۳

فصل سوم

روابط طولی در مثلث

عکس: فرهاد کولی‌وند

محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. از جملهٔ آنها محاسبهٔ ارتفاع کوه‌های بلند است. رشته‌کوه اشترانکوه که ارتفاع آن در برخی نقاط به بیش از ۴۰۰۰ متر می‌رسد در استان لرستان واقع است.

تئودولیت (زاویه‌یاب) یکی از ابزارهای لازم برای این‌گونه محاسبات عملی است.

درس اوّل

قضیهٔ سینوس‌ها

یادآوری

منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم :

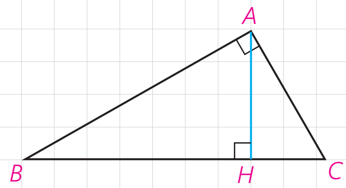
۱ــ $AB^2=BC.BH$

۲ــ $AC^2=BC.CH$

۳ــ $AH^2=BH.CH$

۴ــ $AB^2+AC^2=BC^2$

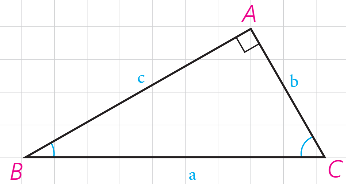
۵ــ $AB.AC=BC.AH$



اینک به ادامهٔ بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.

فعالیت ۱

در کتاب ریاضی ۱ (پایهٔ دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، جاهای خالی را پر کنید :



$$\mathrm{Sin}B=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow\frac{b}{\mathrm{Sin}B}=\cdots$$

$$\mathrm{Sin}C=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow\frac{c}{\mathrm{Sin}C}=\cdots$$

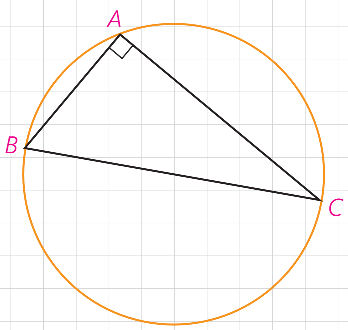
$$\mathrm{Sin}A=\mathrm{Sin}90^\circ=\cdots\Rightarrow\frac{a}{\mathrm{Sin}A}=\cdots$$

بنابراین داریم :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر .... به .... برابر است با اندازهٔ ....

فعالیت ۲

در کتاب هندسهٔ ۱ دیدیم که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟

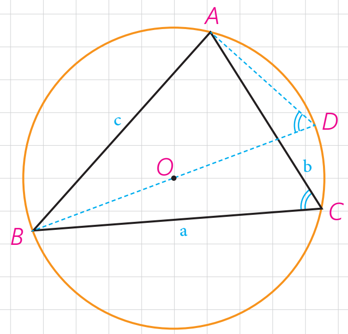


با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازهٔ .... دایرهٔ محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

فعالیت ۳



مثلث دلخواه ABC $(\hat{A} < ۹۰^\circ)$ و دایرهٔ محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم.
قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم.

۱ــ زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟

اندازهٔ آنها برابر است با نصف ....

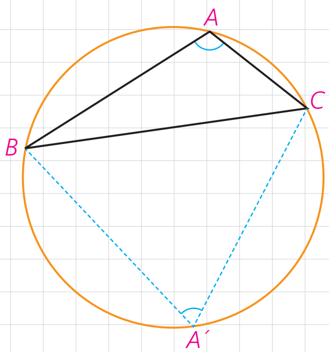
۲ــ چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

۳ــ با توجه به دو قسمت قبل، داریم :

$$\mathrm{Sin}C = \mathrm{Sin}D \quad \text{و} \quad \mathrm{Sin}D = \frac{\cdots}{\cdots} \Rightarrow \mathrm{Sin}C = \frac{\cdots}{۲R} \Rightarrow \frac{c}{\mathrm{Sin}C} = ۲R$$

۴ــ به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{a}{\mathrm{Sin}A} = \cdots \quad , \quad \frac{b}{\mathrm{Sin}B} = \cdots$$



۵ــ حال مثلث ABC $(\hat{A} > ۹۰^\circ)$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ دلخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می‌کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$\hat{A} + \hat{A}' = \cdots\cdots$ بنابراین $\hat{A}'$ زاویه‌ای حاده است.

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید :

$$\sin A = \sin(\ldots - A') = \cdots$$

در مثلث $A'BC$، طبق نتیجهٔ قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{a}{\sin A'} = \cdots \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \cdots$$

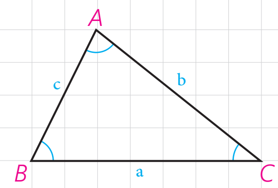
نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر .... به .... زاویهٔ روبه‌رو به آن برابر است با ....

قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$\frac{a}{\operatorname{Sin}A} = \frac{b}{\operatorname{Sin}B} = \frac{c}{\operatorname{Sin}C} = ۲R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.



مثال ۱ : در مثلث ABC، $BC=۱۰cm$ و $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ و $AC=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.

حل : به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت :

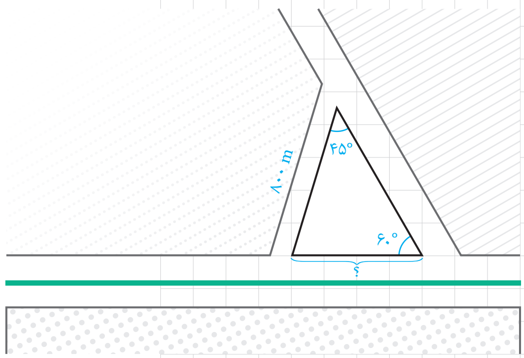
$$\frac{a}{\sin A} = ۲R \Rightarrow \frac{۱۰}{\sin ۱۲۰^\circ} = ۲R \text{ و } \sin ۱۲۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲R = \frac{۱۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \quad \text{و} \quad R = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$$

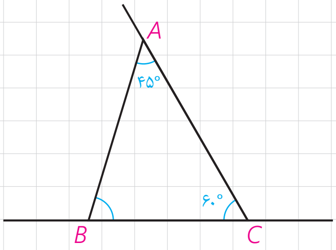
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = ۲R \Rightarrow \frac{\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B} = \frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin B = \frac{۱۰\sqrt{۶}}{۲۰\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow B = ۴۵^\circ \text{ یا } ۱۳۵^\circ \text{ و } \hat{A} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۱۵^\circ$$

مثال ۲ : از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویهٔ ۶۰° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویهٔ ۴۵° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویهٔ ۶۰° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟



حل : با یک شکل مناسب مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم. اولاً با توجه به مجموع اندازه‌های زوایای داخلی مثلث، روشن است که $\hat{B}=۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۶۰^\circ)=۷۵^\circ$ ؛ یعنی خیابان فرعی باید با زاویهٔ ۷۵° از بلوار جدا شود. ثانیاً به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم :



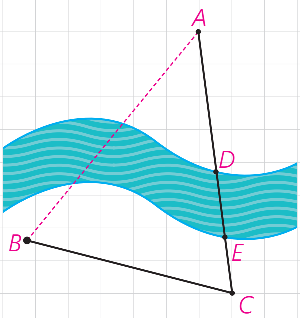
$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{۸۰۰}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{BC}{\sin ۴۵^\circ}\Rightarrow BC=\frac{۸۰۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=$$

$$\frac{۸۰۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{۸۰۰\sqrt{۶}}{۳}\approx ۶۵۳/۲\,m$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی ۶۵۳/۲ متر با زاویهٔ ۷۵° بنا کنیم.

کاردرکلاس

می‌خواهیم روی یک رودخانهٔ عمیق بین دو نقطهٔ A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به‌دست بیاوریم؛ امّا امکان اندازه‌گیری مستقیم (به‌دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطهٔ A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه‌یاب (تئودولیت) زاویهٔ دید AC از نقطهٔ B ($\hat{B}$) و زاویهٔ دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه می‌گیریم. به‌صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می‌توان فاصلهٔ AB را به‌دست آورد :



$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{......}\Rightarrow\frac{BC}{\sin(۱۸۰^\circ-(......+......))}=\frac{AB}{......}\Rightarrow AB=\frac{......\times......}{\sin(......)}$$

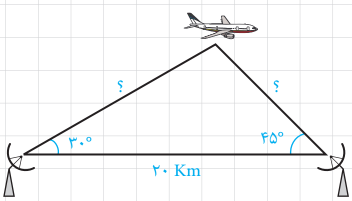
اگر BC=۳km و $\hat{B}=۷۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به‌دست آورید.

تمرین

۱ــ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) با ارتفاع $AH=h_a$ داریم :

$$\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}$$

۲ــ دو ایستگاه رادار، که در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصلهٔ هواپیما را از دو ایستگاه به‌دست آورید.



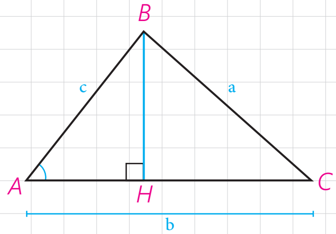
درس دوم

قضیهٔ کسینوس‌ها

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$). با داشتن طول‌های دو ضلع (AB=c) و (AC=b) می‌توانیم اندازه وتر مثلث (BC=a) را بر حسب b و c به‌دست آوریم : $a^2=b^2+c^2$

حال می‌بینیم که اگر $\hat{A}$ مساوی 90° هم نباشد، می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

فعالیت ۱



در مثلث ABC ($\hat{A}<90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم. با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث‌های قائم‌الزاویه، جاهای خالی را پر کنید :

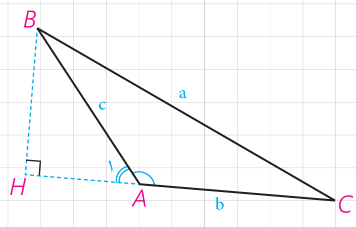
$$\cos A=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow AH=\cdots\times\cdots \quad \text{و} \quad CH=b-AH=\cdots$$

$$\sin A=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow BH=\cdots\times\cdots$$

$$\Delta BHC: BC^2=BH^2+CH^2\Rightarrow a^2=(\cdots\cdots)^2+(\cdots\cdots)^2$$

حال به کمک اتحادهای جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2A+\cos^2A=1$، نشان دهید :

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$



اکنون در مثلث ABC ($\hat{A}>90^\circ$) ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.

اگر $\hat{A}_1$ زاویهٔ خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_1=180-\hat{A}$ داریم : $\sin A_1=\cdots$ و $\cos A_1=\cdots$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت :

$$\cos A_1=\frac{\cdots}{\cdots} \quad \text{و} \quad \sin A_1=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\Rightarrow AH=\cdots\cdots\times\cdots\cdots \quad \text{و}$$

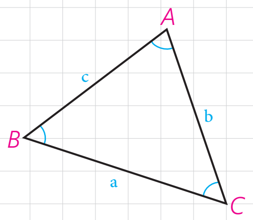
$$BH=\cdots\cdots\times\cdots\cdots \quad \text{و} \quad CH=b+AH=\cdots\cdots$$

$$\Delta BHC:\ BC^2=BH^2+CH^2\Rightarrow a^2=(\cdots\cdots)^2+(\cdots\cdots)^2$$

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید :

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc.\cos A$$

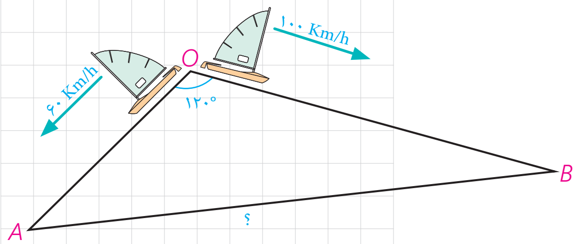
سؤال : در حالتی که زاویهٔ A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟



قضیهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آنها:

$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc.\cos A$, $b^{۲}=\dots+\dots-\dots$

$c^{۲}=\dots+\dots-\dots$



مثال : دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های ۶۰km/h و ۱۰۰km/h و با زاویهٔ °۱۲۰ از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

حل : با توجه به نقطهٔ شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود :

$OA=۶۰\times ۰/۵=۳۰$ و $OB=۱۰۰\times ۰/۵=۵۰$

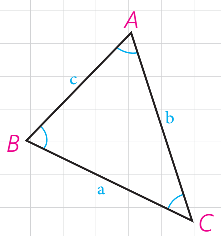
حال به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم :

$AB^{۲}=OA^{۲}+OB^{۲}-۲OA.OB.\cos ۱۲۰^\circ$ و $\cos ۱۲۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$

$AB^{۲}=۹۰۰+۲۵۰۰-۲\times ۳۰\times ۵۰\ (-\frac{۱}{۲})\ =۴۹۰۰\Rightarrow$

$AB=۷۰km$

کاردرکلاس



در مثلث ABC، $AB=۲\sqrt{۲}$ و $AC=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$

۱ـ طول ضلع BC را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها به‌دست آورید.

