تابع

۱
فصل

پل طبیعت (تهران)

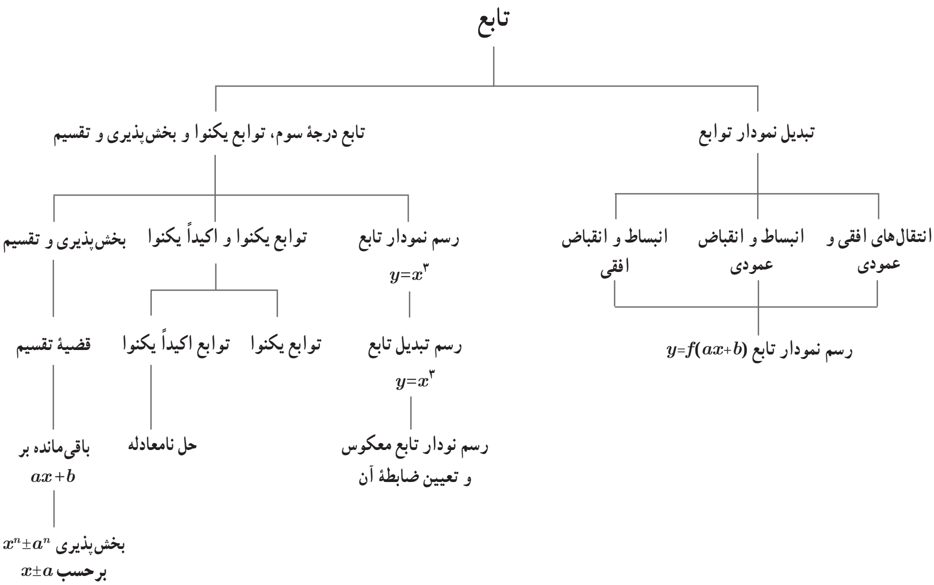
بسیاری از وقایع طبیعی به کمک توابع، مدل‌سازی می‌شوند. تبدیل نمودار تابع $y=\sin x$ به‌صورت $y=1/24\sin(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{6})+19/14$ ، مدل ریاضی زمان‌های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

تابع

اهداف کلی فصل ۱

فصل اول با عنوان «تابع» شامل دو درس است. در درس اول، تبدیل نمودار توابع در شکل‌های مختلف خود که انتقال‌های افقی و عمودی و همچنین انبساط یا انقباض عمودی و افقی است، به‌طور یکجا بررسی می‌شود. در درس دوم، ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ به همراه تبدیل‌های مختلف آن آمده است و سپس تعریف توابع یکنوا به همراه درک شهودی آنها ذکر شده است. در همین قسمت به حل نامعادلات شامل توابع اکیداً یکنوا پرداخته شده است. در قسمت آخر این درس نیز تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر بررسی شده است. هدف از این بخش، چگونگی تجزیه x^n-a^n یا x^n+a^n برحسب $x-a$ یا $x+a$، برای nهای زوج و فرد است.

نقشهٔ مفهومی



تصویر عنوانی

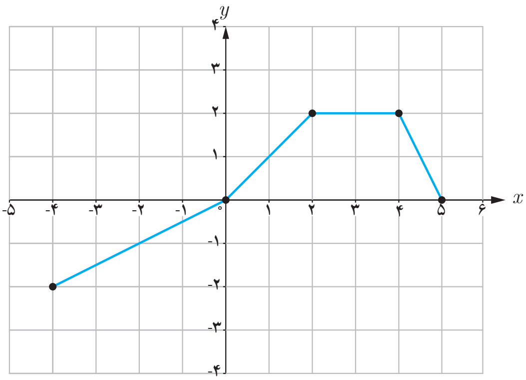
زمان‌های طلوع یا غروب خورشید با توابعی به شکل $y=a\sin[\omega(x-b)]+c$ مدل‌سازی می‌شوند که در آن همهٔ تبدیل‌های مختلف روی تابع $y=\sin x$ انجام شده است. به‌عنوان یک نمونه، زمان‌های غروب خورشید در شهر تهران و در ابتدای هر ماه به‌صورت $y=1/24\sin(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{6})+19/14$ مدل شده است. نمودار این تابع به همراه زمان‌های غروب خورشید نیز در یک نمودار رسم شده است.

سؤالات ارزشیابی فصل ۱

۱ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=2f(x-2)+1$

ب) $y=-f(2x+1)$



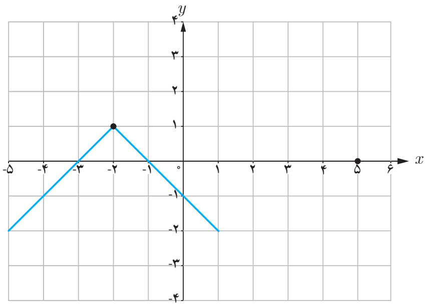
۲ دامنه و برد تابع f، بازه‌های $D_f=[-2,+\infty)$ و $R_f=[-3,1]$ هستند. دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y=-f(x)+2$

ب) $y=f(-2x+3)$

۳ نمودار تابع $y=۲\sin\frac{x}{۲}-۱$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ رسم کنید.

۴ نمودار زیر از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=|x|$ به‌دست آمده است. ضابطهٔ این تابع را مشخص کنید.



۵ تابع $y=x^۳-۳x^۲+۳x+۲$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار این تابع را به کمک نمودار $y=x^۳$ رسم کنید.

ب) نمودار $f^{-۱}$ را رسم کرده و ضابطهٔ آن را تعیین کنید.

۶ در هر مورد، نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در فاصله $[-\infty,۲]$ صعودی و در فاصله $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد.

ب) تابعی که در فاصله $(-\infty,۰)$ و $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ اکیداً صعودی نباشد.

۷ اگر f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً نزولی است.

۸ اگر f و g در یک فاصله به ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی باشند، تابع $f-g$ در این فاصله چه وضعیتی دارد؟

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $kx^{۲}-۲x+۱$ بر $x+۱$ برابر با ۲- باشد، k را به‌دست آورید.

۱۰ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $ax^{۳}-x^{۲}+۲bx-۱$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر و بر $x-۲$ باقی‌ماندهٔ ۳ داشته باشد.

۱۱ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $(\frac{۱}{۲})^{۳x-۱} \leq \frac{۱}{۸}$

ب) $۲^{-x+۱} \geq ۴^{۲x-۱}$

پ) $\log_{۲}(۲x-۱) \leq \log_{۲}(-x+۱)$

ت) $\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۲) \leq ۴$

۱۲ هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته شده، تجزیه کنید.

الف) $x^{۸}-۱$ با عامل $x-۱$

ب) $x^{۶}-۶۴$ با عامل $x+۲$

پ) $x^{۵}+۳۲a^{۵}$ با عامل $x+۲a$

۱۳ $x^{۱۰}-۱$ برحسب چه عبارت‌هایی در زیر تجزیه می‌شود؟

الف) $x-۱$

ب) $x+۱$

پ) $x^{۲}-۱$

ت) $x^{۲}+۱$

درس ۱

تبدیل نمودار توابع

اهداف درس

۱ توانایی رسم توابع به شکل $y=af(bx+c)+d$ به کمک نمودار $y=f(x)$.
۲ محاسبه دامنه و برد تابع $y=af(bx+c)+d$ به کمک دامنه و برد تابع f.
۳ آشنایی با قرینه‌یابی نسبت به محورهای مختلف.
۴ تعیین ضابطهٔ یک نمودار که تبدیل به یک تابع شناخته شده است.

روش تدریس

از سال دهم، دانش‌آموز با رسم بعضی از توابع و انتقال‌های افقی و عمودی آنها آشنا شده‌اند. در ابتدای این درس، این مفاهیم به همراه استدلال‌های مربوطه آمده است.

۱ اگر (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x)+k$ باشد، سپس (x_0,y_0+k) یک نقطه از نمودار تابع g خواهد بود. بنابراین برای $k>0$، نقاط نمودار f به اندازهٔ k واحد به بالا و اگر $k<0$، این نقاط به پایین انتقال می‌یابند تا نمودار g مشخص شود.

۲ اگر (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x+k)$ باشد، سپس (x_0-k,y_0) یک نقطه از نمودار g خواهد بود. بنابراین برای $k>0$، نقاط نمودار f به اندازهٔ k واحد به چپ و اگر $k<0$، این نقاط به راست انتقال می‌یابند تا نمودار g رسم شود.

برای تفهیم این دو مطلب، در مثال‌های مربوطه، دامنه و برد f را محدود کنید تا تغییرات دامنه و برد در تابع g مشاهده شود. کار در کلاس صفحهٔ ۴ برای این موضوع آورده شده است. می‌توان بعد از این

کار در کلاس، جمع‌بندی به‌صورت زیر انجام داد.

اگر دامنه و برد تابع f به‌صورت $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$ باشد، سپس :

الف) دامنه و برد تابع $g(x)=f(x)+k$ عبارت است از : $D_g=[a,b]$ و $R_g=[c+k,d+k]$.

ب) دامنه و برد تابع $h(x)=f(x+k)$ عبارت است از : $D_h=[a-k,b-k]$ و $R_h=[c,d]$.

در مثال‌های بعدی می‌توان دامنه و برد f را بازه‌هایی انتخاب کرد که از یک یا دو طرف بی‌کران باشند. از شمارهٔ (۲) کار در کلاس صفحهٔ ۴ می‌توان برای این منظور استفاده کرد.

یک بخش مهم از مثال‌های دیگر، رسم توابع به شکل $y=f(x+k)+l$ است که نمودار f داده شده است. مثال صفحهٔ ۵، برای این منظور داده شده است.

انبساط و انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ که در نمودار $g(x)=kf(x)$ $(k>0)$ به‌وجود می‌آید، مشابه رویه‌ای است که در انتقال‌ها آمده است، در صفحهٔ ۶ مشاهده می‌شود. انجام فعالیت این صفحه در رسم نمودارهای $y=3\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ و مقایسه نمودار آنها با $y=\sin x$، تفاوت آنها را به خوبی نشان می‌دهد. استدلال مربوط بـه این مطلب نیز در همین صفحه آمده است. اگـر $k<0$، نمودار تـابع g، قـرینهٔ تابع f نسبت به محور xها است، بنابراین همان‌طور کـه در صفحهٔ ۷ آمده است، نمودار تابع g فقط برای $k>1$ و $0<k<1$ بحث شده است. در کار در کلاس صفحهٔ ۷، ۳ موضوع اشاره شده است.

۱ تعیین دامنه و برد تابع $g(x)=kf(x)$ از روی دامنه و برد تابع f.

اگر $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$، سپس :

$$k>0 \Rightarrow \begin{cases} D_g=[a,b] \\ R_g=[kc,kd] \end{cases} \quad , \quad k<0 \Rightarrow \begin{cases} D_g=[a,b] \\ R_g=[kd,kc] \end{cases}$$

۲ رسم چند تابع برای دست‌ورزی بیشتر.

رسم توابع $y=-x^2$ و $y=2x^2-1$ و همچنین شماره (۳) کار در کلاس، برای این موضوع است.

۳ تعیین ضابطهٔ نموداری که فقط از قرینه‌یابی و انتقال یک نمودار دیگر به‌دست آمده است. قسمت (پ) از شمارهٔ ۲ این کار در کلاس به این موضوع پرداخته است. برای تعیین ضابطهٔ این تابع می‌توانید روش‌های مختلفی را انتخاب کنید.

از جمله، دو روش زیر :

روش اول :

$$y=|x| \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} y=|x+2| \xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}} y=|x+2|+1 \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} y=-|x+2|-1$$

روش دوم :

$$y=|x| \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} y=-|x| \xrightarrow{\text{۱ واحد به پایین}} y=-|x|-1 \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} y=-|x+2|-1$$

انبساط و انقباض افقی، آخرین بخش از این درس است. در فعالیت صفحهٔ ۸، ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ در فاصله $[0,2\pi]$ رسم شده است و سپس از دانش‌آموزان خواسته شده که نمودار تابع $y=\sin 2x$ را در فاصلهٔ $[0,\pi]$ رسم کنند. رسم هر دو نمودار در یک دستگاه و مقایسه آنها، انقباض افقی نمودار $y=\sin x$ را نشان می‌دهد. نتیجهٔ این فعالیت در حالت کلی به این صورت است که اگر (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، سپس $(\frac{x_0}{k},y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع $g(x)=f(kx)$ است. پس برای رسم تابع g کافیست طول نقاط تابع f را در $\frac{1}{k}$ ضرب کرد.

مشابه قسمت قبل، فقط برای مقادیر مثبت k، تقسیم‌بندی به‌صورت $k>1$ و $0<k<1$ انجام شده و برای $g(x)=f(-x)$، بحث قرینه کردن نسبت به محور yها مطرح شده است تا برای مقادیر منفی k، نیاز به بحث نباشد.

کار در کلاس صفحهٔ ۱۰، دقیقاً اهداف کار در کلاس صفحهٔ ۷ را دارد. در شمارهٔ ۱ این کار در کلاس اگر دامنه و برد تابع f برابر با $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$ باشد و $g(x)=f(kx)$، سپس

$$k>0 \Rightarrow \begin{cases} D_g=[\frac{a}{k},\frac{b}{k}] \\ R_g=[c,d] \end{cases} \quad , \quad k<0 \Rightarrow \begin{cases} D_g=[\frac{b}{k},\frac{a}{k}] \\ R_g=[c,d] \end{cases}$$

آخرین مثال از این درس، به رسم نمودار توابعی به شکل $g(x)=f(ax+b)$ می‌پردازد. یافتن نقطهٔ متناظر $(x_\circ,y_\circ)$ از نمودار f روی نمودار g، از ضابطهٔ معکوس $y=ax+b$ به‌دست می‌آید :

$$y = ax+b \xrightarrow{\text{جابه‌جایی } x \text{ و } y} x = ay+b \Rightarrow y = \frac{x-b}{a}$$

بنابراین نقطهٔ متناظر $(x_\circ,y_\circ)$ از f، نقطهٔ $(\frac{x_\circ-b}{a},y_\circ)$ از نمودار $y=f(ax+b)$ خواهد بود. با توجه به این مطلب، دو روش زیر برای رسم نمودار تابع g پیشنهاد می‌شود.

■ **روش اول :**

$$(x_\circ,y_\circ)\in f \xrightarrow{b \text{ واحد به چپ}} (x_\circ-b,y_\circ) \xrightarrow[\text{در } \frac{1}{a}]{\text{ضرب طول نقاط}} (\frac{x_\circ-b}{a},y_\circ)\in g$$

■ **روش دوم :**

$$(x_\circ,y_\circ)\in f \xrightarrow[\text{در } \frac{1}{a}]{\text{ضرب طول نقاط}} (\frac{x_\circ}{a},y_\circ) \xrightarrow[\text{انتقال به چپ}]{\frac{b}{a} \text{ واحد}} (\frac{x_\circ}{a}-\frac{b}{a},y_\circ)\in g$$

وجود روش دوم به‌خاطر تساوی $\frac{x_\circ-b}{a}=\frac{x_\circ}{a}-\frac{b}{a}$ است.

درس ۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

اهداف درس

۱ درک مفاهیم یکنوا و اکیداً یکنوا و توانایی تعیین بازه‌هایی که توابع مختلف در آنها این خواص را دارند.

۲ درک تعریف توابع اکیداً یکنوا و حل نامعادلاتی که شامل این توابع هستند.

۳ آشنایی با قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

۴ توانایی تعیین باقی‌مانده تقسیم یک چندجمله‌ای بر $ax+b$

۵ توانایی تجزیه $x^n \pm a^n$ با عامل‌های $x\pm a$؛ برای nهای زوج و فرد.

روش تدریس

این درس همان‌طور که از نام آن برمی‌آید، شامل ۳ بخش است. در بخش اول تابع چندجمله‌ای تعریف می‌شود و سپس در ادامهٔ آن، تابع درجه سوم $y=x^3$، به کمک نقطه‌یابی رسم می‌شود. رسم هر تابع درجهٔ سوم در این زمان برای دانش‌آموزان امکان‌پذیر نیست ولی می‌توان هر تابع درجهٔ سومی که از تبدیل تابع $y=x^3$، مانند $y=(x+1)^3-2$ حاصل می‌شود را رسم کرد. شمارهٔ ۱ از کار در کلاس صفحهٔ ۱۴ به این موضوع می‌پردازد. در قسمت (پ) کافیست تابع را به‌صورت زیر بنویسیم:

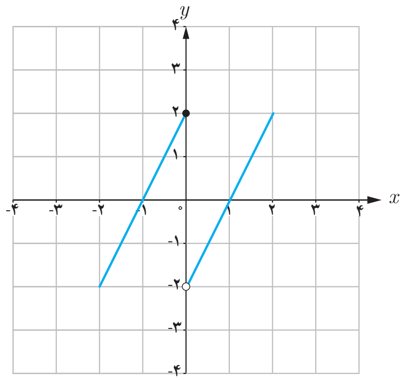
$$y=x^3-3x^2+3x=x^3-3x^2+3x-1+1=(x-1)^3+1$$

شمارهٔ ۲از این کار در کلاس به مقایسهٔ نمودار توابع $y=x^3$ و $y=x^2$ در ربع اول و در بازهٔ $[0,2]$ می‌پردازد و نشان می‌دهد که در فاصلهٔ $[0,1]$، نمودار $y=x^3$ پایین‌تر از نمودار $y=x^2$ است ولی در فاصله $[1,2]$، این رفتار عوض می‌شود. مقایسهٔ رفتار این دو تابع را می‌توان از مقایسهٔ x^2 و x^3 نیز نتیجه گرفت.

بخش دوم این درس به توابع صعودی و نزولی پرداخته است. مفهوم صعودی و نزولی از روی نمودار صفحهٔ ۱۵ و انجام فعالیت این صفحه به خوبی قابل درک است. تعریف دقیق این توابع در صفحهٔ ۱۶ آمده

است. ذکر یک نکته در اینجا ضروری است : هدف این بخش، درک توابع یکنوا از روی نمودار است و نه اثبات یکنوایی به کمک ضابطهٔ تابع.

در صفحهٔ ۱۷، توابع اکیداً یکنوا، با همان نگاه توابع یکنوا، تعریف شده‌اند. کار در کلاس این صفحه به ۳ مطلب می‌پردازد. شماره‌های ۱ و ۲، برای رسم توابع شناخته شده و تعیین فاصله‌هایی است که این توابع در آنها اکیداً یکنوا هستند. باید دقت داشت که ممکن است یک تابع در زیر بازه‌هایی از دامنه، اکیداً یکنوا باشد ولی در کل دامنه، اکیداً یکنوا نباشد. مثلاً تابع زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی نیست ولی در فاصله‌های $(-\infty,\circ]$ و $(\circ,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



در شمارهٔ ۳ این کار در کلاس، هر تابع اکیداً صعودی در یک فاصله، صعودی نیز خواهد بود ولی عکس این مطلب صحیح نیست (مانند تابع $y=۳$ در فاصله $(\circ,+\infty)$) برای پاسخ به این سؤال و موارد مشابه، از تعابیر فارسی نیز می‌توان استفاده کرد.

در شمارهٔ ۴، می‌دانیم که اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، سپس برای هر a و b در این فاصله داریم :

$$a>b \Rightarrow f(a)>f(b)$$

این گزاره شرطی، معادل با عکس نقیض خود یعنی گزارهٔ شرطی زیر است :

$$f(a)\leq f(b) \Rightarrow a\leq b$$

از این مطلب برای حل نامعادلاتی می‌توان استفاده کرد که یک تابع اکیداً صعودی وجود دارد و می‌توان

تابع f را در نامعادله حذف کرد. به‌عنوان مثال، برای حل نامعادله قسمت (ب)، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\log(x+۱)\leq\log(۲x-۳)\xrightarrow[\text{صعودی است.}]{\text{تابع } y=\log x \text{ اکیداً}} x+۱\leq ۲x-۳\Rightarrow x\geq ۴$$

البته باید دقت کرد که این جواب باید با دامنهٔ توابع $y=\log(x+۱)$ و $y=\log(۲x-۳)$ اشتراک گرفته شود که در اینجا جواب نهایی همان $x\geq ۴$ است.

برای توابع اکیداً نزولی، بحث مشابهی وجود دارد که تمرین ۹ در صفحهٔ ۲۲ به این مطلب پرداخته است. آخرین بخش از این درس، تقسیم و بخش‌پذیری است. ابتدا قضیهٔ تقسیم به شکل خطی به‌صورت $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$ با انجام یک فعالیت، آموزش داده می‌شود. سپس در فعالیت صفحهٔ ۱۹، به کمک این قضیه به راحتی می‌توان باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ را به‌دست آورد و نشان داد که $r(x)=f(\frac{-b}{a})$. اثبات این مطلب به‌صورت زیر است :

$$f(x)=(ax+b)q(x)+r(x)\xrightarrow{x=-\frac{b}{a}}$$

$$f(-\frac{b}{a})=۰\times q(x)+r(x)\longrightarrow$$

$$f(-\frac{b}{a})=۰$$

کار در کلاس پایین صفحهٔ ۱۹ برای دست‌ورزی در این زمینه است.

در آخرین فعالیت این درس، با انجام مراحل خواسته شده، x^n-a^n برحسب $x-a$ تجزیه می‌شود. برای انجام شماره ۳ از این فعالیت، می‌توان به دو صورت عمل کرد. می‌توانید این شماره را از شمارهٔ ۱ نتیجه گرفت و یا می‌توان x^n-a^n را بر $x-a$ به‌صورت زیر تقسیم کرد :

$$\begin{array}{l|l}
x^n-a^n & x-a \\ \cline{2-2}
\underline{x^n-ax^{n-۱}} & x^{n-۱}+ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}+\dots+a^{n-۲}x+a^{n-۱} \\
ax^{n-۱}-a^n & \\
\underline{ax^{n-۱}-a^۲x^{n-۲}} & \\
a^۲x^{n-۲}-a^n & \\
\quad\vdots & \\ \hline
\quad ۰ &
\end{array}$$

اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است، از شمارهٔ ۲ نتیجه می‌شود و اینکه خارج قسمت چگونه نوشته شده است، از مقایسهٔ هر جمله با جملهٔ قبل صورت گرفته است.

با تعویض a به $-a$ و بحث راجع به nهای فرد و زوج، اتحادهای دیگری نتیجه می‌شود که کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ به این مطالب پرداخته است.