۲

فصل دوم

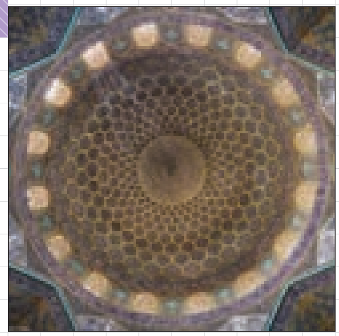
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

عکس: محمدرضا دومیری گنجی

تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم‌نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیرالملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.

درس اوّل

تبدیل‌های هندسی



در زندگی روزمره و بسیاری از پدیده‌های اطرافمان نظیر طراحی پارچه، نقش فرش، کاشی کاری، گچ‌بری و . . . شکل‌های مختلف، طبق الگویی خاص تکرار می‌شود. در این فصل وضعیت‌های مختلفی را که هر شکل مشخص در اثر حرکت مجموعه نقاطش در صفحه پیدا می‌کند، مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

این حرکت‌ها می‌تواند دارای ویژگی‌های خاص قابل تعریف باشد؛ حرکاتی که سال‌های قبل با نمونه‌هایی از آن آشنا شده‌اید و با توجه به نوع این ویژگی‌ها، آنها را انتقال، بازتاب (تقارن محوری) یا دوران نامیده‌اید. انتقال، بازتاب و دوران را **تبدیل‌های هندسی** می‌نامیم.

تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب می‌توانند موقعیت[۱] (جایگاه شکل در صفحه) یا اندازهٔ[۲] شکل را تغییر دهد.
تبدیل‌یافتهٔ یک شکل را، تصویر آن می‌نامیم.

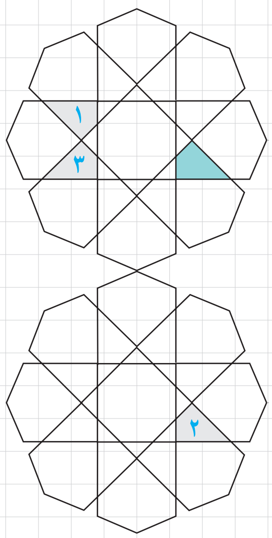
در سال‌های گذشته با مفاهیم بازتاب، انتقال و دوران تا حدودی آشنا شدید. در این فعالیت، این تبدیل‌ها و برخی ویژگی‌های آنها را به‌طور شهودی مرور و یادآوری خواهیم کرد.

فعالیت

۱ــ به تصویر روبه‌رو دقت کنید.
اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافتهٔ چهارضلعی رنگ شده بدانیم :
الف) کدام چهار ضلعی، انتقال‌یافتهٔ چهارضلعی رنگ‌شده است؟

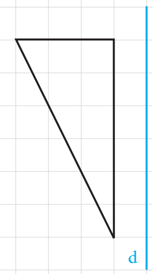
ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ‌شده است؟

پ) کدام شکل، دوران یافتهٔ شکل رنگ‌شده است؟



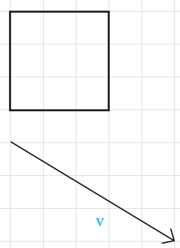
۱ــ Position
۲ ــ Size

۲ــ الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.
(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟)



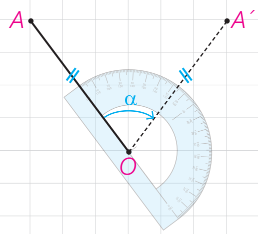
ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟
اندازه‌ها را چطور؟
پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟
ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

۳ــ الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید).
در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

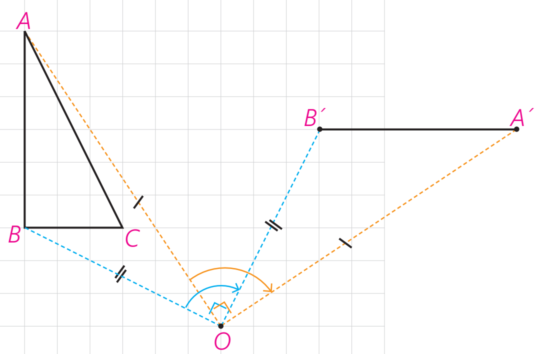


ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟
اندازه‌ها را چطور؟
پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟
ت) آیا در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می‌شود؟

۴ــ در سال‌های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ α، کافی‌است هر نقطه از شکل، مثل نقطهٔ A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره‌خطی به اندازهٔ OA جدا کنیم تا نقطهٔ A' به دست آید.



می‌خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O و ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B را دوران داده‌ایم.



الف) به همین ترتیب تصویر نقطهٔ C را پیدا، و شکل را کامل کنید.
ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟
اندازه‌ها را چطور؟
پ) آیا در این تبدیل، شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط تصویر آن برابر است؟
ت) آیا می‌توانید زاویهٔ دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را حفظ کند؟

به طور شهودی می‌توان دید که بازتاب، انتقال و دوران، می‌توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهند.

در ادامهٔ این فصل با تبدیلی آشنا خواهید شد که در آن بر خلاف سه تبدیل صفحهٔ قبل، اندازهٔ زاویه‌ها حفظ می‌شود ولی اندازهٔ پاره‌خط‌ها تغییر می‌کند. این تبدیل را **تجانس** می‌نامیم.

حال که به‌طور شهودی، برخی ویژگی‌های تبدیل‌های مختلف را مرور کردیم در ادامه با دقت بیشتری به تعریف تبدیل، معرفی، ویژگی‌ها و کاربردهای آن خواهیم پرداخت.

تعریف: تبدیل T[1] در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحهٔ P نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، تصویر دقیقاً یک نقطهٔ A از صفحهٔ P است.

اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می‌نویسیم:

$T: P \longrightarrow P$

$T(A)=A'$

پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که بازتاب، انتقال و دوران طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند؛ یعنی اندازهٔ پاره‌خطی مثل AB در شکل اولیه با اندازهٔ پاره خط $A'B'$ در تصویر آن برابر است. این ویژگی را اصطلاحاً **طولپایی** یا **ایزومتری** می‌نامیم.

تعریف: تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتری) نامیده می‌شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$، آن‌گاه داریم: $AB=A'B'$

پیش از این به‌طور شهودی پذیرفتیم که در تبدیل‌هایی که مرور شد، اندازه زاویه حفظ می‌شود. در این فعالیت با استدلال دقیق‌تری این ادعا را اثبات می‌کنیم.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

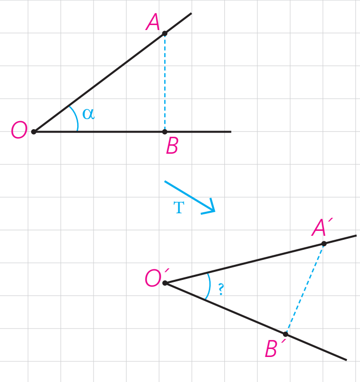
فرض کنید T تبدیلی طولپاست.

و داریم :

$T(A)=A'$

$T(B)=B'$

$T(O)=O'$ و



1_ Transformation

دلیل همنهشتی دو مثلث OAB و O′A′B′ را بنویسید و از آنجا برابری زاویه‌های AOB و A′O′B′ را نتیجه بگیرید.

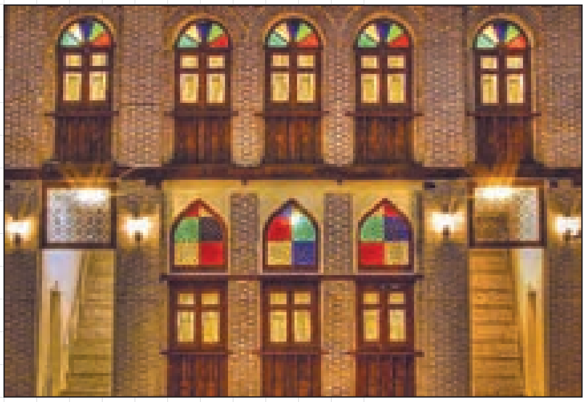
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت :

قضیه: در هر تبدیل طولپا، تبدیل‌یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازهٔ آن است.

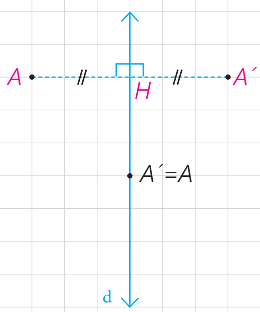
در تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب، می‌توان ثابت کرد که تبدیل‌یافتهٔ هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل‌یافتهٔ یک خط، کافی است تبدیل‌یافتهٔ دو نقطهٔ دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم.

حال با استدلال دقیق‌تری بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را بررسی خواهیم کرد.

بازتاب



همان‌طور که پیش از این اشاره شد برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا A′ به دست آید.



در این صورت A′ را بازتاب یا قرینهٔ A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم :

S[۱](A) = A′

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA′ خواهد بود.

خط d، **خط بازتاب** یا **محور بازتاب** نامیده می‌شود.

۱ـ Symmetry

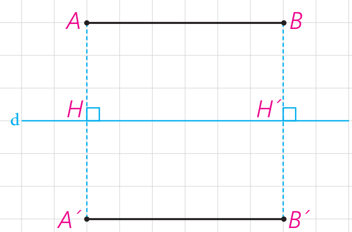
اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.

تعریف: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل‌یافتهٔ آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، **نقطهٔ ثابت تبدیل** می‌نامند.

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

فعالیت

می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیل طولپا است. حالت‌های مختلف یک پاره‌خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازهٔ پاره‌خط با اندازهٔ تصویر آن برابر است.

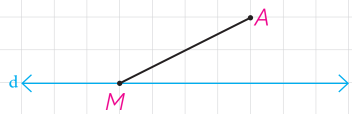


الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است.

بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم.

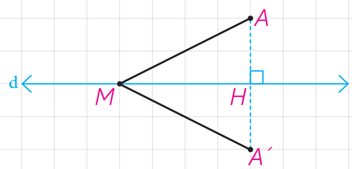
چرا $A'B'$ با خطوط d و AB موازی است؟

پس چهارضلعی $ABB'A'$ یک .... است و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که اضلاع روبه‌رو، دو به دو هم‌اندازه‌اند؛ یعنی : $AB = A'B'$.



ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط داده شده روی خط بازتاب باشد.

(اگر هر دو نقطهٔ ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)



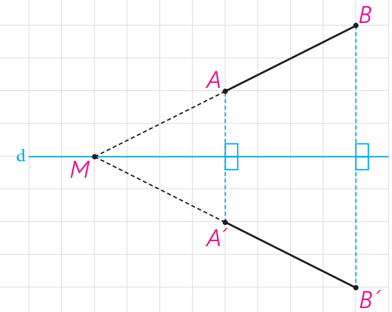
بازتاب A نسبت به خط d، نقطهٔ A' و بازتاب M، خود M است.

به عبارتی : $S(A) = A'$ و $S(M) = M$

آیا می‌توانید به کمک هم نهشتی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA=MA'$ ارائه کنید؟

آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره خط کمک بگیرید.)

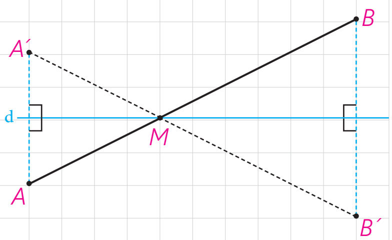
پ) در حالتی که پاره‌خط AB با خط بازتاب d، نه موازی و نه متقاطع باشد، پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطهٔ M قطع کند.
نقطه B' بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا، و پاره‌خط MB' را رسم می‌کنیم.
ادعا می‌کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط MB' واقع می‌شود؛ چرا؟



حال داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = MB - \cdots\cdots \\ A'B' = \cdots\cdots - \cdots\cdots \\ MA = \cdots\cdots \text{ و } MB = \cdots\cdots \text{ با توجه به قسمت ب} \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots$$

ت) در حالتی که پاره‌خط AB خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را نقطه A' می‌نامیم.
پاره‌خط MA' را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟



حال داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AM + \cdots\cdots \\ A'B' = \cdots\cdots + \cdots\cdots \\ AM = \cdots\cdots \text{ و } MB = \cdots\cdots \text{ با توجه به قسمت ب} \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots$$

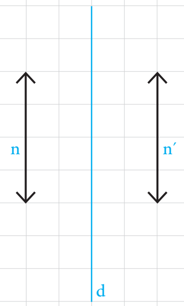
نتیجهٔ این مراحل را می‌توان در قالب این قضیه بیان کرد :

قضیه: در هر بازتاب، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که بازتاب، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

فعالیت

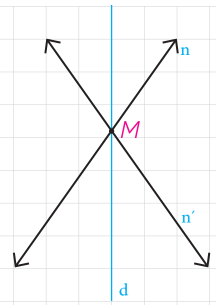
می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می‌کند.
مسئله را برای دو حالت کلی در نظر می‌گیریم : وقتی خط داده شده با خط بازتاب موازی باشد و وقتی با آن موازی نباشد.



الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n' می‌نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟

آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند؟

ب) اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد، خط‌های n ،d و n' در نقطه‌ای مثل M متقاطع می‌شوند؛ پس n و n' موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را .... بنابراین؛



در حالت کلی، بازتاب شیب خط را ....

دیدیم که طولپاها اندازهٔ زاویه را هم حفظ می‌کنند. بنابراین به‌طور کلی هر چندضلعی و تصویر آن تحت تأثیر یک طولپا از جمله بازتاب با هم همنهشت هستند.

در ادامه به کمک ویژگی‌های انتقال و دوران ثابت می‌کنیم که این دو تبدیل نیز طولپا هستند.

کار در کلاس

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :

الف) وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به خط d، کدام نقطه است؟ .... چرا؟

ب) قرینهٔ قرینهٔ هر نقطه چیست؟ ....

در واقع : .... = $S(S(A))= S(......)$ و به زبان ساده‌تر ......=$(A')'$

پ) در هر بازتاب تبدیل یافتهٔ یک مثلث، یک .... است که با مثلث اولیه .... است.

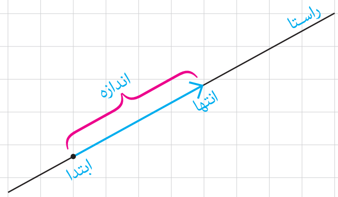
ت) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب .... باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافتهٔ تمام نقاط روی خط، .... است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب .... است.

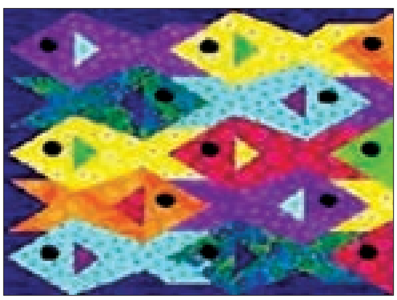
انتقال

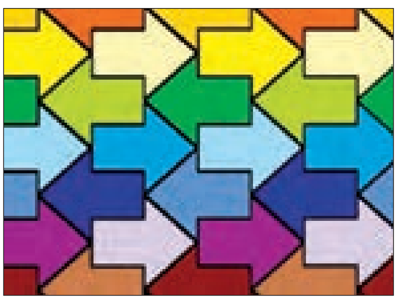
یادآوری

۱ــ در شکل مقابل یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.

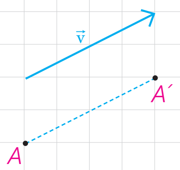


۲ــ دو بردار، که هم‌اندازه، هم راستا و هم‌جهت باشند، دو بردار برابر هستند.





در سال‌های گذشته دیدید که برای انتقال دادن یک شکل، کافی است تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم؛ یعنی اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

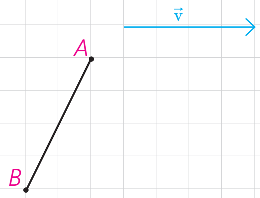


تعریف: انتقال T [1] تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

فعالیت

۱ــ می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولپاست.

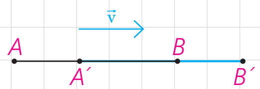
الف) اگر پاره‌خط دلخواه AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد، تبدیل‌یافتهٔ AB را با بردار $\vec{v}$ رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید : $AB=A'B'$.



راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

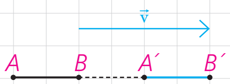
ب) اگر پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره‌خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید : $AB=A'B'$.

(۱)



$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' + \cdots\cdots \\ A'B' = \cdots\cdots + \cdots\cdots \\ \text{طبق تعریف انتقال}\quad AA' = \cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots$$

(۲)



$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' - \cdots\cdots \\ A'B' = \cdots\cdots - \cdots\cdots \\ \text{طبق تعریف انتقال}\quad AA' = \cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots$$

تذکر: در حالتی که طول بردار v با پاره‌خط AB برابر است به کمک هر یک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

بنابراین :

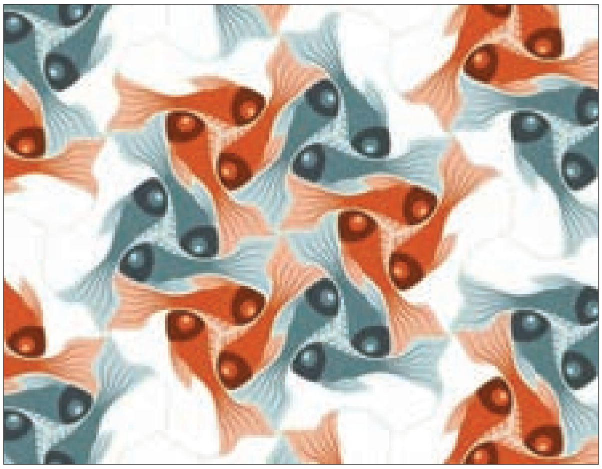
قضیه: در هر انتقال، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند.

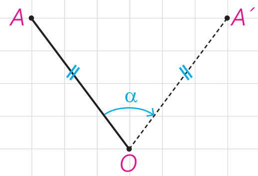
به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحهٔ P که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

۲ــ در هر یک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

۱ــ Translation

دوران



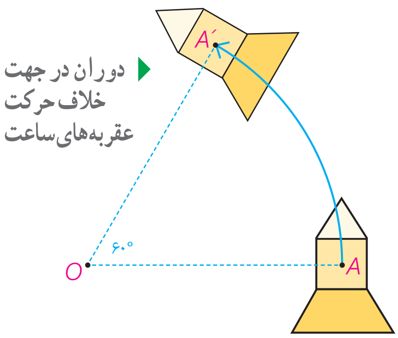


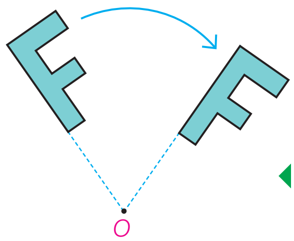
دیدیم که برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ α، هر نقطه از شکل، مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می‌کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم کرده، و روی ضلع دیگر این زاویه، پاره‌خطی به اندازهٔ OA جدا می‌کنیم تا A′ به دست آید.

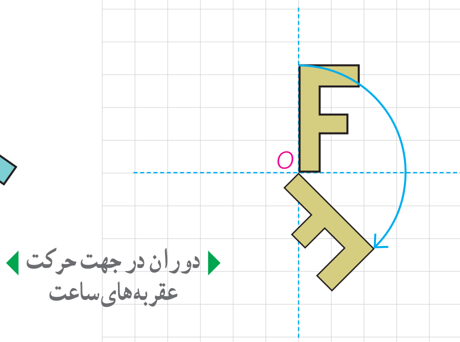
بدین ترتیب :

تعریف: دوران R[1] به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A′ تصویر نقطهٔ A باشد، داریم:

$OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$







فعالیت

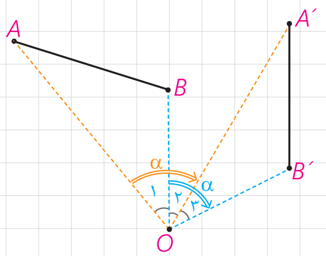
می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیل طولپاست.

برای دوران دادن هر پاره‌خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A′ و B′ حاصل شود. پاره خط A′B′ را رسم می‌کنیم.

۱ـ Rotation

مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم :

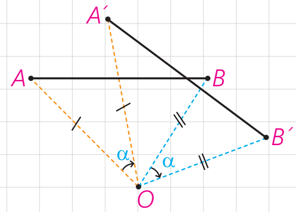
الف) مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویهٔ دوران از زاویهٔ $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد.



با توجه به شکل $O_1+...=O_3+...=\alpha$

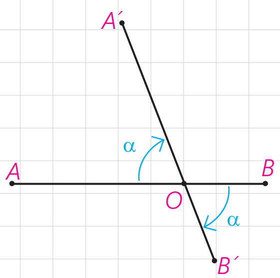
پس می‌توان مدعی شد که .... = ...

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و OA′B′ نشان دهید AB و A′B′ هم‌اندازه‌اند.



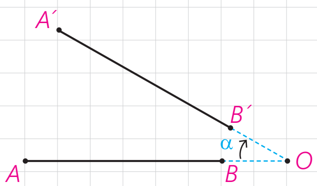
ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره‌خط AB واقع نباشد ولی زاویهٔ دوران از زاویهٔ $\widehat{AOB}$ کمتر باشد، باز هم تساوی $AB=A'B'$ برقرار است.

تذکر: در حالتی که $\widehat{AOB}$ با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.



پ) اگر نقطهٔ O روی پاره خط AB باشد :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AO + ... \\ A'B' = ... + ... \\ \text{طبق تعریف دوران} \quad AO = ... \quad \text{و} \quad OB = ... \end{array}\right\} \Rightarrow ..... = ...$$



ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطهٔ O روی امتداد پارخط AB باشد، حکم برقرار است.

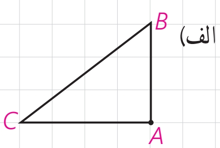
بنابراین :

قضیه: در هر دوران، اندازهٔ هر پاره‌خط و تصویر آن با هم برابرند.

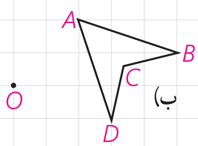
به‌عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $R(A)=A'$ و $R(B)=B'$ داریم : $AB=A'B'$

کاردرکلاس

دوران یافتهٔ هر شکل را رسم کنید.



الف) دوران به مرکز A و با زاویه °۹۰ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

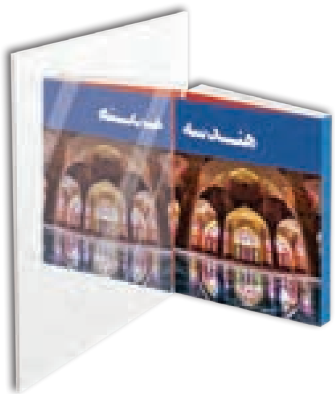


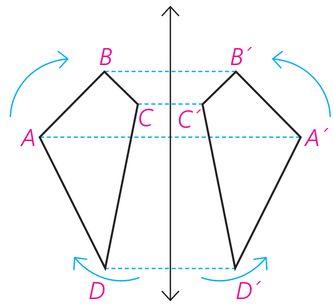
ب) دوران به مرکز O و با زاویه °۱۲۰ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت

تمرین

۱ــ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

۲ــ در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر **چهارضلعی محدب** ABCD تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B، C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



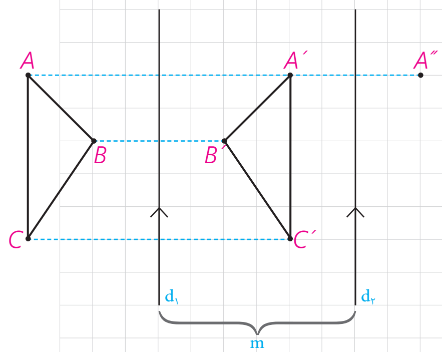


۳ــ در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصلهٔ m از آن قرار دارد و مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.

الف) نشان دهید : $AA''=2m$

ب) اندازهٔ BB'' و CC'' چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

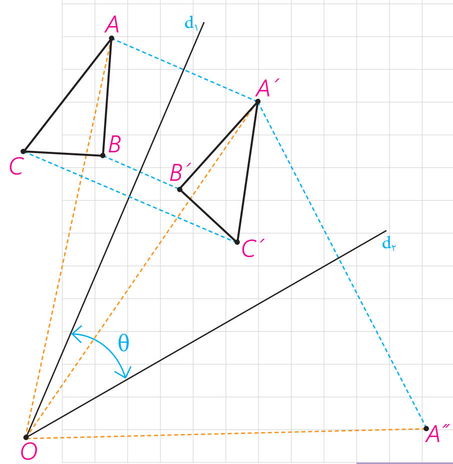


۴ــ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویهٔ θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.

الف) نشان دهید : $\widehat{AOA''}=2\theta$

ب) اندازهٔ $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



تجانس



در شکل‌های متشابه دیدید که طول پاره‌خط‌ها الزاماً با هم یکسان نیستند؛ اما با یک نسبت، اندازهٔ همهٔ پاره‌خط‌ها بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شوند. ساده‌ترین تبدیل از این نوع را **تجانس** می‌نامیم. در تجانس ابعاد شکل با نسبت $k\neq 0$، آن را **نسبت تجانس (مقیاس)** می‌نامیم، بزرگ یا کوچک می‌شود.

تعریف دقیق‌تر تجانس بدین شکل است :

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k\neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه O، M و M' روی یک خط راست باشند.

ب) $OM'=|k|.OM$

پ)
- اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطهٔ O قرار دارند.

مثال: $OM'=2OM$ 

$k=2$

$OM'=\frac{1}{2}OM$ 

$k=\frac{1}{2}$

- اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

مثال: $OM'=2OM$ 

$k=-2$

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM'=k.OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطهٔ M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطهٔ O بین نقاط M و M' باشد و $OM'=|k|.OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k، نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M به نسبت k و نقطهٔ M مجانس نقطهٔ M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

فعالیت

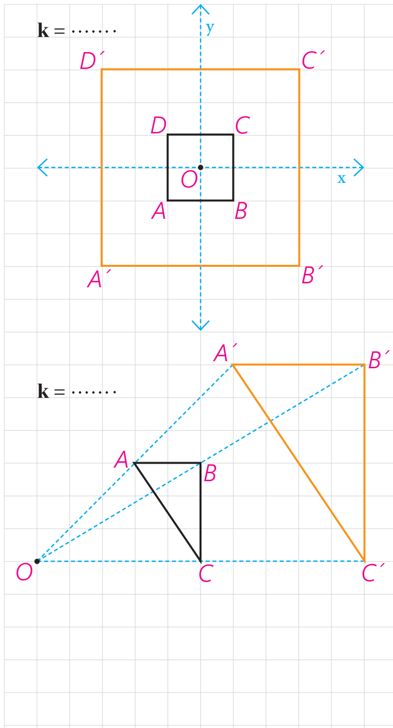
۱ــ این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.

الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

ب) آیا تجانس طولپاست؟ چرا؟

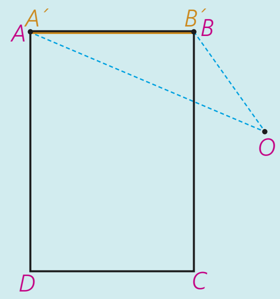
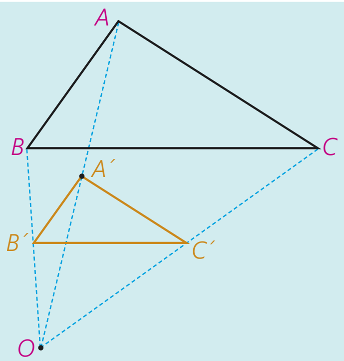
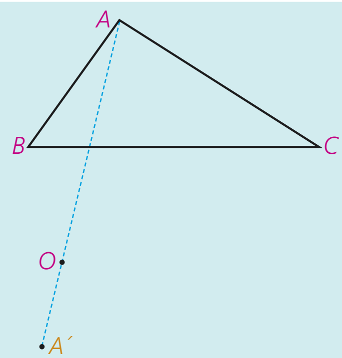
پ) در این شکل‌ها، طول هر پاره‌خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌توان رسید؟

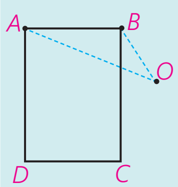
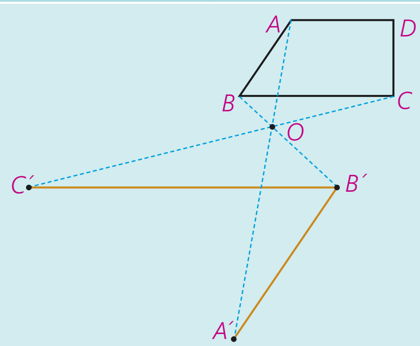
ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟



۲ــ در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به‌عبارتی : $k>۱$. حال مسئله را برای مقادیر مختلف k بررسی می‌کنیم.

الف) در هر حالت مراحل باقی‌مانده را کامل کنید.

k	k = ۱	۰ < k < ۱	−۱ < k < ۰
مثال		$k=\frac{۱}{۲}$	$k=-\frac{۱}{۳}$
			

k	k = −۱	k < −۱
مثال		k = −۲
		

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید :

			طولپاست	اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	مساحت شکل حفظ می‌شود.
تجانس	$k > ۰$	$k > ۱$					
		$k = ۱$					
		$۰ < k < ۱$					
	$k < ۰$	$-۱ < k < ۰$					
		$k = -۱$					
		$k < -۱$					

پ) شرط اینکه تجانس طولپا باشد، این است که ....

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می‌کند، یعنی خطوط AA'، BB' و ... نسبت به هم چه وضعی دارند؟

در تجانس به مرکز O و نسبت k:
اگر $k > ۰$ تجانس را، **تجانس مستقیم** می‌نامیم.
اگر $k < ۰$ تجانس را **تجانس معکوس** می‌نامیم.
اگر $|k| < ۱$ تصویر شکل .... می‌شود و آن را **انقباض** می‌نامیم.
اگر .... تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را **انبساط** می‌نامیم.

حال که به طور شهودی با تجانس و چگونگی عملکرد آن روی شکل‌های هندسی آشنا شدید با استدلال دقیق‌تری ثابت خواهیم کرد که تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط و اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور، تجانس D[1]، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم؛ دو حالت اتفاق می‌افتد :

الف) نقطهٔ O روی خط AB است.

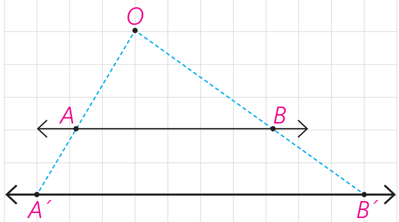
حل : در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B، روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.

ب) نقطهٔ O غیر واقع بر خط AB است.

حل : در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم :

$$\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = \text{..........} \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \text{....}$$

$\Rightarrow AB \| A'B'$ (چرا؟)



پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی‌اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین :

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

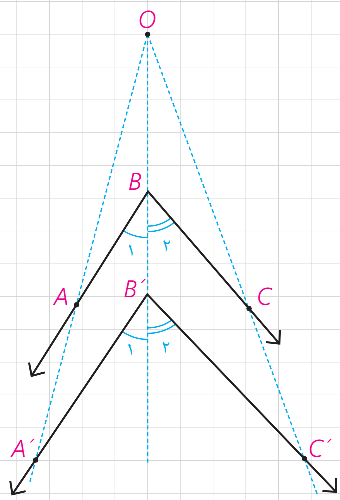
فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه $\widehat{ABC}$ را در نظر می‌گیریم.

مجانس این زاویه، یعنی زاویه $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می‌کنیم.

به کمک قضیهٔ قبل و شکل داده شده، ثابت کنید : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.



نتیجهٔ این فعالیت را در قالب قضیهٔ زیر مطرح می‌کنیم :

قضیه: تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

۱ــ Dilation

کاردرکلاس

۱ــ الف) فرض کنید پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد؛ نشان دهید : $\frac{A'B'}{AB}=|k|$

ب) اگر nضلعی $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ مجانس nضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو nضلعی با هم متشابه‌اند.

۲ــ با توجه به ویژگی‌های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

فعالیت

پیش از این دیدیم که اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A)=A'=A$؛ این نقاط را نقاط .... نامیدیم. اما برخی از تبدیل‌ها، **هر نقطهٔ صفحه** را به **خود آن نقطه** نظیر می‌کند؛ چنین تبدیل‌هایی را **تبدیل همانی** می‌نامیم.

تعریف: تبدیل T را **تبدیل همانی** گوییم، هر گاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحهٔ P داشته باشیم $T(A)=A$.

معمولاً تبدیل‌های همانی را با I نمایش می‌دهند؛ پس $I(A)=A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

ب) آیا تبدیل همانی طولپاست؟

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱ــ انتقال غیرهمانی :

۲ــ دوران غیرهمانی :

۳ــ تجانس غیرهمانی :

کار در کلاس

۱ــ درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.
بازتاب					
انتقال					
دوران					
تجانس					

تمرین

۱ــ در تجانسی با نسبت $k<0$ و مرکز تجانس O نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

۲ــ دایره $C(O,R)$ و نقطهٔ M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطهٔ M در هر حالت رسم کنید.

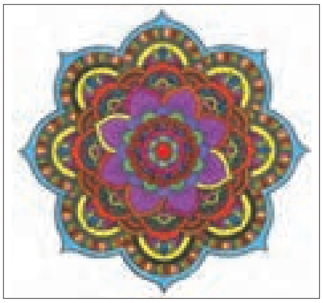
الف) $k=2$

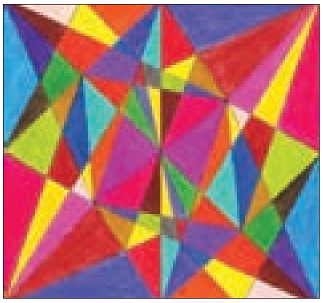
ب) $k=-2$

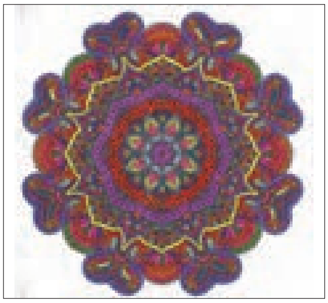
پ) $k=\frac{1}{2}$

مجله ریاضی

تصاویر زیر، نمونه‌هایی از نقاشی‌های دانش‌آموزان است که استفاده از بازتاب در آن نقشی عمده دارد.





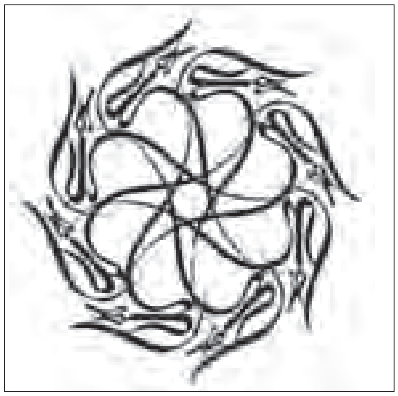


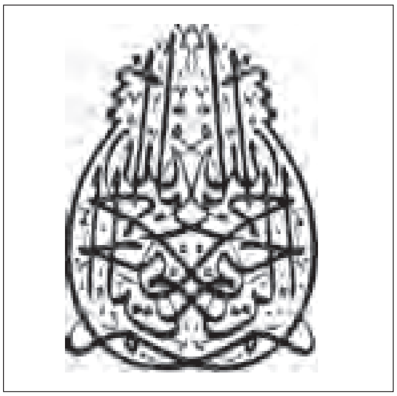
درس دوم

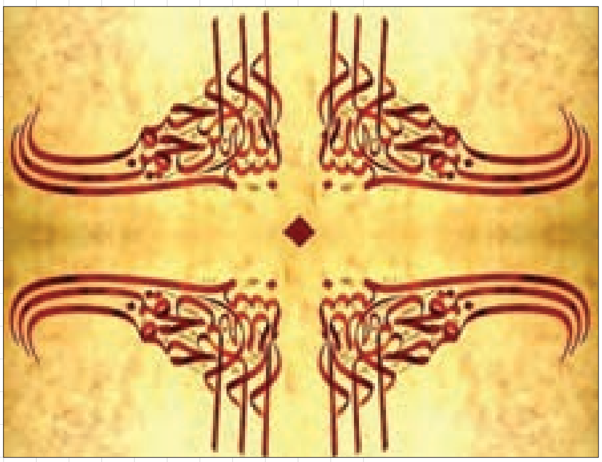
کاربرد تبدیل‌ها

تبدیل‌های هندسی شامل بازتاب، انتقال، دوران و تجانس به طور مستقیم و غیرمستقیم در زندگی واقعی کاربرد دارد؛ برای مثال در سال‌های گذشته با کاربرد برخی تبدیل‌ها در کاشی‌کاری آشنا شدید. آیا می‌توانید با تأمل در محیط اطراف خود به نمونه‌هایی اشاره کنید که تبدیل‌های هندسی در آن به‌کار رفته‌اند؟

به این تصاویر دقت کنید. کدام‌یک از تبدیل‌های هندسی بر زیبایی خوشنویسی‌های زیر افزوده است؟





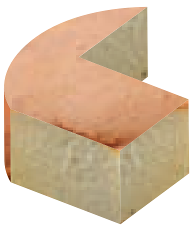


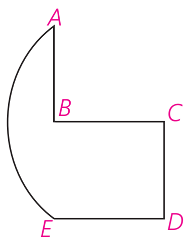
کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

بازتاب علاوه بر شاخه‌های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی‌های بازتاب همان ویژگی‌های آینهٔ تخت است. کاربردهای دیگری از بازتاب را در ادامه خواهیم دید.

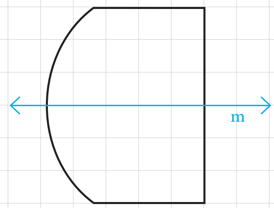
دریاچه‌ای در قلهٔ سبلان | استان اردبیل

۱ــ می‌خواهیم کیکی به شکل زیر را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع BCDE و کمان AE از یک دایره تشکیل شده است به طوری‌که A و B و E روی یک خط هستند.

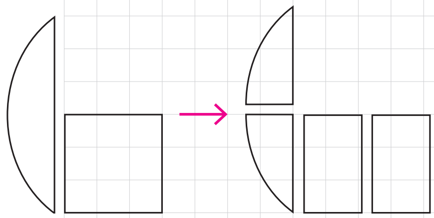




اگر نمای بالای کیک به شکل روبه‌رو بود، تقسیم آن کار ساده‌ای بود؛ چرا که می‌توانستیم از روی خط بازتاب m کیک را برش بزنیم و آن را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کنیم.

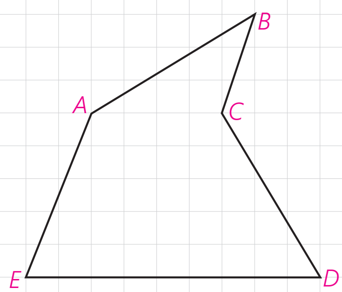


این شکل، راه ساده‌ای برای برش زدن کیک و تقسیم آن به دو سهم برابر ارائه می‌کند. توضیح دهید که بازتاب به حل این مسئله چه کمکی کرده است.

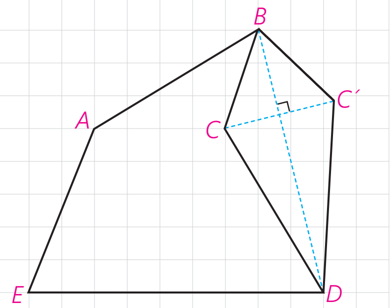


۲ــ یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل **هم‌پیرامونی** یا **هم‌محیطی** معروف‌است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم.

برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم. حال می‌خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازهٔ حصارکشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.



به کمک تصویر روبه‌رو توضیح دهید که این عمل را چگونه می‌توان انجام داد.

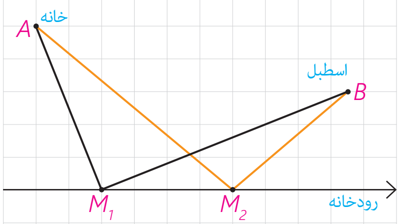


چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC′DE یکی است؟

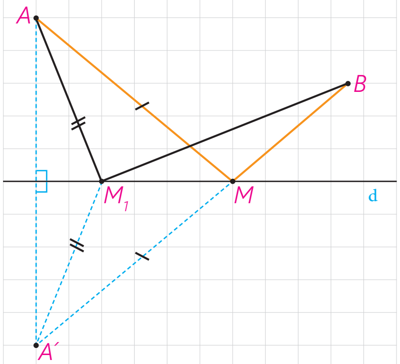
مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

الف) هرون، ریاضی‌دانی است که به او دایرةالمعارف ریاضی و فیزیک لقب داده‌اند. او که در فاصلهٔ زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می‌کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد.

او با این مسئله روبه‌رو شده بود که:



«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبهٔ مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل[۱] ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»



مسئله، پیدا کردن نقطهٔ M روی خط d است به گونه‌ای که AM+MB کمترین مقدار ممکن باشد.

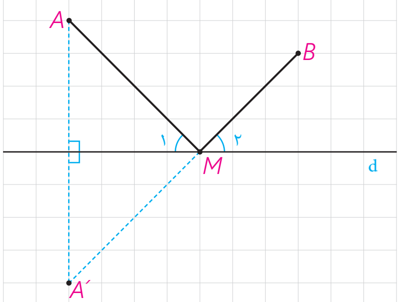
هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A' نامید. خط فرضی $A'B$ خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و AM+MB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

با هم دلیل ادعای هرون را بررسی می‌کنیم:

۱ــ برای هر نقطهٔ دلخواه دیگری نظیر $M_{۱}$ داریم $M_{۱}A= M_{۱}A'$ (و به همین ترتیب $AM=A'M$)؛ چرا؟

۲ــ در مثلث $A'M_{۱}B$ داریم $A'M_{۱} +M_{۱}B > A'B$؛ چرا؟

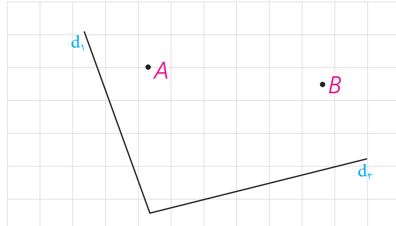
از تساوی $A'B=A'M+MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.



سؤال: در همین مسئله فرض کنید که d یک آینهٔ تخت و A یک نقطهٔ نورانی است. نشان دهید بازتاب شعاع نوری AM از نقطهٔ B می‌گذرد (به عبارتی نشان دهید که $\widehat{M_{۱}} = \widehat{M_{۲}}$).

۱ــ جایی سرپوشیده برای نگهداری چهارپایان به ویژه اسب

ب) دو خط متقاطع $d_{۱}$ و $d_{۲}$ و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض‌اند. چگونه می‌توان با طی کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ A آغاز به حرکت کرد و پس از برخورد با دو خط $d_{۱}$ و $d_{۲}$ از نقطهٔ B گذشت؟



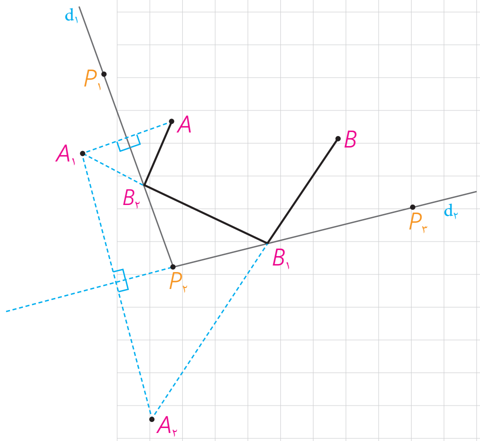
حل :

برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر به روش زیر عمل می‌کنیم :

قرینهٔ A را نسبت به خط $d_{۱}$، نقطهٔ $A_{۱}$ و قرینهٔ $A_{۱}$ را نسبت به خط $d_{۲}$، نقطهٔ $A_{۲}$ می‌نامیم.

از $A_{۲}$ به B وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با $d_{۲}$، $B_{۱}$ می‌نامیم.

به همین ترتیب از $B_{۱}$ به $A_{۱}$ وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با $d_{۱}$، $B_{۲}$ می‌نامیم. از A به $B_{۲}$ وصل می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که مسیر مورد نظر $AB_{۲}B_{۱}B$ است.

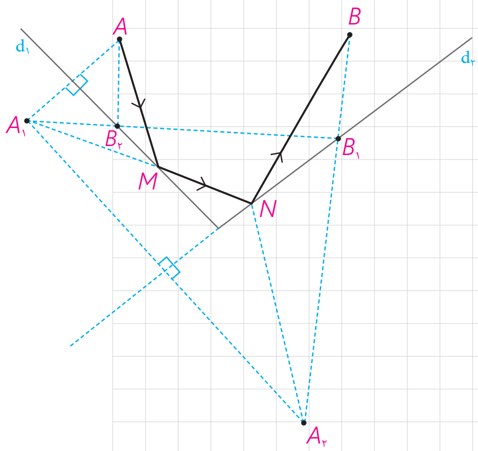


تذکر: این مسئله را فقط در حالتی مطرح می‌کنیم که A و $A_{۱}$ هر دو در یک طرف خط $P_{۲}P_{۳}$ باشند و پاره‌خط‌های $A_{۲}B$ و $P_{۲}P_{۳}$ متقاطع باشند.

کافی است نشان دهیم این مسیر از تمام مسیرهای دیگر کوتاه‌تر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که طول این مسیر با طول پاره‌خط $A_{۲}B$ برابر است.

(۱)

$$\left.\begin{array}{l} A_{۱}B_{۲} = AB_{۲} \Rightarrow AB_{۲} + B_{۲}B_{۱} = \dots \\ A_{۱}B_{۱} = A_{۲}B_{۱} \Rightarrow A_{۱}B_{۱} + B_{۱}B = \dots \end{array}\right\} \Rightarrow AB_{۲} + B_{۲}B_{۱} + B_{۱}B = \dots$$



(۲) حال مسیر دلخواه دیگری مانند AMNB را درنظر می‌گیریم؛ داریم :

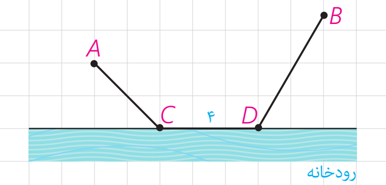
$$AM = \dots\dots \Longrightarrow AM + MN = \dots\dots$$

$$A_{۱}N = \dots\dots \Longrightarrow \underbrace{AM + MN}_{A_{۱}N} + NB = \dots\dots + NB$$

حال با توجه به مثلث $BNA_{۲}$ داریم :

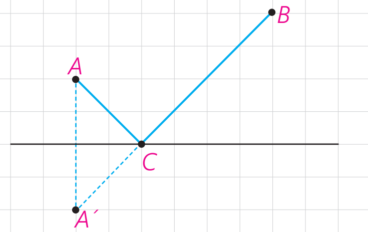
طول مسیر اول ☐ طول مسیر دوم

پ) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری‌که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

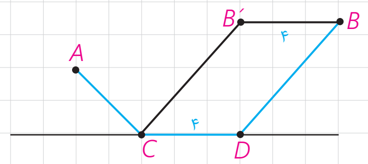


حل : مسئله را در چند مرحله حل می‌کنیم.

۱ــ اگر جادهٔ ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر CD=۰، این مسئله به کدام‌یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده‌اید؟



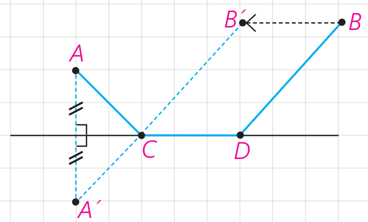
۲ــ با توجه به شرایط مسئله، مسیر موردنظر، باید مسیری به شکل مسیر ACDB باشد؛ اما :



(چرا؟) طول مسیر $ACB'B$ = طول مسیر ACDB

بنابراین : ۴ + طول مسیر ACB' = طول مسیر ACDB

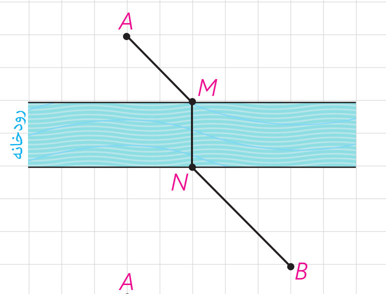
۳ــ پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن به شکل ACDB مسیر را به گونه‌ای انتخاب کنیم که طول ACB' کوتاه‌ترین طول ممکن باشد.



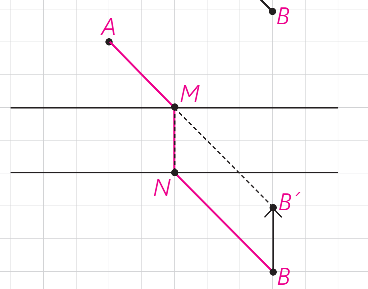
۴ــ به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه‌رو توضیح دهید که رسم کوتاه‌ترین مسیر ACDB چگونه است.

کار درکلاس

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری‌که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟



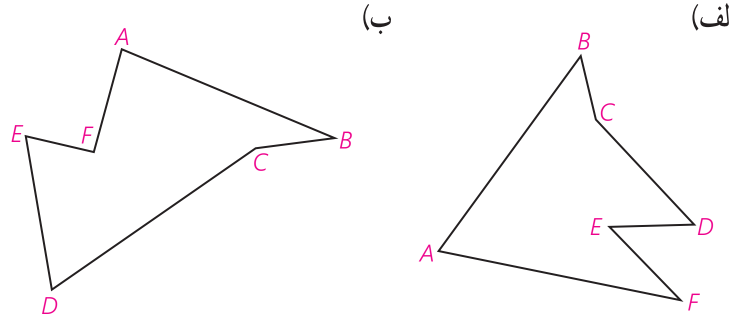
راهنمایی: به کمک فعالیت قبل و با توجه به تصویر داده شده، طریقهٔ رسم مسیر AMNB را شرح دهید و مشخص کنید چرا این مسیر، کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

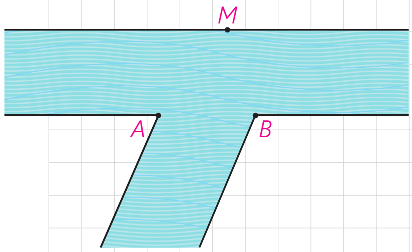


تمرین

۱ــ دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

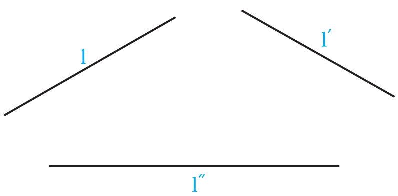
الف) ب)





۲ــ می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است. اسکلهٔ M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

۳ــ سه خط دو به دو ناموازی l و l' و l'' در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به‌طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l'، و موازی l'' باشد.

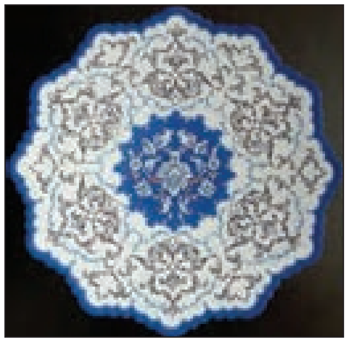


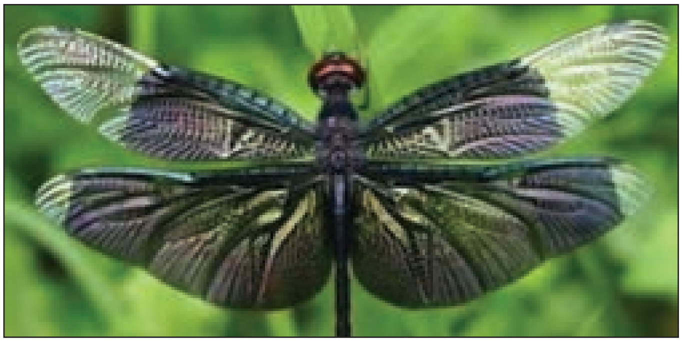
۴ــ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K=-\frac{1}{2}$ باشد.

الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

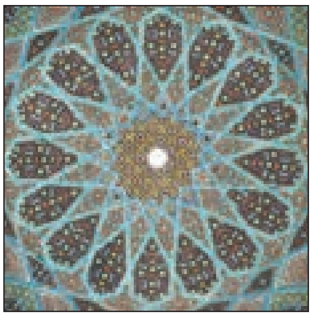
ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

تبدیل‌های تقارنی یک شکل هندسی





در بسیاری از مناظر طبیعی، گیاهان و جانوران، ساختار اتم‌ها، معماری، هنرهای مختلف دستی و نیز شکل‌های هندسی می‌توان نوعی نظم و تعادل مشاهده کرد. در این درس تبدیل‌هایی را مرور می‌کنیم که یک شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. چنین تبدیل‌هایی را تبدیل‌های تقارنی آن شکل می‌نامیم. فعالیت صفحهٔ بعد برای روشن‌تر شدن این موضوع، طراحی شده است.



مثلث متساوی‌الاضلاعی را در نظر بگیرید :

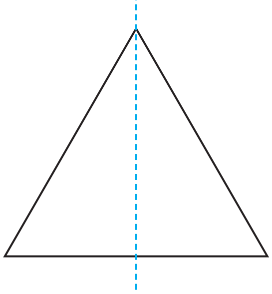
الف) بازتاب این مثلث نسبت به خط داده شده چگونه است؟...............

ب) آیا تحت این بازتاب تصویر هر نقطه از شکل لزوماً خود آن نقطه است؟.........

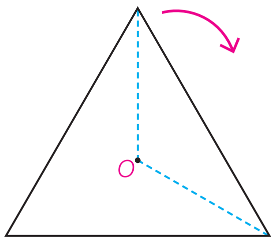
پ) آیا تحت این بازتاب، تصویر هر نقطه از شکل، روی خود شکل است؟

ت) آیا خط بازتاب دیگری برای این مثلث سراغ دارید؟ ....

این مثلث چند خط بازتاب دارد؟........



ث) آیا غیر از بازتاب، تبدیل دیگری سراغ دارید که هر نقطه از شکل را به نقطه‌ای از همان شکل ببرد؟...........



برای مثال آیا با مرکز O (نقطه همرسی نیمسازها) می‌توانید دوران‌هایی معرفی کنید که شکل را بر خودش منطبق کند؟.........

اگر $0° < \alpha \leq 360°$ زاویهٔ دوران باشد، چند دوران به مرکز O و زاویهٔ α می‌توانید مشخص کنید؟ ....

تعریف: اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل **تقارن بازتابی (خطی)** دارد و اگر آن شکل تحت دورانی با زاویهٔ $0° < \alpha \leq 360°$ بر خودش منطبق شود، گوییم **تقارن دورانی (چرخشی)** دارد.

همان‌گونه که در این فعالیت دیدید در مثلث متساوی‌الاضلاع، سه بازتاب و سه دوران متفاوت می‌توان معرفی کرد که نقاط این مثلث را به نقاطی از همین مثلث نظیر کند.

به عبارتی، تحت این تبدیل‌ها تصویر این مثلث بر خودش منطبق می‌شود؛ چنین تبدیل‌هایی را **تبدیل‌های تقارنی** این مثلث می‌نامیم. در این کتاب برای شناسایی تبدیل‌های تقارنی یک شکل، شکل را تنها در یک جهت (خلاف یا موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم؛ با این تعریف، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای ۶ تبدیل تقارنی است.

دقت کنید که دوران $360°$، تبدیل انتقال با بردار صفر و تبدیل تجانس با نسبت تجانس $k=1$، هر شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند که پیش از این، آنها را «تبدیل‌های همانی» نامیدیم. بنابراین تمام تبدیل‌های همانی فقط تبدیل تقارنی به شمار می‌رود.

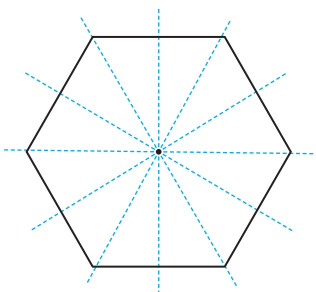
تعریف: تبدیل طولپای T را **تبدیل تقارنی** شکل F می‌نامیم به شرط اینکه تبدیل‌یافتهٔ شکل F، تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود؛ یعنی داشته باشیم: $T(F) = F$

تعریف: تقارن دورانی با زاویه $180°$ را **تقارن مرکزی** نیز می‌نامند. در این حالت مرکز دوران را **مرکز تقارن** شکل می‌گویند.

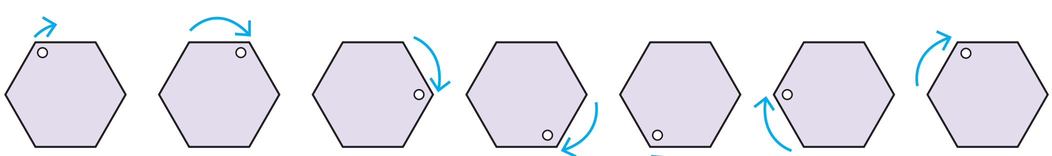
مثال

شش ضلعی منتظم، ۶ تقارن بازتابی و ۶ تقارن دورانی دارد.

تقارن‌های بازتابی :



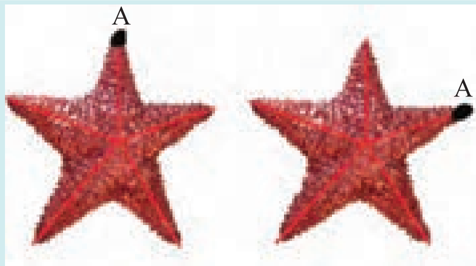
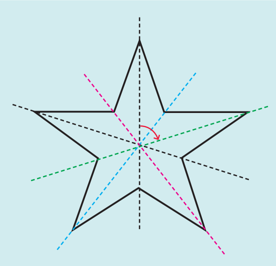
تقارن‌های دورانی :



همان‌طور که اشاره شد تقارن دورانی با زاویهٔ °۳۶۰، انتقال با بردار صفر و تجانس با نسبت تجانس k=۱ تبدیل‌های همانی هستند.

تبدیل‌های همانی را تقارن همانی نیز می‌نامند؛ با این تعریف، هر شکلی دارای تقارن همانی است.

شکل‌های زیر را به عنوان تصویر دو بعدی در نظر بگیرید و جدول را کامل کنید :

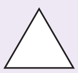
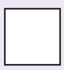
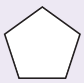
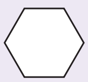
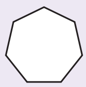
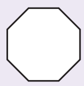
		
تقارن‌های دورانی	تعداد تقارن‌های بازتابی	تعداد کل تقارن‌ها
°۷۲،	....	....

تعداد تبدیل‌های تقارنی را در هر شکل مشخص کنید.

الف) پاره‌خط　　　　ب) خط　　　　پ) دایره

مسائلی برای علاقمندان

۱ــ الف) با تکمیل جدول زیر تعداد تبدیل‌های تقارنی nضلعی منتظم را مشخص کنید.

nضلعی منتظم	n=۳	n =۴	n=۵	n=۶	n=۷	n=۸	...	n
								
تعداد تقارن‌های بازتابی								
تعداد تقارن‌های دورانی								
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی								
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟								

ب) nضلعی منتظم در چه صورتی مرکز تقارن دارد؟

پ) الگویی برای پیدا کردن زاویه‌های دوران در تقارن‌های دورانی یک nضلعی منتظم ارائه کنید.

۲ــ تقارن‌های خطی و دورانی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مثلث متساوی‌الساقین و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را مشخص کنید و در جدولی بنویسید.

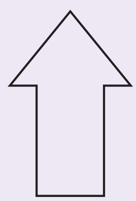
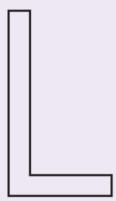
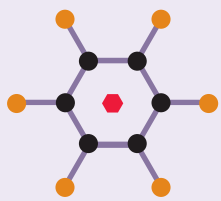
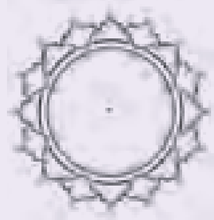
کدام یک از این شکل‌های هندسی، مرکز تقارن دارند؟

۳ــ الف) شکلی رسم کنید که خط بازتاب داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد (یعنی تقارن خطی داشته‌باشد، اما تقارن دورانی غیرهمانی نداشته باشد).

ب) شکلی رسم کنید که مرکز تقارن داشته باشد، ولی خط بازتاب نداشته باشد (یعنی تقارن دورانی غیرهمانی داشته‌باشد، اما تقارن خطی نداشته باشد).

۴ــ نشان دهید اگر شکلی دو خط بازتاب عمود بر هم داشته باشد، محل تلاقی این دو خط، مرکز تقارن شکل است (در واقع هر شکل که دارای دو تقارن بازتابی باشد که دو خط بازتاب آن بر هم عمود باشند، دارای تقارن دورانی است).

۵ــ جدول زیر را کامل کنید.

شکل					
تقارن بازتابی					
تقارن دورانی					
تعداد تبدیل‌های تقارنی					