$BC^{۲}=\dots^{۲}+\dots^{۲}-۲\times\dots\times\dots\times\dots\Rightarrow$

$BC^{۲}=\dots+\dots-\dots\Rightarrow$

$BC^{۲}=\dots$ و $BC=\dots$

۲ــ اندازهٔ $\hat{C}$ را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها به‌دست آورید و از آنجا اندازهٔ $\hat{B}$ را هم بیابید.

$$\frac{C}{\sin C}=\frac{a}{\dots}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۶۰}\Rightarrow \sin C=\cdots \text{ و } \hat{C}=\cdots$$

$$\Rightarrow \hat{B}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{C})=\dots$$

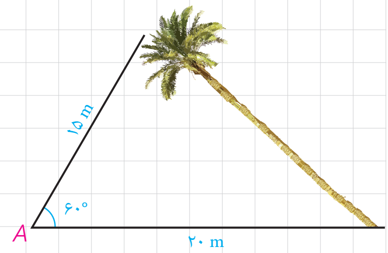
تمرین

۱ــ یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویهٔ ۶۰° دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است :

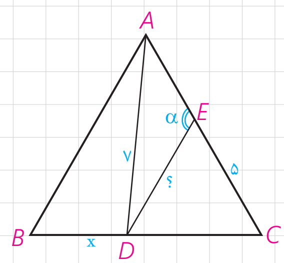
الف) طول درخت

ب) زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

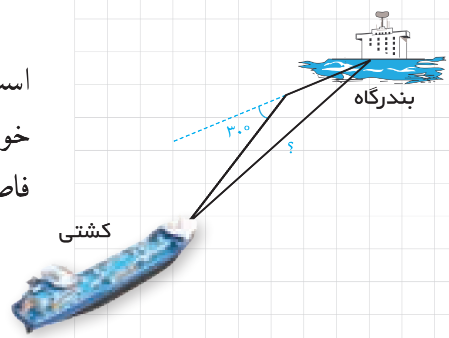
پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین

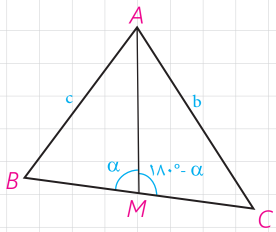


۲ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟(CD >BD) نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟



۳ــ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصلهٔ بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

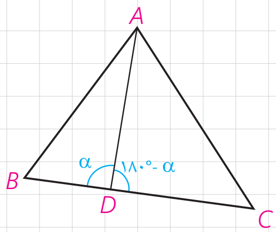




۴ــ در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{۲}$). با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیهٔ میانه‌ها)

در حالت خاص AB=۴ و AC=۶ و BC=۸، طول میانه AM را به‌دست آورید.



۵ــ در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$AB^۲ \,.\, DC + AC^۲ \,.\, DB = AD^۲ \,.\, BC + DB \,.\, DC \,.\, BC$$ (قضیهٔ استوارت)

به کمک قضیهٔ استوارت، درستی قضیهٔ میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

۶ــ مسئلهٔ ۲ را بار دیگر، این‌بار به کمک قضیهٔ استوارت حل کنید.

درس سوم

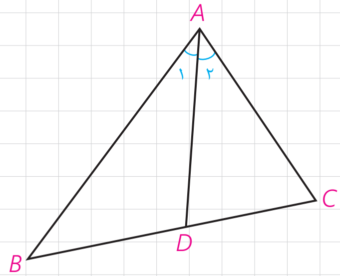
قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

۱ــ قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی

قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض : $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$

حکم : $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$

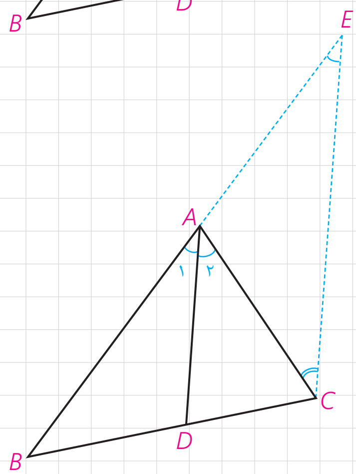


اثبات : مطابق شکل از نقطهٔ C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.

الف) چرا $\widehat{A_1}=\hat{E}$ و چرا $\widehat{A_2}=\hat{C}$؟

ب) با توجّه به فرض، چه نتیجه‌ای دربارهٔ زوایای E و C می‌توان گرفت؟

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟

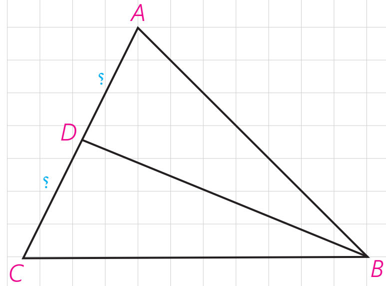


ج) با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث EBC $(AD \| EC)$ نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجهٔ قسمت (ب) اثبات را کامل کنید :

$$AD \| EC \Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{....}=\frac{....}{....}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد :

مثال : در مثلث ABC، AB=۷، AC=۵ و BC=۸ است. طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



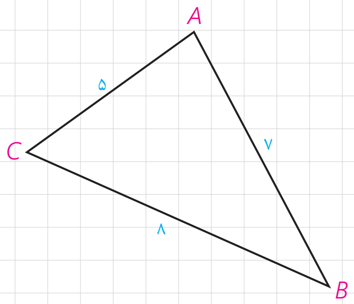
حل :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}=\frac{۷}{۸} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD}=\frac{۷+۸}{۸} \Rightarrow \frac{AC}{CD}=\frac{۱۵}{۸} \Rightarrow$$

$$CD=\frac{۸\times۵}{۱۵}=\frac{۸}{۳}, AD=AC-CD=۵-\frac{۸}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

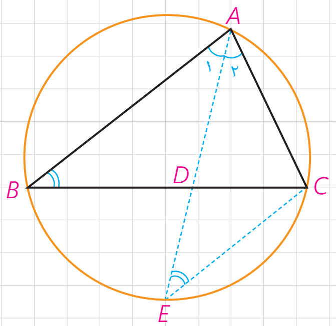
کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویهٔ C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.



۲ــ محاسبهٔ طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبهٔ طول نیمساز داخلی زاویهٔ $\hat{A}$ $(\hat{A}_1 = \hat{A}_2)$، یعنی AD، AD را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.



الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$؟

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{....} = \frac{AE}{....} = \frac{....}{BD}$$

ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم :

$$AB.AC = AD.AE = AD(AD+DE) = AD^2+AD.DE$$

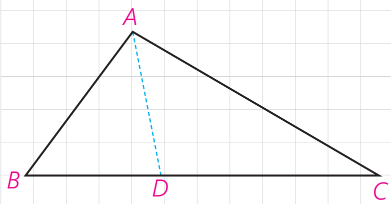
و چون $AD.DE = BD.DC$ (چرا؟) بنابراین :

$$AD^2 = AB.AC - BD.DC$$

قضیهٔ ۲: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

مثال : در مثلث ABC، AB=۳، AC=۵ و BC=۷ است. طول نیمساز زاویهٔ A را بیابید.

حل : به کمک قضیهٔ (۱) طول‌های BD و CD را به‌دست می‌آوریم :



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{۸}{۵}$$

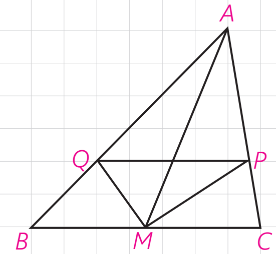
$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{۸}{۵} \Rightarrow \frac{۷}{CD} = \frac{۸}{۵} \Rightarrow CD = \frac{۳۵}{۸}, BD = ۷ - \frac{۳۵}{۸} = \frac{۲۱}{۸}$$

حال با توجه به قضیهٔ (۲) داریم :

$$AD^2 = AB.AC - BD.CD = ۳\times۵ - \frac{۳۵}{۸}\times\frac{۲۱}{۸} =$$

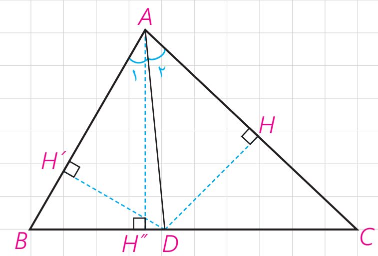
$$۱۵ - \frac{۷۳۵}{۶۴} = \frac{۲۲۵}{۶۴} \Rightarrow AD = \frac{۱۵}{۸}$$

تمرین



۱ــ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید : PQ||BC

۲ــ در مثلث ABC، AB=۷ و AC=۴ و BC=۱۰ است. طول نیمساز زاویهٔ داخلی C را به‌دست آورید.



۳ــ با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید :

الف) چرا $DH = DH'$ ؟

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times ....}{\frac{۱}{۲}DH \times ....} = \frac{....}{....} \qquad (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times ....}{\frac{۱}{۲}CD \times ....} = \frac{....}{....} \qquad (۲)$$

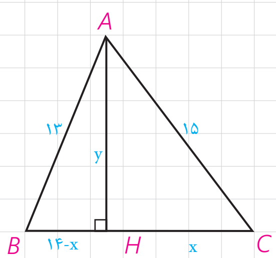
از مقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود : $\frac{....}{....} = \frac{....}{....}$

درس چهارم

قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

با مسئله زیر در کتاب هندسهٔ ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC اندازه‌های x و y را به‌دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :



به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می‌کنیم :

$$\left.\begin{array}{l} CH^۲ + AH^۲ = \dots \\ BH^۲ + AH^۲ = \dots \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^۲ + y^۲ = \dots \\ (۱۴ - x)^۲ + y^۲ = \dots \end{array}\right.$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می‌کنیم که با حذف $y^۲$ معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آید :

$$x^۲ - (۱۴-x)^۲ = \dots \quad \Rightarrow \quad x^۲ - ۱۹۶ - x^۲ + ۲۸x = \dots$$

$$\Rightarrow \quad x = \dots \quad , \quad y = \dots \quad , \quad S = \frac{۱}{۲} BC.AH = \dots$$

اگر همین روش را در حالت کلّی در مثلث ABC، که BC=a، AB=c و AC=b به کار ببریم، نتیجه می‌شود :

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{(دستور هرون)}$$

که در این دستور $P = \frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می‌توانید در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل ببینید.)

مثال : مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با :

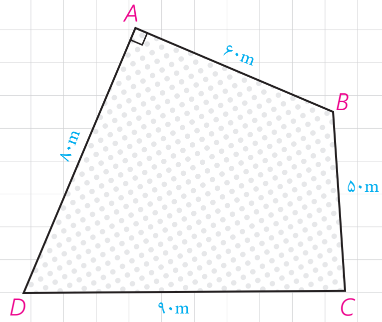
$$۲P = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ = ۴۲ \Rightarrow P = ۲۱$$

$$s = \sqrt{۲۱ \times ۶ \times ۷ \times ۸} = \sqrt{۷^۲ \times ۳^۲ \times ۲^۴} = ۸۴$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با :

$$h_a = \frac{2s}{a} = \frac{2\times 84}{14} = 12 \quad , \quad h_b = \cdots\cdots \quad , \quad h_c = \cdots\cdots$$

کار در کلاس



چهارضلعی ABCD یک مزرعهٔ کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده‌است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به‌دست آورید :

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

$$BD^2 = \cdots\cdot + \cdots\cdot = \cdots\cdot + \cdots\cdot = \cdots\cdot \quad \Rightarrow \quad BD = \cdots\cdot$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

$$S_{ABD} = \frac{\cdots\cdot \times \cdots\cdot}{2} = \cdots\cdot$$

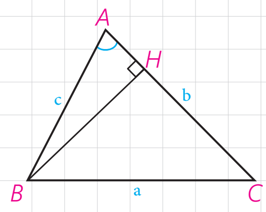
پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.

$$P = \frac{\cdots\cdot + \cdots\cdot + \cdots\cdot}{2} = \cdots\cdot \ , \ S_{CBD} = \cdots\cdot$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$$S = \cdots\cdot + \cdots\cdot = \cdots\cdot$$

فعالیت



می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبهٔ مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به‌دست آوریم.

۱ــ در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

$$\sin A = \frac{\cdots\cdot}{\cdots\cdot} \Rightarrow BH = \cdots\cdot$$

۲ــ مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC = \cdots\cdot$$

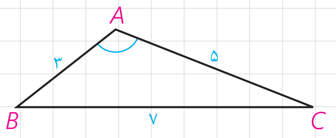
نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آنها:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc.\sin A = \frac{1}{2} ab.\sin C = \frac{1}{2} ac.\sin B$$

کاردرکلاس

۱ــ مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به‌دست آورید.



$$P=\frac{....+....+....}{۲}=.... \Rightarrow S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=....$$

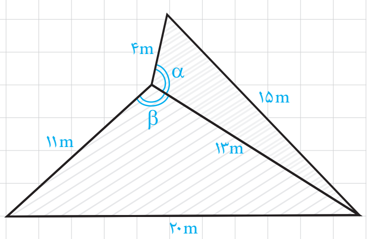
۲ــ مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S=\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A$ بنویسید.

۳ــ از مقایسهٔ نتایج ۱ و ۲، اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ $\hat{A}$ را به‌دست آورید.

تمرین

۱ــ در مثلث ABC، AB=۱۰، AC=۶ و $\hat{A}=۶۰^\circ$. الف) طول BC را به‌دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار sinB را پیدا کنید.

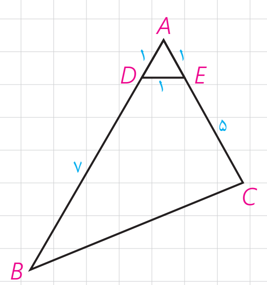
۲ــ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟



نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha=\beta)$

۳ــ دستور محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.

۴ــ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



۵ــ در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبهٔ طول نیمساز زاویهٔ A به‌دست آورید.

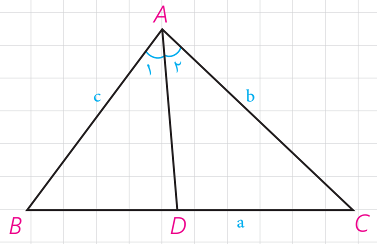
$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A=\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots\times\sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots\times\sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.AC.\sin A=AD.\sin\frac{A}{۲}(\cdots+\cdots)$$

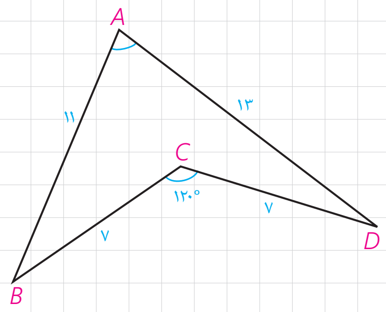
$$\Rightarrow AD=\frac{AB.AC.\sin A}{(\cdots+\cdots)\sin\frac{A}{۲}}=\frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(\cdots+\cdots)\sin\frac{A}{۲}}$$

$$\Rightarrow AD=\cdots\cdots \Rightarrow \quad (\text{نیمساز رأس } A)\ d_a=\frac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$



۶ــ در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصلهٔ ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.



۷ــ در شکل، اولاً اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.

راهنمایی: B را به D وصل کنید.

۸ــ ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

۹ــ به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A}>۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲>b^۲+c^۲$

ب) $\hat{A}<۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲<b^۲+c^۲$

پ) $\hat{A}=۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲=b^۲+c^۲$

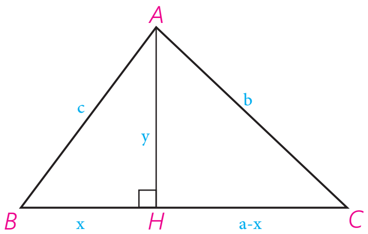
۱۰ــ به کمک نتیجهٔ تمرین ۹، حاده(تند)، قائمه یا منفرجه(باز) بودن زاویهٔ A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید :

الف) $AB=۱۰$, $AC=۶$, $BC=۹$

ب) $AB=۸$, $AC=۴$, $BC=۹$

پ) $AB=۸$, $AC=۱۵$, $BC=۱۷$

اثبات دستور هرون (برای محاسبهٔ مساحت مثلث)



در مثلث ABC، $AB=c$ و $AC=b$ و $AH=y$ و $BC=a$ و $BH=x$ و $CH=a-x$. با نوشتن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH و تفاضل روابط به‌دست آمده خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ (a-x)^2+y^2=b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2-c^2=(a-x)^2-x^2=a^2+x^2-2ax-x^2=a^2-2ax \Rightarrow x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$y=\sqrt{c^2-x^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}$$

با ساده کردن این عبارت جبری و تجزیهٔ آن به کمک اتحادهای جبری نتیجه می‌شود :

$$y=AH=\sqrt{\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}}=\frac{1}{2a}\sqrt{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}$$

$$=\frac{1}{2a}\sqrt{\left[(a+c)^2-b^2\right]\left[b^2-(a-c)^2\right]}=$$

$$\frac{1}{2a}\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

حال با فرض $a+b+c=2p$ خواهیم داشت :

$$a+c-b=a+c+b-2b=2p-2b=2(p-b)$$

و به همین صورت :

$$b+c-a=2(p-a)\quad,\quad b+a-c=2(p-c)$$

و بنابراین :

$$AH=\frac{1}{2a}\sqrt{2p\times 2(p-a)\times 2(p-b)\times 2(p-c)}=$$

$$\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad,\quad S=\frac{1}{2}AH.a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

منابع

- حسن‌زاده ماکویی، علی، طاهری، هوشنگ و فیروزنیا، احمد، (۱۳۷۱)، کتاب درسی مثلثات پایهٔ سوم ریاضی و فیزیک، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- هاورد، ایوز، (۱۳۷۹). آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اول)، ترجمه : محمدقاسم وحیدی اصل، تهران : مرکز نشر دانشگاهی، چاپ چهارم.
- حاجی بابایی، جواد و همکاران، (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسه ۲ پایهٔ سوم ریاضی و فیزیک، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپ هجدهم.
- گویا، زهرا و همکاران، (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسه ۱ پایهٔ دوم ریاضی و فیزیک، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپ بیستم.
- نصیری، محمود، (۱۳۹۴)، هندسه متوسطه مبانی و مفهوم‌ها، انتشارات مبتکران.
- گرینبرگ، ماروین. جی. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمه م.ه. شفیعیها، (۱۳۶۱)، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی : تهران.
- خسروی، امیر، دارابی، ابراهیم و نصیری، محمود (۱۳۷۱)، کتاب درسی هندسه ۱، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
- خسروی، امیر، دارابی، ابراهیم و نصیری، محمود (۱۳۷۱)، کتاب درسی هندسه ۲، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
- ادوین اِ، موئیز، هندسه مقدماتی از دیدگاه پیشرفته، ترجمه امیر خسروی و محمود نصیری (۱۳۷۷)، انتشارات مبتکران : تهران.
- Byer, O., Lazebnik, F., & Smeltzer, D. L. (2010). Methods for Euclidean geometry. MAA.
- O'Leary, M.L. (2010). Revolutins of Geometry (Vol. 87). John Wiley & Sons.
- Posamentier. A. S. (1984). Excursions in advanced Euclidean geometry Addison – Wesley.
- Libeskind, S. (2008). Euclidean and transformational geometry: A deductive inquiry. Jones & Bartlett Publishers.
- Kinsey, L. C., Moore. T. E., & Prassidis. S. (2011). Geometry & symmetry. John Wiley & Sons.
- Hvidsten. M. (2005). Geometry with geometry explorer™. McGraw–Hill,
- Umble, R. N., & Han, Z. (2014). Transformational Plane Geometry. CRC Press.
- Dodge, C. W. (2012). Euclidean geometry and transformational. Courier Corporation.
- Martin, G. E. (2012). The foundations of geometry and the non–Euclidean plane. Springer Science & Business Media.
- Tapp, K. (2011). Symmetry: a mathematical exploration. Springer Science & Business Media.

اعتبارسنجی

؟؟؟؟؟

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظرات اصلاحی خود را در بارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴-گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری