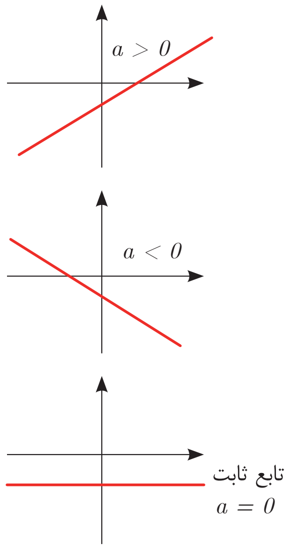
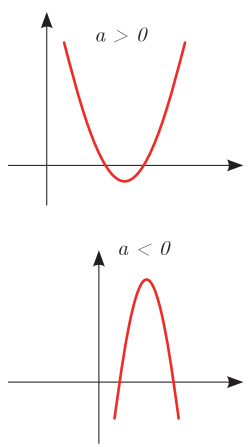
# فصل ۱

## علوم پایه

## تابع

■ اگر دو کمیت (الف) و (ب) با یکدیگر مرتبط باشند و با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، **یک مقدار معین** برای کمیت (ب) به‌دست آید، در این صورت کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می‌نامند.
مقادیری که کمیت (الف) می‌تواند داشته باشد را **دامنه** این تابع می‌نامند و قانونی را که، مقادیر کمیت (ب) را برحسب مقادیر کمیت (الف) به دست می‌دهد، **قانون یا ضابطه** این تابع می‌نامند.

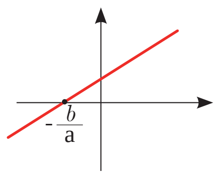
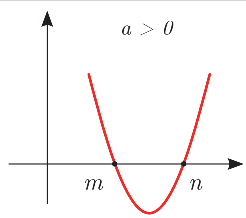
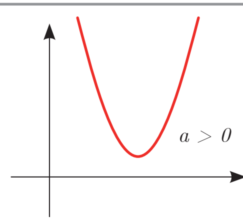
### شکل کلی تابع درجه اول و درجه دوم:

| شکل کلی تابع با دامنه $\mathbb{R}$ برحسب مقدار $a$ | دامنه | قانون یا ضابطه تابع |
| --- | --- | --- |
|  | $\mathbb{R}$ یا زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ | تابع خطی درجه اول<br>$f(x) = ax + b$ |
|  | $\mathbb{R}$ یا زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ | تابع درجه دوم<br>$f(x) = ax^2 + bx + c$<br>$a \neq 0$ |

## نمایش مجموعه به صورت بازه

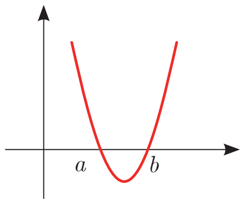
| نمایش بازه | نمایش روی محور | نمایش مجموعه |
|---|---|---|
| $[a,b]$ |  | $\{x\in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ |
| $(a,b]$ |  | $\{x\in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ |
| $[a,b)$ |  | $\{x\in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ |
| $(a,b)$ |  | $\{x\in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ |
| $(a,+\infty)$ |  | $\{x\in \mathbb{R} \mid a < x\}$ |
| $(-\infty,b]$ |  | $\{x\in \mathbb{R} \mid x \le b\}$ |

## حل معادله از طریق رسم

| مثال | جواب | تابع | معادله |
|---|---|---|---|
| <br>جواب $x=-\frac{b}{a}$ | محل برخورد با محور xها در صورت وجود | رسم تابع خطی درجه اول<br>$f(x) = ax + b$ | معادله درجه ۱<br>$ax + b = 0$ |
| <br>جواب $x=m$ و $x=n$ | محل برخورد با محور xها در صورت وجود | رسم تابع درجه دوم<br>$f(x) = ax^2+bx + c$<br>$a\neq 0$ | معادله درجه ۲<br>$ax^2 + bx + c = 0$<br>$a\neq 0$ |
| <br>جواب ندارد زیرا نمودار با محور xها برخورد نمی‌کند. | محل برخورد با محور xها در صورت وجود | رسم تابع درجه ۲<br>$f(x) = ax^2 + bx + c$<br>$a\neq 0$ | معادله درجه ۲<br>$ax^2 + bx + c = 0$<br>$a\neq 0$ |

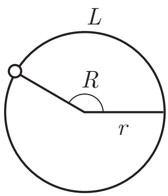
■ نامساوی‌های به‌صورت $ax^2+bx+c \leq 0$ یا $ax^2+bx+c \geq 0$ که در آن a، b، c اعداد داده حقیقی هستند $(a \neq 0)$ را نامعادله درجه دوم می‌نامند. مقدارهایی از x که نامعادله را به یک نامساوی درست تبدیل می‌کنند، جواب‌های نامعادله می‌نامند.

### حل نامعادله از طریق رسم تابع

| جواب نامعادله $f(x) \leq 0$ | جواب نامعادله $f(x) < 0$ | جواب نامعادله $f(x) > 0$ | به‌طور مثال نمودار تابع $f(x)$ به‌شکل زیر |
|---|---|---|---|
| قسمت‌هایی از نمودار که محور xها را قطع کرده و پایین آن است. $[a,b]$ | قسمت‌هایی از نمودار که پایین محور xها است. $(a,b)$ | قسمت‌هایی از نمودار که بالای محور xها است. $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ |  |

## مثلثات

■ اگر نقطه‌ای از یک دایره به شعاع r کمانی به طول L را در جهت مثبت طی کند، مقدار $\frac{L}{r}$ را اندازه زاویه چرخش آن نقطه، برحسب رادیان می‌نامند. برای زاویه‌های منفی، $-\frac{L}{r}$ را مقدار آن زاویه برحسب رادیان می‌نامند.




$$R=\frac{L}{r}\ \text{(رادیان)}$$

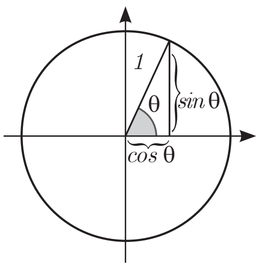
■ دایره‌ای که شعاع آن ۱ واحد است، **دایره واحد** نامیده می‌شود. در دایره واحد، طول کمان طی‌شده، همان اندازه زاویه چرخش برحسب واحد رادیان است. در تساوی‌های زیر

$$\frac{L}{r}=\frac{\pi}{180}D \ ,\ D=\frac{180}{\pi}\times\frac{L}{r}$$

$\frac{L}{r}$ همان اندازه زاویه برحسب رادیان است. اگر اندازه یک زاویه برحسب رادیان را با R و اندازه آن زاویه برحسب درجه را با D نشان دهیم، این تساوی‌ها به‌صورت زیر درمی‌آیند.

$$D=\frac{180}{\pi}R \ ,\ R=\frac{\pi}{180}D$$

این تساوی‌ها نشان می‌دهند، ضریب تبدیل رادیان به درجه $\frac{۱۸۰}{\pi}$ و ضریب تبدیل درجه به رادیان $\frac{\pi}{۱۸۰}$ است.



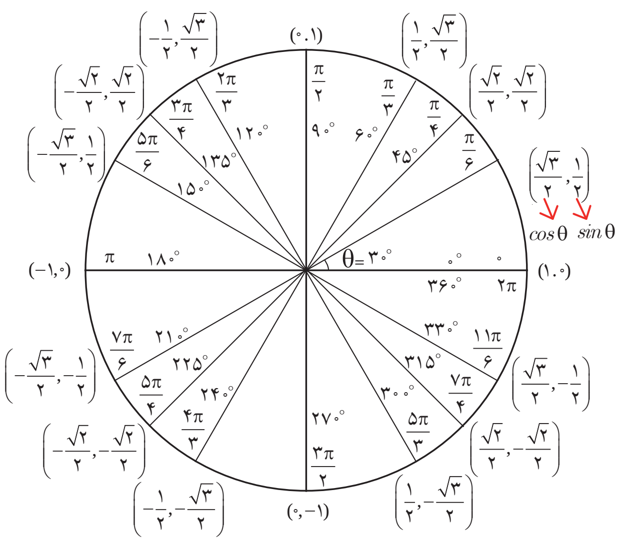

## نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه

فرض کنید θ یک زاویه تند برحسب رادیان باشد، در این صورت داریم:

| | | |
|---|---|---|
| $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ | $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ | $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$ |
| $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$ | $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ | $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$ |
| $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ | $\cos(-\theta) = \cos\theta$ | $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ |
| $\sin(۲\pi+\theta) = \sin\theta$ | $\cos(۲\pi+\theta) = \cos\theta$ | $\tan(۲\pi+\theta) = \tan\theta$ |
| $\sin(۲\pi-\theta) = -\sin\theta$ | $\cos(۲\pi-\theta) = \cos\theta$ | $\tan(۲\pi-\theta) = -\tan\theta$ |

## نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های خاص

| زاویه θ ⇒ / نسبت ⇓ | ۳۰° | ۴۵° | ۶۰° |
|---|---|---|---|
| $\cos\theta$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ |
| $\sin\theta$ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ |
| $\tan\theta$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ۱ | $\sqrt{۳}$ |



■ **روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:**

زاویه $\theta$ را در نظر بگیرید، در این صورت داریم:

$$\sin^{2}\theta + \cos^{2}\theta = 1$$

و همچنین اگر $\theta$ زاویه‌ای باشد که $\cos\theta \neq 0$ بنا به تعریف داریم:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

■ **شیب خط و تانژانت زاویه‌ها:**

برای هر خط دلخواه به معادله $y = ax + b$ با شیب $a$ که با محور طول‌ها زاویه $\theta$ می‌سازد، داریم:

$$\tan\theta = a$$

✓ **لگاریتم و خواص آن:**

اگر $a$ یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و اعداد حقیقی $b$ و $c$ به‌گونه‌ای باشند که: $b = a^{c}$ آنگاه $c$ را لگاریتم $b$ در مبنای $a$ می‌نامند و با $\log_a b$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر داریم:

$$\log_a b = c$$

■ فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند، یعنی عبارت $\log_a b$ فقط برای $b>0$ تعریف می‌شود.

■ برای $b, c>0$ داریم: $\log(bc) = \log b + \log c$

■ در حالت کلی: برای هر $a, b>0$ داریم: $\log(a+b) \neq \log a + \log b$

■ برای $b, c>0$ داریم: $\log\frac{b}{c} = \log b - \log c$

■ در حالت کلی: برای هر $a, b>0$ داریم: $\log(a-b) \neq \log a - \log b$

■ برای $b>0$ و هر عدد حقیقی $x$ داریم: $\log b^{x} = x\log b$

■ برای $a, b>0$ و $a\neq 1$ داریم: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

✓ **آمار توصیفی:**

■ **نمودار پراکنش دو کمیت، مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختصات است که طول و عرض هر نقطه، داده‌های مربوط به اندازه‌گیری‌های متناظر دو کمیت است.**

■ $x$ و $y$ دو کمیت مرتبط هستند. اگر مقادیر این دو کمیت برای برخی از $x$ها در یک بازه، مشخص باشد، پیش‌بینی مقادیر $y$ به ازای $x$های مشخص در این بازه به کمک خط برازش را **درون‌یابی** و پیش‌بینی مقادیر $y$ به ازای $x$های مشخص در خارج از این بازه را **برون‌یابی** می‌نامند.

■ پس از مرتب کردن مقادیر داده‌ها، عددی را که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن برابر است را **میانه** می‌نامند.

■ نمودار جعبه‌ای: