حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت

فصل ۳

آذربایجان غربی (ماکو)

بسیاری از پدیده‌های طبیعی به‌وسیله توابع ریاضی مدل‌سازی می‌شوند. در مسئله پاک‌سازی آب رودخانه‌ها، با تابع $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ مدل‌سازی می‌شود. که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. از آنجا که این تابع رفتار بی‌نهایت دارد برای پاک‌سازی نزدیک صد درصد آلودگی‌های آب این رودخانه هزینه‌ها بسیار زیاد خواهد بود. به‌طوری که می‌توان گفت هزینه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

حدهای نامتناهی ــ حد در بی‌نهایت

اهداف کلی فصل ۳

۱ آشنایی با حدهای نامتناهی
۲ آشنایی با حد تابع در بی‌نهایت
۳ آشنایی با مجانب‌های قائم و افقی تابع
۴ آشنایی با حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان

دانش‌آموزان باید بتوانند :

۱ درک مفاهیمی از حدهای یک‌طرفه نامتناهی و حد نامتناهی داشته باشند و از طریق جدول و نمودار توابع این مفاهیم را بیان کنند.

۲ درک مناسبی از قضایای حدهای بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت داشته باشند و در حل مسائل از آنها استفاده کنند.

۳ با استفاده از قضایا، حدود توابع در بی‌نهایت را حدس زده و محاسبه کنند.

۴ مجانب‌های قائم و افقی تابع کسری (گویا) و تابع تانژانت را در صورت وجود به‌دست آورند و از آنها در رسم تابع بهره بگیرند.

۵ از طریق نمودار توابع، رفتار تابع در یک نقطه و رفتار تابع در بی‌نهایت را تشخیص دهند و مجانب‌های افقی و قائم تابع را در صورت وجود نشان دهند.

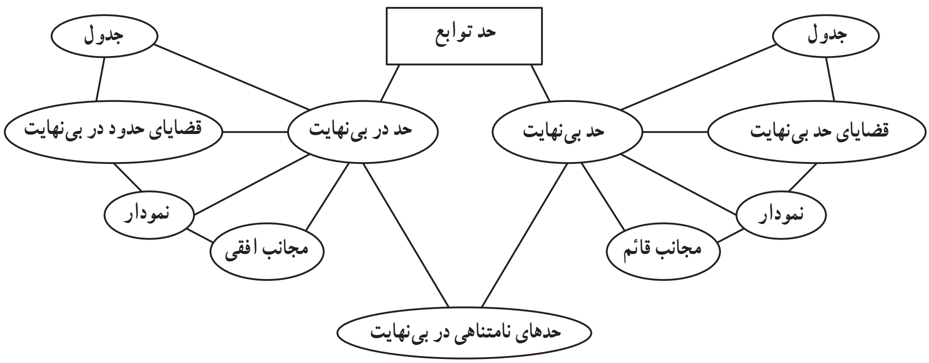
پیش نیازها

۱ آشنایی با مفهوم حد و قضایای حد تابع در یک نقطه
۲ آشنایی با نمودار تابع تانژانت، نمودار توابع $y=\frac{1}{x}$ و $y=\frac{1}{|x|}$ و ...

زمان‌بندی پیشنهادی

پیشنهاد می‌شود این فصل در ۳ هفته آموزشی تدریس و تمرین شود.

نقشهٔ مفهومی



نگاه کلی به فصل

هدف اصلی این فصل درک مناسب از مفهوم بی‌نهایت و آشنایی با قضایای رفتار تابع در بی‌نهایت و رفتار تابع در همسایگی یک نقطه وقتی تابع رفتار بی‌نهایتی دارد می‌باشد. همچنین آشنایی با مجانب‌های افقی و قائم تابع در رسم توابع می‌تواند از اهداف اصلی این فصل باشد. روش آموزشی انتخاب شده در این فصل به‌گونه‌ای نیست که دانش‌آموزان صرفاً محاسبات صوری انجام دهند بلکه درک روش‌ها در ارتباط آنها با دنیای واقعی از اهداف مهم این فصل و سایر فصول است.

روش آموزشی این فصل بر مبنای فعالیت و کار در کلاس و راهنمایی قدم به قدم دانش‌آموز برای مواجهه با مفهوم است. به‌گونه‌ای که دانش‌آموزان خودشان را در ساخت مفهوم مشارکت داشته باشند. آشنایی با قضایای مربوطه صرفاً از طریق مثال‌های جبری و هندسی مورد نظر است و بیشتر کاربرد قضایا در حل مسائل مورد توجه است و در هیچ‌جا وارد اثبات قضایا نشده‌ایم.

درس ۱

حدهای نامتناهی

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم حد بی‌نهایت از طریق جدول و نمودار
۲ مهارت محاسبه حدود نامتناهی با استفاده از قضایا و
۳ آشنایی با مجانب قائم نمودار یک تابع

روش تدریس

دانش‌آموزان در سال قبل با مفهوم حد و قضایای آن آشنا شده‌اند و رفتار تابع در یک نقطه را از طریق جدول و نمودار درک می‌کنند. در این درس با رفتار تابع در همسایگی محذوف یک نقطه در حالتی که تابع رفتار بی‌نهایت دارد آشنا می‌شویم. در اولین فعالیت در صفحه ۴۶ دانش‌آموزان نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را می‌شناسند. از طریق این نمودار در همسایگی راست $x=0$ و همچنین در کار در کلاس صفحه ۵۳ در همسایگی چپ $x=0$ با همسایگی‌های یک‌طرفه یک نقطه آشنا می‌شوند.

در بند ۱ فعالیت صفحه ۵۲ با تکمیل جدول به این درک می‌رسد که هرچه به نقطه صفر نزدیک‌تر می‌شویم مقدار تابع افزایش می‌یابد.

بند ۲

$$\frac{1}{x}>10^6 \Rightarrow x<\frac{1}{10^6}$$

با یک محاسبه ساده مشخص می‌شود که x را باید از یک میلیونیم کوچک‌تر بگیریم تا $f(x)$ از یک میلیون بزرگ‌تر شود.

بند ۳ دانش‌آموزان باید به این درک برسند که با نزدیک شدن به صفر از سمت راست نقطه تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود بلکه هر عددی درنظر بگیریم از آن هم نزدیک‌تر می‌توان شد.

❋ پس از بررسی این فعالیت دانش‌آموزان را هدایت به این مسئله می‌کنیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد.

در پایان این فعالیت رسماً نماد ∞ را معرفی می‌کنیم و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$

تذکر صفحه ۵۳ مطلب مهمی است که حتماً باید یادآوری شود.

کار در کلاس ص ۴۷

شبیه همان کار در کلاس که در فعالیت قبل مطرح شد اینجا انجام می‌شود. در حقیقت دانش‌آموزان باید بتوانند در همسایگی چپ $x=۰$ رفتار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را درک کنند.

بند (الف) در جدول مشاهده می‌شود که هرچه از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شویم مقادیر $f(x)$ از نظر قدر مطلق بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند.

ب) $\frac{۱}{x} < -۱۰^۶ \Rightarrow x > \frac{-۱}{۱۰^۶}$ یا $x > ۰/۰۰۰۰۰۱$

x باید از منفی یک میلیونیم بزرگ‌تر در نظر گرفته شود.

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ کوچک و کوچک‌تر می‌شوند.

ت) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty$

تذکر : می‌توان نتایج جدول فوق را روی محور اعداد نیز نشان داد تا چگونگی ارتباط را بهتر درک کنند در پایان کار در کلاس می‌توان به جمع‌بندی معرفی حدهای یک‌طرفه نامتناهی پرداخت. یادآوری حالات مختلف حدهای یک‌طرفه نامتناهی در صفحه ۴۸ و از طریق نمودار آمده است می‌توان از دانش‌آموزان خواست رفتار هر تابع در همسایگی نقطه $x=۰$ را از طریق شکل‌های داده شده بیان کنند.

بعد از این تذکر مثالی ارائه شده است رفتار تابع $y=\frac{۱}{|x|}$ در همسایگی نقطه $x=۰$ از چپ و راست دارای یک رفتار است و در پایان این مثال رسماً تعریف حد نامتناهی ارائه می‌شود.

کار در کلاس ص ۵۰

در جهت تثبیت و تعمیق مطالب آموخته شده از طریق نمودار سه تابع دیگر رفتار تابع مشاهده می‌شود. با نمودار $y=\frac{1}{x-2}$ تا حدودی آشنا هستند همان انتقال نمودار $y=\frac{1}{x}$ می‌باشد. در همسایگی نقطه $x=2$ مشاهده می‌شود که $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ در تابع $y=\log_3 x$ تابع فقط در همسایگی راست $x=0$ تعریف می‌شود که $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ با نمودار تابع $y=\tan x$ در فصل قبل آشنا شده‌اند در اینجا به درک مناسبی در رابطه با رفتار تابع در نقاطی که تانژانت تعریف نمی‌شود می‌شوند.

$$\lim_{x\to(\frac{-\pi}{2})^+} h(x)=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} h(x)=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} h(x)=-\infty$$

در ادامه و پس از درک اولیه در رابطه با حدهای نامتناهی قضایای مربوطه مطرح می‌شوند. همه این قضایا با مثال تفهیم می‌شوند و به هیچ وجه وارد اثبات رسمی آن نمی‌شویم.

کار در کلاس ص ۵۱

برای تثبیت قضایای مطرح شده در این صفحه یک کار در کلاس مطرح شده است.

(الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ هم از طریق نمودار این مطلب مشخص شده است و هم از طریق قضیه ۱ در حالتی که $n=2$

(ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ استفاده از قضیه (۱)

می‌توان از قضیه (۲) نیز یادآور شد که در (الف) حد راست و حد چپ تابع در $\lambda=0$ برای $+\infty$ است لذا تابع در این نقطه حد نامتناهی $+\infty$ دارد ولی در قسمت (ب) حد چپ و حد راست تابع یکسان نشده‌اند لذا نمی‌توان نتیجه گرفت که تابع در این نقطه حد نامتناهی دارد.

در مثال ص ۵۲، هدف درک مناسبی از مفهوم بی‌نهایت در یک مدل‌سازی واقعی در مسائل پیرامونی است.

در این صفحه و صفحه بعد چند مثال آمده است تا به جوانب مختلف قضایای مطروحه پرداخته شود. این مثال‌ها برای درک مناسب و مهارت‌های ساده محاسبه حدود هستند. از طرح مسائل پیچیده خصوصاً مسائلی که متغیر در زیر رادیکال است اجتناب شود. طرح سؤالات باید به گونه‌ای باشد که توابع آن مورد

نیاز باشند و یا پیچیدگی‌های لازم را نداشته باشند و از طرح توابع جبری مثلثاتی و رادیکال‌هایی که محاسبات دشوار دارند خودداری شود تا مفهوم فدای تکنیک نشود بدیهی است برای دانش‌آموزان قوی‌تر طرح این‌گونه مسائل خللی در روند آموزش ایجاد نمی‌کند ولی به جهت کمبود زمان تدریس طرح مسائل پیچیده توصیه نمی‌شود

کار در کلاس ص ۵۳

جهت تثبیت قضایای ذکر شده در مورد حدهای بی‌نهایت که تا اینجا مورد بررسی قرار گرفته‌اند. محاسبه چند حدّ آمده است.

الف) در همسایگی راست ۲ حد تابع به‌صورت $\frac{۳}{۰^+}$ در می‌آید که معادل $+\infty$ خواهد شد.

ب) در همسایگی چپ ۲ صورت کسر به‌صورت $(۲-۱)$ درخواهد آمد حد مخرج به‌صورت ۰^- تبدیل می‌شود که حاصل $+\infty$ خواهد شد.

پ) در همسایگی راست یک حد تابع به‌صورت $\frac{۲}{۰^+}$ و یا $+\infty$ تبدیل خواهد شد.

در ادامه قضیه ۴ برای حالتی که حد صورت کسر عدد و حد مخرج کسر بی‌نهایت می‌شود مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فعالیت ص ۵۴

هدف بیان حالات عدد به علاوه بی‌نهایت یا عدد ضربدر بی‌نهایت در بحث حد است. قضیه ۵ در این رابطه بیان شده است و برای ورود آن به فعالیت صفحه ۵۴ در نظر گرفته شده است.

بند ۱ــ

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰} g(x) = ۱$

ب)

$$(f+g)(x) = \frac{۱}{x^۲} + x + ۱ = \frac{۱ + x^۳ + x^۲}{x^۲}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱ + x^۳ + x^۲}{x^۲} = +\infty$$

حد صورت یک و حد مخرج صفر است و در همسایگی محذوف صفر مثبت است. با استفاده از قضیه ۳ حد تابع به‌دست می‌آید.

پ) نتیجه می‌گیریم که اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=l+\infty=+\infty$$

در بحث حد اگر عددی با بی‌نهایت جمع شود. حاصل بی‌نهایت باقی می‌ماند.

بند ۲ــ

(قضیه ۳)
$$f\times g=\frac{x+1}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2}=+\infty$$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L>0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x).\,g(x)=+\infty$

به‌عبارت دیگر در بحث حدّ اگر تابعی $+\infty$ باشد با ضرب یک عدد مثبت در بی‌نهایت حد تابع همچنان بی‌نهایت باقی می‌ماند.

این نتایج در قضیه ۵ به‌صورت کلی بیان شده است مثال‌های بعد از ارائه قضیه به تفهیم بیشتر مسئله کمک می‌کند.

تذکر : در بیان قضیه ۵ در حالتی که $L=0$ می‌شود و به حالات $\infty\times 0$ در بحث حد می‌رسیم تعمداً ورود نمی‌کنیم و در ارزشیابی‌ها نیز اکیداً توصیه نمی‌شود و در تعارض با اهداف رسمی این درس است.

تذکر : یادآوری این مطلب نیز برای دانش‌آموزان ضروری به‌نظر می‌رسد.

قضایا و مطالب مربوط به حدهای نامتناهی با قضایای حالت حدهای متناهی با هم تفاوت دارند زیرا نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ را داریم که اعداد حقیقی نیستند بنابراین $+\infty$ و $-\infty$ قرینه هم نیستند لذا در محاسبه حدود نامتناهی با ساده کردن عبارات، توابع را به گونه‌ای می‌نویسیم که بتوان از قضایای ذکر شده استفاده کرد.

کار در کلاس ص ۵۵

هدف تعمیق، تثبیت قضیه ۵ می‌باشد

بند ۱ــ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آنگاه

الف) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=-\infty$

ب) اگر $L>0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).\,g(x)\right)=-\infty$

اگر $L<0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).\,g(x)\right)=+\infty$

بند ۲ــ

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{x+۱}{x-۱} = +\infty$ (بند ت قضیه ۳)

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x^۲+x}{x^۳} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x+۱}{x^۲} = +\infty$ (بند الف قضیه ۳)

پ) $\lim\limits_{x\to -۲^+} \frac{x+۲}{x^۲+۴x+۴} = \lim\limits_{x\to -۲^+} \frac{x+۲}{(x+۲)^۲} = \lim\limits_{x\to -۲^+} \frac{۱}{x+۲} = +\infty$ (بند الف قضیه ۳)

ت) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۲-\cos ۲x}{x} = -\infty$ (بند ب قضیه ۳)

تذکر : ما در حل این کار در کلاس از قضیه ۳ بهره بردیم و می‌توانستیم با نوشتن $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ به‌صورت $\lim\limits_{x\to a} \frac{۱}{g(x)} \times \lim\limits_{x\to a} f(x)$ از قضیه ۵ نیز استفاده کرد.

مجانب قائم

مجانب قائم

در صفحه ۵۵ بحث مجانب‌ها با استفاده از دو نمودار توابع شناخته شده که در بخش‌های قبل مشاهده کرده‌اند آغاز می‌شود. سپس تعریف رسمی از مجانب قائم ارائه می‌شود. مجانب تابع $f(x)$ خطی است که در بی‌نهایت دور بر منحنی نمایش $f(x)$ مماس است. ما از ذکر این مطلب به‌صورت رسمی در کتاب درسی خودداری کردیم باور مفهوم مماس شدن در بی‌نهایت بر منحنی کمی سخت است لذا در حین تدریس شاید بتوان این مطلب را نیز یادآور شد. ما در این فصل به دو نوع مجانب قائم و افقی پرداخته‌ایم. عدم ورود به مجانب مایل به جهت آن است که در رسم توابع نیز توابعی که مجانب مایل دارند مورد نظر نیستند. و تا همین حد برای دانش‌آموزان در این سطح کافی است. هدف اصلی درک مناسبی از مفهوم مجانب و حدهای بی‌نهایت می‌باشد که به‌صورت شهودی در این بخش انجام می‌شود. هریک از حالات مختلف مجانب‌های قائم منحنی‌ها در مثال صفحه ۵۶ آمده است.

سپس به تکنیک محاسبه مجانب‌های قائم پرداخته می‌شود. اینکه در توابع کسری ریشه مخرج مجانب قائم است حرف درستی نیست ریشه مخرج با شرط آنکه در دامنه تعریف تابع باشد و صورت کسر را صفر نکند می‌تواند مجانب قائم باشد. در ضمن تابعی مانند $y=\tan x$ نیز مجانب قائم دارد ولی تابع کسری

نمی‌باشد. با ذکر دو مثال و ورود به جزئیات دانش‌آموزان قادر خواهند بود مجانب‌های یک تابع را از روی ضابطه آن در صورت وجود به‌دست آورند.

کار در کلاس ص ۵۷

$x^۲-x-۶=۰ \Rightarrow x=۲\ ,\ x=-۳$

از آنجا که $x=۲$ ریشه صورت است و $\lim\limits_{x\to -۳} f(x)=+\infty$ پس $x=-۳$ مجانب قائم منحنی است.

راه‌های حل تمرین ص ۵۸

۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲}=+\infty$ (استفاده از بند الف قضیه ۳)

ب) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{۱}{(x-۲)^۲}=+\infty$ (استفاده از بند الف قضیه ۳)

پ) $\lim\limits_{x\to -۲}\left|\dfrac{۵-x}{۲+x}\right|=\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{|۵-x|}{|۲+x|}=+\infty$ (استفاده از بند الف قضیه ۳)

۲

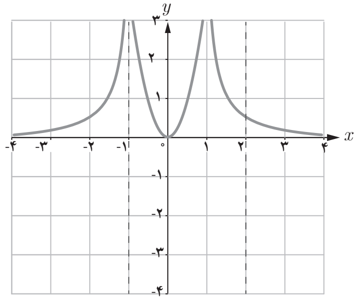
الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{۲x}{x^۲-۴}=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲+۲x+۱}{x^۲+x-۱۲}=-\infty$

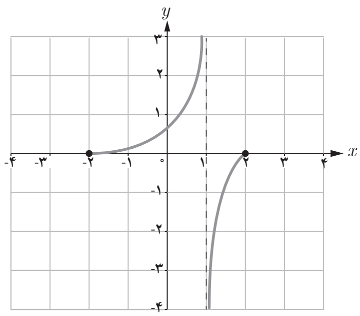
(علامت مخرج در قسمت (ب) را می‌توان از طریق جدول تعیین علامت مشخص کرد)

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x+۱}{۹-x^۲}=-\infty$

۳ نمودار توابع زیادی را می‌توان رسم کرد. یکی از مسائل باز پاسخ است به عنوان نمونه :



۴



۵

الف) $x=۳$ مجانب قائم تابع است زیرا :

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۲x-۱}{۳-x}=-\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to ۳^-}\frac{۲x-۱}{۳-x}=+\infty$$

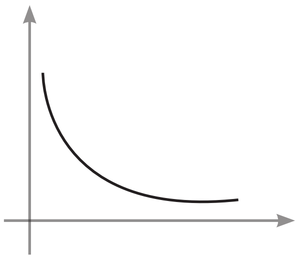
ب) ریشه‌های مخرج $x=۰$ و $x=۱$ هستند $x=۰$ مجانب قائم نمی‌تواند باشد زیرا :

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x+۱}{x-۱}=-۱$$

حقا $x=۱$ مجانب قائم تابع است زیرا :

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=+\infty$$

۶ دامنه تابع $(-\infty\ ,\ \circ)$ است در این حالت ضابطه به‌صورت $f(x)=\frac{۱}{۲x}$ تبدیل می‌شود که $x=\circ$ مجانب قائم آن است و نمودار تابع در مجاورت مجانب قائم آن به‌صورت زیر رسم می‌شود.



۷ $$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{x}{(x-۱)^{۲}}=+\infty$$

با توجه به آن که در همسایگی‌های چپ و راست $x=۱$ حد تابع $+\infty$ شده است فقط شکل (الف) این ویژگی را داراست.

۲
درس

حد در بی‌نهایت

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم حد در بی‌نهایت از طریق جدول و نمودار
۲ آشنایی با قضایای حد در بی‌نهایت و استفاده از آنها در محاسبه حدود.
۳ آشنایی با مجانب افقی نمودار یک تابع
۴ آشنایی با حدود نامتناهی در بی‌نهایت

روش تدریس

در این درس دانش‌آموزان را با مفهوم حد در بی‌نهایت و رفتار تابع هنگامی که متغیر بی‌کران افزایش یا کاهش می‌یابد آشنا می‌کنیم. در این درس از طریق نمودار تابع و جدول رفتار تابع را در بی‌نهایت مورد بررسی قرار می‌دهیم. همانند درس قبل مشهود پایه و اساس کار خواهد بود. شروع کار با یک فعالیت روی تابع شناخته شده $y=\frac{۱}{x}$ می‌باشد. در این فعالیت متغیر x را از سمت راست بی‌کران افزایش می‌دهیم تا رفتار تابع را مشاهده کنیم.

تمرین ص ۵۹

۱ از طریق پر کردن جدول حدس می‌زند که با افزایش بی‌کران x، مقدار تابع بی‌کران کاهش می‌یابد.

۲ $|f(x)|<\frac{۱}{۵}\Rightarrow\left|\frac{۱}{x}\right|<\frac{۱}{۵}\overset{x>۰}{\Rightarrow}x>۵$

حداقل مقدار x را از ۵ باید بزرگ‌تر در نظر بگیریم.

۳ $\left|\frac{۱}{x}\right| < \frac{۱}{۱۰} \xrightarrow{x>۰} \frac{۱}{x} < \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow x > ۱۰$

۴ $\left|\frac{۱}{x}\right| < \frac{۱}{۱۰۰} \xrightarrow{x>۰} \frac{۱}{x} < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow x > ۱۰۰$

۵ بله اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از عددی مانند k کمتر شود کافی است $k > \frac{۱}{k}$ در نظر گرفته شود.

پس از بررسی این فعالیت به جمع‌بندی در مورد حد تابع وقتی متغیر آن بی‌کران افزایش می‌یابد می‌رسیم و رسماً می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۱}{x} = ۰$

کار در کلاس ص ۶۰

هدف از این کار در کلاس رفتار تابع مورد بحث وقتی متغیر x بی‌کران کاهش می‌یابد می‌باشد و در حقیقت به تکمیل بحث قبل کمک می‌کند مشابه فعالیت دانش‌آموزان کار را پیش خواهند برد و چالش خاصی ندارد.

۱ از طریق پر کردن جدول متوجه می‌شوند که با کاهش x از طریق اعداد منفی مقدار $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شود.

۲ $|f(x)| < \frac{۱}{۳} \Rightarrow \left|\frac{۱}{x}\right| < \frac{۱}{۳} \Rightarrow -\frac{۱}{x} < \frac{۱}{۳} \Rightarrow x < -۳$

۳ $\left|\frac{۱}{x}\right| < \frac{۱}{۱۰^۶} \Rightarrow -\frac{۱}{x} < \frac{۱}{۱۰^۶} \Rightarrow x < -۱۰^۶$

پس از بررسی این کار در کلاس مشاهده می‌شود که اگر x به اندازه کافی کوچک‌تر (از طریق اعداد منفی) شود آنگاه $f(x)$ را می‌توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد سپس رسماً از نماد $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۱}{x} = ۰$ استفاده می‌کنیم.

در ادامه نماد $x\to\pm\infty$ را معرفی کرده و از این به بعد می‌توان از آن استفاده کرد. هرچند که استفاده از این نماد زیاد متداول نمی‌باشد ولی به جهت خلاصه‌نویسی می‌توان قرارداد کرد هنگامی که از این نماد استفاده

می‌شود منظورمان $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ است و بدان معنی نیست که هم‌زمان $+\infty$ و $-\infty$ با هم به‌کار می‌رود.
پس از این تذکر رسماً تعریف حد در بی‌نهایت مطرح می‌شود. دانش‌آموزان باید قادر باشند نماد $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L$ را با بیان فارسی توصیف نمایند.

کار در کلاس ص ۶۱

جهت تثبیت مطلب از طریق نمودار حد در بی‌نهایت برای دو تابع بررسی می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{\to+\infty} g(x) \qquad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=-2$$

در ادامه در صفحه ۶۲ قضایای ۶ و ۷ و چند مثال در رابطه با نحوهٔ استفاده از آنها مطرح می‌شود. در قضیه ۷ اعمال جبری روی توابع برای حد در بی‌نهایت مطرح می‌شود.
مبحث بعدی در این درس حدهای نامتناهی در بی‌نهایت است. از این مبحث در رسم شاخه‌های منحنی توابع استفاده می‌کنیم. مطلب را با دو تابع خطی و درجه دوم شروع کرده و به تعریف مورد نظر می‌رسیم. سپس در کار در کلاس صفحه ۶۴ به تعمیق و ثبت مطلب پرداخته می‌شود.

کار در کلاس ص ۶۴

۱ برای بیان مفهوم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ می‌گوییم حد تابع f وقتی که مقادیر x از هر عدد منفی کوچک و کوچک‌تر شود بی‌کران افزایش می‌یابد مشابه این مطلب را در حالت بعدی نیز می‌توان بیان کرد.

۲ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

در ادامه فعالیتی مطرح می‌شود که آمادگی لازم برای حد توابع چندجمله‌ای می‌باشد. در این فعالیت برای تابع $f(x)=x^3$ و حد این تابع در $x\to\pm\infty$ به‌صورت شهودی و از طریق جدول مطرح می‌شود.
۱ و ۲ــ با تکمیل جدول مشاهده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ نیز افزایش می‌یابد و با کاهش مقادیر x از طریق اعداد منفی، مقادیر $f(x)$ نیز کاهش می‌یابد.

۳ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

پس از طرح فعالیت فوق زمینه برای طرح قضیه ۸ در حالت کلی آماده می‌شود. قضایای ۹ و ۱۰ حالات مختلفی از حد در بی‌نهایت برای یک تابع ثابت و یک تابع یا حد بی‌نهایت است که حاصل‌ضرب این دو تابع مورد بررسی قرار می‌گیرد که به‌صورت خلاصه عدد در بی‌نهایت بی‌نهایت می‌شود و برای علامت آن باید به علامت عدد و علامت بی‌نهایت توجه شود. از این قضیه در مثال‌های مختلف می‌توان استفاده کرد و با توجه به قضایای ۹ و ۱۰ به‌طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در بی‌نهایت طرح می‌شود. سپس در کار در کلاس به یک قاعده در رابطه حد خارج قسمت دو تابع در بی‌نهایت پرداخته می‌شود.

کار در کلاس ص ۶۶

۱

الف) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

با فاکتورگیری a_nx^n از جملات صورت و فاکتورگیری b_mx^m از جملات مخرج و حدگیری به عبارت $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$ می‌رسیم که معادل $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ می‌باشد.

۲ اگر $m=0$ باشد طبیعی است که $x^{n-m}=x^0=1$ و حد تابع به‌صورت $\frac{a_n}{b_m}$ تبدیل می‌شود. در حالتی که $n<m$ باشد $n-m<0$ و x^{n-m} وقتی $x\to\pm\infty$ به سمت صفر میل می‌کند در نتیجه پاسخ نهایی حد به‌صورت صفر خواهد بود. در حالت $n>m$ چون $n-m>0$ پس $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{n-m}=\pm\infty$ خواهد شد و جواب مسئله به علامت $\frac{a_n}{b_m}$ بستگی دارد.

۳

الف) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-7x+1}{2x^2-x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{2}x=\pm\infty$$

ب) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3+x-1}{6x^3-2x+1}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$$

پ) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^3+2x-1}=0$$

مجانب افقی

ابتدا با تعریف رسمی مجانب افقی چند مثال ارائه می‌شود. با توجه به کار در کلاس صفحه ۶۶ شرط وجود یا عدم وجود مجانب افقی یک تابع را به سادگی می‌توان تحقیق نمود. محدودیتی که در این بخش وجود دارد نوع توابع است که محدود به توابع کسری شده است. البته برای رسم توابع هموگرافیک در فصل پنجم نیاز به این مطلب داریم و وارد حواشی و نکات پیچیده نخواهیم شد. البته مجانب مایل نیز از اهداف رسمی کتاب درسی نمی‌باشد و باید در تدریس به این نکته توجه شود.

کار در کلاس ص ۶۸

هدف تحقیق شرایط مجانب افقی از طریق نمودار شهود است. در قسمت (الف) خط $y=۲$ مجانب افقی نیست زیرا شاخه‌های منحنی به این خط نزدیک نمی‌شوند. در شکل (ب) خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است. در قسمت (پ) خط $y=۲$ با یک شاخه منحنی بر هم منطبق شده‌اند و واضح است وقتی $x \to -\infty$ داریم $y=۲$ که شرط مجانب افقی را داراست پس خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است.

در قسمت (ت) خط $y=۲$ مجانب افقی منحنی تابع است اگرچه در یک نقطه در سمت راست نمودار را قطع کرده است در شکل (ت) نیز خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع است.

۱

الف) $x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm۱$

چون $x=-۱$ ریشه صورت است پس خط $x=۱$ مجانب قائم تابع است و چون $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=۰$ پس خط $y=۰$ مجانب افقی تابع است.

ب) تابع $y=x^۳$ دارای مجانب افقی و قائم نمی‌باشد و شرایط تعریف را ندارد.

پ) خط $x=-۱$ مجانب قائم تابع است و تابع مجانب افقی ندارد چون $x\to\pm\infty$ و $y\to\pm\infty$ و شرایط مجانب افقی وجود ندارد [در حقیقت تابع مجانب مایل دارد.]

راه‌های حل تمرین ص ۶۹

۱

الف) وقتی متغیر x به بی‌نهایت مثبت نزدیک می‌شود (بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود) مقادیر تابع به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

ب) وقتی متغیر x به بی‌نهایت منفی نزدیک می‌شود (و از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود) مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شود.

۲

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۱$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-۱$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=+\infty$ ت) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=-\infty$

خطوط $x=۳$ و $x=-۲$ مجانب‌های قائم و خطوط $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب‌های افقی تابع‌اند.

۳

الف) $+\infty$ ب) ۰ پ) $\mp\infty$ ت) $-\infty$

۴

الف) $x=۳$ مجانب قائم و $y=۲$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۲x-۱}{x-۳}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x-۳}=۲$$

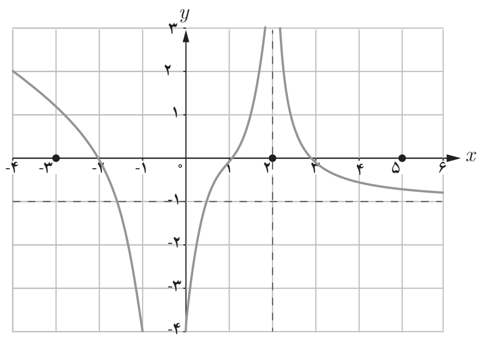
برای هر قسمت شرط تعریف را لازم است بررسی کنیم.

ب) خطوط $x=-۲$ و $x=۲$ مجانب‌های قائم و خط $y=۰$ مجانب افقی هستند.

پ) خطوط $x=-۱$ و $x=۱$ مجانب‌های قائم و خط $y=-۲$ مجانب افقی هستند.

ت) تابع مجانب قائم ندارد و $y=۰$ مجانب افقی تابع است.

۵ به‌عنوان نمونه می‌توان نمودارهای روبه‌رو را رسم کرد.



نمونه سؤالات برای ارزشیابی

۱ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر برای تابع f داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ تابع f در $x=a$ حد دارد.

ب) نمودار یک تابع می‌تواند مجانب افقی خودش را قطع کند.

پ) نمودار یک تابع می‌تواند مجانب قائم خودش را قطع کند.

ت) تابع $f(x)=۲$ دارای یک مجانب افقی است.

۲ نمودار یک تابع مانند f را چنان رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

- خط $x=۲$ مجانب قائم آن باشد.
- $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-۲$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۱$ و $f(۰)=۱$

۳ نمودار تابع $y=\dfrac{x+|x|}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خودش به چه صورتی رسم می‌شود.

۴ در نظریه نسبیت جرم ذره‌ای که با سرعت v حرکت می‌کند از رابطه $m(v)=\dfrac{m_۰}{\sqrt{۱-v^۲c^{-۲}}}$ به‌دست می‌آید که در آن $m_۰$ جرم ذره در حالت سکون و c سرعت نور است. وقتی سرعت ذره به سرعت نور نزدیک می‌شود (یعنی $v\to c^-$) چه اتفاقی برای جرم ذره می‌افتد؟

۵ مجانب‌های افقی و قائم توابع زیر را به‌دست آورید (در صورت وجود)

الف) $f(x)=\dfrac{۳x-۳}{|x|-۱}$

ب) $g(x)=\dfrac{x^۲+x-۲}{x^۲-x-۶}$

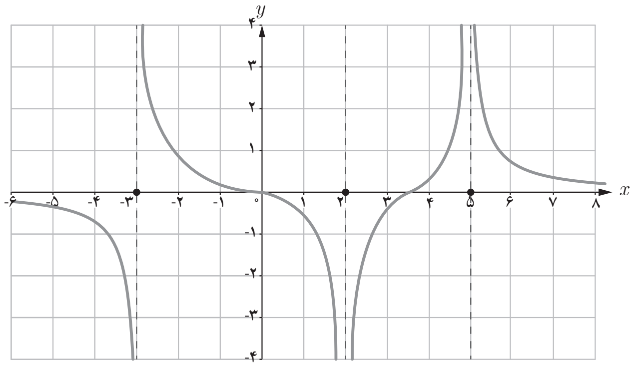
پ) $h(x)=\dfrac{x|x|+۲}{x-۱}$

ت) $t(x)=\dfrac{x^۲+x}{x|x|-۱}$

ث) $M(x)=\dfrac{۳x^۲}{x^۲+۱}-x$

ج) $N(x)=\dfrac{-x+۱}{x^۲-۱}$

۶ حدود زیر را برای نمودار f در شکل زیر در صورت وجود حدس بزنید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

۷ در مورد جواب $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k + x^۲ + ۱}{x^۵ + ۴x^۲ - ۱}$ برحسب k چه می‌توان گفت.

۸ هرگاه $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^b + x^۲ - ۱}{۳x^۲ + x} = ۱$ مقدارهای a و b را تعیین کنید.

۹ اگر خط $x=۳$ مجانب قائم تابع $y = \dfrac{x}{x^۲ + ax + b}$ باشد مقادیر a و b را تعیین کنید.

۱۰ حاصل هریک از حدود زیر را به‌دست آورید. (در صورت وجود)

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۳ - ۶x}{x^۳ - ۴x^۲ + ۴x}$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} \dfrac{\sqrt{x^۲ - ۱}}{x^۲ + ۳x + ۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{-۲x + ۱}{(x-۲)^۲}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۴x^۲ - x + ۷}{x^۲ - ۳x + ۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \cot x$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{[x] + ۱}{x^۲ - ۱}$

۱۱ اگر منحنی نمایی تابع $y=\dfrac{(a^{۲}+۱)x^{۲}+۴}{x^{۲}+ax+۲۵}$ فقط یک مجانب قائم داشته باشد معادله مجانب افقی تابع را تعیین کنید.

۱۲ حدود زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-(۱-x)^{۳}}{۲x-x^{۲}+۵x^{۳}}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(۱-x)^{۳}-(۱+x^{۳})}{(x-۱)^{۲}}$