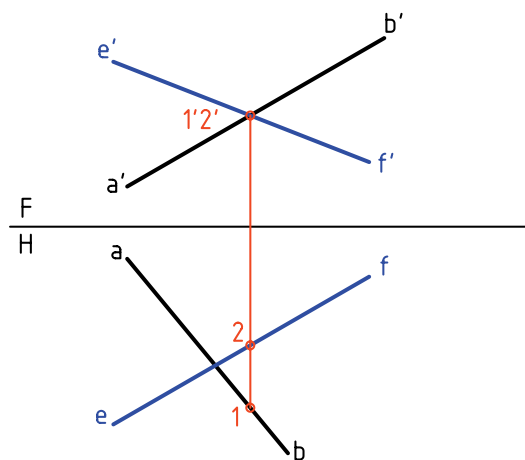
به این ترتیب، چون ارتفاع 3 روی  $mk$  از 4 روی خط کمتر است، در نمای افقی، 4 دید خواهد بود. نتیجه‌ی آن ندید بودن سمت راست خط در نمای افقی است.



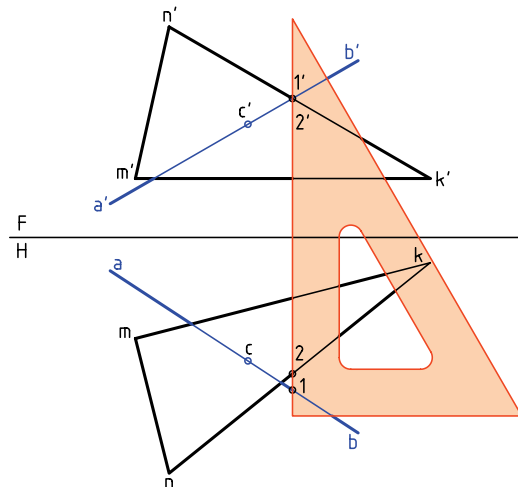
شکل کامل شده است.

دید و ندید کردن را «مرئی و مخفی» کردن هم می‌گویند (مرئی = قابل دید و نامرئی = غیرقابل دید).

فرض کنید نقطه‌ی تقاطع ظاهری در نمای روبه‌رو، برای  $a'b'$  1 و برای  $e'f'$  2 باشد. این دو نقطه را در نمای افقی تعیین می‌کنیم. پس 1 روی  $\overline{ab}$  و 2 روی  $\overline{fe}$  خواهد بود.



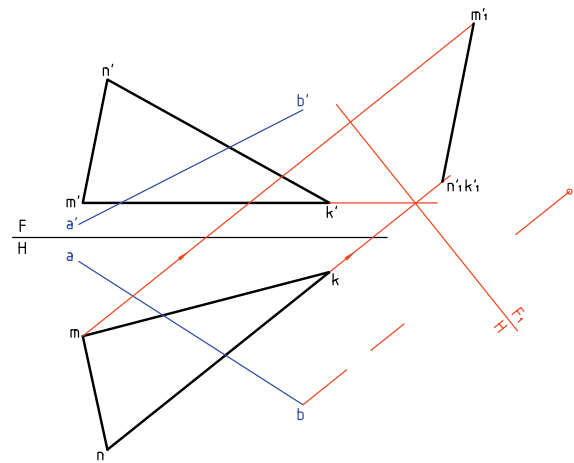
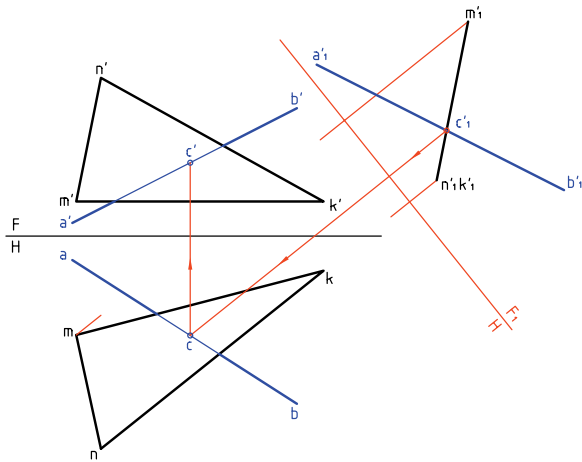
پرسش مهم: در نمای روبه‌رو نقطه‌ی 1 دیده می‌شود یا 2؟ پاسخ مشخص است، چون بُعد 1 بیشتر است، پس در نمای روبه‌رو دیده می‌شود و 2 ندید خواهد بود. اکنون می‌توان به کمک یک خط‌کش قسمت‌های دید و ندید را در شکل مشخص کرد. همان‌طور که خط‌کش



## روش تغییر صفحه در تعیین برخورد خط و صفحه

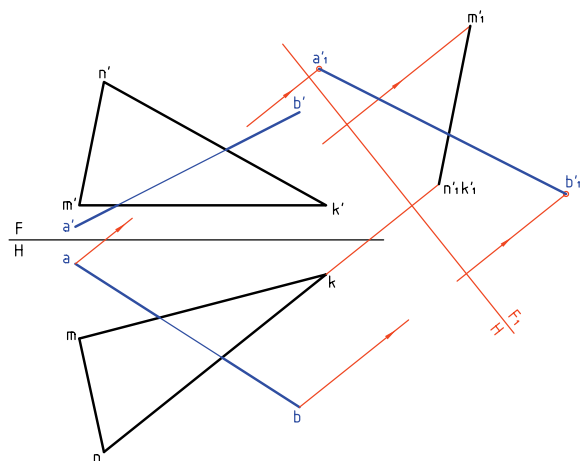
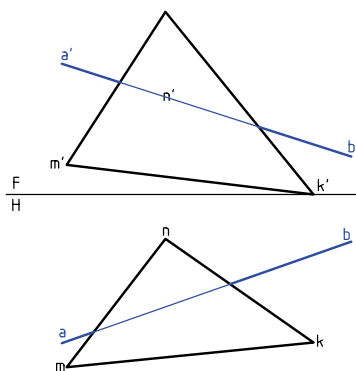
دوباره خط  $AB$  و صفحه‌ی  $MNK$  را در نظر می‌گیریم. برای حل مسئله به روش تغییر صفحه، یک تغییر صفحه‌ی افقی (یا روبه‌رو) کافی خواهد بود. در شکل خطی افقی از صفحه انتخاب و خط زمین جدید رسم شده است (خط افقی انتخابی  $\overline{MK}$  و تغییر صفحه روبه‌روست). چرا  $\overline{MK}$  افقی است؟

نقطه‌ی برخورد  $a'b'$  با سطح  $m'n'k'$  را  $c'$  می‌نامیم.  $c'$  را به کمک رابط به نماهای افقی و روبه‌رو منتقل می‌کنیم. در نتیجه  $c$  و  $c'$  به دست آمده‌اند. پس از آن، شکل را دید و ندید خواهیم کرد.



این مطلب را با حل یک مسئله‌ی نمونه‌ی دیگر به پایان می‌بریم. می‌خواهیم برخورد خط  $\overline{AB}$  را با  $MNK$  تعیین و نقشه را دید و ندید کنیم.

نسبت به این خط زمین جدید، نمای روبه‌رو را به دست می‌آوریم. همچنین نمای جدیدی برای خط  $\overline{AB}$  به نام  $a'b'$  حاصل خواهد شد.



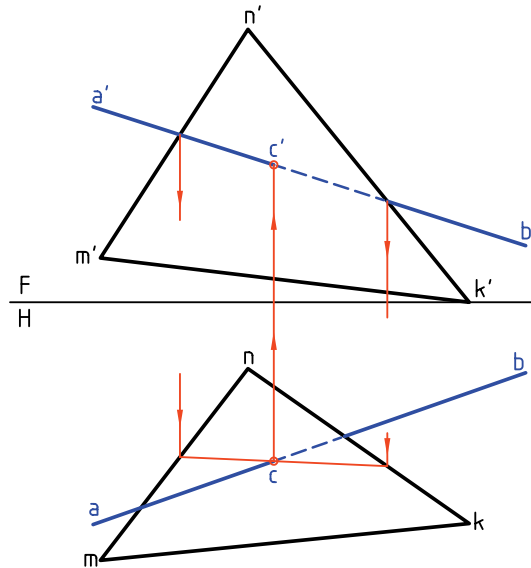


## حل به روش خط کمکی

۱. با فرض خط در صفحه‌ی مثلث تصویر افقی مشخص شد.

۲. C به دست آمد و به نمای روبه‌رو منتقل شد.

۳. دید و ندید کردیم.



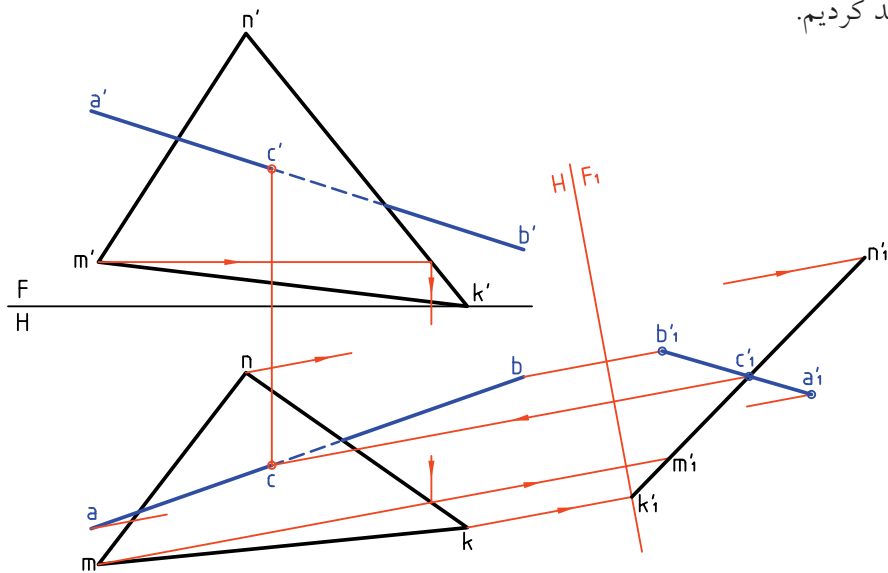
## حل به روش تغییر صفحه

۱. ابتدا خط زمین جدید یعنی  $F_1H$  طبق شرایط رسم شد (با انتخاب یک خط افقی در صفحه)

۲. نمای روبه‌روی جدید مثلث و خط رسم شد.

۳. نقطه‌ی برخورد یعنی  $c'_1$  به نمای افقی (c) و نمای روبه‌رو ( $c'$ ) منتقل شد.

۴. دید و ندید کردیم.



## دستور کار شماره ۴

برخورد خط و صفحه را دید و ندید کنید.



(۳۵ دقیقه)

فیلم آموزشی

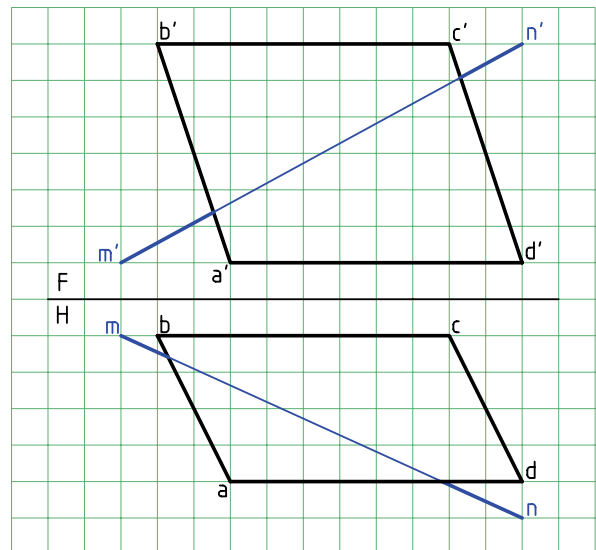
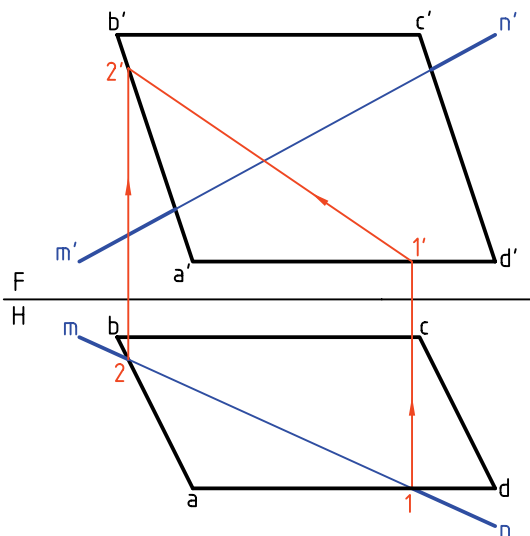


مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

### مراحل ترسیم

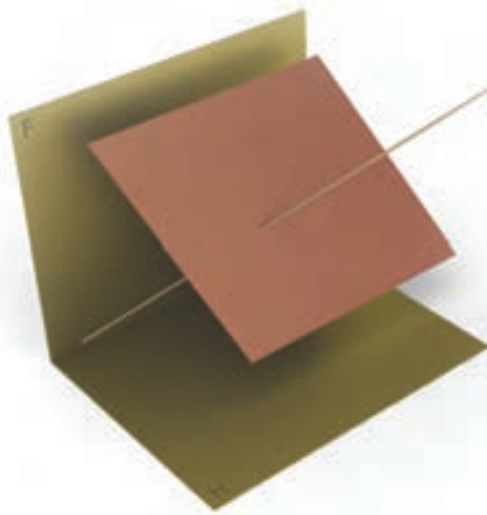
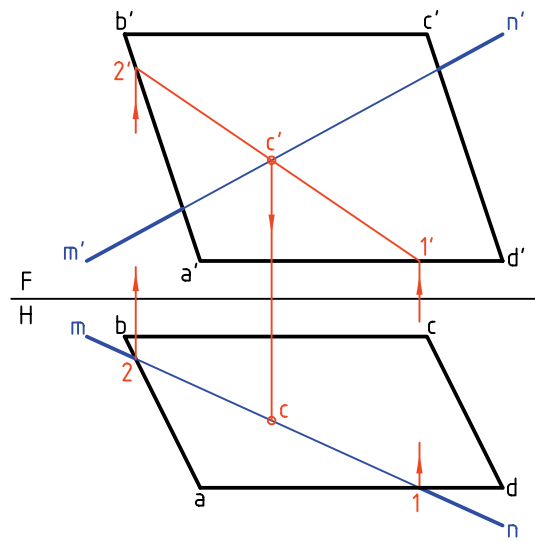
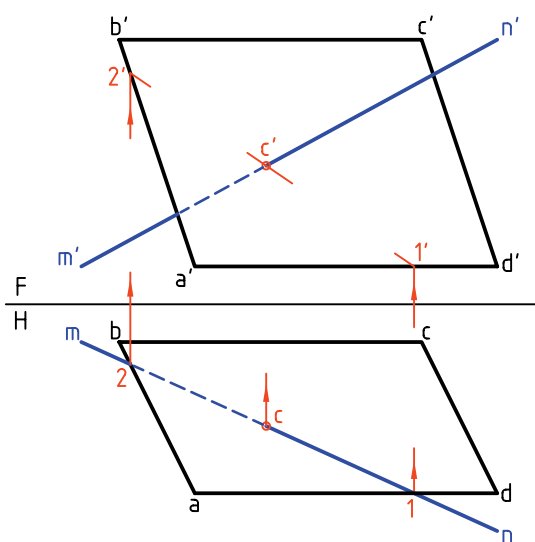
۱. کاغذ A۴ را به حالت افقی بچسبانید.  
 - با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰، شکل را رسم کنید.  
 آیا می‌توانید نوع خط و صفحه را تعیین کنید؟

۲.  $\overline{mn}$  را در نمای افقی خطی از صفحه فرض کنید.  
 - با این فرض  $1'2'$  را به دست آورید.  
 آیا می‌توانید جمله‌ی زیر را کامل کنید:  
 اگر  $\overline{mn}$  خطی از ..... ABCD باشد، ..... نمای  
 روبه‌روی آن خواهد بود.



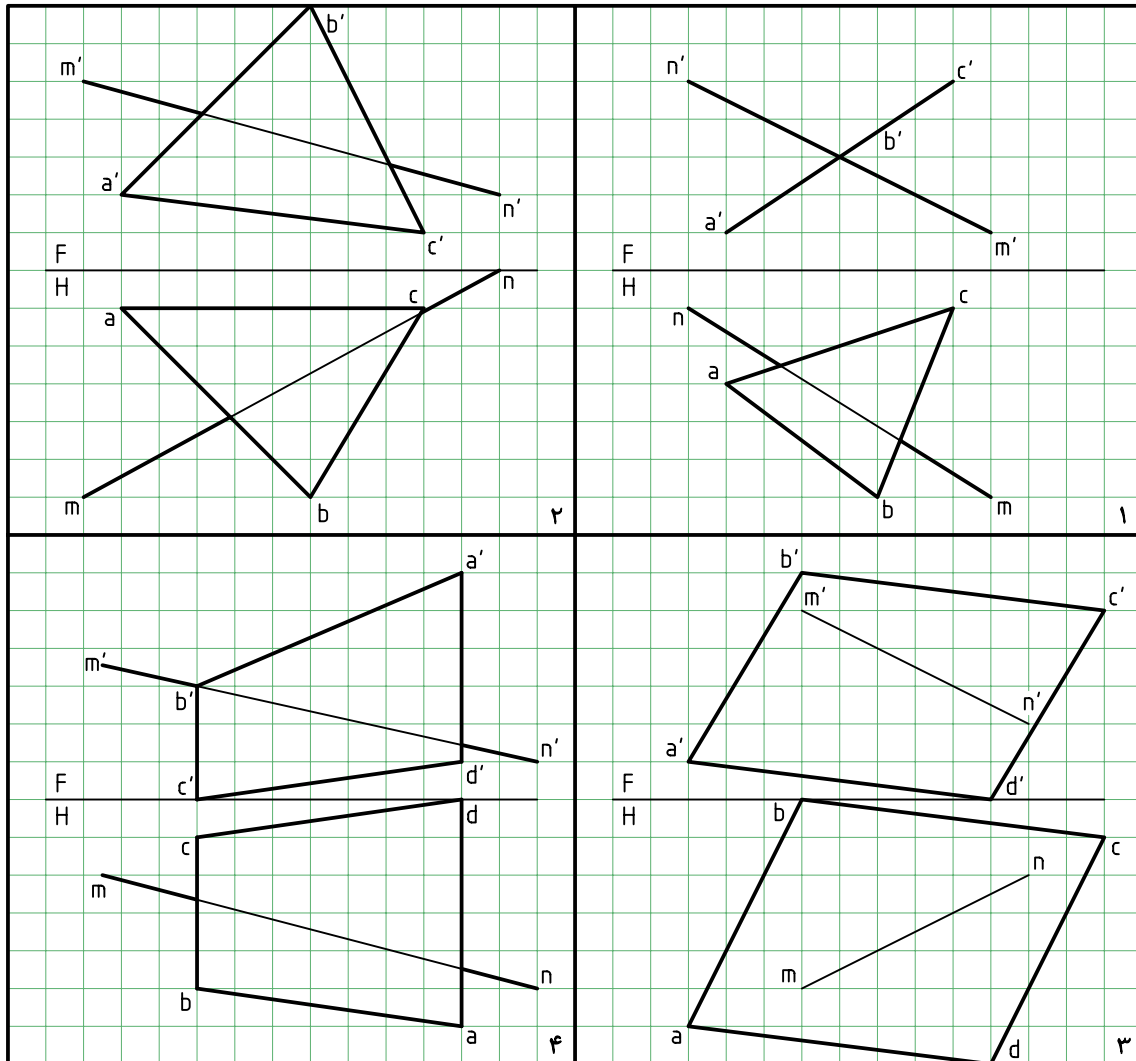
۴. به کمک خط کش (لبه‌ی گونیا)، دید یا ندید بودن قسمت‌های مختلف خط را تحقیق کنید.  
 - جدول نقشه را کامل کنید.  
 - نام نقشه را «برخورد خط غیرخاص و صفحه‌ی مواجه» بگذارید.

۳. نقطه‌ی برخورد  $l'2'$  را با  $\overline{m'n'}$  بنامید.  
 - به کمک رابط از نمای روبه‌رو،  $C$  را تعیین و نام‌گذاری کنید.



## ◀ ارزشیابی عملی

هر یک از چهار مسئله‌ی داده شده در جدول را روی یک برگ کاغذ A4 و با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰ رسم و دید و ندید کنید. پیشنهاد می‌شود که دو مسئله را به روش خط کمکی و دو مسئله را به روش تغییر صفحه حل کنید.



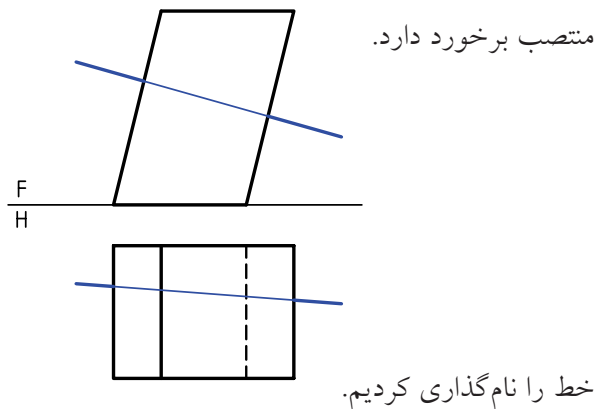
## برخورد خط با منشور

روشن‌تر، با یکی از صفحات بدنه برای ورود برخورد خواهد داشت و با یک صفحه‌ی دیگر برای خروج. پس حل مسئله‌ی برخورد خط با منشور و هرم به برخورد خط و صفحه خواهد گشت.

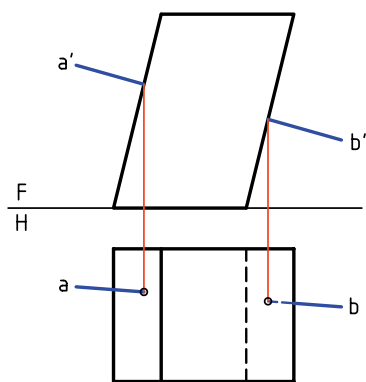
در این جا توجه به نکته‌ای خیلی مهم است و آن این که بخشی از خط که داخل جسم قرار می‌گیرد در حقیقت

بدنه‌ی منشور یا هرم در حقیقت از چند صفحه‌ی تخت تشکیل می‌شود. آن‌ها قسمتی از فضا را محدود می‌کنند. در این صورت یک خط  $\overline{AB}$  در برخورد با آن‌ها باید به این محدوده وارد شود. بنابراین یک نقطه‌ی تقاطع در ورود و یک نقطه‌ی تقاطع در خروج خواهد داشت. به عبارت

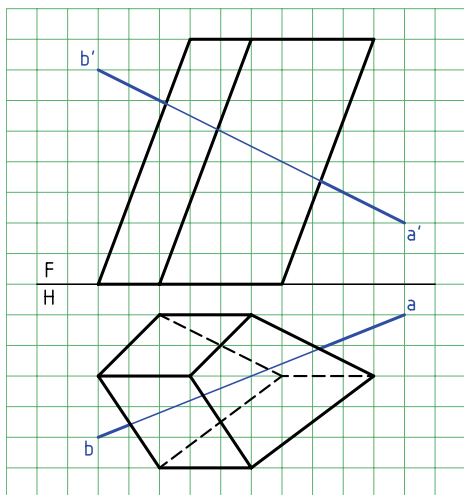
در نمونه‌ی دیگر بدنه‌ی منشور شامل صفحه‌های  
جبهه‌ی و منتصب است. در این جا خط با صفحه‌های



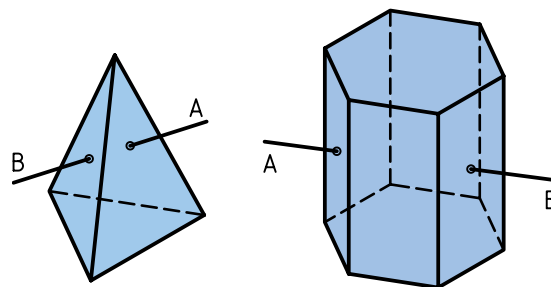
نقاط برخورد در نمای روبه‌رو معین و به سادگی به  
نمای افقی منتقل می‌شود. بخش‌های دید و ندید در نمای  
افقی معین است.



در نمونه‌ی سوم بدنه از صفحه‌های غیرخاص تشکیل  
می‌شود. به عبارت دیگر، منشور مایل و در حالت کلی است.

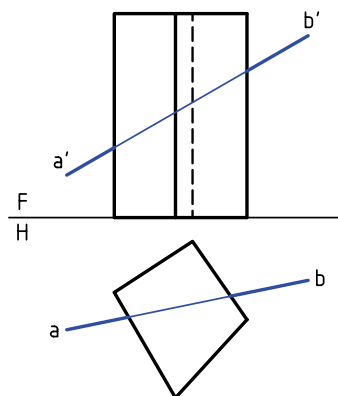


از بین رفته است. پس نمایش آن با خط‌چین ضرورتی  
ندارد. آنچه مهم است، بخش‌های بیرون خط است.



برخورد خط  $\overline{AB}$  با منشور

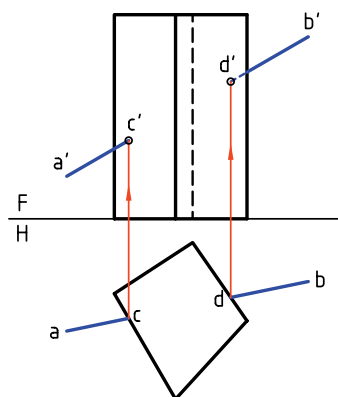
- بدنه‌ی منشور از صفحه‌های قائم تشکیل می‌شود.



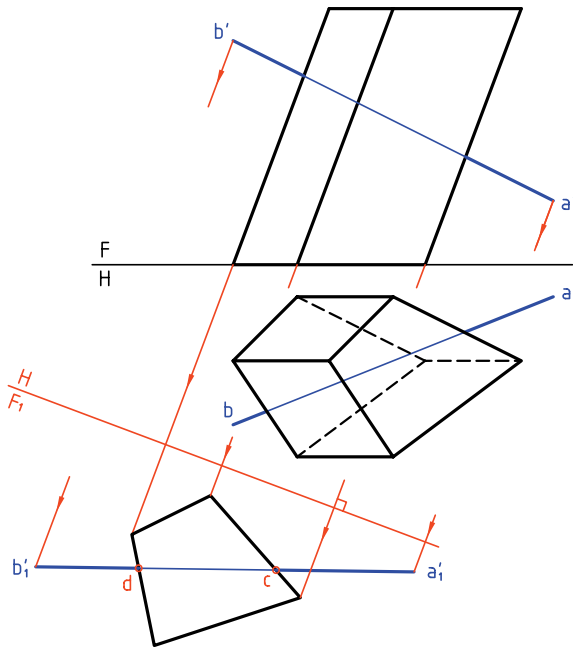
چون صفحات بدنه قائم است، نقطه‌های برخورد در نمای  
افقی مشخص است.

به کمک رابط، نقطه‌های برخورد را به نمای روبه‌رو  
منتقل می‌کنیم.

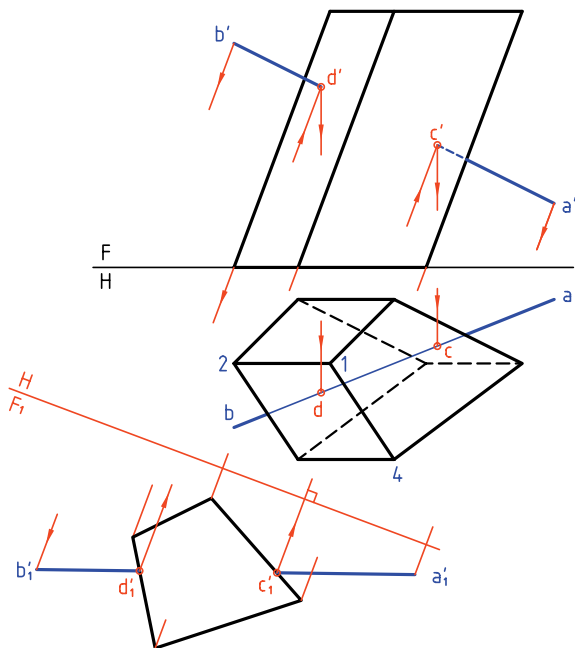
آن‌ها  $cc'$  و  $dd'$  هستند. بخش‌های دید و ندید هم تعیین شد.



عمود باشد. در این صورت، مسئله شبیه حالت ساده از منشور خواهد بود (یعنی زمانی که منشور قائم است).



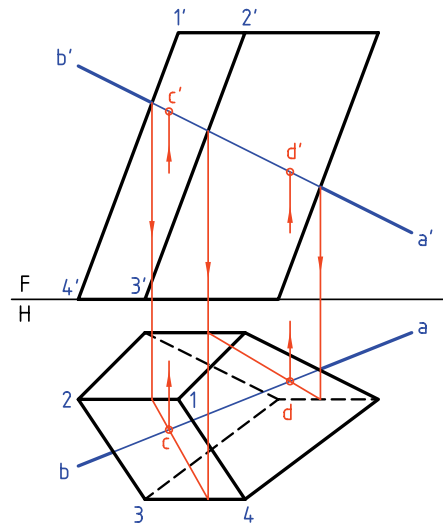
به این ترتیب از نقاط برخورد خط با بدنه منشور در نمای  $F_1$  به نمای  $F$  رابط می‌کنیم. تا این جا  $c'$  و  $d'$  مشخص شد. بعد از آن به کمک رابط، نقاط  $c$  و  $d$  در نمای افقی هم مشخص شد.



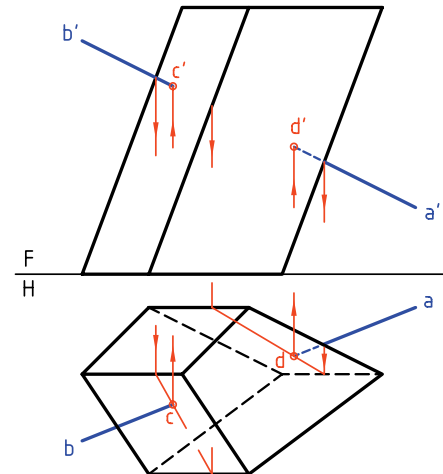
پس باید مطابق آنچه در مورد خط و صفحه‌ی غیرخاص اجرا شد، در این جا هم عمل شود.

بنابراین، با فرض آن که  $a'b'$  خطی از صفحه‌ی مثلاً 1234 است، تصویر افقی را تعیین و نقطه‌ی برخورد یعنی  $C$  به دست می‌آید.

سپس به کمک رابط  $C'$  هم مشخص می‌شود. برای صفحه‌ی دوم هم به همین روش کار خواهد شد. نتیجه‌ی آن  $dd'$  است.



در این شکل کوشش شده است که تا حدود زیادی از رسم خط‌های زاید خودداری شود. در نتیجه، نقشه خیلی شلوغ نمی‌شود. با دقت در این نقشه می‌توانید نکته‌هایی را دریابید.



مسئله را با روش تغییر صفحه هم می‌توان حل کرد. برای این کار لازم است خط زمین جدید، بر یال منشور

## دستور کار شماره ۵

برخورد خط و منشور را در نقشه نشان دهید.



(۳۰ دقیقه)

فیلم آموزشی



مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

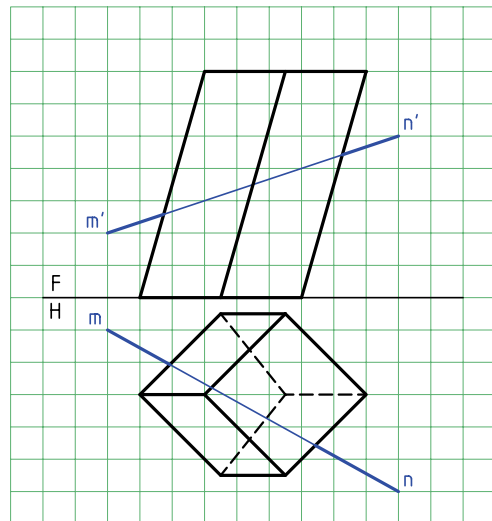
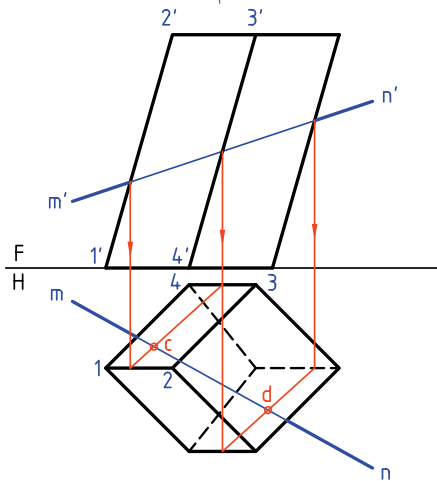
مراحل ترسیم

۱. کاغذ A4 را به صورت افقی بچسبانید.

۲. با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰ شکل را رسم کنید.

۳. برای جلوگیری از اشتباه می‌توانید صفحات را نام‌گذاری کنید.

۴. یک نمونه از صفحه را با 1234 نام‌گذاری کنید.

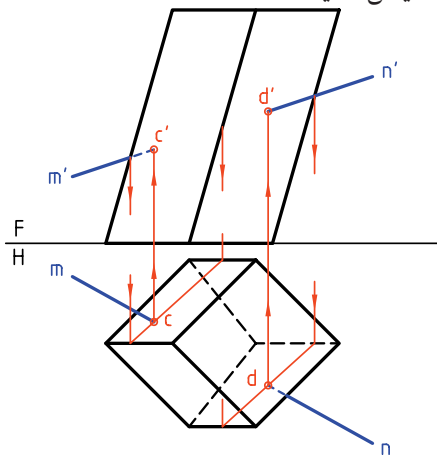


۵. به کمک رابط،  $c'$  و  $d'$  را در نمای روبه‌رو به دست آورید.

۶. چون بدنه‌ی منشور از صفحه‌های غیرخاص تشکیل شده است، باید از روش خط کمکی استفاده و c و d را مشخص کنید.

۷. قسمت‌های زاید خط را حذف کنید و بخش‌های دید و

ندید خط را تشخیص دهید.



◀ ارزشیابی عملی

با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰، هر یک از خواسته‌ها را روی یک برگ کاغذ A۴ انجام دهید. جدول در هر مورد کامل خواهد شد.

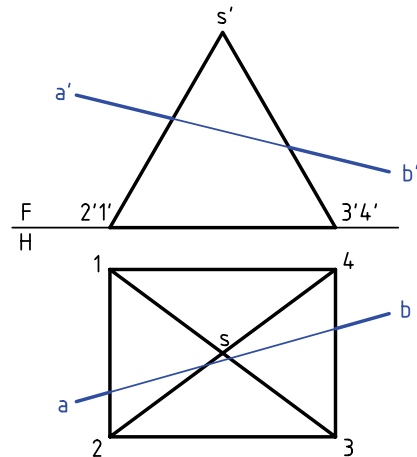
<p>۲</p>	<p>۱</p>
<p>۴</p>	<p>۳</p>



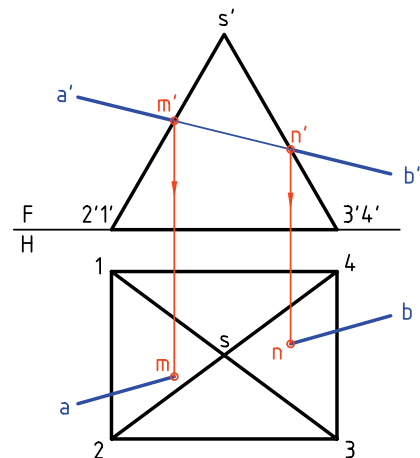
## برخورد خط با هرم

به دلیل شیب بدنه‌ی هرم، صفحات بدنه نمی‌توانند از گروه اول یعنی جبهی، قائم یا نیمرخ باشند. با دو نمونه به این بحث می‌پردازیم.

۱. هرمی با قاعده‌ی مربع و خط  $AB$  مفروض است. می‌خواهیم نقاط برخورد را با هرم معین کنیم.

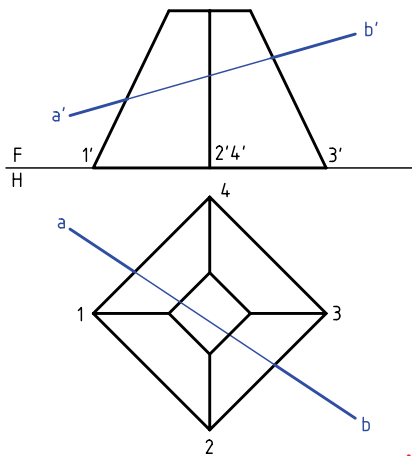


در شکل، این نقاط برخورد که  $mm'$  و  $nn'$  هستند به سادگی مشخص می‌شود. توجه کنید که قسمتی از خط که داخل هرم قرار می‌گیرد در حقیقت از بین می‌رود.



۲. خط  $AB$  و هرم چهاربر ناقص مفروض اند. هدف تعیین

نقاط برخورد خط و هرم است. این مسئله از دو روش قابل حل است.



آیا می‌دانید

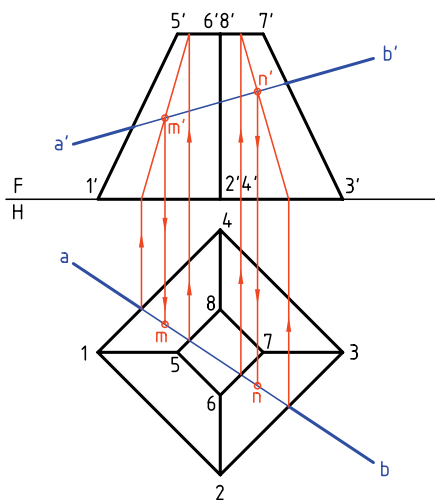


با روش صفحه‌ی کمکی هم می‌توان مسئله‌ی برخورد خط با هرم را حل کرد که بعداً به آن خواهیم پرداخت.

## روش اول؛ خط کمکی

حل این مسئله را می‌توان از نمای افقی شروع کرد. پس، با فرض خط، یک بار در صفحه‌ی 2367 و بار دیگر در صفحه‌ی 1584، نقاط  $n'$  و  $m'$  را تعیین و به نمای افقی منتقل می‌کنیم.

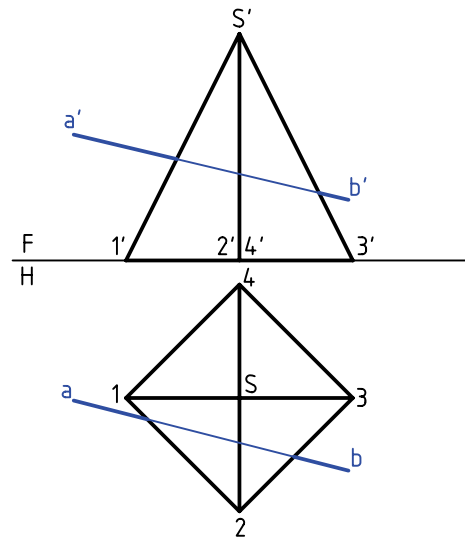
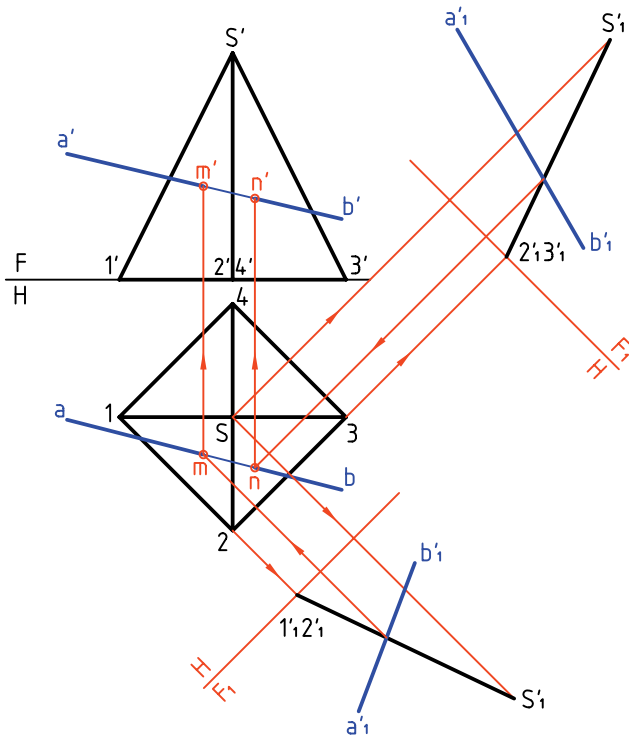
چرا با توجه به دو نمای موجود، از نمای روبه‌رو نمی‌توانیم حل مسئله را شروع کنیم؟



## روش دوم؛ تغییر صفحه

در شرایطی که  $\overline{AB}$  نسبت به هرم چهاربردار دارد، با دو تغییر صفحه، مسئله حل می‌شود. می‌بینیم که این روش طولانی است. ولی گاهی استفاده از آن مقرون به صرفه هست. به هر حال، برای تعیین برخورد خط با هر صفحه، نیاز به یک تغییر صفحه هست.

به این ترتیب، با تعیین تصویر جدید صفحه‌های  $S_{23}$  و  $S_{12}$  (به همراه  $\overline{AB}$ )، نقطه‌های  $mm'$  و  $nn'$  مشخص خواهد شد. برای این کار از خط‌های افقی  $12$  و  $23$  استفاده کردیم. چرا این دو خط افقی هستند؟



## دستور کار شماره ۶

برخورد خط و هرم را رسم کنید.



(۲۵ دقیقه)

فیلم آموزشی



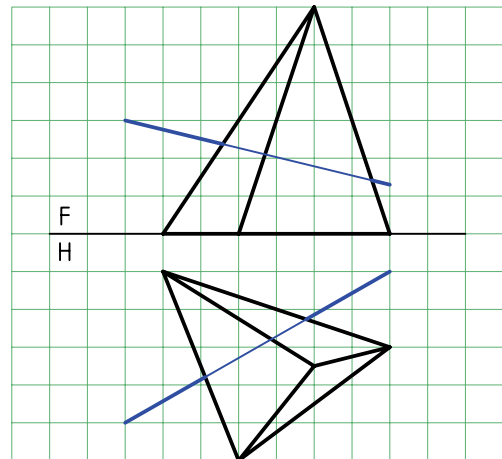
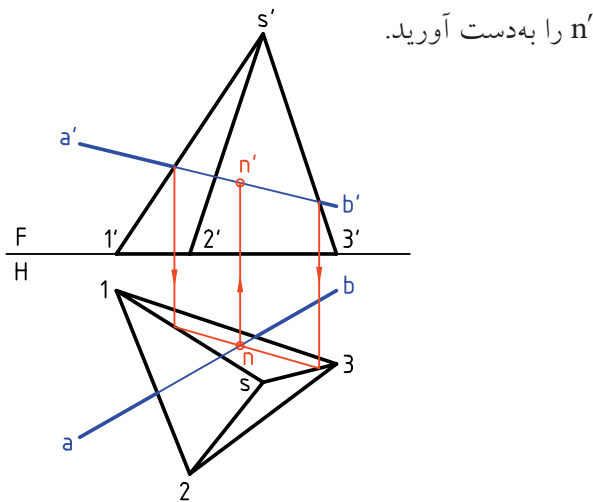
مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

مراحل ترسیم

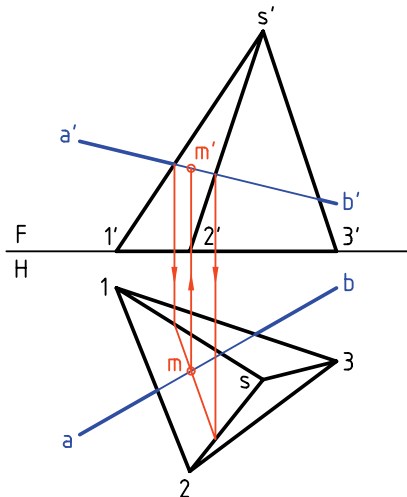
۱. کاغذ A۴ را به صورت افقی بچسبانید.

۲. با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰، شکل را رسم کنید.

۳. آیا می‌توانید نوع خط و صفحات بدنه‌ی هرم را مشخص کنید؟



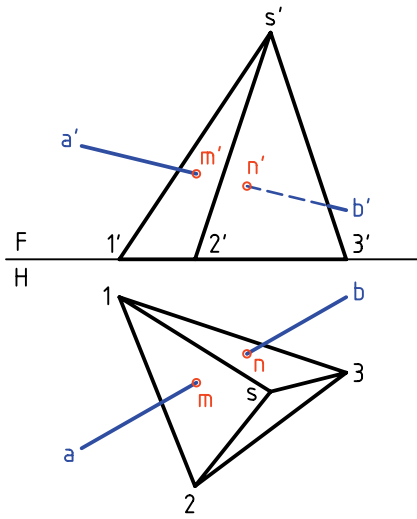
۳. این بار با فرض  $\overline{a'b'}$  در  $S12$ ،  $mm'$  را به دست آورید.



۲. خط و کلیه‌ی گوشه‌های هرم را نام‌گذاری کنید.

۳. با فرض آن‌که  $\overline{a'b'}$  خطی از صفحه‌ی  $S13$  است، نمای

افقی را تعیین کنید.



۴. اکنون می‌توانید ابتدا قسمتی از خط را که داخل هرم است حذف کنید.  
 سپس بخش‌های دید و ندید خط را مشخص کنید.



چون صفحه‌ی S12، در نمای روبه‌رو دیده می‌شود،  $\overline{a'm'}$  هم دیده خواهد شد.  
 چون S13 در نمای روبه‌رو اصلاً دیده نمی‌شود،  $\overline{n'b'}$  هم ندید است.

### ◀ ارزشیابی عملی

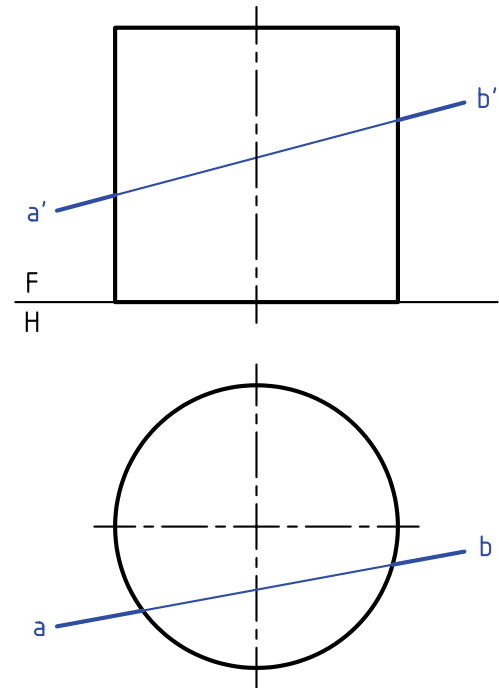
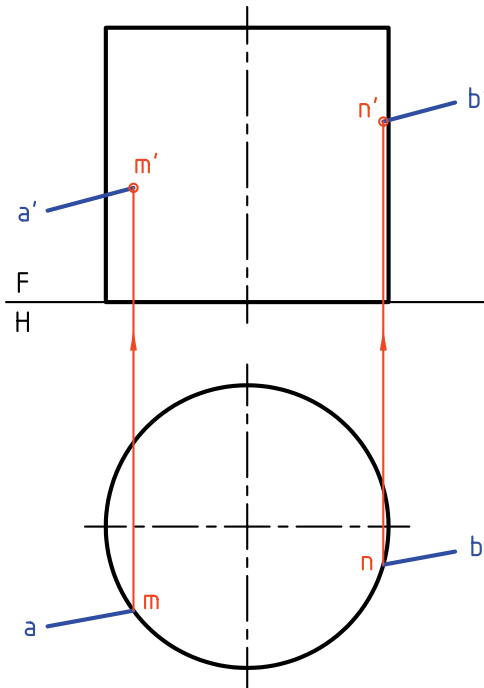
هر مسئله را روی یک برگ کاغذ A4 با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰ رسم و حل کنید.

<p>۲</p>	<p>۱</p>
<p>۴</p>	<p>۳</p>

## برخورد خط و استوانه

برای تعیین نقاط برخورد، کافی است از نقاط برخورد، در تصویر افقی رابط کنیم و  $m'$  و  $n'$  را مشخص کنیم.

اگر استوانه قائم باشد، برخورد خط با آن به سادگی مشخص می‌شود. دلیل آن، در حالت انتخابی موجود، شباهت به صفحه‌ی قائم است.

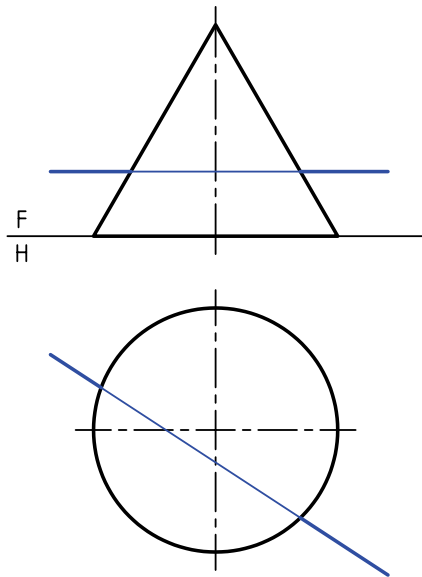


### ◀ ارزشیابی عملی

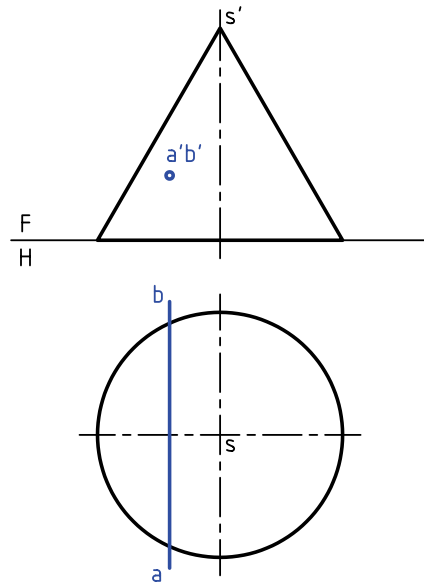
برخورد خط  $A(0, 20, 20)$  و  $B(80, 80, 70)$  را با استوانه به قطر ۶۰ و بلندی ۷۰ به دست آورید. نقطه‌ی  $O$  یعنی مرکز قاعده دارای مشخصات  $O(40, 40, 0)$  است.  
توجه: ترسیم و حل به عهده‌ی خودتان است.

## برخورد خط و مخروط

در نمونه‌ی دیگر، خط افقی است. می‌توان این مسئله را به کمک یک تغییر صفحه به سادگی حل کرد.

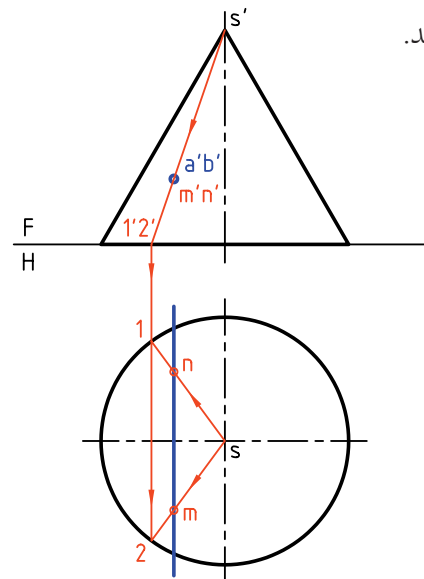
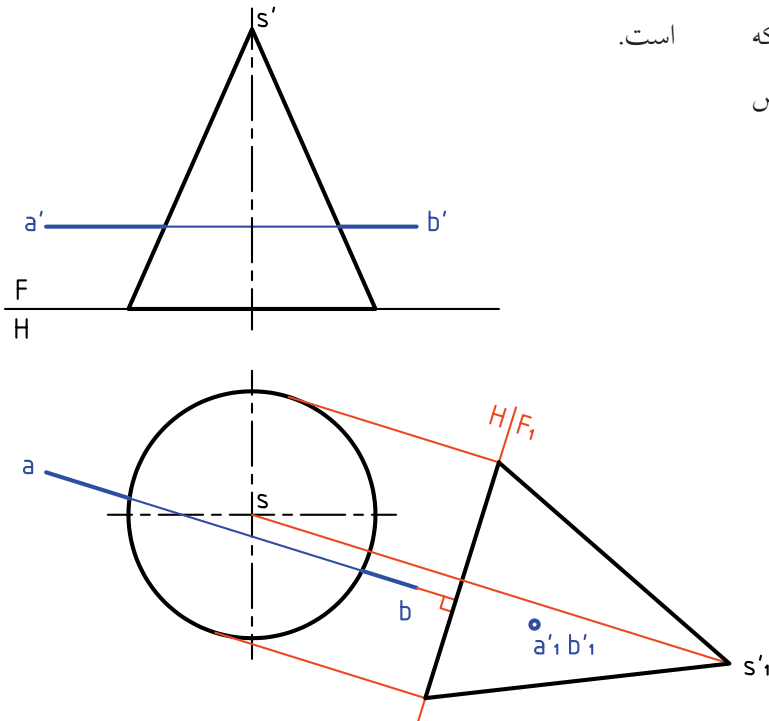


به دلیل شبیهی که بدنه‌ی مخروط دارد، به‌طور کلی می‌توان آن را شبیه صفحه‌ی غیرخاص دانست. به این ترتیب، باید با توجه به نوع خطی که با آن برخورد می‌کند، روش کار را معین کرد. در نمونه‌ی اول، خط منتصب است.

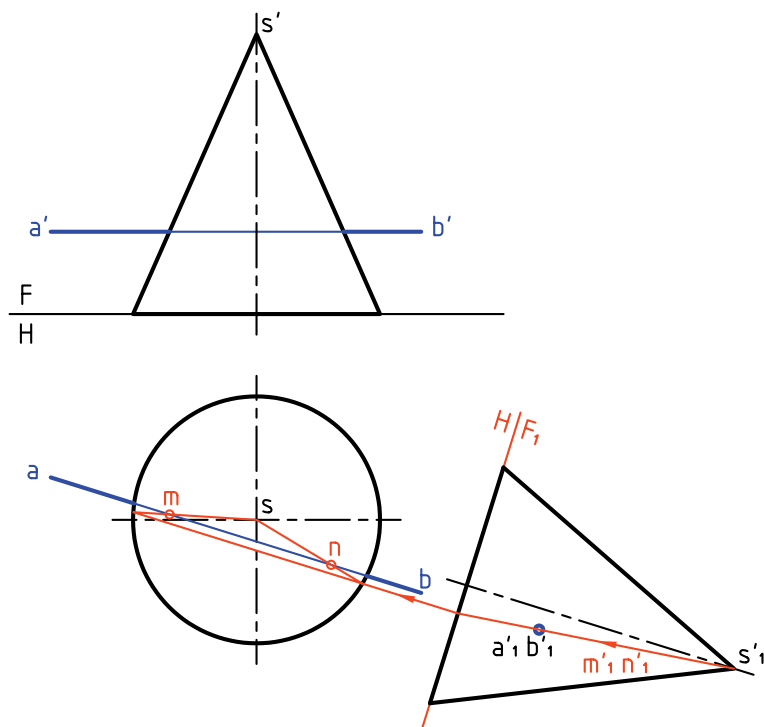


برای این کار کافی است نمای عمودی جدیدی به دست آوریم به گونه‌ای که نمای خط، نقطه‌ای باشد. پس خط زمین جدید را عمود بر نمای افقی خط  $\overline{AB}$  (یعنی  $\overline{ab}$ ) رسم می‌کنیم. تصویر جدید مخروط روی  $F_1$  رسم شده است.

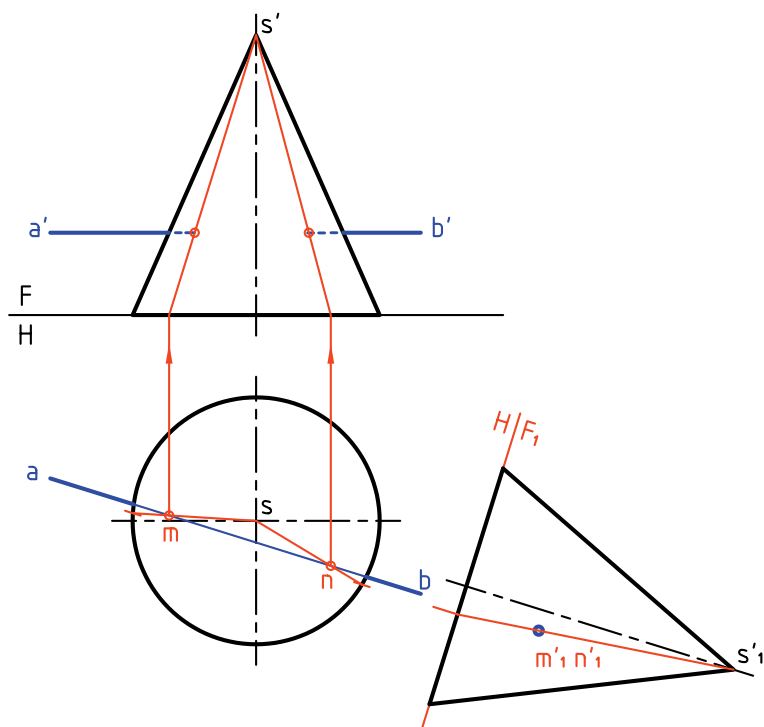
برای حل مسئله کافی است با روش خط کمکی، مولدهایی از مخروط را رسم کنیم که از  $a'$  بگذرند که پس از تعیین نمای افقی آن‌ها، نقطه‌های  $m$  و  $n$  مشخص خواهند شد.



اکنون می‌توان مانند مسئله‌ی پیشین، خط‌های کمکی را که مولدهای مخروط هستند، در نظر گرفت.



به این ترتیب، ابتدا  $m$  و  $n$  در نمای افقی و به کمک رابط،  $m'$  و  $n'$  در نمای روبه‌رو مشخص می‌شود.



## دستور کار شماره ۷

برخورد خط و مخروط را رسم کنید.



(۱۵ دقیقه)

فیلم آموزشی

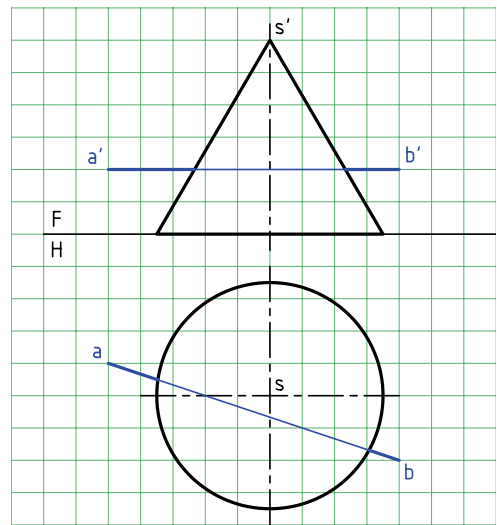
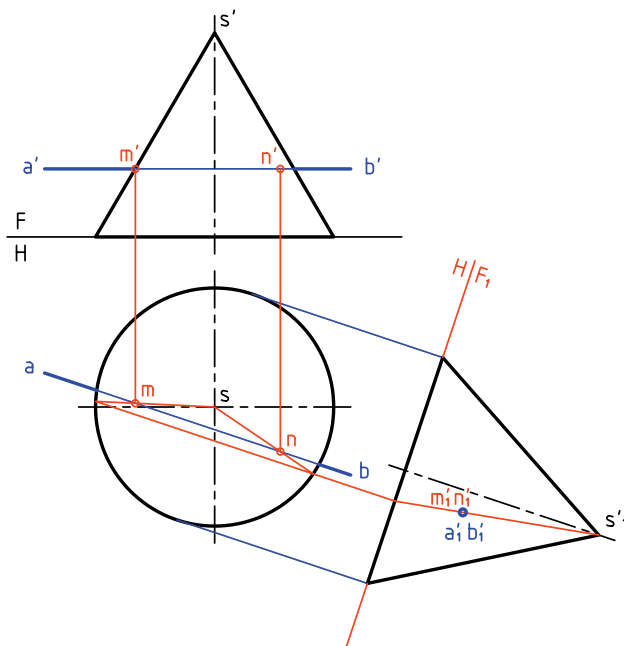


مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

### مراحل ترسیم

۲. با رسم خط زمین جدید  $F_1H$ ، عمود بر  $\overline{ab}$ ، نمای عمودی تازه را رسم کنید.
- نقطه‌ی  $a'_1b'_1$  را تعیین کنید.
- مولد مربوط به این نقطه را رسم کنید.
- پس از نوشتن  $m'_1$  و  $n'_1$ ، به کمک رابط ابتدا  $m$  و  $n$  و سپس  $m'$  و  $n'$  را مشخص کنید.

۱. کاغذ  $A4$  را به صورت افقی بچسبانید.
- با در نظر گرفتن هر مربع برابر  $10^\circ$ ، شکل موجود را رسم کنید.
- حروف را روی نقشه وارد کنید.





## دستور کار شماره‌ی ۸

برخورد خط و مخروط مایل را رسم کنید.



(۱۵ دقیقه)

فیلم آموزشی

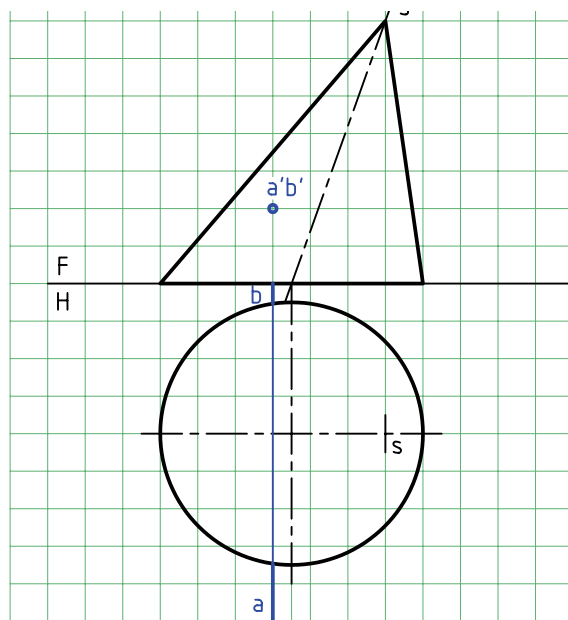
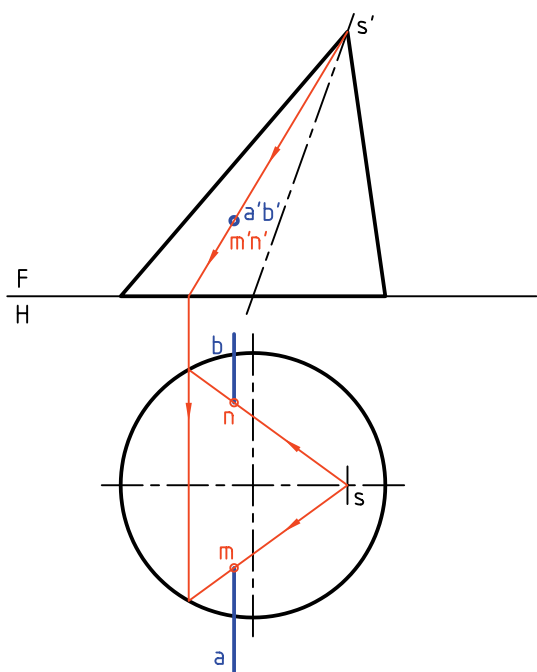


مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

### مراحل ترسیم

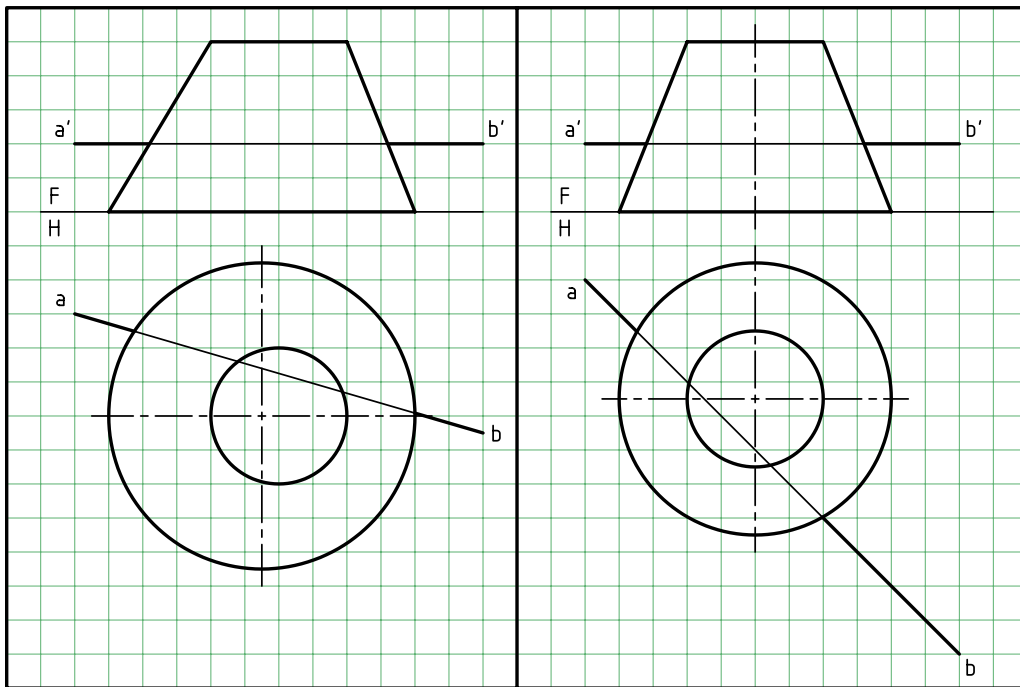
۲. خطی از  $s'$  و  $a'b'$  بگذرانید. این خط در حقیقت مربوط به دو مولدی است که از  $a'$  و  $b'$  می‌گذرند.
- نمای افقی مولدها را رسم و  $m$  و  $n$  را نام‌گذاری کنید.
- $m'$  و  $n'$  را بنویسید.

۱. کاغذ  $A4$  را به صورت افقی بچسبانید.
- شکل موجود را با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰ رسم کنید.
- حروف موجود را روی نقشه وارد کنید.
- توجه کنید که مخروط مایل است با وجود این، روش کار برای حل مسئله فرقی نمی‌کند.



### ◀ ارزشیابی عملی

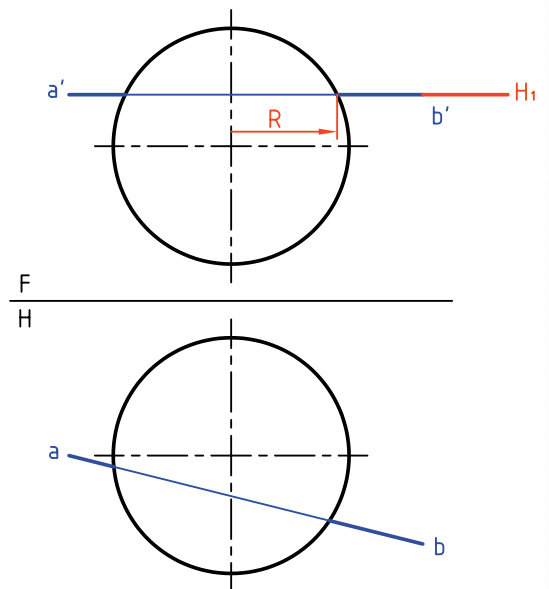
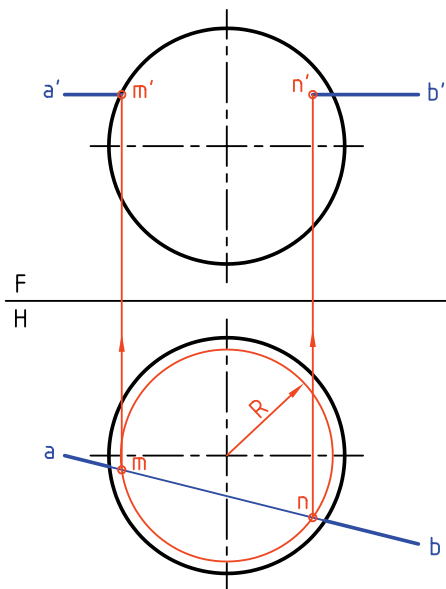
در هر مورد با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰، نقاط برخورد را معین کنید.

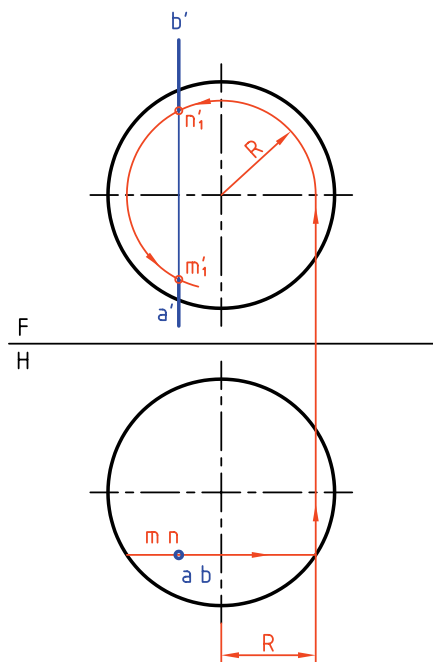


### برخورد خط و کره

یک خط می‌تواند به صورت‌های مختلف با یک کره برخورد داشته باشد. در شکل، خطی افقی با کره برخورد می‌کند.

این خط افقی را می‌توان روی یک صفحه‌ی افقی  $H_1$  فرض کرد. این صفحه‌ی افقی یعنی  $H_1$  خود کره را در دایره‌ای به شعاع  $R$  قطع می‌کند. ابتدا دایره به شعاع  $R$  را در نمای افقی رسم می‌کنیم. آن‌گاه





از برخورد  $\overline{ab}$  با این دایره، نقاط  $m$  و  $n$  مشخص می‌شود. به کمک رابط،  $m'$  و  $n'$  هم تعیین می‌شود. اگر خط قائم باشد، می‌توان کار را از نمای افقی شروع کرد. دایره به شعاع  $R$ ، نقاط  $mm'$  و  $nn'$  را مشخص می‌کند.



- برای حل تمام مسائل بالا، روش استفاده از صفحه‌ی کمکی ممکن است که در حقیقت اصلی‌ترین روش است. اما باید پس از بحث برخورد صفحات به آن پرداخت.  
- برای رسم برخورد خط غیر خاص با کره، از تغییر صفحه استفاده می‌شود.



### چکیده مطالب

## اصول برخورد خط با صفحه

اگر صفحه خاص (مثلاً افقی) یا نیمه خاص (مثلاً منتصب) باشد، نقطه‌ی برخورد به‌سادگی تعیین می‌شود. اگر صفحه غیرخاص باشد، به‌طور کلی، سه روش وجود دارد.

### ۱. خط کمکی ۲. صفحه‌ی کمکی (که مورد بحث قرار نمی‌گیرد) ۳. تغییر صفحه

در مورد اول، در یک نما، خط را خطی از صفحه فرض می‌کنیم و نمای دیگر را به‌دست می‌آوریم. در این نما، نقطه‌ی برخورد خط با صفحه تعیین می‌شود. آن‌گاه به کمک رابط، نمای دیگر هم معلوم می‌شود.  
در مورد سوم، با یک تغییر صفحه، صفحه را به صورت نیمه خاص (مانند منتصب یا قائم) در می‌آوریم. آن‌گاه نقطه‌ی برخورد تعیین می‌شود.

## اصول برخورد خط با جسم

اگر خطی با جسمی برخورد کند، یک نقطه‌ی ورود و یک نقطه‌ی خروج خواهد داشت. در این حال مقداری از خط که داخل جسم است حذف خواهد شد و این به معنی غیرلازم بودن خط در داخل جسم است. اکنون به تفکیک و کوتاه می‌توان گفت:

۱. برای منشور، باید نقطه‌های ورود و خروج معلوم شود. روش‌های کار، خط کمکی و تغییر صفحه است.
۲. در مورد هرم نیز باید برخورد خط با دو صفحه از هرم مشخص شود. روش‌ها، خط کمکی و تغییر صفحه است.
۳. برای استوانه هم روش‌های بالا ممکن است.
۴. برای مخروط هم روش‌ها مانند هرم، خط کمکی یا تغییر صفحه است.
۵. برای کره ناچار به انجام یک برش از کره در حالت ساده هستیم که در مورد خط‌های افقی، جبهی، قائم، نیمرخ، مواجه و منتصب ممکن است.

## ارزشیابی پایانی

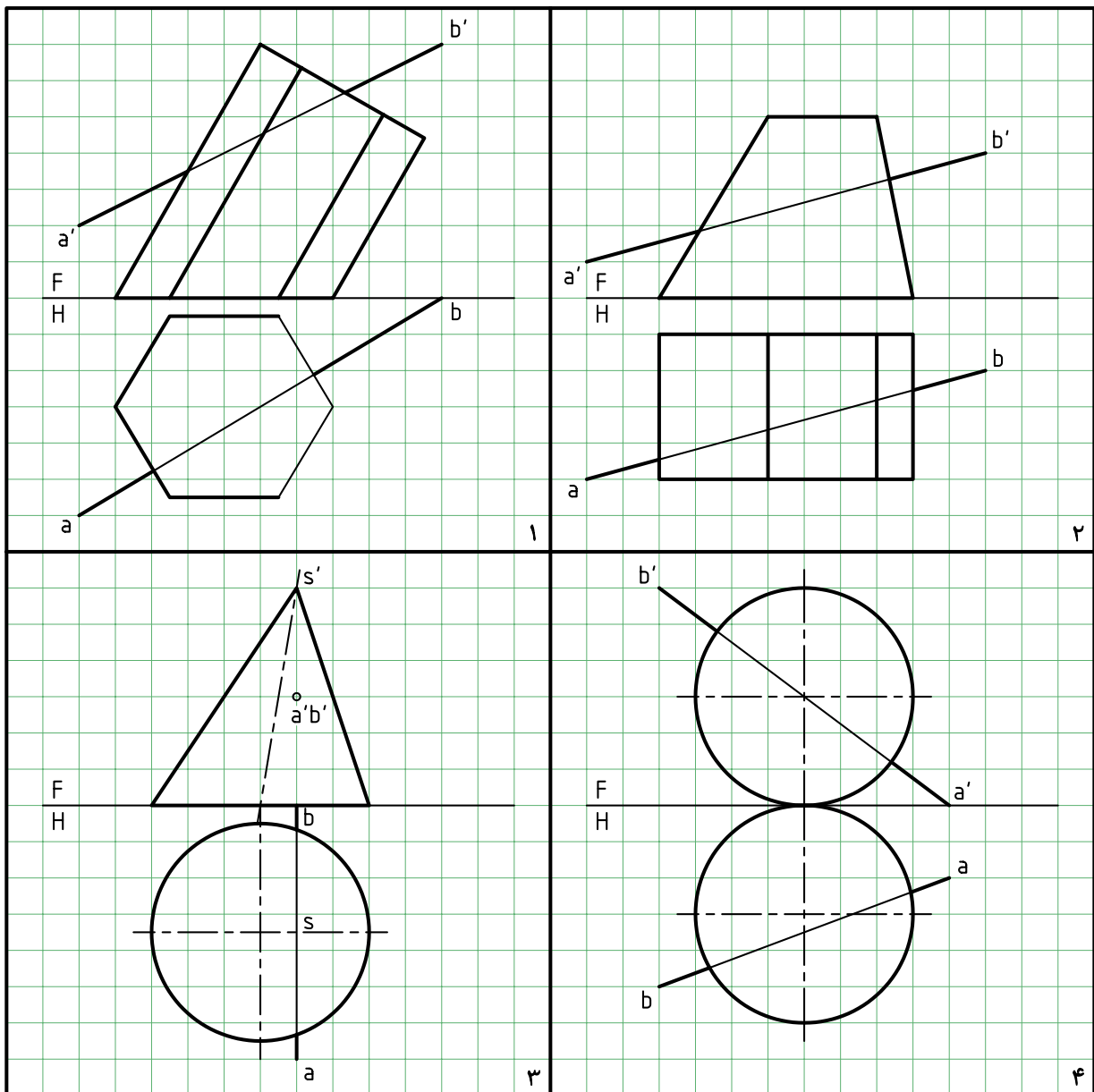
### ◀ ارزشیابی نظری

۱. با رسم شکل چگونگی تعیین برخورد خط را با صفحه‌ی منتصب (یا قائم) نشان دهید.
۲. با رسم شکل چگونگی تعیین نقطه‌ی برخورد خط را با صفحه‌ی غیرخاص نشان دهید.
۳. با رسم شکل چگونگی دید و ندید کردن یک خط متقاطع با یک صفحه را توضیح دهید.
۴. به طور دقیق، دو قاعده‌ی موجود را در دید و ندید کردن شرح دهید.
۵. با رسم شکل دستی، چگونگی تعیین برخورد خط با منشور را نشان دهید.
۶. با رسم شکل دستی، چگونگی تعیین برخورد خط با هرم را نشان دهید.
۷. با رسم شکل دستی، چگونگی تعیین برخورد خط با استوانه را نشان دهید.
۸. با رسم شکل دستی، چگونگی تعیین برخورد خط با مخروط را نشان دهید.
۹. با رسم شکل دستی، چگونگی تعیین برخورد خط با کره را نشان دهید.

◀ ارزشیابی عملی

هر مربع برابر ۱۰ در نظر گرفته شود.

۱. در پرسش ۱، ابتدا نمای افقی را کامل کنید، سپس نقاط برخورد  $\overline{AB}$  را با منشور پیدا کنید.
۲. اگر بعد نوک هرم کامل S باشد، ابتدا نمای افقی را کامل کنید و سپس نقاط اشتراک  $\overline{AB}$  را به دست آورید.
۳. نقاط برخورد خط  $\overline{AB}$  را با مخروط معین کنید.
۴. نقاط برخورد  $\overline{AB}$  را با کره تعیین کنید.



## توانایی ترسیم برخورد صفحه با صفحه

- ◀ پس از آموزش این توانایی، از فراگیر انتظار می‌رود:
  - مفهوم برخورد صفحه و صفحه را بیان کند.
  - از روش‌های خط کمکی، صفحه‌ی کمکی و تغییر صفحه در تعیین برخورد دو صفحه استفاده کند.
  - برخورد صفحه و صفحه را رسم کند.
  - برخورد دو صفحه را دید و ندید کند.
  - اصول برخورد دو صفحه را بیان کند.

ساعات آموزش		
جمع	عملی	نظری
۱۷,۵	۱۴	۳,۵



## پیش آزمون

۱. رویه یا صفحه را چگونه تعریف می‌کنید؟
۲. آیا صفحه همیشه تخت یا مستوی باشد؟
۳. صفحه‌ی هندسی چگونه صفحه‌ای است؟
۴. دو صفحه چند حالت نسبت به هم دارند؟
۵. برخورد دو صفحه (فصل مشترک) یعنی چه؟
۶. برای به‌دست آمدن برخورد دو صفحه، به‌دست آوردن چند نقطه لازم است؟
۷. یک صفحه را به چه شکل‌هایی می‌توان نمایش داد؟
۸. شرط موازی بودن دو صفحه چیست؟
۹. شرط عمود بودن دو صفحه چیست؟
۱۰. آیا بدون رسم کردن صفحات زیر می‌توانید نام آن‌ها را بگویید؟  
 $A(37, 42, 5)$     $B(0, 42, 50)$     $C(60, 42, 37)$   
 $M(80, 10, 20)$     $N(60, 70, 30)$     $K(0, 30, 60)$
۱۱. آیا یک صفحه می‌تواند نامحدود باشد؟ نامحدود بودن چه مفهومی دارد؟

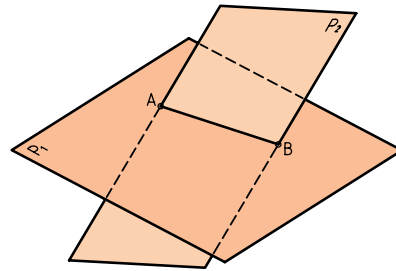


در این پیش‌آزمون توجه بیشتری به صفحه شده است، زیرا آگاهی بیشتری در ارتباط با صفحه مورد نیاز هست (برای رسیدن به توانایی بیشتر در این بخش آگاهی عمیق‌تر نسبت به صفحه ضروری است).

## برخورد صفحه و صفحه

همان‌گونه که یک خط می‌تواند با صفحه اشتراک داشته باشد، دو صفحه هم می‌توانند یکدیگر را قطع کنند. می‌دانیم که در هندسه، برخورد دو صفحه‌ی تخت، همواره یک خط مستقیم است که به آن «برخورد» یا «فصل مشترک» می‌گویند.

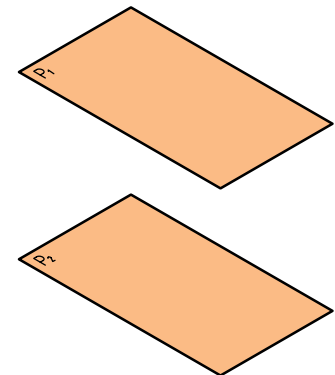
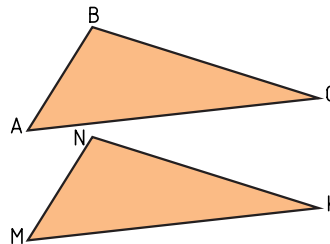
با دقت در شکل موجود متوجه می‌شوید که برخورد دو صفحه، در حقیقت از تقاطع دو خط از صفحه‌ی  $P_1$  با سطح صفحه‌ی  $P_2$  به دست آمده است. بنابراین، برخورد دو صفحه‌ی تخت، همواره یک خط مستقیم است.



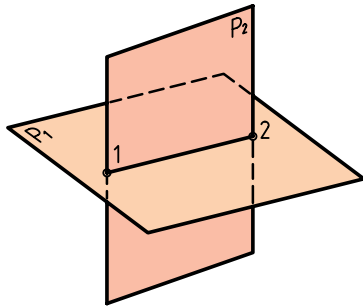
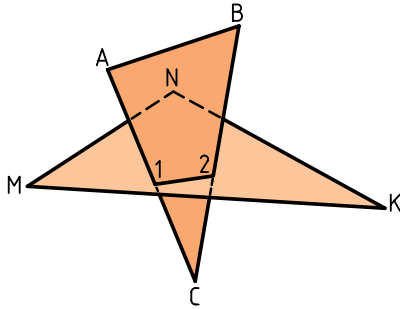
## وضعیت دو صفحه نسبت به هم

دو صفحه نسبت به هم، تنها دو حالت دارند (به شرط نامحدود بودن).

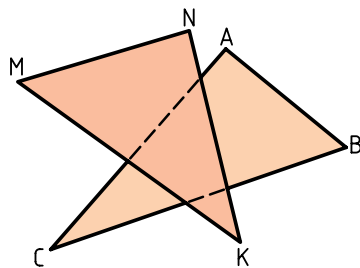
**الف) دو صفحه موازی هستند** (یعنی هیچ برخوردی ندارند).



**ب) دو صفحه متقاطع هستند** (یعنی با هم برخورد دارند).



اگر صفحه‌ها محدود باشند (که در نقشه‌کشی معمولاً این‌گونه هستند)، حالت سوم هم ممکن است. بنابراین، دو صفحه‌ی محدود می‌توانند «متناظر» هم باشند؛ یعنی در محدوده‌ای باشند که برخوردی نداشته باشند.



اکنون به تصاویر دوبعدی ترسیمی (نقشه) توجه کنید.

## الف) دو صفحه برخورد دارند

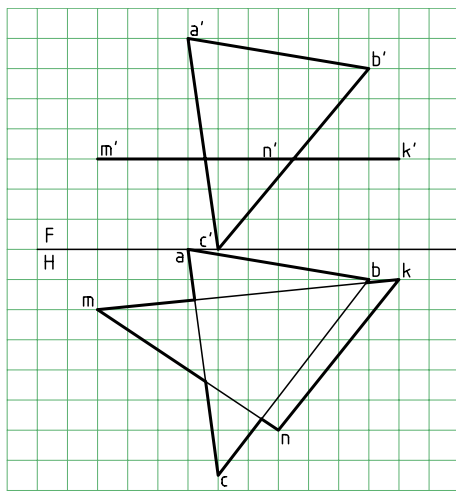
همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود، معمولاً فقط دو خط از یک صفحه (یا از هر صفحه فقط یک خط) با صفحه‌ی دیگر برخورد دارند. نتیجه‌ی به دست آمدن دو نقطه است



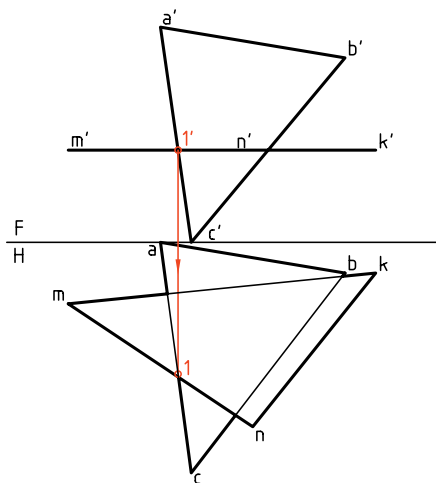
آن است که دو خط همسر (مقاطع) از یکی با دو خط همسر از دیگری، یک به یک موازی باشند.

### روش‌های تعیین برخورد دو صفحه

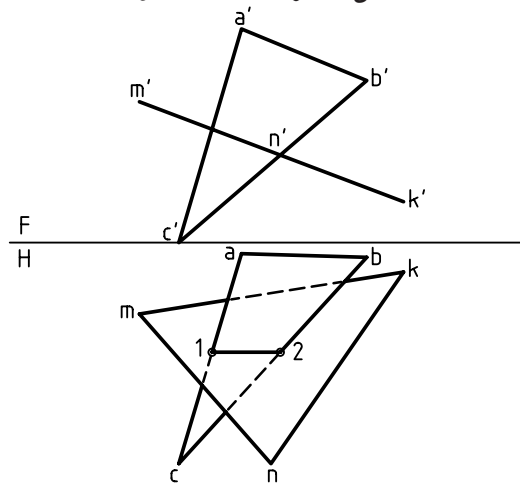
برای به دست آوردن برخورد دو صفحه می‌توان از روش‌های، خط کمکی، صفحه‌ی کمکی و تغییر صفحه استفاده کرد. اکنون به حل چند پرسش نمونه توجه کنید.



۱. برخورد دو صفحه‌ی  $ABC$  و  $MNK$  را تعیین کنید. صفحه‌ی  $ABC$  غیرخاص و صفحه‌ی  $MNK$  افقی است.  $MNK$  افقی است، پس اگر  $\overline{AC}$  با آن برخوردی داشته باشد باید همان نقطه‌ی ظاهری برخورد  $a'c'$  با  $m'n'k'$  باشد. بنابراین، آن را  $1'$  می‌نامیم و به نمای افقی رابط می‌کنیم. نقطه‌ی  $1$ ، نمای افقی برخورد  $\overline{AC}$  با  $MNK$  است.

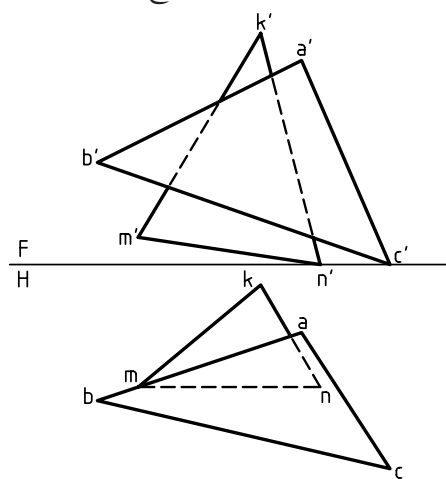


که با اتصال آن‌ها، فصل مشترک به دست خواهد آمد.



### (ب) دو صفحه در شرایط شکل زیر متناظرند.

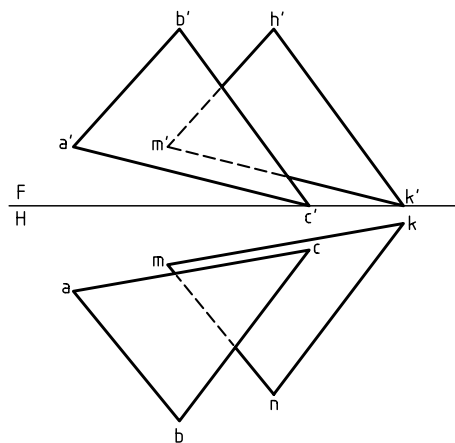
یعنی آن‌قدر ادامه ندارند که یکدیگر را قطع کنند.



### (پ) دو صفحه موازی‌اند.

به ویژه که  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$  و  $\overline{MK} \parallel \overline{AC}$ ،  $\overline{NK} \parallel \overline{BC}$  است.

شرط کافی برای آن که دو صفحه موازی باشند،



این مطلب هم به دلیل قرار داشتن بخشی از ABC در زیر صفحه‌ی افقی واضح است.



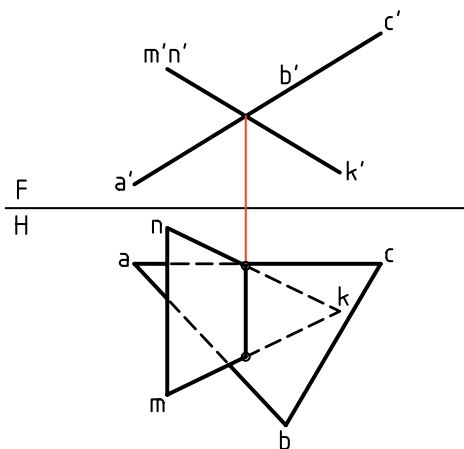
برخورد دو صفحه، همواره خطی است که در هر دو نما دیده می‌شود.

### نتیجه‌ی مهم

با حل این مسئله به یک نتیجه‌ی بسیار مهم می‌رسیم: برخورد یک صفحه‌ی خاص (افقی، جبهی، نیمرخ) و نیمه خاص (منتصب، قائم، مواج) با هر رویه‌ی دیگر، به راحتی به دست می‌آید.

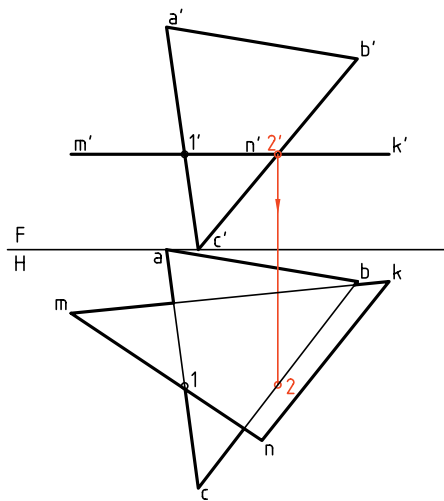
اکنون با دقت به چند نمونه توجه کنید.

۱. برخورد دو صفحه به‌سادگی مشخص شده است، زیر هر دو رویه منتصب و فصل مشترک آن‌ها، یک خط منتصب است.

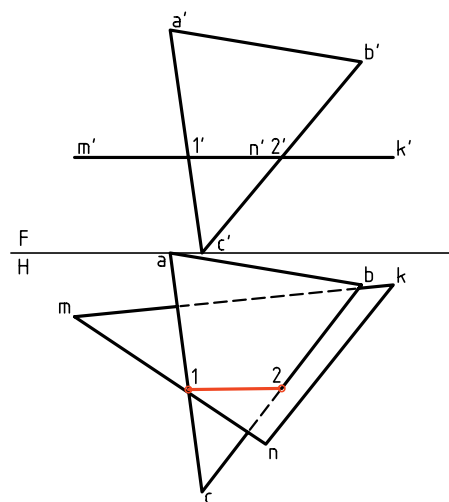


۲. پاره‌خط  $\overline{12}$  یعنی فصل مشترک، مستقیماً به کمک

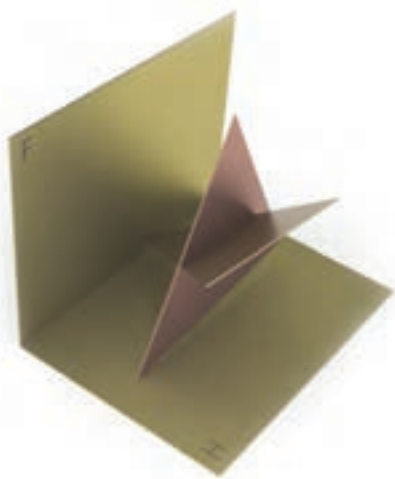
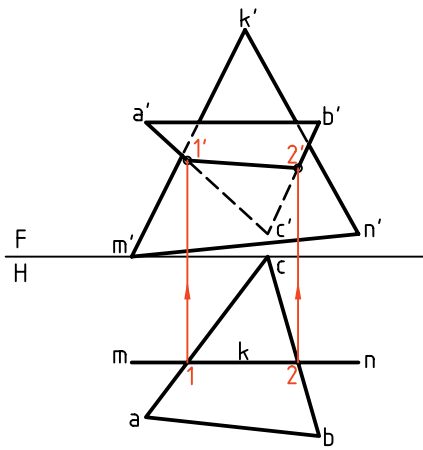
به همین ترتیب، برای نقطه‌ی 2 عمل می‌شود. نتیجه آن‌که، پاره‌خط  $\overline{12}$  برخورد دو صفحه است که آن را رسم می‌کنیم. توجه دارید که شرط درست بودن نقطه‌ی برخورد، آن است که نقاط 1 و 2 در محدوده‌ی MNK قرار داشته باشند.



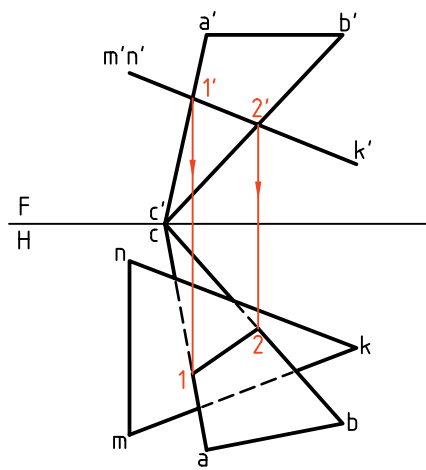
می‌توان، طبق روشی که گفته شده است، بخش‌های دید و ندید نقشه را معین کرد. به طور خلاصه، در نمای روبه‌رو مسئله‌ای نداریم. اما در نمای افقی باید بخش‌های ندید مشخص شود.



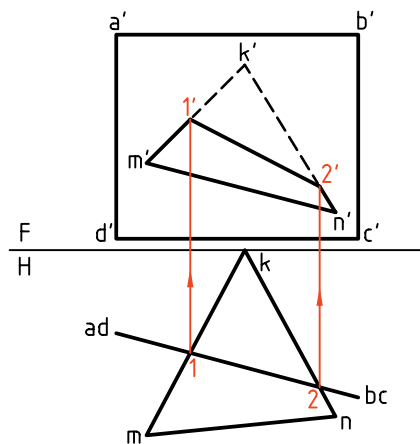
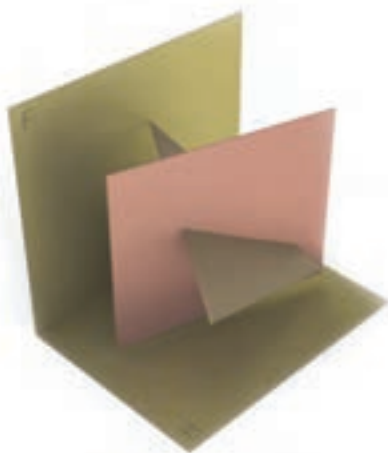
۳. در این پرسش، یکی از صفحه‌ها جبهی است که برخورد آن با رویه‌ی غیرخاص، به‌سادگی به‌دست می‌آید.



خط‌های رابط به‌دست آمده است. زیرا یکی از صفحات متصّب است. (کدام رویه؟).



۴. پاره‌خط  $\overline{12}$  یعنی برخورد، تنها به کمک رابط‌ها تعیین شده است. زیرا یکی از رویه‌ها قائم است.



## دستور کار شماره ۱

محل برخورد دو صفحه را رسم کنید.



(۲۵ دقیقه)

فیلم آموزشی

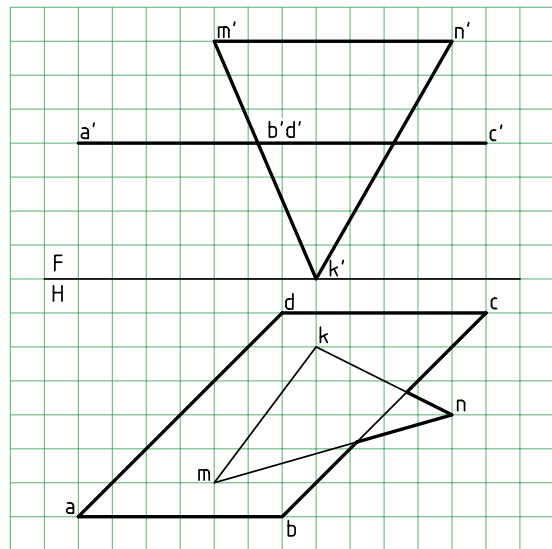
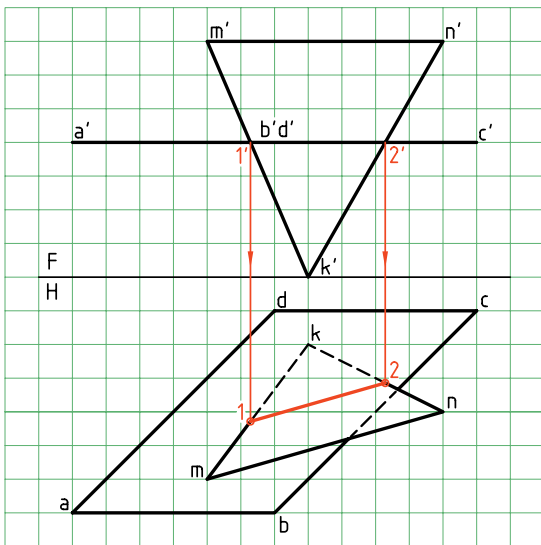


مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

### مراحل ترسیم

۲. نقاط  $1'$  و  $2'$  را در نمای روبه‌رو نام‌گذاری کنید.
- از این نقاط به نمای افقی رابط کنید تا نقاط  $1$  و  $2$  مشخص شود.  $1$  را به  $2$  وصل کنید.
- شکل را دید و ندید کنید (روشن است، آنچه زیر صفحه‌ی  $ABCD$  قرار دارد، دیده نمی‌شود).

- هدف تعیین برخورد دو صفحه‌ی  $ABC$  و  $MNK$  و دید و ندید کردن نقشه است. رویه‌ی  $ABC$  افقی است و رویه‌ی  $MNK$  یک سطح غیرخاص است.
۱. با در نظر گرفتن هر مربع برابر  $۱۰$ ، شکل موجود را روی یک برگ کاغذ  $A4$  افقی رسم کنید.



## دستور کار شماره‌ی ۲

رویه‌ی نیمه خاص با صفحه‌ی غیر خاص را برخورد دهید.



(۲۵ دقیقه)

فیلم آموزشی

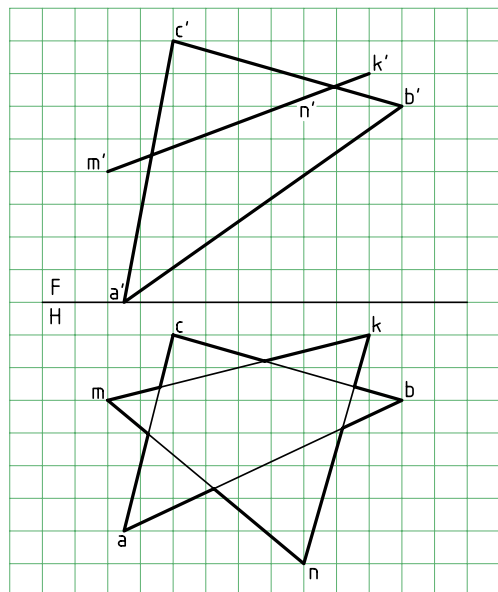
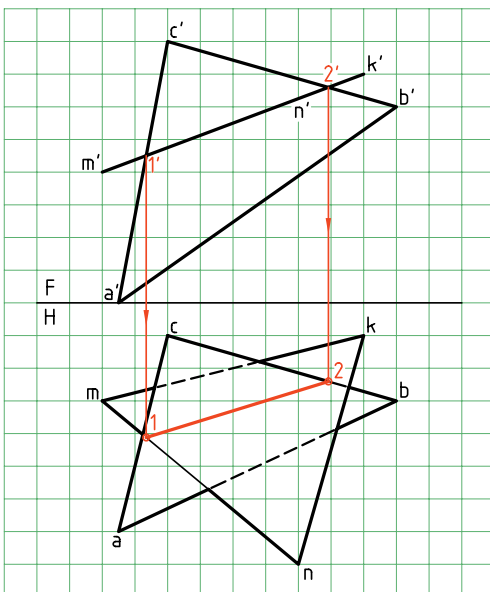


مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

### مراحل ترسیم

۲. به دلیل متصب بودن  $MNK$ ، نقطه‌های برخورد در نمای روبه‌رو مشخص هستند. آن‌ها را  $1'$  و  $2'$  بنامید.
- از  $1'$  و  $2'$  به نمای افقی رابط کنید.
- نقاط  $1$  و  $2$  را نام‌گذاری کنید.
- $1$  را به  $2$  وصل کنید.
- آنچه از  $ABC$  که در زیر  $MNK$  است، در نمای افقی ندید است. آن را مشخص کنید.

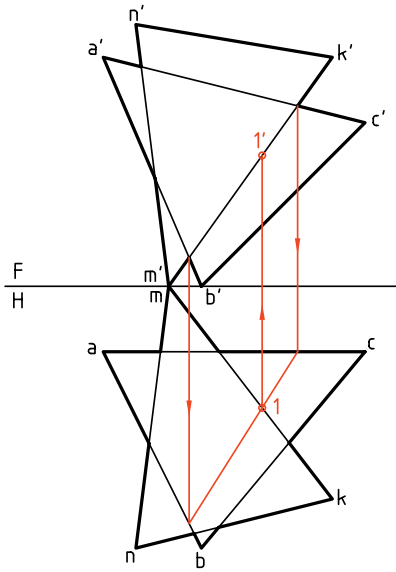
- هدف تعیین برخورد دو صفحه‌ی متصب  $MNK$  و غیر خاص  $ABC$  است.
۱. کاغذ  $A4$  را به صورت افقی بچسبانید. شکل زیر را با در نظر گرفتن هر مربع برابر  $10$ ، دوباره رسم کنید.



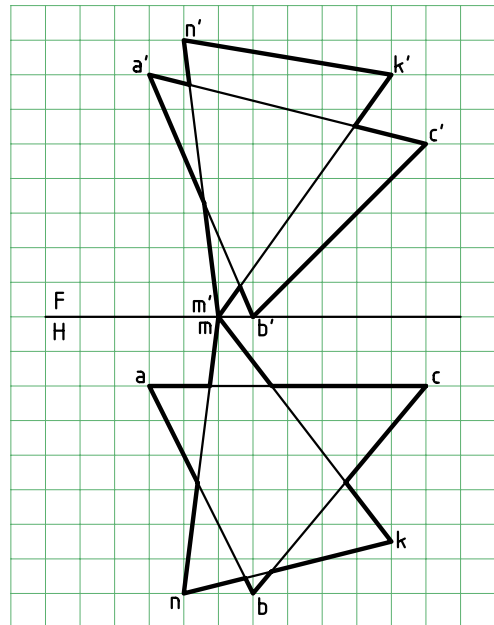
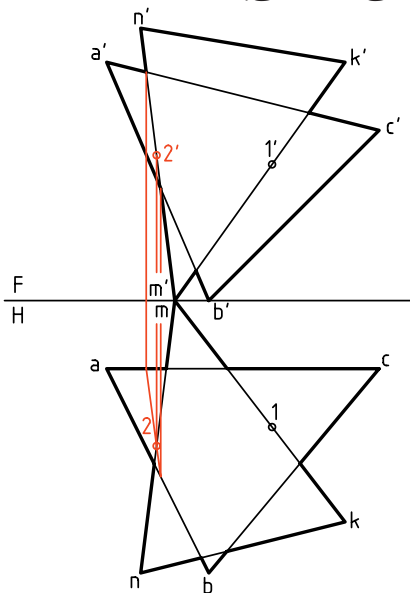
## برخورد دو صفحه‌ی غیرخاص

در مورد این دو صفحه، نقاط برخورد به سادگی به دست نخواهد آمد. بنابراین، استفاده از عامل کمکی اجتناب‌ناپذیر است. سپس، مسئله‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن هر دو صفحه غیرخاص هستند. این پرسش مهم را از هر سه روش «گذراندن خط کمکی»، «گذراندن صفحه‌ی کمکی» و «تغییر صفحه» حل می‌کنیم (در آینده، انتخاب روش به عهده‌ی خود شما خواهد بود).

اصولاً برای خط‌هایی مانند  $\overline{NK}$  یا  $\overline{CB}$ ، برخوردی وجود ندارد. چرا؟



اکنون خط دیگری را انتخاب می‌کنیم.  $\overline{NM}$  خط انتخابی و از مثلث  $MNK$  است. با استفاده از خطوط رابط مشخص می‌شود که نقطه‌ی  $22'$  برخورد  $NM$  با سطح  $ABC$  است. به این ترتیب، فصل مشترک دو صفحه یعنی پاره‌خط  $11'22'$  به دست آمده است.

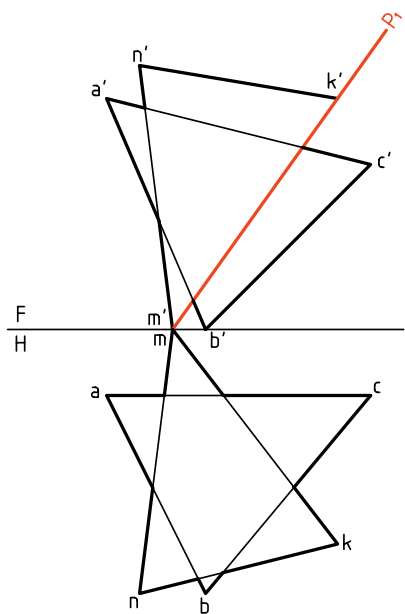


## الف) روش خط کمکی

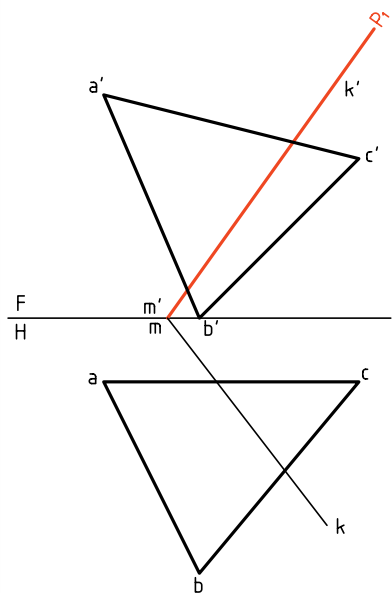
در این روش ابتدا یکی از خط‌ها مانند  $\overline{MK}$  از  $MNK$  را در نظر می‌گیریم و برخورد آن را با  $ABC$ ، اگر وجود داشته باشد، به دست می‌آوریم. این کار در شکل انجام شد و نقطه‌ی  $11'$  به دست آمد. البته، به این نکته توجه دارید که

اکنون شکل را دید و ندید خواهیم کرد.  
 ۱. برای دید و ندید کردن نمای روبه‌رو رابط انتخابی  $A$  معرف آن است که خط  $MK$ ، در نقطه‌ی

ب) روش «گذراندن صفحه» یا «صفحه‌ی کمکی»  
 می‌توان یک صفحه‌ی کمکی مانند منتصب رسم کرد  
 که شامل خط  $\overline{MK}$  باشد. برای این کار رویه‌ی منتصب  
 نامحدودی در نظر می‌گیریم که بر  $\overline{MK}$  می‌گذرد.



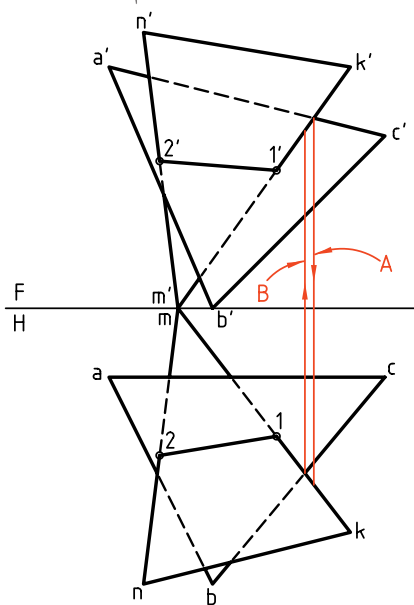
اکنون با حذف دو خط  $\overline{NK}$  و  $\overline{NM}$ ، تنها  $\overline{MK}$  و  
 صفحه‌ی  $ABC$  را خواهیم داشت. بر  $\overline{MK}$  هم منتصب  $P_1$   
 گذاشته است. این مسئله پیش از این حل شده است، یعنی  
 برخورد صفحه‌ی منتصب  $P$  با یک صفحه‌ی دلخواه  $ABC$  را  
 به دست آورده‌ایم.



شروع رابط، بعد بیشتری نسبت به  $AC$  دارد، پس در این  
 نقطه دیده می‌شود. بقیه‌ی کار انجام می‌شود.

## ۲. برای دید و ندید کردن نمای افقی

رابط انتخابی  $B$  معرف آن است که خط  $MK$ ، در نقطه‌ی  
 شروع رابط، ارتفاع بیشتری نسبت به  $BC$  دارد. پس در  
 این نقطه دیده می‌شود. کار دید و ندید انجام شده است.



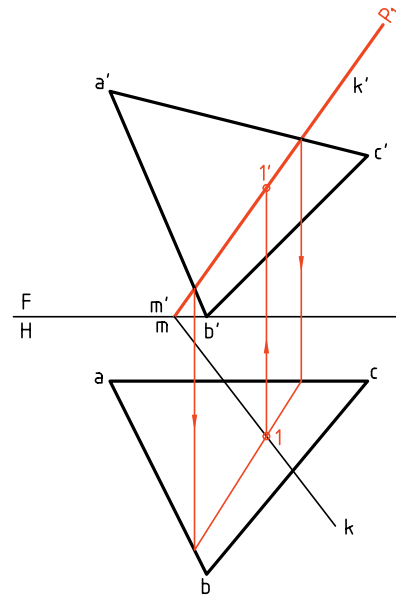
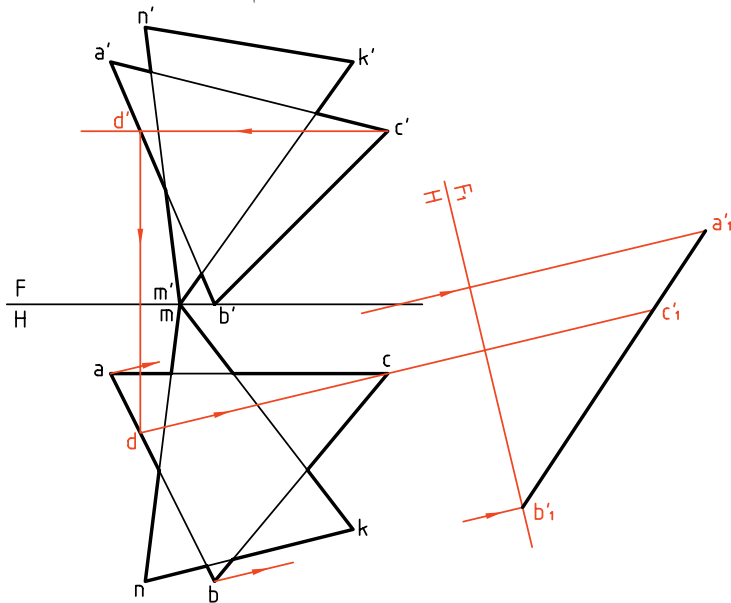
در حل این مسئله می‌توان کار را برای هر خط که در  
 محدوده‌ی صفحه‌ی دیگر وارد شده است، جداگانه انجام  
 داد. به عبارت دیگر با تحقیق می‌تواند برای چهار خط  
 $\overline{AC}$ ،  $\overline{AB}$ ،  $\overline{MK}$  و  $\overline{NM}$  انجام شود تا در دو مورد به جواب  
 برسیم. به هر حال، با دقت و تمرین بیشتر، خود به روش‌های  
 ساده‌تری دست خواهید یافت. یک بار دیگر می‌گوییم که  
 خط فصل مشترک یعنی  $\overline{12}$  در هر دو تصویر، همواره دید  
 خواهد بود.



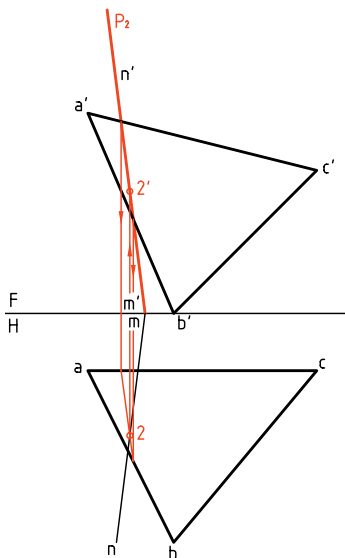
هر خط که با صفحه‌ای برخورد می‌کند، اگر در حال دید  
 است، وقتی به نقطه‌ی برخورد می‌رسد، به ندید تبدیل  
 می‌شود و همین‌گونه، عکس آن هم درست است.

### پ) روش تغییر صفحه

اکنون همین مسئله را با تغییر صفحه حل می‌کنیم. برای این کار کافی است که یکی از صفحات را به صورت منتصب یا قائم در آورد. یعنی صفحات را به حالت یک صفحه‌ی نیمه خاص و یک صفحه‌ی غیرخاص تبدیل کرد. در شکل، با انتخاب یک خط افقی از  $ABC$  و تغییر صفحه‌ی عمودی،  $ABC$  را به یک منتصب تبدیل کرده‌ایم ( $a'b'c'$ ).



برای به‌دست آوردن برخورد یک خط (مانند  $MN$ ) با یک صفحه (مانند  $ABC$ ), می‌توان بر خط یک صفحه‌ی منتصب یا قائم گذراند و:

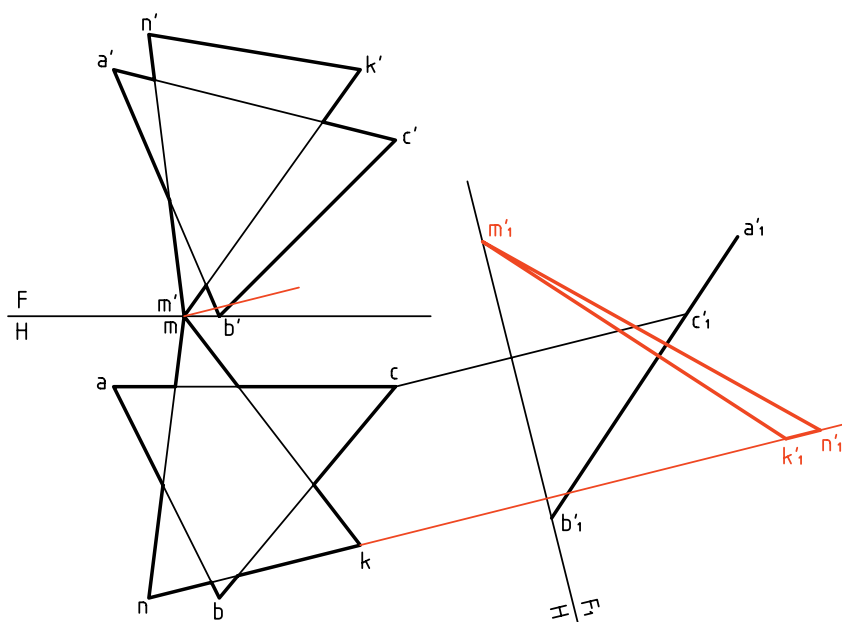


ابتدا فصل مشترک صفحه‌ی منتصب (یا قائم) را با صفحه‌ی مورد نظر به‌دست آورد.  
- از برخورد فصل مشترک دو صفحه با خط مورد نظر، برخورد خط با صفحه را به‌دست آورد.  
به این ترتیب، روش تازه‌ای برای به‌دست آوردن برخورد خط و صفحه در اختیار داریم.

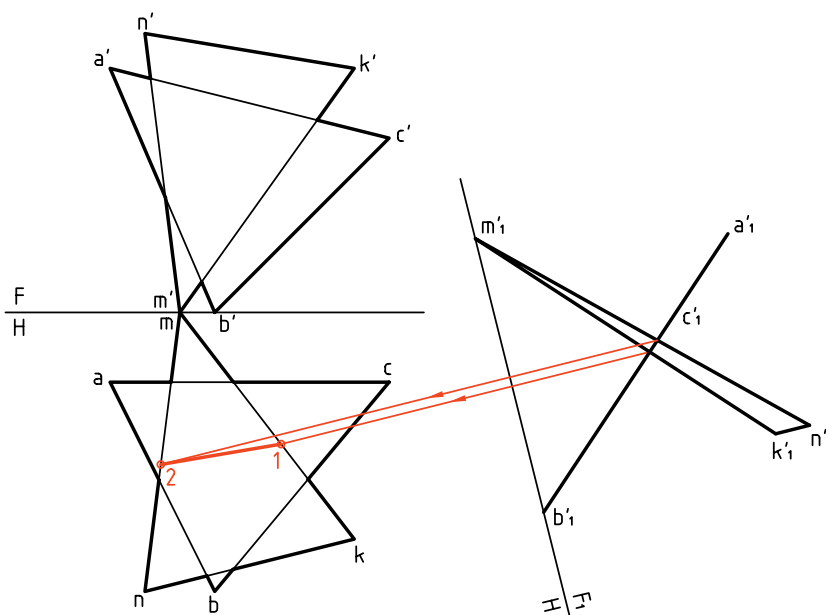
می‌توان با انتخاب  $P_2$ ، برخورد  $\overline{NM}$  را هم به‌دست آورد و پس از کامل کردن برخورد، شکل را دید و ندید کرد.  
با کمی دقت متوجه می‌شوید که در این جا روش‌های «خط کمکی» و «صفحه‌ی کمکی»، تفاوت خیلی زیادی با هم ندارند.



در ادامه نمای روبه‌روی جدید MNK را هم مشخص می‌کنیم که  $m'n'k'$  خواهد بود. روشن است که این نما به شکل مثلث است (یعنی نیازی نیست که به یک خط تبدیل شود).



اضلاع  $m'n'k'$  و  $m'k'$ ، با پاره‌خط  $a'b'c'$ ، در نقاط  $1'$  و  $2'$  برخورد دارند که می‌دانیم همان نقاط برخورد دو صفحه خواهد بود. پس، آن‌ها را به نمای افقی رابط می‌کنیم و نقاط 1 و 2 را مشخص می‌نماییم. می‌توان به کمک رابط، نمای روبه‌رو را هم کامل و نقشه را دید و ندید کرد. (به عهده‌ی هنرجویان)



## دستور کار شماره ۳

به روش خط کمکی برخورد دو صفحه را نشان دهید.



(۳۰ دقیقه)

فیلم آموزشی



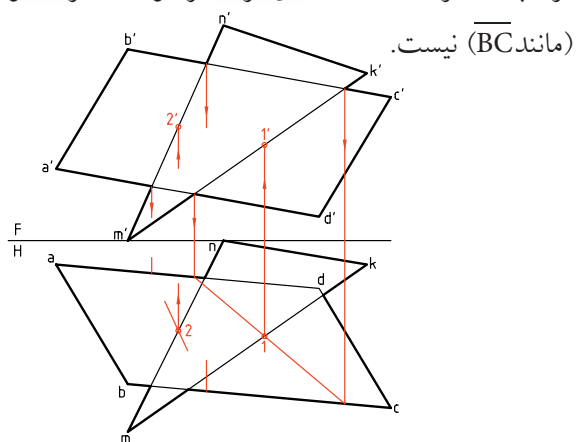
مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

### مراحل ترسیم

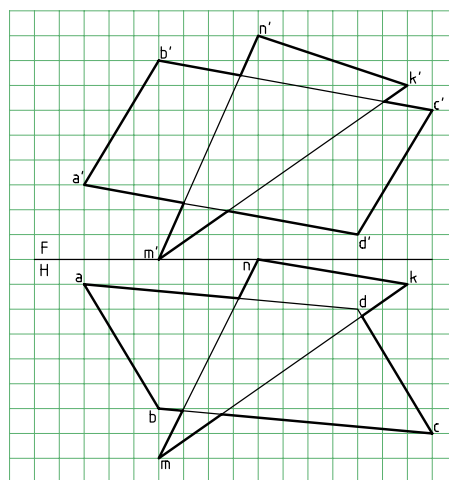
۱. کاغذ A4 را به صورت افقی بچسبانید.

با در نظر گرفتن هر مربع برابر ۱۰، نقشه را رسم کنید. پیش از شروع کار خط‌های  $\overline{AB}$ ،  $\overline{CD}$ ،  $\overline{NK}$  کنار گذاشته می‌شود (چرا؟).

ترتیب، دیگر نیازی به تحقیق برای برخورد دیگر خطوط

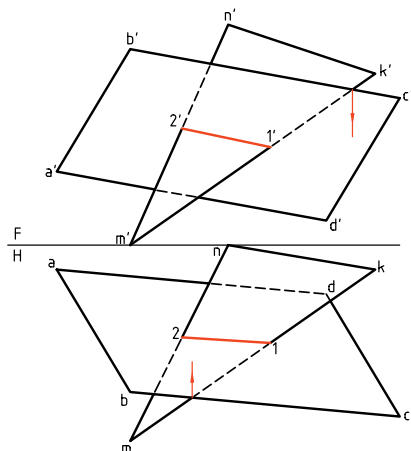


۳. پس از تکمیل برخورد، در نماها، با بررسی چگونگی بُعد در نقطه‌ی ظاهری برخورد، مثلاً برای خط‌های  $\overline{b'c'}$  و  $\overline{k'm'}$ ، نمای روبه‌رو را دید و ندید کنید. آن‌گاه با بررسی چگونگی ارتفاع مثلاً برای نقطه‌ی ظاهری برخورد  $\overline{nm}$  و  $\overline{bc}$ ، نمای افقی را دید و ندید کنید.



۲. احتمال برخورد میان  $\overline{NM}$  و  $\overline{MK}$  از  $\overline{MKN}$  با سطح ABCD و یا خط‌های  $\overline{BC}$  و  $\overline{AD}$  از ABCD با سطح MNK هست. پس، ابتدا  $\overline{MK}$  و سپس  $\overline{MN}$  را انتخاب و چگونگی برخورد را تحقیق کنید.

در نتیجه باید نقاط  $11'$  و  $22'$  را تعیین کنید. به این



## دستور کار شماره ۴

به روش صفحه‌ی کمکی برخورد دو صفحه را نمایش دهید.



(۳۰ دقیقه)

فیلم آموزشی



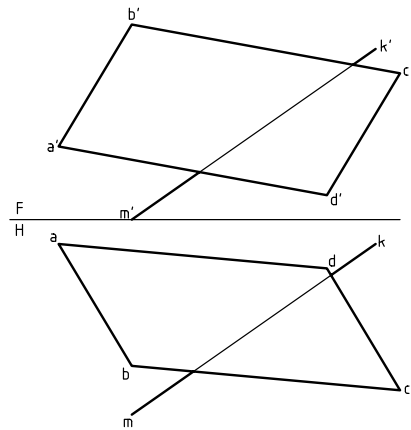
مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

### مراحل ترسیم

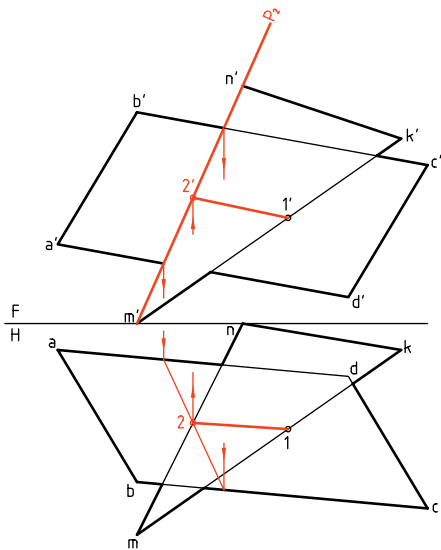
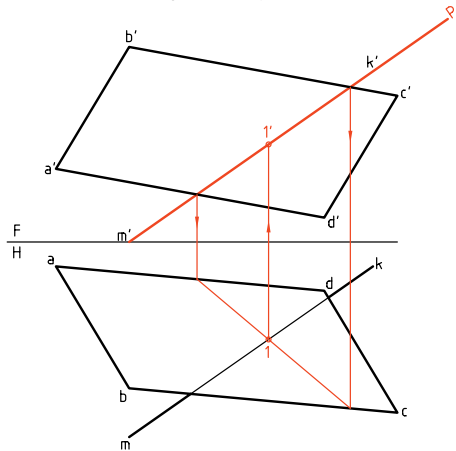
۱. نقشه‌ای را با اندازه‌های داده شده در دستور کار شماره ۳، روی یک برگ  $A^4$  که به صورت افقی چسبانده‌اید رسم کنید (هر مربع برابر ۱۰). همان‌گونه که دیده می‌شود، فعلاً ترسیم دو ضلع مثلث  $MNK$  لازم نیست.

۲. اینک با اتصال ۱ به ۲ و ۱' به ۲'، برخورد را کامل کنید. می‌توانید به شرح مسئله‌ی حل شده در دستور کار ۳، شکل را دید و ندید کنید.

۱. نقشه‌ای را با اندازه‌های داده شده در دستور کار شماره ۳، روی یک برگ  $A^4$  که به صورت افقی چسبانده‌اید رسم کنید (هر مربع برابر ۱۰). همان‌گونه که دیده می‌شود، فعلاً ترسیم دو ضلع مثلث  $MNK$  لازم نیست.



۲. یک صفحه‌ی متصّب  $P$  را بر خط  $m'k'$  بگذرانید.



## دستور کار شماره ۵

به روش تغییر صفحه، برخورد دو صفحه را نشان دهید



(۳۵ دقیقه)

فیلم آموزشی

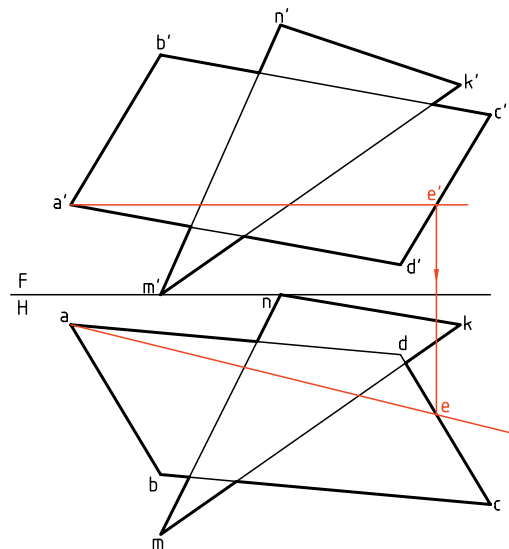
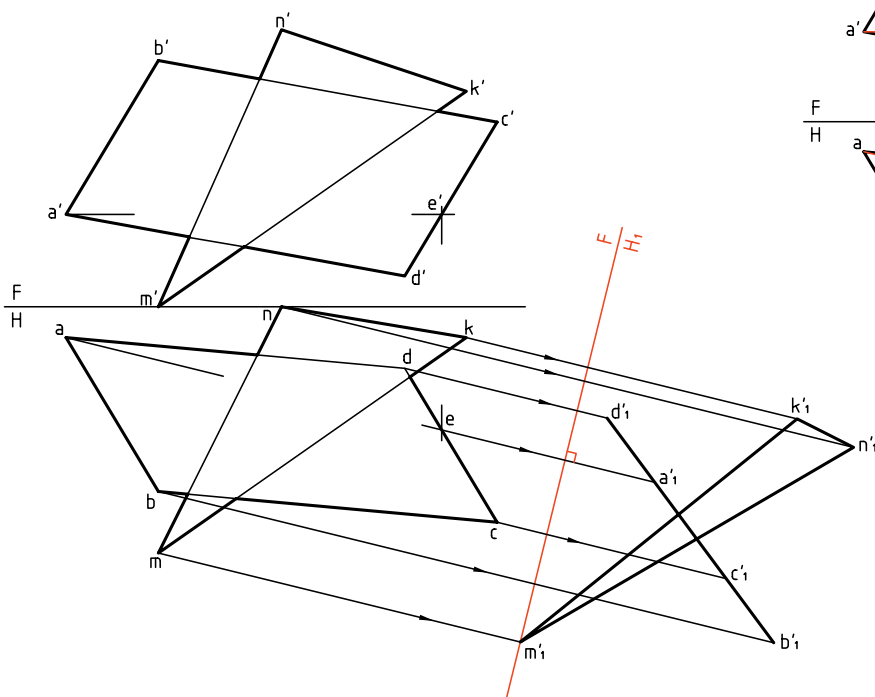


مراحل این دستور را در CD مشاهده کنید.

مراحل ترسیم

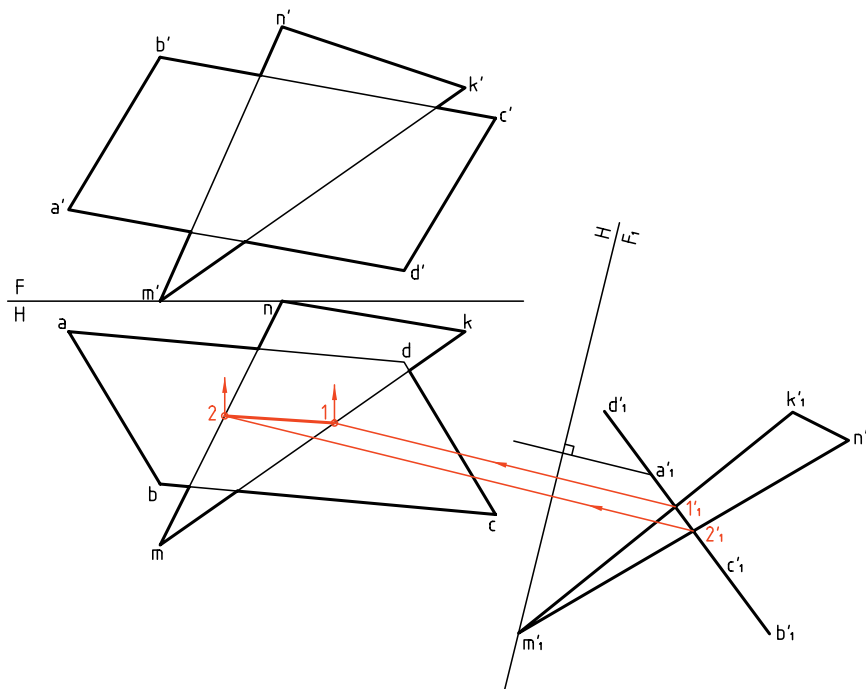
۲. به روش دو گونیا،  $\overline{F_1H}$  را بر  $\overline{ae}$  عمود کنید (در جایی دلخواه). اکنون با استفاده از دو گونیا و بسیار دقیق، رابطها برای تعیین نقاط  $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1$  را رسم کنید. به کمک پرگار تقسیم، ارتفاعات نقاط را از نمای روبه‌رو برداشته به نمای جدید منتقل کنید. نمای جدید  $MNK$  را هم مشخص کنید.

۱. نقشه‌ی روبه‌رو را با اندازه‌های داده شده در دستور کار شماره ۳ مجدداً رسم کنید. کاغذ  $A_4$  را افقی بچسبانید. یک خط افقی از صفحه‌ی  $ABCD$  را انتخاب کنید. این خط را با خط کش تی بکشید. نمای افقی آن را  $\overline{ae}$  را رسم کنید.



(روبه‌رو) تعیین کنید. می‌توان با انجام دادن دید و ندید، نقشه را کامل کرد. (در این شکل، مسئله تا تعیین پاره‌خط  $\overline{12}$  یعنی نمای افقی برخورد، ادامه یافته است.)

۳. نقاط  $1'$  و  $2'$  را در نمای جدید مشخص و از آن‌ها رابط تا نقاط 1 و 2 در نمای افقی به دست آید. اکنون می‌توانید به کمک رابط،  $1'$  و  $2'$  را در نمای اصلی



چکیده مطالب



### اصول رسم برخورد دو صفحه

۱. برخورد دو صفحه‌ی تخت ایجاد یک خط می‌کند که به آن «برخورد» یا «فصل مشترک» می‌گویند.
۲. برای رسم یک فصل مشترک، که یک خط مستقیم است، مشخص کردن دو نقطه از آن لازم است.
۳. اگر یکی از صفحات خاص یا نیمه خاص باشد، برخورد به سادگی رسم می‌شود.
۴. درحالی که هر دو صفحه غیرخاص باشند، سه روش برای رسم برخورد آن‌ها وجود دارد:

- روش خط کمکی

- روش گذراندن صفحه‌ی کمکی

- روش تغییر صفحه

۵. در روش خط کمکی، یک صفحه را در نظر می‌گیریم و هر یک از خط‌های صفحه‌ی دیگر را خطی از آن فرض می‌کنیم.
۶. در روش صفحه‌ی کمکی، یک صفحه را در نظر می‌گیریم و بر هر یک از خط‌های صفحه‌ی دیگر، یک صفحه‌ی کمکی می‌گذرانیم.
۷. در روش تغییر صفحه باید به کمک تغییر صفحه، یکی از صفحه‌ها را به رویه‌ای نیمه خاص تبدیل کنیم.
۸. در هر حال باید نقشه را دید و ندید کنیم.

## ارزشیابی پایانی

### ◀ ارزشیابی نظری

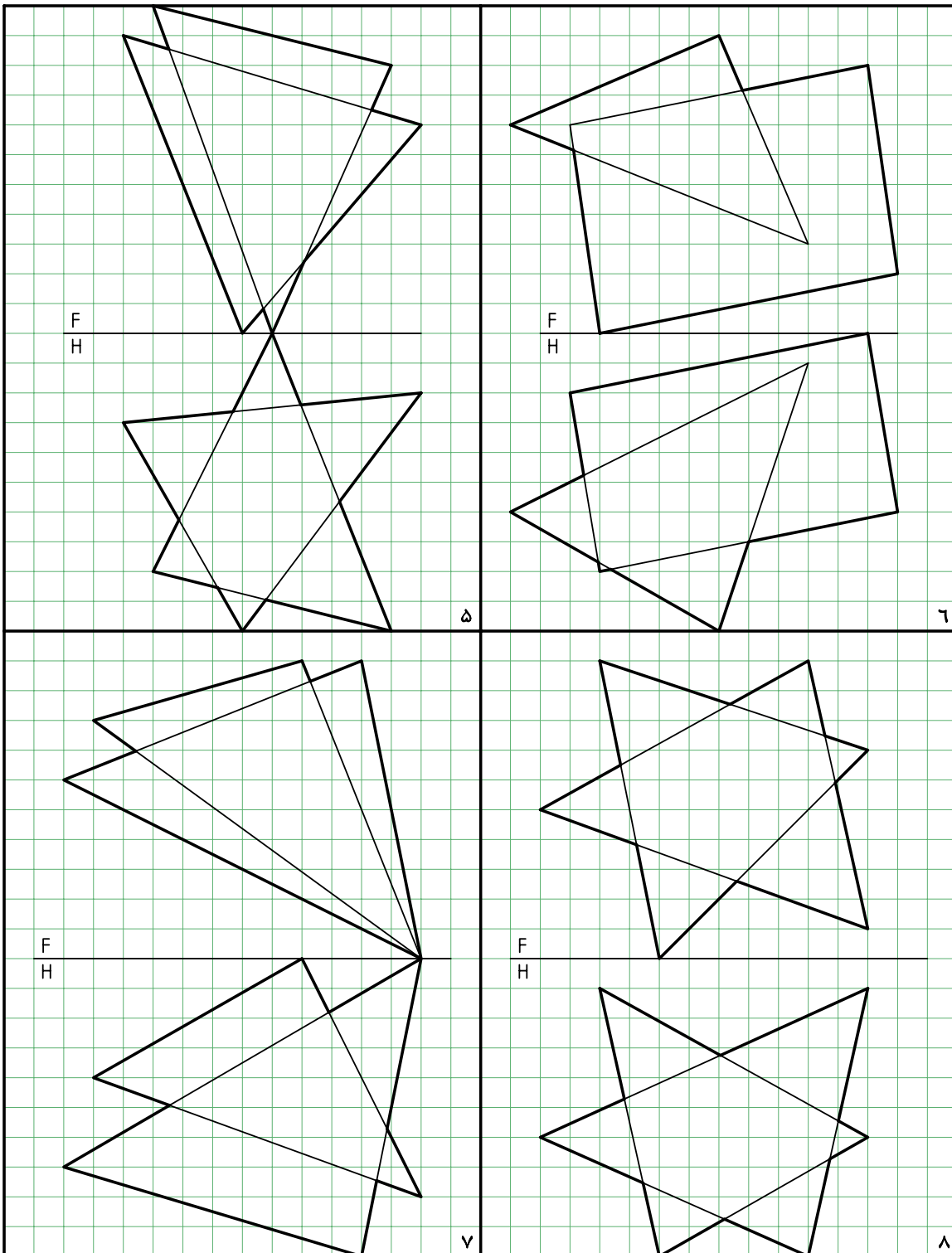
۱. با رسم شکل، مفهوم برخورد و صفحه را شرح دهید.
۲. دو صفحه نسبت به هم چند حالت دارند؟
۳. با رسم شکل، اوضاع گوناگون دو صفحه را بررسی کنید.
۴. روش‌های تعیین برخورد دو صفحه در حالت کلی (هر دو صفحه غیرخاص) کدام‌اند؟
۵. با رسم شکل، چگونگی تعیین برخورد یک صفحه‌ی غیرخاص را با یک صفحه‌ی قائم شرح دهید.
۶. با رسم شکل چگونگی تعیین برخورد و صفحه‌ی غیرخاص را به هر یک از روش‌های خط کمکی، صفحه‌ی کمکی و تغییر صفحه شرح دهید.

◀ ارزشیابی عملی

۱. با رسم هر یک از موارد، روی یک برگ کاغذ A۴، نقشه را کامل کنید. هر مربع را برابر ۱۰ در نظر بگیرید. کاغذ A۴ را عمودی بچسبانید. همه‌ی گوشه‌ها را نام‌گذاری کنید.

<p>F H</p> <p>۱</p>	<p>F H</p> <p>۲</p>
<p>F H</p> <p>۳</p>	<p>F H</p> <p>۴</p>

۲. کاغذ A۴ را عمودی بچسبانید. با رسم هر یک از موارد و نام‌گذاری گوشه‌ها، نقشه را کامل کنید. هر مربع را برابر ۱۰ در نظر بگیرید.





## توانایی ترسیم برخورد صفحه و جسم

◀ پس از آموزش این توانایی، از فراگیر انتظار می‌رود:

- برخورد صفحه با منشور را رسم کند.
- برخورد صفحه با هرم را رسم کند.
- برخورد صفحه با استوانه را رسم کند.
- برخورد صفحه با مخروط را رسم کند.
- برخورد صفحه با کره را رسم کند.

ساعات آموزش		
جمع	عملی	نظری
۲۰٫۵	۱۶	۴٫۵



## پیش آزمون

۱. سطح جانبی منشور را تعریف کنید؟ شکل کل چیست؟
۲. منظور از سطح جانبی هرم چیست؟
۳. نسبت حجم منشور بر هرم چیست؟ (به شرط مساوی بودن قاعده‌ها و ارتفاع‌ها)
۴. دو شکل متشابه و دو شکل متساوی را تعریف کنید. در هر مورد، آن‌ها چه ویژگی‌هایی دارند؟
۵. هرچه درباره‌ی صفحه‌های افقی و منتصب می‌دانید توصیف کنید.
۶. اگر یک منشور را با صفحه‌ای موازی قاعده ببریم، شکل حاصل چگونه است؟
۷. هرم ناقص را تعریف کنید؟
۸. استوانه‌ی دوار چگونه حجمی است؟ مخروط دوار چگونه حجمی است؟
۹. آیا بین استوانه و منشور شباهت‌هایی وجود دارد؟
۱۰. آیا بین مخروط و هرم شباهت‌هایی وجود دارد؟
۱۱. مولد در استوانه و مخروط به چه مفهومی است؟ هر یک از آن‌ها چند مولد دارند؟
۱۲. در کدام یک از احجام، مخروط یا استوانه، همه‌ی مولدها به اندازه‌ی واقعی تصویر می‌شود؟
۱۳. آیا می‌توانیم بگوییم که در استوانه همواره تمام مولدها به اندازه‌ی واقعی دیده می‌شود؟
۱۴. برخورد صفحه و حجم را شرح دهید؟
۱۵. بیضی چگونه شکلی است و چه ویژگی‌هایی دارد؟
۱۶. مخروط ناقص را تعریف کنید.
۱۷. اجزا و بخش‌های یک کره چه نام دارند؟