فصل اول

آشنایی با نظریهٔ اعداد

نگاه کلی به فصل

فصل ۱ کتاب ریاضیات گسسته، به مبحث استدلال و نظریه اعداد اختصاص یافته است. این فصل شامل سه درس است. موضوع درس اول در مورد استدلال ریاضی می‌باشد و روش‌های استدلال و اثبات ریاضی شامل اثبات مستقیم، مثال نقض، اثبات غیرمستقیم، اثبات بازگشتی، همراه با سؤالات متنوع مطرح شده است. در درس دوم به موضوع بخش‌پذیری در اعداد صحیح که شامل معرفی رابطه عاد کردن و ویژگی‌های آن، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، قضیه تقسیم و کاربردهای آن، افراز مجموعه Z به کمک قضیه تقسیم و مسائل مختلف مربوط به آنها پرداخته شده است. در درس سوم، مبحث هم نهشتی در اعداد صحیح مطرح می‌گردد که شامل معرفی رابطه هم‌نهشتی و ویژگی‌های آن و برخی کاربردهای هم نهشتی مثل تعیین باقی‌مانده تقسیم و تقویم نگاری است. سپس معادله هم‌نهشتی و معادله سیاله خطی معرفی می‌شوند و شرط وجود جواب آنها بیان می‌گردد. حل معادله سیاله خطی از طریق تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی، همراه با مثال‌هایی آموزش داده می‌شود. همچنین کاربرد معادله سیاله خطی در حل برخی از مسائل عینی و مرتبط با زندگی روزمره مطرح شده است.

درس اول

استدلال ریاضی

روش تدریس

در مثال ص ۹ دانش‌آموزان با دو نوع استدلال، یعنی «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» آشنا می‌شوند. همکاران محترم می‌توانند این مثال را بدون رجوع دانش‌آموزان به کتاب، در کلاس درس مطرح نمایند و در صورت امکان یک گفت‌وگو و بحث ریاضی را شکل دهند و به کمک دانش‌آموزان بحث را هدایت نمایند. البته با توجه به سطح کلاس امکان طرح مثال غنی‌تر هم وجود دارد. بخشی از مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان حین بحث و گفت‌وگو قابل برطرف شدن است. همچنین مسئله‌هایی که در کار در کلاس ارائه شده‌اند نیز برای بحث و گفت‌وگو مناسب هستند.

کار در کلاس ص ۳

قسمت‌های الف)، پ)، ث) و چ) به روش «اثبات مستقیم» و بقیه موارد به کمک ارائه «مثال نقض» قابل حل هستند.

حل قسمت چ کار در کلاس ص ۳

$$۴k+۱=a^۲ \Rightarrow ۴k=a^۲-۱ \Rightarrow k=\frac{a^۲-۱}{۴}=(\frac{a+۱}{۲})(\frac{a-۱}{۲})$$

چون $۴k+۱$ عددی فرد است پس $a^۲$ نیز عددی فرد است و در نتیجه a نیز فرد است. بنابراین $a+۱$ و $a-۱$ هر دو زوج هستند و در نتیجه $\frac{a+۱}{۲}$ و $\frac{a-۱}{۲}$ اعدادی طبیعی هستند. اختلاف این دو عدد برابر واحد است :

$$\frac{a+۱}{۲}-\frac{a-۱}{۲}=\frac{a+۱-a+۱}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

هم‌ارزی $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge ... \wedge (p_n \Rightarrow r)$ نشان می‌دهد که چرا برای اثبات درستی $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n \Rightarrow r$ باید هر حالت را جداگانه بررسی کرد. مثال‌های مناسب دیگر مواردی مانند، گویا یا گنگ بودن، مثبت یا منفی بودن، بزرگ‌تری یا کوچک‌تری و نظایر آن را شامل می‌شوند. همکاران عزیز توجه دارند که هدف آشنایی با این نوع استدلال است و طرح مباحث دشوار که نیاز به تکنیک‌ها و قواعد و یا محاسبات پیچیده دارند مورد تأیید مؤلفین کتاب حاضر نمی‌باشد. ضمناً با ارائه فرصت به دانش‌آموزان برای ارائه راه‌حل‌هایشان ممکن است پاسخ‌های متفاوت و در شرایطی بهتر از آنچه که در این کتاب ارائه شده‌اند، به‌دست آید.

کار در کلاس ص ۵

الف) اگر ab عددی فرد باشد، باید هر دو a و b فرد باشند :

$$a = 2m + 1 \quad , \quad b = 2n + 1$$

$$a^2 = 4m^2 + 4m + 1 \quad , \quad b^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$a^2 + b^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4m + 4n + 2$$

که عددی زوج است.

ب) اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، با توجه به اینکه : $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ بنابراین $\frac{n(n+1)}{2}$ هم باید زوج باشد و در نتیجه $n(n+1) = 4k$

$$n = 1 \Rightarrow n(n+1) = 1 \times 2$$

$$n = 2 \Rightarrow n(n+1) = 2 \times 3$$

$$n = 3 \Rightarrow n(n+1) = 3 \times 4$$

$$n = 4 \Rightarrow n(n+1) = 4 \times 5$$

$$n = 5 \Rightarrow n(n+1) = 5 \times 6$$

$$n = 6 \Rightarrow n(n+1) = 6 \times 7$$

با بررسی پاسخ‌ها مشخص است که $n = 3$ و $n = 4$ تنها پاسخ‌های قابل قبول هستند.

اثبات غیر مستقیم / اثبات به روش برهان خلف

مطالعات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان گاهی اثبات‌ها را حفظ می‌کنند و با آنکه به ظاهر توانایی ارائه آن را دارند، اما از توضیح برخی ایده‌های اساسی در یک اثبات ناتوان هستند. برای درک برهان خلف شایسته است ایده منطقی که در ورای آن قرار دارد برای دانش‌آموز تشریح شود. در هر حال همان‌گونه که پولیا می‌گوید «این‌گونه برهان مخالفانی نیز دارد و به‌طور خلاصه گفته می‌شود که با گوش دادن به چنین برهانی، ناگزیر باید در تمام مدت توجه خود را به فرض غلطی معطوف داریم که لازم است آن را فراموش کنیم، نه به قضیه راستی که باید آن را در خاطر نگاه داریم». در هر حال از نظر پولیا برای داوری در مورد چنین اعتراضاتی باید میان دو کاربرد برهان خلف، یکی به عنوان افزار پژوهش و دیگری به عنوان وسیله بیان و عرضه کردن تمایز قائل شویم.

حل کار در کلاس ص ۶

الف) فرض کنیم x یک عدد گنگ باشد، ولی (فرض خلف) $\frac{1}{x}$ عددی گویا باشد. واضح است که $x \neq 0$. با توجه به آنچه در مثال آخر ص ۵ آمده است، حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است، بنابراین حاصل $x \cdot \frac{1}{x}$ باید عددی گنگ باشد در حالی‌که $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ که یک تناقض است.

ب) فرض کنیم تابع f در a پیوسته باشد ولی تابع g در a پیوسته نباشد. فرض کنیم $f+g$ (فرض خلف) در $x=a$ پیوسته است، بنابراین $f+g-f$ هم در $x=a$ پیوسته است، یعنی g در $x=a$ پیوسته است که یک تناقض است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اثبات به کمک گزاره‌های هم‌ارز یکی از روش‌های نیرومند در استدلال ریاضی است. در حقیقت بخش مهمی از کار به توانایی ارائه گزاره‌ای هم‌ارز با گزاره‌ای که باید اثبات شود ــ و البته گزاره‌ای که بررسی درستی یا نادرستی آن ساده‌تر از گزاره اصلی باشد ــ اختصاص دارد. تأکید می‌گردد که سطح سؤالات مطرح شده در آزمون‌ها باید در محدوده و سطح سؤالات کتاب باشد.

حل کار در کلاس ص ۷

الف) گزاره‌های $a<b$ و $a^2<b^2$ هم‌ارز نیستند. بنابراین ترکیب دو شرطی $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ درست

نیست.

ب) دو گزاره $a<b$ و $a^۳<b^۳$ هم‌ارز هستند و هر یک دیگری را نتیجه می‌دهد. بنابراین $a<b \Leftrightarrow a^۳<b^۳$ یک ترکیب دو شرطی درست است.

حل کار در کلاس ص ۸

الف) اگر $n\in\mathbb{N}$ همان‌گونه که قبلاً دیده‌اید می‌توان ثابت کرد:

n زوج است $\Leftrightarrow$ $n^۲$ زوج است

بنابراین این دو گزاره معادل هم هستند.

حل تمرینات درس اول ص ۸

۱ الف) اگر x و y هم علامت باشند و $x,y\neq ۰$ داریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲\geq ۲xy$$

$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲\geq ۰$$

همواره برقرار است.

ب)

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx \Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲zx$$

$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy+y^۲+z^۲-۲yz+x^۲+z^۲-۲zx\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲\geq ۰$$

همواره برقرار است.

برای اثبات رابطه $x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$ کافی است در قسمت قبل به‌جای z، عدد ۱ قرار دهیم. البته به‌طور مستقل و شبیه روش بالا نیز می‌توان عمل کرد.

۲ $x=\frac{۱}{۲}$ یک پاسخ است. مسئله چند جواب دارد؟

۳ فرض کنیم که α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، اما $\alpha-\beta$ گویا نباشد (فرض خلف) بنابراین $(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)$ هم گویاست، یعنی ۲α گویاست و از آنجا α گویا خواهد بود که یک تناقض است.

۴ فرض کنیم چنین اعدادی یافت شوند. پس $x^۲+y^۲=(x+y)^۲$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲=x^۲+y^۲+۲xy \Rightarrow ۲xy=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } y=۰$$

اگر $x=۰$، آن‌گاه y می‌تواند عددی صحیح و دلخواه باشد.

اگر $y=0$، آن‌گاه x می‌تواند عددی صحیح و دلخواه باشد.

۵ فرض کنیم b و a نا صفری موجود باشند که $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}(a+b\neq 0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab}\Rightarrow (a+b)^2=ab\Rightarrow a^2+2ab+b^2=ab$$

$$\Rightarrow a^2-ab+b^2=0\Rightarrow (a-\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}=0\Rightarrow \begin{cases}(a-\frac{b}{2})^2=0\\ \frac{3b^2}{4}=0\Rightarrow b=0\end{cases}$$

$$(a-\frac{b}{2})^2=0\overset{b=0}{\Rightarrow} a^2=0\Rightarrow a=0$$

پس $a=0$ و $b=0$ که تناقض با فرض ناصفر بودن a و b دارد.

۶ الف) فرد $x=2k+1\Rightarrow x^2=4k^2+4k+1$

$$x^3=(2k+1)^3=8k^3+3(2k)^2+3(2k)^2+1$$

$$=8k^3+12k^2+6k+1$$

ب) اعداد مذکور را $n+2$, $n+1$, n , $n-1$ و $n-2$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)}{5}=\frac{5n}{5}=n$$

نمونه‌سؤال‌های ارزشیابی

۱ برای هر دوعدد حقیقی a و b با شرط $a+b>0$ ثابت کنید :

$$a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$$

۲ ثابت کنید برای هر عدد حقیقی a داریم :

$$\frac{a^2}{1+a^4}\leq\frac{1}{2}$$

۳ ثابت کنید هر عدد ۶ رقمی به‌صورت $\overline{abc\,abc}$ بر اعداد ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است.

۴ اگر $a>0$ و $b>0$ و $a+b=1$ ثابت کنید $-ab\leq\frac{1}{4}$

۵ ثابت کنید تابعی چون f موجود است که $f=f^{-1}$.

۶ ثابت کنید عدد اولی چون p موجود است که $vp+1$ مکعب کامل باشد.

۷ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است، دلیل بیاورید :

الف) اگر $A \subseteq B$ و $x \notin B$ آن‌گاه $x \notin A$

ب) اگر $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C$ آن‌گاه $A \not\subseteq C$

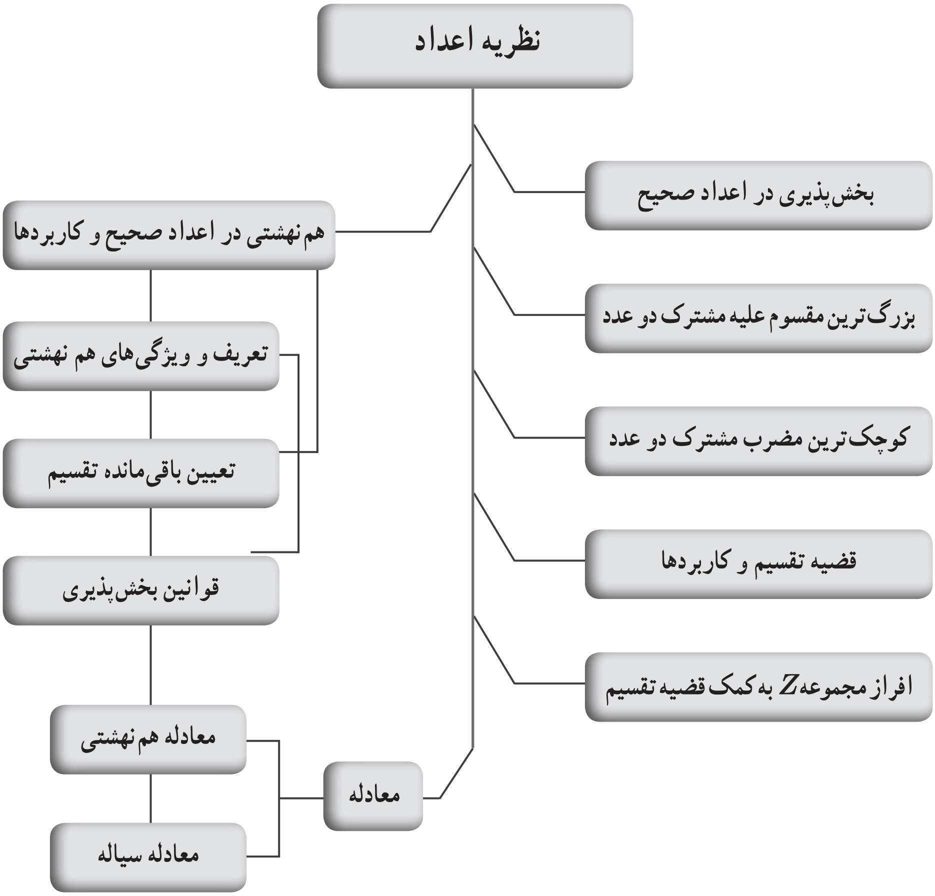
ج) اگر $x \in A$ و $A \in B$ آن‌گاه $x \in B$

۸ ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۹ اگر m یک عدد مثبت باشد ثابت کنید : $m+\frac{۴}{m^{۲}} \geq ۳$

۱۰ ثابت کنید بین هر دو عدد گویای متمایز، عددی گنگ موجود است.

نقشه مفهومی درس‌های ۲ و ۳ فصل اول



درس دوم

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

اهداف

۱ آشنایی و درک مفهوم بخش‌پذیری در اعداد صحیح
۲ آشنایی با رابطه عاد کردن و شناخت ویژگی‌های آن و به کارگیری آن در حل برخی از مسائل
۳ به کارگیری تعریف رابطه عاد کردن برای بیان مفهوم بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد
۴ به کارگیری تعریف رابطه عاد کردن برای بیان مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد
۵ آشنایی با قضیه تقسیم و کاربرد آن در حل برخی از مسائل
۶ به کارگیری قضیه تقسیم برای افراز مجموعه Z

روش تدریس

در شروع درس، به بیانی ساده مفهوم رابطه عاد کردن مطرح شده است و مفهوم بخش‌پذیری برای اعداد طبیعی همراه با مثال مطرح می‌شود. سپس در حالت کلی‌تر، مفهوم بخش‌پذیری به مجموعه اعداد صحیح تعمیم داده شده است.

هدف کاردرکلاس صفحه ۱۰، درک رابطه عاد کردن و استفاده از آن برای حل مسئله است.

حل کاردرکلاس صفحه ۱۰، قسمت ۲

$$3^9 = 3^5 \times 3^4 \xrightarrow{3^4 = q} 3^9 = 3^5 \times q \to 3^5 \mid 3^9$$

$$\forall m,n \in N; m \le n \Rightarrow a^n = a^m \times a^{n-m} \xrightarrow{a^{n-m}=q} a^n = a^m \times q \to a^m \mid a^n$$

سپس ویژگی‌ها و نتایج رابطه عاد کردن همراه با دلایل و اثبات مطرح شده است.

اثبات ویژگی ۱ :

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow mb = a(mq) \overset{mq=q'}{\Rightarrow} a \mid mb$$

پاسخ به سؤالات مربوط به ویژگی ۱ :

پاسخ سؤال اول : خیر، با توجه به مثال‌های مطرح شده، همواره چنین نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

پاسخ سؤال دوم :

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \overset{\times k}{\Rightarrow} kb = (ka)q \Rightarrow ka \mid kb$$

$$ka \mid kb \Rightarrow kb = kaq \overset{\div k}{\Rightarrow} b = aq \Rightarrow a \mid b$$

تکمیل اثبات ویژگی ۲ :

$$a|b \ , \ b|c \Rightarrow b = aq_۱ \ , \ c = bq_۲$$

$$\Rightarrow c = (aq_۱)q_۲ \Rightarrow c = a(q_۱q_۲) \overset{q_۱q_۲=q}{\Rightarrow} c = aq \Rightarrow a \mid c$$

پاسخ سؤال مربوط به ویژگی ۳ :

خیر، به طور مثال : $۲|۳+۷ \rightarrow ۲ \nmid ۳ \ , \ ۲ \nmid ۷$

کار در کلاس صفحه ۱۱

قسمت ۱، دلیل درستی رابطه $a|۱ \Rightarrow \mathrm{a} = \pm۱$:

$a|۱ \Rightarrow |a| \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq a \leq ۱ \Rightarrow a = -۱$ یا $a = ۰$ یا $a = ۱$

از طرفی چون $a|۱$ پس $a \neq ۰$، بنابراین : $a = \pm ۱$

قسمت ۲،

$$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \overset{q^n = q'}{\Rightarrow} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$$

در واقع با حل این مسئله ثابت شد اگر $\frac{b}{a}$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه $\frac{b^n}{a^n}$ نیز عددی صحیح است.

قسمت ۳،

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow b = aq_۱ \\ c \mid d \Rightarrow d = cq_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow b \times d = (a \times c)(q_۱q_۲) \overset{q_۱q_۲=q}{\Rightarrow} b \times d = (a \times c) \times q \Rightarrow ac \mid bd$$

قسمت ۴، با استفاده از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ داریم :

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow a \mid mb \\ c \mid d \Rightarrow a \mid nc \end{array}\right\} \xrightarrow{\pm} a \mid mb \pm nc$$

قبل از ورود به مبحث بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، مفهوم اعداد اول برای دانش‌آموزان یادآوری شده است. در واقع اعداد اول به عنوان زیر بنا و سازنده همه اعداد صحیح، نقش بسیار مهم و اساسی ایفا می‌کنند. سپس با استفاده از رابطه عاد کردن، تعریف عدد اول بیان می‌شود و مثالی مطرح شده است.

تکمیل حل مثال :

$$\left.\begin{array}{l} a|7k+6 \Rightarrow a|9\times(7k+6) \Rightarrow a|63k+54 \\ a|9k+7 \Rightarrow a|7\times(9k+7) \Rightarrow a|63k+49 \end{array}\right\} \Rightarrow a|(63k+54)-(63k+49) \Rightarrow a|5 \Rightarrow a=5 \text{ یا } a=1$$

می‌توان برای درک بهتر دانش‌آموزان، مثال دیگری نیز مطرح نمود تا پاسخ دهند.

مثال : اگر a عددی صحیح و دو عدد $(5m+4)$ و $(4m+3)$ را عاد کند، ثابت کنید : $a=\pm 1$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a \mid 5m+4 \Rightarrow a \mid 4\times(5m+4) \Rightarrow a \mid 20m+16 \\ a \mid 4m+3 \Rightarrow a \mid 5\times(4m+3) \Rightarrow a \mid 20m+15 \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid (20m+16)-(20m+15) \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a=\pm 1$$

در شروع این درس مفهوم مقسوم علیه‌های یک عدد با توجه به رابطه عاد کردن تعریف شد، وقتی $a|b$، a یک مقسوم علیه b است. با توجه به این تعریف، مفاهیم بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد معرفی می‌شوند.

ممکن است برای دانش آموزی سؤال شود که در تعریف ب م م، چرا a و b هر دو با هم صفر نیستند؟

اگر a و b هر دو را با هم صفر در نظر بگیریم، پس باید ب م م صفر و صفر را حساب کنیم. فرض کنیم $d=(0,0)$، طبق تعریف داریم : $d|0$ و $d|0$، ولی d باید بزرگ‌ترین عددی باشد که صفر را عاد می‌کند. که چنین عددی را نمی‌توان یافت. چون همه اعداد صفر را عاد می‌کنند و بین آنها بزرگ‌ترینی وجود ندارد.

در صفحه ۱۳ ، بعد از تعریف کوچک‌ترین مضرب مشترک، سؤال شده که توضیح دهید هر یک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

شرط (الف) مضرب مشترک بودن را برای c تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که c از هر مضرب مشترک دلخواهی چون m، کوچک‌تر یا مساوی است.

هدف از کاردرکلاس صفحه ۱۳، درک بهتر دانش آموزان از مفاهیم ب م م و ک م م و به کارگیری از این مفاهیم برای اثبات برخی قضیه‌ها و حل مسائل است.

۱ــ

اثبات الف :

$$a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$$

با توجه به دو شرط موجود در تعریف ب م م داریم :

$$|a|\,\big|\,a \xrightarrow{a|b} |a|\,\big|\,b$$

$$\forall m>0\ ;\ m\,|\,a , m\,|\,b \Rightarrow m\,|\,a \Rightarrow |m| \le |a| \Rightarrow m \le |a|$$

اثبات ب :

$$a|\,b \Rightarrow [a,b]=|b|$$

با توجه به دو شرط موجود در تعریف ک م م داریم :

$$b\,\big|\,|b| \xrightarrow{a|b} a\,\big|\,|b|$$

$$\forall m>0\ ;\ a\,|\,m , b\,|\,m \Rightarrow b\,|\,m \Rightarrow |b| \le |m| \Rightarrow |b| \le m$$

۲ــ در این قسمت، منظور از قضیه مطرح شده این است که عدد اول p نسبت به هر عددی که مضرب p نباشد، اول است.

$$(p\,,\,a)=\mathrm{d} \begin{cases} d\,|\,p \xrightarrow{p\ \text{اول}} d=1 \ \text{یا}\ d=p \\ \mathrm{d}\,|\,\mathrm{a} \qquad (1) \end{cases}$$

اگر $d=p$ باشد، در این صورت، با توجه به (۱) باید $\mathrm{p}\,|\,\mathrm{a}$ (به جای d قرار می‌دهیم p) که با فرض $(p \nmid a)$ تناقض دارد، پس باید $d=1$.

نتیجه‌ای که می‌توان از این قضیه گرفت این است که : اگر بزرگ‌ترین شمارنده دو عدد صحیح a و b برابر یک باشد، آن دو عدد نسبت به هم اول هستند. $(a\,,\,b)=d=1$

در صفحه ۱۴، بحث تقسیم پذیری در Z، در حالت کلی مطرح می‌شود و با بیان قضیه‌ای به نام قضیه تقسیم، که از مهم‌ترین قضیه‌های نظریه اعداد به شمار می‌رود، حالت‌هایی را که در تقسیم a بر b، باقی‌مانده صفر نباشد، را در نظر می‌گیریم.

در حالت کلی‌تر می‌توان قضیه تقسیم را به این صورت بیان نمود که، اگر a و b اعداد صحیح باشند و $b\neq 0$، اعداد صحیح و منحصر به فرد q و r وجود دارند به طوری که : $a=bq+r\,,\ 0\le r<|b|$.

واضح است که اگر $r=0$ باشد، $a=bq$ بوده، آنگاه a بر b بخش‌پذیر است.

در ادامه برای درک مفهوم قضیه تقسیم و کاربرد آن در حل مسائل تقسیم‌پذیری، مثال‌هایی مطرح شده است.

در مثال اول صفحه ۱۴، که هدف آن تعیین باقی‌مانده تقسیم عدد ۲۵− بر ۷ می‌باشد، به عبارتی از تساوی ۴ + (۳ × ۷)=۲۵ استفاده شده است، که طرفین این تساوی در عدد (۱−) ضرب و به صورت ۴−(۳−) × ۷ = ۲۵− نوشته می‌شود. به دانش آموزان تأکید شود که علامت منفی در کنار عدد ۷ قرار

نمی‌گیرد، چون می‌خواهیم باقی مانده تقسیم عدد (۲۵−) را بر ۷ به دست آوریم. سپس در کتاب با توجه به شرایط قضیه تقسیم، باقی‌مانده را که باید عددی نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم علیه باشد را به‌دست آورده است.

در صفحه ۱۵، مبحث افراز مجموعه Z به کمک قضیه تقسیم بیان شده است. دانش‌آموزان در پایه یازدهم، در کتاب آمار و احتمال، با مفهوم افراز یک مجموعه آشنا شدند. بهتر است مفهوم افراز در کلاس برای دانش‌آموزان یادآوری گردد.

فرض کنیم $A \neq \varnothing$ یک مجموعه و $A_۱$, $A_۲$, . . . و A_n زیرمجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیرمجموعه $A_۱$, $A_۲$, . . . و A_n افراز شده است، هر گاه سه شرط زیر را هم زمان داشته باشد :

۱) هیچ یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشد. یعنی : $\forall ۱ \leq i \leq n;\ \ A_i = \varnothing$

۲) اشتراک هر دو زیرمجموعه متمایز، تهی باشد. یعنی : $\forall i, j \ \ (i \neq j);\ \ A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) اجتماع تمام زیرمجموعه‌ها با مجموعه اصلی برابر باشد. یعنی : $\bigcup\limits_{i=۱}^{n} A_i = A$

سپس مسئله‌های حل شده در کتاب مورد بررسی قرار گیرند.

در مسئله ۳ صفحه ۱۵، می‌خواهیم ثابت کنیم که هر عدد صحیح و فرد، به یکی از دو صورت ۱ +$۴k$ و ۳+$۴k$ نوشته می‌شود. این مطلب ممکن است برای دانش‌آموزان سؤال برانگیز باشد، چون هر عدد فرد را به صورت ۱ +$۲k$ نشان می‌دادند. می‌توان با مثالی به آنها نشان داد که بعضی ۱ +$۲k$ها به صورت ۱ +$۴k$ و بعضی به صورت ۳ +$۴k$ هستند. به طور مثال، عدد ۹ را می‌توان به صورت ۱+۲×۴ نوشت که همان ۱ +$۴k$ است و عدد ۷ را می‌توان به صورت۳+۱×۴ نوشت که همان ۳ +$۴k$ است.

توصیه آموزشی

❑ به دانش آموزان تأکید شود برای اینکه مسائل مربوط به نظریه اعداد برایشان ساده و آسان شود، با دقت تعاریف و اثبات ویژگی‌های مفاهیم مطرح شده در کتاب را یاد بگیرند.

❑ بعضی مطالب که پیش‌نیاز مطالب جدید است و در کتاب یادآوری شده، با روش پرسش و پاسخ در کلاس مطرح شود تا دانش‌آموزان از آموخته‌های قبلی خود برای مبحث جدید استفاده کنند و ارتباط مفهومی بین مفاهیم ریاضی را به خوبی درک نمایند و یادگیری معنادار صورت گیرد. به عنوان مثال، قبل از ورود به مبحث افراز مجموعه Z، از دانش آموزان پرسیده شود : آیا مجموعه اعداد فرد طبیعی و اعداد زوج طبیعی، افرازی برای مجموعه N هستند؟ برای W چطور؟ چرا؟ با طرح این‌گونه سؤالات، هم مفهوم افراز برای دانش‌آموزان یادآوری می‌شود و هم برای درک بهتر و ایجاد مهارت در حل مسئله به آنها کمک می‌کند.

❑ به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل پیچیده و دشوار اجتناب گردد.

اشتباهات رایج دانش آموزان

معمولاً دانش‌آموزی که به تعاریف دقت نمی‌کند و خواص و ویژگی‌های مفهوم مطرح شده در درس را بدون دلایل و اثبات به ذهن می‌سپارد، در حل مسائل نظریه اعداد دچار مشکل و اشتباه می‌شود.
مثلاً به اشتباه فکر می‌کند وقتی حکمی برقرار است، پس عکس آن حکم نیز برقرار است و عکس آن حکم را بدون بررسی و اطمینان از درستی آن، در حل مسئله‌ها به کار می‌برد.
همچنین، به این نکته توجه ندارد که در بعضی از حکم‌ها اگر عدد مرکب باشد یا اول باشد، تفاوتی وجود دارد. به عنوان نمونه :

❑ اگر a و b اعداد صحیح باشند، از $a|b^n$ که $(n \in N)$ ، نتیجه می‌گیرد : $a|b$. در حالی که این نتیجه‌گیری همواره درست نیست. به عنوان مثال، از $۹|۳^۳$ نمی توان نتیجه گرفت که $۹|۳$. ولی اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت که : $p|a^n \Leftrightarrow p|a$.

❑ اگر a و b و c اعداد صحیح باشند، از $a|bc$ نتیجه می‌گیرد : $a|b$ یا $a|c$. که این حکم همواره درست نیست. همان‌طور که در کتاب مثال‌هایی ارائه شد، مثلاً اگر $۴ \times ۳ | ۶$، ولی $۳ \nmid ۶$ یا $۴ \nmid ۶$. حال اگر p عددی اول باشد، می‌توان نتیجه گرفت که : $p|ab \Rightarrow p|a$ یا $p|b$.

❑ اگر a و b اعداد صحیح باشند، از $a \nmid b$ ، نتیجه می‌گیرد که $(a,b) = ۱$. که این حکم همواره برقرار نیست. مثلاً : عدد ۱۸، عدد ۶ را عاد نمی‌کند، ولی ۶ و ۱۸ نسبت به هم اول نیستند. حال اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت که : $p \nmid a \Leftrightarrow (p,a) = ۱$.

دانستنی‌های معلم

نظریه اعداد یکی از شاخه‌های جالب و با اهمیت ریاضیات می‌باشد که توانسته توجه بشر را برای هزاران سال به خود جلب کند. در این شاخه از ریاضیات، به مسائل، قضایا و برهان‌هایی برمی‌خوریم که قدمت بسیار طولانی دارند و پیشینه تاریخی آنها به روزگاران بسیار دور بر می‌گردد. تالس به عنوان نخستین کسی که برای احکامی از ریاضیات استدلال منطقی ارائه کرده است، شناخته می‌شود. پس از تالس، فیثاغورس و شاگردانش تلاش کردند که خواص اعداد را مورد مطالعه قرار دهند. پس از ایشان، اقلیدس در کتاب «اصول» گرد آیه‌ای منسجم از احکام ریاضی با اثبات‌های منطقی شامل علم حساب را تألیف کرد. بخشی از آموزه‌های امروزی علم حساب از جمله مباحث بخش‌پذیری، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و نحوهٔ محاسبهٔ آن، اعداد اول، قضیهٔ بنیادی حساب ونامتناهی بودن اعداد اول در کتاب اصول یافت می‌شوند. امروزه نظریه اعداد، آن‌چنان وسعت یافته که تقریباً در تمام شاخه‌های ریاضی رخنه کرده است و حتی

توانسته در علوم غیر ریاضی همچون کامپیوتر، کاربرد داشته باشد. اگر بخواهیم در حالت کلی این علم را تعریف کنیم، باید بگوییم نظریه اعداد، شاخه‌ای از ریاضیات است که ویژگی‌های اعداد صحیح در آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نظریه هم‌نهشتی یا حساب پیمانه‌ای یکی از شاخه‌های مهم نظریه اعداد است و این شاخه در واقع ابزار بسیار قدرتمندی برای محاسبات مختلف می‌باشد. در اوایل قرن نوزدهم کارل فردریش گاوس، ریاضیدان بزرگ آلمانی، با بیان هم نهشتی‌ها توانست راهگشا و حل‌کننده بسیاری از مشکلات و مسائل نظریه اعداد باشد. هم‌نهشتی‌ها کاربردهای بسیاری در دانش کامپیوتر، از جمله حساب با اعداد صحیح بزرگ و رمزنگاری دارند. مفهوم هم نهشتی در موارد بسیاری در زندگی ما مشهود است.

می‌دانیم، بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است. در واقع معادله‌ای چند جمله‌ای با متغیرهای صحیح، که در آن بیش از یک متغیر وجود دارد، معادله سیاله نامیده می‌شود. از لحاظ تاریخی، این‌گونه معادله‌ها از زمان ریاضیدان یونانی دیوفانت که در قرن سوم بعد از میلاد می‌زیسته، مطرح بوده‌اند و به همین مناسبت به آنها «معادله‌های دیوفانتی» نیز می‌گویند.

حل تمرینات درس دوم صفحه ۱۶ کتاب

۱

$$ab \mid cd \quad , \quad a \mid cd \quad , \quad b \mid cd \quad , \quad c \mid ab \quad , d \mid ab$$

۲

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow (-b) = a(-q) \overset{-q=q'}{\Rightarrow} a \mid -b$$

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)(-q) \overset{-q=q'}{\Rightarrow} -a \mid b$$

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow -b = -aq \Rightarrow -a \mid -b$$

۳

$$\left.\begin{array}{l} a \mid ۵k + ۳ \Rightarrow a \mid ۹ \times (۵k + ۳) \Rightarrow a \mid ۴۵k + ۲۷ \\ a \mid ۹k + ۴ \Rightarrow a \mid ۵ \times (۹k + ۴) \Rightarrow a \mid ۴۵k + ۲۰ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a \mid (۴۵k + ۲۷) - (۴۵k + ۲۰) \Rightarrow a \mid ۷ \overset{a>۱}{\Rightarrow} a = ۷$$

پس a عددی اول است.

۴

$$\left.\begin{array}{l} ۵ \mid ۴k+۱ \xrightarrow{a|b \to a^n|b^n} ۲۵ \mid ۱۶k^۲+۸k+۱ \\ \xrightarrow{a|b \to ma|mb} ۲۵ \mid ۲۰k+۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{a|b, a|c \to a|b+c} ۲۵ \mid ۱۶k^۲+۲۸k+۶$$

۵

خیر، به عنوان مثال : $۲|۴ \ , \ ۳|۹ \to ۲+۳ \nmid ۴+۹$

۶

الف)

$$m \in Z \ , \ (m, m+۱) = d \Rightarrow d \mid m+۱ \ , d \mid m \Rightarrow d \mid (m+۱)-m \Rightarrow d \mid ۱ \overset{d>۰}{\Rightarrow} d=۱$$

ب)

$$m \in Z \ , \ (۲m+۱, ۲m+۳) = d \Rightarrow d \mid ۲m+۳ \ , \ d \mid ۲m+۱ \Rightarrow d \mid (۲m+۳)-(۲m+۱) \Rightarrow d \mid ۲$$

$$\overset{d>۰}{\Rightarrow} \begin{cases} d=۱ & \text{قابل قبول} \\ d=۲ & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

چون هر دو عدد فردند، پس $d=۱$ قابل قبول است.

۷

اثبات به برهان خلف :

فرض کنیم $(p,q)=d$ و $d \neq ۱$، داریم :

$$d \mid p \ , \ d \mid q \overset{d\neq ۱}{\Rightarrow} d=p \ , \ d=q \Rightarrow p=q$$

که با فرض مسئله $(p \neq q)$ در تناقض است. پس : $d=۱$

۸

$$m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

$$a|b \Rightarrow a^m|b^m \Rightarrow a^m|b^{n-m} \times b^m \Rightarrow a^m|b^n$$

۹

$$\left.\begin{array}{l} a=۷q+۵ \Rightarrow ۸a=۸\times(۷q+۵) \Rightarrow ۸a=۵۶q+۴۰ \\ a=۸q'+۷ \Rightarrow ۷a=۷\times(۸q'+۷) \Rightarrow ۷a=۵۶q'+۴۹ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۸a-۷a=(۵۶q+۴۰)-(۵۶q'+۴۹)$$

$$\Rightarrow a=۵۶q-۵۶q'-۹=۵۶q-۵۶q'-۵۶+۵۶-۹=$$

$$۵۶(\underbrace{q-q'-۱}_{q''})+۴۷=۵۶q''+۴۷ \Rightarrow r=۴۷$$

۱۰

$a\in Z\ ,\ k\in Z\ ,\ a=۲k+۱, b|a+۲ \Rightarrow b|۲k+۳$

پس b عددی فرد است، بنابراین : $k'\in Z\ ,\ b=۲k'+۱$

$a^۲+b^۲+۳=(۲k+۱)^۲+(۲k'+۱)^۲+۳=۴k^۲+۴k+۱+۴k'^۲+۴k'+۱+۳$

می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی بر ۲ تقسیم پذیر است یعنی حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، عددی زوج خواهد بود و داریم :

$$=۴\underbrace{k(k+۱)}_{۲n}+۴\underbrace{k'(k'+۱)}_{۲n'}+۵=۸n+۸n'+۵=۸\underbrace{(n+n')}_{n''}+۵=۸n''+۵\Rightarrow r=۵$$

۱۱ برای اثبات اینکه $۳|n^۳-n$، n را به سه صورت می‌توان نوشت :

۱) $n=۳k\Rightarrow ۳|n\Rightarrow ۳|n(n^۲-۱)\Rightarrow ۳|n^۳-n$

۲) $n=۳k+۱\Rightarrow n-۱=۳k\Rightarrow ۳|(n-۱)\Rightarrow ۳|(n-۱)(n+۱)n\Rightarrow ۳|n^۳-n$

۳) $n=۳k+۲\Rightarrow n+۱=۳k+۳=۳\underbrace{(k+۱)}_{k'}\Rightarrow ۳\,|\,(n+۱)\Rightarrow ۳\,|\,(n+۱)(n-۱)n\Rightarrow ۳\,|\,n^۳-n$

۱۲ طبق فرض برای $a=bq+r$ داریم : $n|a$ و $n|b$ ، پس :

$$\left.\begin{array}{l} n\,|\,a \\ n\,|\,b\Rightarrow n\,|\,bq \end{array}\right\}\Rightarrow n\,|\,a-bq\Rightarrow n\,|\,r$$

۱۳ اگر a عددی صحیح باشد، می‌توان آن را به یکی از حالت‌های $a=۳k$ یا $a=۳k+۱$ یا $a=۳k+۲$ نوشت:

$a=۳k\Rightarrow ۳|a$

$$a=۳k+۱\Rightarrow a+۲=۳k+۳=۳\underbrace{(k+۱)}_{k_۱}\Rightarrow ۳\,|\,a+۲$$

$$a=۳k+۲\Rightarrow a+۴=۳k+۶=۳\underbrace{(k+۲)}_{k_۲}\Rightarrow ۳\,|\,a+۴$$

پس همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴

$$k\in Z, (k+۱)^۳-k^۳=k^۳+۳k^۲+۳k+۱-k^۳=۳\underbrace{k(k+۱)}_{۲n}+۱=۲\underbrace{(۳n)}_{n'}+۱=۲n'+۱$$

۱۵ هر عدد صحیح a را می‌توان به یکی از حالت‌های $a=۶k$ یا $a=۶k+۱$ یا $a=۶k+۲$ یا $a=۶k+۳$ یا $a=۶k+۴$ یا $a=۶k+۵$ نوشت. اگر سه عدد صحیح متوالی را به صورت $a+۲$ و $a+۱$ و a در نظر بگیریم :

$$a(a+۱)(a+۲)\xrightarrow{a=۶k}۶\underbrace{k(۶k+۱)(۶k+۲)}_{k_۱}=۶k_۱\Rightarrow ۶\mid a(a+۱)(a+۲)$$

$$a(a+۱)(a+۲)\xrightarrow{a=۶k+۱}(۶k+۱)\underbrace{(۶k+۲)}_{۲(۳k+۱)}\underbrace{(۶k+۳)}_{۳(۲k+۱)}$$

$$=۶\underbrace{(۶k+۱)(۳k+۱)(۲k+۱)}_{k_۲}=۶k_۲\Rightarrow ۶\mid a(a+۱)(a+۲)$$

$$a(a+۱)(a+۲)\xrightarrow{a=۶k+۲}(۶k+۲)\underbrace{(۶k+۳)}_{۳(۲k+۱)}\underbrace{(۶k+۴)}_{۲(۳k+۲)}$$

$$=۶\underbrace{(۶k+۲)(۲k+۱)(۳k+۲)}_{k_۳}=۶k_۳\Rightarrow ۶\mid a(a+۱)(a+۲)$$

$$a(a+۱)(a+۲)\xrightarrow{a=۶k+۳}\underbrace{(۶k+۳)}_{۳(۲k+۱)}\underbrace{(۶k+۴)}_{۲(۳k+۲)}(۶k+۵)$$

$$=۶\underbrace{(۲k+۱)(۳k+۲)(۶k+۵)}_{k_۴}=۶k_۴\Rightarrow ۶\mid a(a+۱)(a+۲)$$

$$a(a+۱)(a+۲)\xrightarrow{a=۶k+۴}(۶k+۴)(۶k+۵)\underbrace{(۶k+۶)}_{۶(k+۱)}$$

$$=۶\underbrace{(۶k+۴)(۶k+۵)(k+۱)}_{k_۵}=۶k_۵\Rightarrow ۶\mid a(a+۱)(a+۲)$$

$$a(a+۱)(a+۲)\xrightarrow{a=۶k+۵}(۶k+۵)\underbrace{(۶k+۶)}_{۶(k+۱)}(۶k+۷)$$

$$=۶\underbrace{(۶k+۵)(k+۱)(۶k+۷)}_{k_۶}=۶k_۶\Rightarrow ۶\mid a(a+۱)(a+۲)$$

۱۶

الف) $\left([m^۲,m],m^۵\right)$

$$(\underbrace{[m^۲,m]}_{m^۲},m^۵)=(m^۲,m^۵)=m^۲$$

ب) $(۲m, ۶m^۳)$

$(۲m, ۶m^۳)=۲|m|$

پ) $(۳m+۱, ۳m+۲)$

$(۳m+۱, ۳m+۲)=۱$

ب م م دو عدد صحیح متوالی برابر یک است.

ت) $[m^۷, (m^۲, m^۳)]$

$$[m^۷, \underbrace{(m^۲, m^۳)}_{m^۲}] = [m^۷, m^۲] = |m^۷|$$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]$

$$[\underbrace{(۷۲,۴۸),}_{۲۴}۱۲۰] = [۲۴,۱۲۰] = ۱۲۰$$