کاربردهای مشتق

فصل ۵

گردنه حیران (اردبیل)

سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل، با مشتق معادله مکان ـ زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت به زمان است.

کاربردهای مشتق

اهداف کلی فصل ۵

دانش‌آموزان در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شده‌اند و مهارت‌های محاسبه مشتق توابع مختلف را کسب کرده‌اند. در این فصل وقت آن رسیده است دانش‌آموزان پاسخ این سؤال را دریافت کنند که مشتق در کجا به‌کار می‌آید؟

بعد از یادگیری هر مسئله یا مطلب تئوری ریاضی، نخستین سؤالی که به ذهن می‌آید این است که دانستن این موضوع چه فایدهٔ عملی می‌تواند برای ما داشته باشد؟ گرچه ریاضی درس شیرینی است، اما بسیاری از دانش‌آموزان در کلاس این درس از خود می‌پرسند این مباحث به چه درد ما می‌خورد؟ متأسفانه بسیاری از کاربردهای مهم و جالب ریاضی نیازمند آشنایی با مباحث پیچیده تئوری وسطح بالای دانشگاهی است البته این به معنای آن نیست که نمی‌توان کاربردهای ساده و سطح پایین ریاضی که قابل درک برای عموم دانش‌آموزان راهنمایی یا دبیرستان باشد پیدا کرد.

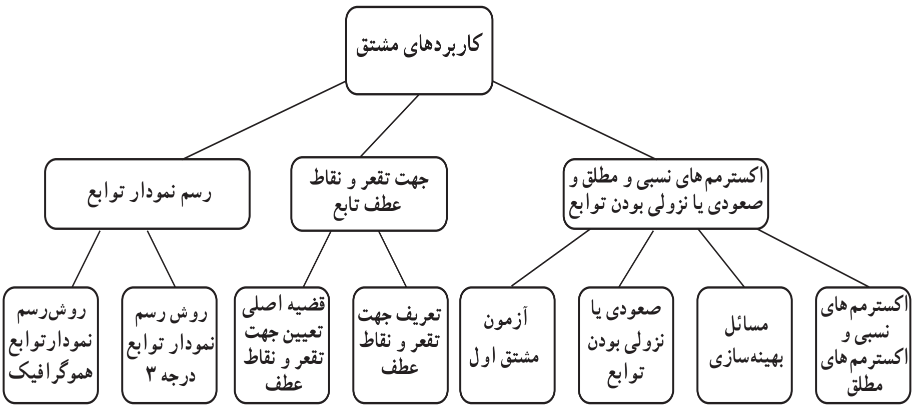
در این فصل کاربردهایی از مشتق بیان می‌شود که شامل یافتن اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع و حل مسائل بهینه‌سازی و رسم نمودار توابع می‌باشد. بهینه‌سازی یک کاربرد ملموس از مشتق در امور روزمره می‌باشد که می‌تواند برای دانش‌آموزانی که همواره به دنبال کاربرد ریاضیات در امور روزمره هستند جالب باشد.

در درس اول مفاهیم ماکسیمم و مینیمم نسبی توابع و همچنین ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع به‌طور دقیق تعریف می‌شوند و از روی ضابطه توابع و نمودار آنها، تفهیم کامل می‌شود. سپس قضیه اکسترمم (یا قضیه قرینه) که بیان می‌دارد اگر تابع f دربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه در این بازه حتماً دارای ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق می‌باشد بیان می‌گردد. با کمک این قضیه دو مسئله بهینه‌سازی حل می‌شوند. سپس با استفاده از یک قضیه، رابطه مشتق تابع و صعودی یا نزولی بودن تابع بیان می‌گردد و روش یافتن اکسترمم‌های نسبی تابع با کمک آزمون مشتق اول بیان می‌شود.

در درس دوم ابتدا مفهوم جهت تقعر تابع با رسم نمودارهایی بیان می‌شود و رابطه جهت تقعر و مشتق دوم به‌صورت مفهومی تدریس می‌شود و در نهایت، قضیه‌ای که این ارتباط را بیان می‌دارد گفته می‌شود. سپس نقطهٔ عطف تابع تعریف می‌شود و روش محاسبه آن که با استفاده از مشتق دوم صورت می‌گیرد، بیان می‌گردد.

در درس سوم روش رسم نمودار توابع با استفاده از اطلاعاتی که از درس‌های اول و دوم حاصل شده است بیان می‌شود و روش‌های رسم نمودار توابع درجه سوم و نمودار توابع هموگرافیک با مثال‌هایی توضیح داده می‌شود.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

در تصویر ابتدای فصل بخشی از یک جاده بیرون شهری (واقع در گردنه حیران اردبیل) که تقریباً شبیه نمودار سهمی می‌باشد آورده شده است. مشتق توابع در رسم نمودار آنها و همچنین بررسی ویژگی‌ها و نقاط خاص این‌گونه نمودارها مانند نقاط اکسترمم نسبی و عطف، کاربرد فراوانی دارد. همچنین با داشتن معادله حرکت یک جسم مانند اتومبیل، به کمک مشتق می‌توان سرعت و شتاب آن را محاسبه نمود.

دانستنی‌هایی برای معلم

یکی از کاربردهای مهم مشتق تعیین شیب خط مماس بر منحنی (در صورت وجود) می‌باشد که در فصل قبل ضمن بیان درس، این کاربرد هم بررسی شده است.

یکی دیگر از کاربردهای مهم مشتق قاعده هوپیتال می‌باشد. با کمک این قاعده بسیاری از حدهایی که برای آنها حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ رخ می‌دهد را بسیار ساده‌تر از روش‌های اولیه آنها می‌توان رفع ابهام کرد.

صورت قاعدهٔ هوپیتال به‌صورت زیر است :

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ آنگاه در صورت وجود $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{۱}{g(x)}}{\frac{۱}{f(x)}}=\frac{۰}{۰}$ و به‌کارگیری قاعدهٔ هوپیتال برای حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{۱}{g(x)}}{\frac{۱}{f(x)}}$ می‌توان نتیجه گرفت : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

یعنی قاعده هوپیتال را برای حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ نیز می‌توان به‌کار برد.

بنابراین از قاعده هوپیتال می‌توان در رفع ابهام حدهایی که تجزیه صورت و مخرج آنها بعضاً بسیار دشوار می‌باشد استفاده نمود؛ مثلاً برای محاسبه حد $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۵]{x}-۱}{x^۳+\cos(x-۱)-۲}$ که حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود

داریم :

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۵]{x}-۱}{x^{۳}+\cos(x-۱)-۲}\overset{?}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^{۴}}}}{۳x^{۲}-\sin(x-۱)}=\frac{\frac{۱}{۵}}{۳-۰}=\frac{۱}{۱۵}$$

جالب است بدانید که قاعده هوپیتال در واقع متعلق به هوپیتال (گیوم لوپیتال) نمی‌باشد و متعلق به یوهان برنولی (معلم هوپیتال) می‌باشد.

پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال در قرن هفدهم میلادی توسط آگوستین لویی کوشی، برنارد ریسمان و برادران برنولی (ژاکوب و یوهان) صورت پذیرفت. در سال ۱۶۹۶ هوپیتال خلاصه‌ای از درس‌هایی که یوهان برنولی به او داده بود را در کتابی به نام «آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها برای بررسی منحنی‌ها» منتشر کرد که در این کتاب قاعده رفع ابهام حد با استفاده از مشتق که به قاعدهٔ هوپیتال معروف است نیز آمده است.

آزمون مشتق اول آزمونی برای یافتن اکسترمم‌های نسبی یک تابع می‌باشد اما آزمون دیگری هم برای این کار وجود دارد که به آزمون مشتق دوم معروف است و در این فصل به آن اشاره‌ای نشده است.

علت اینکه آن را آزمون مشتق دوم می‌نامند، استفاده از مشتق دوم تابع برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی است. (به جای رسم جدول تعیین علامت y')

آزمون مشتق دوم به‌صورت زیر بیان می‌شود :

فرض کنید تابع f در نقطهٔ a دارای مشتق دوم باشد و $f'(a)=۰$ در این صورت :

الف) اگر $f''(a)>۰$ باشد آنگاه a طول نقطهٔ مینیمم نسبی f می‌باشد.

ب) اگر $f''(a)<۰$ باشد آنگاه a طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی f می‌باشد.

پ) اگر $f''(a)=۰$ باشد این آزمون بی‌نتیجه است.

به عنوان مثال برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی مثال صفحهٔ ۱۲۳ کتاب درسی به کمک آزمون مشتق دوم داریم :

$$f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}-۴x+۶$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۴x-۴=۰\to\begin{cases}x=۲\\ x=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$f''(x)=۶x-۴\to\begin{cases}f''(۲)=۸\Rightarrow\\ f''(-\frac{۲}{۳})=-۸\Rightarrow\end{cases}$$

$x=۲$ طول نقطهٔ مینیمم تابع f می‌باشد.

$x=-\frac{۲}{۳}$ طول نقطهٔ ماکسیمم تابع f می‌باشد.

نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۵

۱ در تابع $f(x)=\dfrac{x^{3}+b}{ax^{2}}$ نقطهٔ $M(2,3)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی است. مقادیر a و b را بیابید.

(جواب : $a=1$ و $b=4$)

۲ اگر تابع $f(x)=ax^{3}+bx+cx+d$ در نقاط $(1,2)$ و $(2,3)$ دارای اکسترمم نسبی باشد مقادیر c,b,a و d را بیابید.

(جواب : $a=-2$, $b=9$, $c=-12$, $d=7$)

۳ اگر $A(-3,4)$ نقطه ماکسیمم نسبی تابع $y=\dfrac{x^{2}+ax+b}{x+1}$ باشد مقادیر a و b را بیابید.

(جواب : $b=5$ و $a=2$)

۴ اکسترمم‌های نسبی تابع $y=x^{3}+6x^{2}-63x+1$ را بیابید.

(جواب $(-7,393)$ و $(3,-107)$)

۵ تابع $y=x^{4}-4x+2$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟

۶ مینیمم مقدار تابع $y=x^{4}-x^{2}+3$ را روی بازهٔ $[0,1]$ بیابید.

(جواب : $\dfrac{11}{4}$)

۷ در مخروطی به شعاع ۴ سانتی‌متر و ارتفاع ۶ سانتی‌متر یک استوانه محاط می‌کنیم. ماکسیمم مساحت جانبی استوانه را بیابید.

(جواب : 12π)

۸ در یک مخروط مجموع شعاع قاعده و ارتفاع برابر ۳ سانتی‌متر است. ماکسیمم حجم این مخروط را بیابید.

(جواب = $\frac{۴\pi}{۳}$)

۹ استوانه‌ای با ماکسیمم حجم در داخل کره‌ای به شعاع $۱۰\sqrt{۳}$ محاط شده است. ارتفاع این استوانه را بیابید.

(جواب : ۲۰)

۱۰ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن برابر ۱۶ سانتی‌متر است، مثلثی که بیشترین مساحت را دارد اختیار کرده‌ایم. مساحت این مثلث را بیابید.

(جواب : ۳۲)

۱۱ اگر نقطه (۱,۲) نقطه عطف تابع $y=ax^{۳}+bx^{۲}$ باشد، مقادیر b,a را بیابید.

(جواب : $a=-۱$, $b=۳$)

۱۲ جهت تقعر و نقاط عطف تابع $y=\frac{x}{۱+x^{۲}}$ را بیابید.

۱۳ جهت تقعر و نقاط عطف تابع $y=x^{۴}-۸x^{۳}-۷۲x^{۲}+۲۵x-۴$ را بیابید.

۱۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=x^{۲}-۴x+۵$

ب) $y=۸x^{۲}-۴۸x^{۲}+۹۶x-۶۴$

پ) $y=\frac{x+۱}{۲x+۴}$

درس ۱

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

اهداف درس

۱ دانش‌آموز درک دقیق و شفافی از ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع داشته باشد و فرق بین مقدار اکسترمم نسبی و نقطهٔ اکسترمم نسبی و طول نقطه اکسترمم نسبی را تشخیص دهد.

۲ دانش‌آموز با دیدن نمودار یک تابع بتواند نقاط اکسترمم نسبی آن را تشخیص دهد.

۳ دانش‌آموز تعریف ماکسیمم و مینیمم مطلق و فرق آنها با مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی را درک کند.

۴ دانش‌آموز بتواند با کمک اکسترمم‌های مطلق، مقادیر بهینه برای ماکسیمم‌سازی یا مینیمم‌سازی در مسائل کاربردی را محاسبه کند.

روش تدریس

شروع این درس با یک مثال از تابع دما ــ زمان می‌باشد که مفهوم اکسترمم‌های نسبی در آن توضیح داده شده است. معلم می‌تواند با مثال‌هایی مشابه سرعت ــ زمان (مربوط به سرعت حرکت یک اتومبیل در طول یک بازه زمانی) این مفاهیم را کامل‌تر توضیح دهد.

معلم بر فرق بین مقدار ماکسیمم نسبی، نقطه ماکسیمم نسبی و طول نقطه ماکسیمم نسبی و به همین شکل در مورد مینیمم نسبی تأکید کند تا دانش‌آموز به‌طور دقیق این اصطلاحات را به‌کار گیرد. همچنین تعریف

ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق و بیان فرق آنها و وجود یا عدم وجود آنها و مقادیر آنها با مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی با استفاده از نمودار توابع و ضابطه آنها به‌طور دقیق صورت گیرد. کاردر کلاس صفحه ۱۱۳ برای تفهیم این مفاهیم و مقایسه اختلافات آنها می‌باشد. فعالیت صفحه ۱۱۵ برای تفهیم اکسترمم‌های نسبی و مطلق در نقاطی که تابع مشتق ندارد یا پیوسته نیست می‌باشد و در ادامهٔ آن با انجام فعالیت صفحه ۱۱۶ دانش‌آموز آماده برای یادگیری قضیه صفحه ۱۱۶ که به قضیه اکسترمم معروف است می گردد.

با توجه به این قضیه لزوم تعریف نقاط بحرانی برای یافتن اکسترمم‌های مطلق در یک بازه احساس می‌گردد. پس از تعریف نقاط بحرانی، دانش‌آموز آمادگی حل مسئله‌های بهینه‌سازی کاربردی را دارد که دو مثال صفحه ۱۱۸ و ۱۱۹ نمونه‌هایی از این مثال‌ها می‌باشند.

مثال ابتدای صفحه ۱۱۸ مثالی است که در آن تمامی حالت‌های نقاط بحرانی وجود دارد و از این منظر مثال مناسبی است.

بخش بعدی درس اول مربوط به یافتن بازه‌هایی می‌باشد که تابع در آنها صعودی یا نزولی می‌باشد. مفهوم صعودی یا نزولی بودن تابع در فصل اول کتاب بیان شده است و در این درس رابطه بین صعودی یا نزولی بودن تابع با مثبت یا منفی بودن مشتق تابع بررسی می‌شود. فعالیت صفحه ۱۲۰ به‌طور شهودی به دانش‌آموز می‌فهماند که رابطه بین صعودی بودن تابع و مثبت بودن مشتق تابع در یک بازه و همچنین رابطه بین نزولی بودن تابع و منفی بودن مشتق تابع در یک بازه چیست و با توجه به این فعالیت قضیه صفحه ۱۲۱ که نتیجه آن فعالیت است بیان می‌شود. فعالیت صفحه ۱۲۲ ذهن دانش‌آموز را برای بیان آزمون مشتق اول آماده می‌کند. در این فعالیت به‌طور شهودی دانش‌آموز در می‌یابد که اگر تابع در نقطه‌ای پیوسته باشد و در همسایگی آن تعریف شده باشد و قبل از آن تابع صعودی و بعد از آن نزولی باشد آن نقطه، نقطهٔ ماکسیمم نسبی و اگر قبل از آن نزولی و بعد از آن صعودی باشد، آن نقطه مینیمم نسبی تابع می‌باشد.

مثال صفحه ۱۲۳ بیان می‌دارد که چگونه با کمک آزمون مشتق اول می‌توان اکسترمم‌های نسبی یک تابع را یافت. کار در کلاس صفحه ۱۲۴ مورد مناسبی است برای بررسی ارتباط بین رفتار یک تابع و رفتار مشتق آن. در این مورد بر عکس عمل شده است یعنی از روی نمودار تابع f' ویژگی‌هایی از تابع f مانند صعودی یا نزولی بودن و اکسترمم‌های نسبی بررسی می‌شوند.

درس ۲
جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

اهداف درس

۱ دانش‌آموز مفهوم دقیق جهت تقعر منحنی را درک کند و بتواند از روی نمودار تابع جهت تقعر آن را تشخیص دهد.
۲ دانش‌آموز روش تعیین جهت تقعر تابعی که ضابطه آن داده شده است را بیاموزد.
۳ دانش‌آموز با مفهوم نقطهٔ عطف آشنا شود.
۴ دانش‌آموز روش تعیین نقطهٔ عطف یک تابع را که ضابطه آن داده شده است فرا گیرد.

روش تدریس

در شروع این درس مفهوم جهت تقعر بیان شده است و دانش آموز در می‌یابد که اگر در یک بازه، نمودار تابع بالای خطوط مماس برمنحنی در آن بازه قرار گیرد جهت تقعر در آن بازه به سمت بالاست و اگر نمودار زیر خطوط مماس قرار گیرد جهت تقعر در آن بازه رو به سمت پایین است. در فعالیت صفحه ۱۲۸ سعی شده است رابطه بین علامت مشتق دوم تابع در یک بازه و جهت تقعر منحنی تابع در آن بازه بیان شود. در شکل (الف) ملاحظه می‌شود که شیب خط‌های مماس در حال افزایش هستند یعنی مشتق در این بازه صعودی است یعنی $f''(x)$ مثبت است و در شکل (ب) ملاحظه می‌شود که شیب خط‌های مماس در حال کاهش هستند یعنی تابع f' نزولی است که به معنی منفی بودن f'' در این بازه است. این نکته در قالب قضیه صفحه ۱۲۹ بیان شده است.

قسمت (پ) این قضیه حائز اهمیت است و لازم است معلم با ذکر مثال‌هایی مناسب مانند توابع $y=x^3$, $y=x^4$ و $y=-x^4$ این قسمت را به‌طور شفاف توضیح دهد. در کار درکلاس صفحه ۱۳۰ هدف سنجش میزان یادگیری مفهوم جهت تقعر توسط دانش‌آموز می‌باشد. در قسمت دوم درس دوم نقطهٔ عطف تابع تعریف می‌شود. پس از تعریف روی بخشی از تعریف که بیان می‌دارد «در نطقهٔ عطف باید خط مماس موجود باشد» تمرکز می‌کنیم و با مثال‌هایی نموداری و ضابطه‌ای این مفهوم را روشن می‌کنیم (مانند تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$) سپس با استدلال بیان می‌داریم که مشتق دوم در صورت وجود در نطقهٔ عطف برابر صفر می‌باشد. کار در کلاس صفحه ۱۳۲ مهارت دانش آموز در تشخیص نقاط عطف یک تابع را می‌سنجد. کاردرکلاس صفحه ۱۳۵ رابطهٔ بین رفتار f' با جهت تقعر f و همچنین صعودی یا نزولی بودن f را بیان می‌دارد.

درس ۳
رسم نمودار توابع

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم نمودار یک تابع

۲ بیان رابطه بین علامت مشتق اول و دوم تابع با رفتار تابع و جمع‌آوری آنها در قالب یک جدول تعیین علامت شامل تغییرات x ، $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$.

۳ توانایی رسم نمودار توابع درجه ۳ و توابع هموگرافیک.

روش تدریس

در ابتدا مفهوم نمودار تابع برای دانش‌آموز بیان می‌شود که به دانش‌آموز تفهیم می‌شود که هر نقطه از تابع معادل یک نقطه از صفحه دکارتی می‌باشد و تمام نقاط متناظر اگر در صحفه دکارتی تعیین شوند یک نمودار حاصل می‌شود که به آن منحنی نمودار تابع گفته می‌شود.

سپس با یادآوری رابطه بین علامت مشتق اول و مشتق دوم با رفتار تابع، نیاز به محاسبه مشتق اول تابع جهت تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع و یافتن اکسترمم‌های نسبی آن و همچنین مشتق دوم تابع جهت تعیین جهت تقعر و نقاط عطف تابع بیان می‌گردد. سپس بیان شود که برای جمع‌بندی رفتار f', f'' ، هر دوی آنها را همراه با تغییرات x , $f(x)$ در یک جدول ارائه می‌دهیم و با استفاده از این جدول نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم. اگر لازم شد از چند نقطهٔ کمکی هم برای رسم دقیق‌تر نمودار استفاده می‌کنیم.

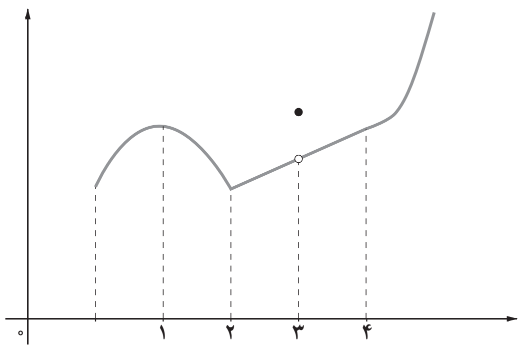
رسم نمودار توابع درجه ۳ تمرین خوبی برای این درس می‌باشد. فقط توجه شود که در حالت کلی امکان حل معادله درجه ۳ وجود ندارد پس یافتن نقاط بر خورد نمودار تابع با محور xها در حالت کلی امکان‌پذیر نیست و لازم است مثال‌ها طوری طراحی شوند که معادله درجه ۳ قابل تجزیه باشد مانند مثال دوم در صفحه ۱۳۹.

یکی از توابع معروف در ریاضی تابع هموگرافیک است که به‌صورت $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ که $C\neq 0$ و $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ می‌باشد. رسم نمودار این توابع نیز در این درس مورد توجه واقع شده است. تفاوت نمودار این توابع با توابع درجه۳ وجود مجانب‌های افقی و قائم می‌باشد. معلم لازم است تا مفاهیم مجانب‌های افقی و عمودی را برای دانش‌آموز یادآوری کرده و سپس رسم نمودار توابع هموگرافیک را به ترتیب بیان شده توضیح دهد.

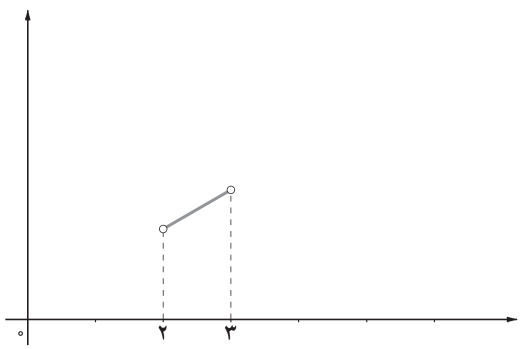
حل تمرین‌های فصل ۵

تمرین ص ۱۲۵

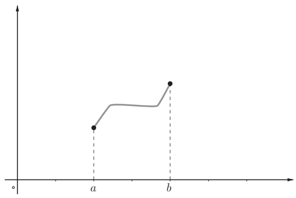
۱



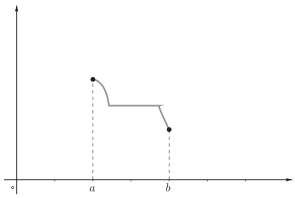
۲



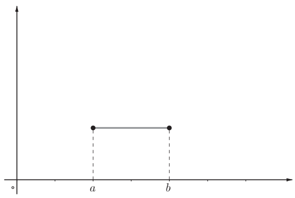
۳



(الف)

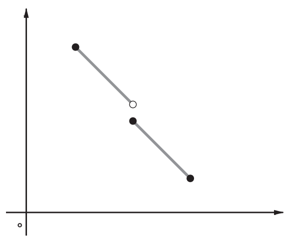


(ب)

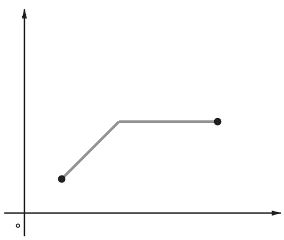


(پ)

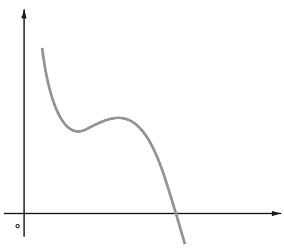
۴



(الف)

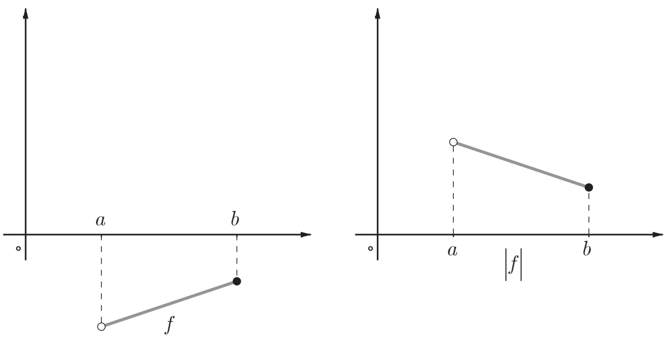


(ب)



(پ)

۵



۶

الف)

$f(x)=3x^2-2x+5 \qquad [-2,1]$

$f'(x)=6x-2=0 \rightarrow x=\frac{1}{3} \rightarrow$ نقاط بحرانی : $x=\frac{1}{3}\,,\,-2\,,1$

$f(-2)=21 \qquad f(\frac{1}{3})=\frac{14}{3} \qquad f(1)=6$

۲۱= مقدار ماکسیمم مطلق تابع $\qquad \Rightarrow$ مقدار مینیمم مطلق تابع = $\frac{14}{3}$

x		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	مینیمم نسبی	$\nearrow$

نقطه مینیمم نسبی تابع = ($\frac{1}{3}$ و $\frac{14}{3}$)

ب)

$f(x)=x^3-3x \qquad [-1,2]$

$f'(x)=3x^2-3=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow$ نقاط بحرانی $x=\pm 1$ و ۲

$f(-1)=2 \quad , \quad f(1)=-2 \quad , \quad f(2)=2$

۲= مقدار ماکسیمم مطلق تابع $\qquad$ ۲−= مقدار مینیمم مطلق تابع $\Leftarrow$

x	-1		1		2
$f'(x)$	$-$		0		$+$
$f(x)$	2	$\searrow$	-2 مینیمم نسبی	$\nearrow$	2

نقطهٔ مینیمم نسبی تابع = $(1,-2)$

پ)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<2\\ 4-x & x\ge 2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\sqrt{۲}\end{array}\right\}$$ تابع f در ۲ پیوسته نیست $\Rightarrow$ تابع f در ۲ مشتق ندارد

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} & ۰<x<۲\\ -۱ & x>۲\end{cases}$$

در تمام نقاط $(۲,+\infty)\cup(۰,۲)$ داریم $f'(x)\neq ۰$ $\rightarrow$
بنابراین :

نقاط بحرانی : $x=۲$

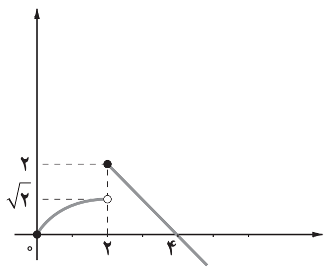
$f(۰)=۰$ $\qquad$ $f(۲)=۲$

مقدار ماکسیمم مطلق تابع $=۲$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(۴-x)=-\infty$ $\rightarrow$ تابع f مینیمم مطلق ندارد.

ماکسیمم نسبی تابع $=۲$ $\qquad$ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع $=(۲,۲)$

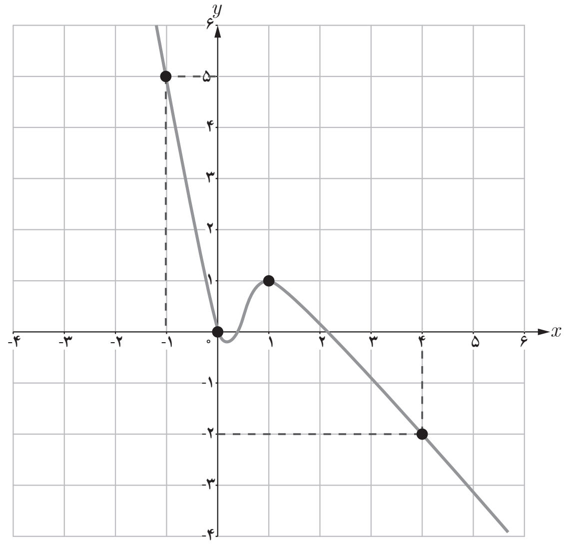
توجه شود که نمودار این تابع به‌صورت زیر می‌باشد :



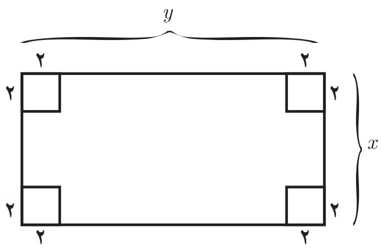
$f(x)=۳x^۲+a$

۷ $\qquad$ $$\begin{cases} f(۱)=۲\rightarrow ۱^۳+a(۱)+b=۲\rightarrow a+b=۱\\ f'(۱)=۰\rightarrow ۳(۱)^۲+a=۰\rightarrow a=-۳\end{cases}\Rightarrow b=۴$$

۸



۹ فرض کنید y طول و x عرض مستطیل باشد.



$$\text{حجم مکعب حاصل} = ۲(x-۴)(y-۴) \xrightarrow{xy=۱۰۰}$$

$$\text{تابع حجم مکعب} = f(x) = ۲(x-۴)(\frac{۱۰۰}{x}-۴) = ۲۳۲-۸x-\frac{۸۰۰}{x} \quad x\in[۴\,,۱۰]$$

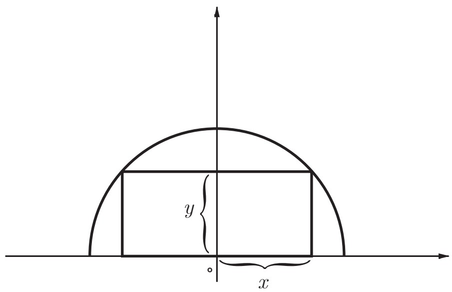
$f'(x) = -۸+\frac{۸۰۰}{x^۲} = ۰ \rightarrow -۸x^۲+۸۰۰ = ۰ \rightarrow x = ۱۰ \rightarrow$ **نقطهٔ بحرانی تابع** : $x = ۱۰$ و ۴ و ۱۰

$f(۱۰) = ۷۲ \quad , \quad f(۴) = ۰$

$\Rightarrow$ **مقدار ماکسیمم مطلق تابع** = ۷۲

به ازای $x = ۱۰$ و $y = \frac{۱۰۰}{x} = \frac{۱۰۰}{۱۰} = ۱۰$ ماکسیمم مطلق حاصل می‌شود.

۱۰



$$\text{معادله دایره} = x^۲ + y^۲ = ۱۶ \rightarrow y = \sqrt{۱۶ - x^۲}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = ۲xy$$

$$\text{تابع مساحت مستطیل} = f(x) = ۲x\sqrt{۱۶ - x^۲} \quad x \in [۰,۴]$$

$$f'(x) = ۲\sqrt{۱۶ - x^۲} + ۲x\frac{-x}{\sqrt{۱۶ - x^۲}} = ۰ \rightarrow \frac{۲(۱۶ - x^۲) - ۲x^۲}{\sqrt{۱۶ - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳۲ - ۴x^۲ = ۰ \rightarrow x = \sqrt{۸}$$

$$\text{نقطه بحرانی تابع} : \ x = \sqrt{۸}$$

$$f(۰) = ۰ \ , \ f(\sqrt{۸}) = ۱۶ \ , f(۴) = ۰$$

مقدار ماکسیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[۰ , ۴]$ برابر ۱۶ می‌باشد که به ازای طول $۲\sqrt{۸}$ و عرض $\sqrt{۸}$ حاصل می‌شود.

۱۱ الف) $f'(x) = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = ۰ \ \rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$

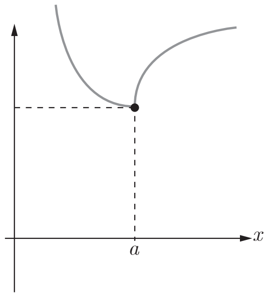
x		-۱		۲	
$f'(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ب) $f'(x) = \dfrac{x - ۲ - x}{(x - ۲)^۲} = \dfrac{-۲}{(x - ۲)^۲}$

$f'(x)$ در $x = ۲$ وجود ندارد و در $\mathbb{R} - \{۲\}$ همواره منفی است پس تابع f در $\mathbb{R} - \{۲\}$ نزولی است.

تمرین ص ۱۳۶

۱



۲

الف) $f'(x) = x^۲ - ۲x - ۳$

$f''(x) = ۲x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱$

x		۱	
$f''(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

عطف

$x = ۱$: نقطهٔ عطف

ب) $f'(x) = \dfrac{-۲}{(x-۱)^۲}$

$f''(x) = \dfrac{۴}{(x-۱)^۳}$

x		۱	
$f''(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

$x = ۱$ عضو دامنه تابع نمی‌باشد بنابراین تابع f فاقد نقطهٔ عطف می‌باشد.

پ) $f'(x) = \dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}$

$f''(x) = \dfrac{-۲(x+۱)}{۹\sqrt[۳]{(x+۱)^۸}} = \dfrac{-۲}{۹\sqrt[۳]{(x+۱)^۵}}$

x		-۱	
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{\sqrt[۳]{x+۱} - ۰}{x+۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{۱}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}} = +\infty$$

چون جهت تقعر تابع در $x = -۱$ عوض شده و خط مماس در $x = -۱$ وجود دارد (به‌صورت قائم است) پس $x = -۱$ نقطهٔ عطف تابع می‌باشد.

۳

الف)

$f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d \quad (a \neq ۰)$

$f(۰) = ۰ \rightarrow d = ۰$

$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + c$

$f''(x) = ۶ax + ۲b$

$f''(۰) = ۰ \rightarrow b = ۰$

$f(x) = ax^۳ + cx \xrightarrow[c=۱\ ,\ a=۱]{\text{به دلخواه}} f(x) = x^۳ + x$

ب)

$f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d \quad (a \neq ۰)$

$f(۱) = ۰ \rightarrow a + b + c + d = ۰$

$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + c$

$f''(x) = ۶ax + ۲b$

$f''(۱) = ۰ \rightarrow ۶a + ۲b = ۰ \rightarrow b = -۳a$

به دلخواه قرار می‌دهیم $a = ۱$ و $c = ۰$ داریم : $d = ۲$ و $b = -۳$ پس $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲$

پ)

$f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d \quad (a \neq ۰)$

$f(۰) = ۱ \rightarrow d = ۱$

$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + c$

$f''(x) = ۶ax + ۲b$

$f''(۰) = ۰ \rightarrow b = ۰$

به دلخواه قرار می‌دهیم $a = ۱$ و $c = ۱$ داریم : $f(x) = x^۳ + x + ۱$

ت)

$f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d \quad (a \neq ۰)$

$f(۲) = ۲ \rightarrow ۸a + ۴b + ۲c + d = ۲$

$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + c$

$f''(x) = ۶ax + ۲b$

$f''(۲) = ۰ \rightarrow ۱۲a + ۲b = ۰ \rightarrow b = -۶a$

به دلخواه قرار می‌دهیم $a = ۱$ و $c = ۰$ داریم : $b = -۶$ و $d = ۱۸$ بنابراین $f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۸$

۴

$$f(\circ) = ۱ \rightarrow c = ۱$$

$$f(۱) = ۲ \rightarrow a + b + c = ۲ \xrightarrow{c=۱} a + b = ۱$$

$$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx$$

$$f''(x) = ۶ax + ۲b$$

$$f''(\frac{۱}{۲}) = \circ \rightarrow ۳a + ۲b = \circ$$

$$\begin{cases} a + b = ۱ \\ ۳a + ۲b = \circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۳ \end{cases}$$

۵

۲ و ۲- نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ می‌باشند بنابراین

$$f'(۲) = \circ \quad , \quad f'(-۲) = \circ$$

چون $(\circ\,,\,\circ)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ است پس $f''(\circ) = \circ$

چون تابع $f(x)$ از نقطهٔ $(\circ\,,\,\circ)$ عبور کرده است پس $f(\circ) = \circ$

$$f(\circ) = \circ \rightarrow c = \circ$$

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۲ax + b$$

$$f'(-۲) = \circ \rightarrow ۱۲ - ۴a + b = \circ$$

$$f'(۲) = \circ \rightarrow ۱۲ + ۴a + b = \circ$$

$$f''(x) = ۶x + ۲a$$

$$f''(\circ) = \circ \rightarrow \mathrm{a} = \circ \Rightarrow b = -۱۲$$

تمرین ص ۱۴۴

۱

الف)

$f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۱$

$D_f = \mathbb{R}$

نمودار در نقطهٔ $(۰ , ۱)$ محور yها را قطع می‌کند $f(۰) = ۱$

$f(x) = ۰ \rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \rightarrow x = \frac{۲ \pm \sqrt{۲}}{۲}$

پس نمودار در نقاط $(\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲} , ۰)$ و $(\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲} , ۰)$ محور xها را قطع می‌کند.

$f'(x) = ۴x - ۴ = ۰ \rightarrow x = ۱$

$f(۱) = -۱$

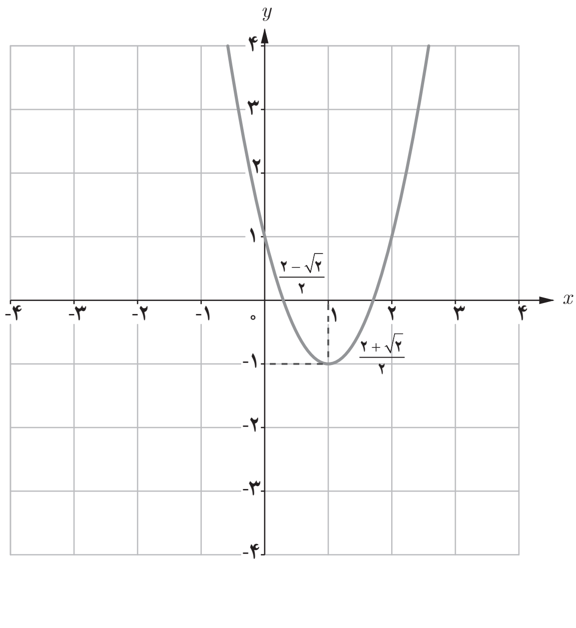
$f''(x) = ۴$

بنابراین نقطهٔ $(۱ , -۱)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

بنابراین f'' همواره مثبت است و در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود پس تابع نقطهٔ عطف ندارد.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	
y''		$+$		$+$	
y		$\searrow$	-۱	$\nearrow$	

مینیمم نسبی



ب)

$$f(x) = x^3 - 5x + 5$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$f(0) = 5 \rightarrow$ نمودار در نقطهٔ $(0\,,5)$ محور yها را قطع می‌کند

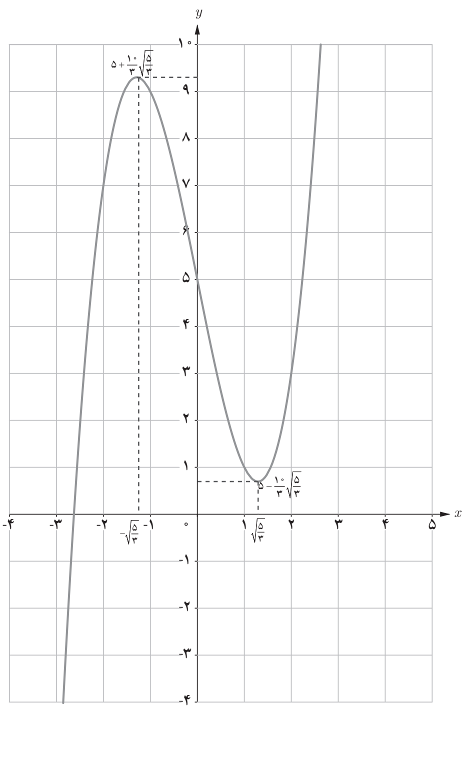
$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 5x + 5 = 0 \rightarrow$ حل این معادله با روش‌های معمول امکان‌پذیر نیست.

$$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

پس نقاط $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, 5-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ و $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\,, 5+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$ نقطهٔ $(0\,,5)$ نقطهٔ عطف تابع است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$\frown$ $-$		$\frown$ $-$	0	$\smile$ $+$		$\smile$ $+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	5	$\searrow$		$\nearrow$	



پ)

$f(x) = -x(x+2)^2$

$D_f = \mathbb{R}$

$f(0) = 0 \rightarrow$.تابع در نقطهٔ $(0\,,\,0)$ محور yها را قطع می‌کند

$$f(x) = 0 \rightarrow -x(x+2)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

پس تابع در نقاط $(0\,,\,0)$ و $(-2\,,\,0)$ محور xها را قطع می‌کند.

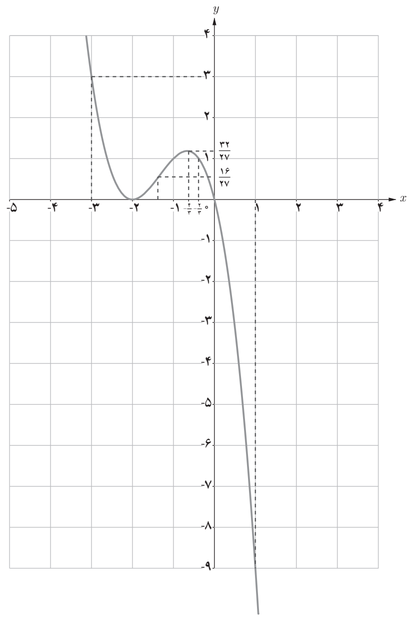
$$f'(x) = -(x+2)^2 - 2x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

پس نقاط $(-2\,,\,0)$ و $\left(-\frac{2}{3}\,,\,\frac{32}{27}\right)$ اکسترمم‌های نسبی تابع f می‌باشند.

$$f''(x) = -6x - 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

نقطهٔ $\left(-\frac{4}{3}\,,\,\frac{16}{27}\right)$ نقطه عطف تابع می‌باشد.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y''		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{27}$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	



نقاط کمکی

x	-3	1
y	3	-9

ت)

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۲}$$
$$D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x-۱}{x-۲}=+\infty$$

$\Rightarrow$ خط ۲ = x مجانب عمودی تابع می‌باشد.

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲x-۱}{x-۲}=-\infty$$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=۲ \to$ خط ۲ = y مجانب افقی تابع می‌باشد.

$$f(۰)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع در نقطهٔ $(۰,\frac{۱}{۲})$ محور yها را قطع می‌کند.

$$f(x)=۰\to\frac{۲x-۱}{x-۲}=۰\to x=\frac{۱}{۲}$$

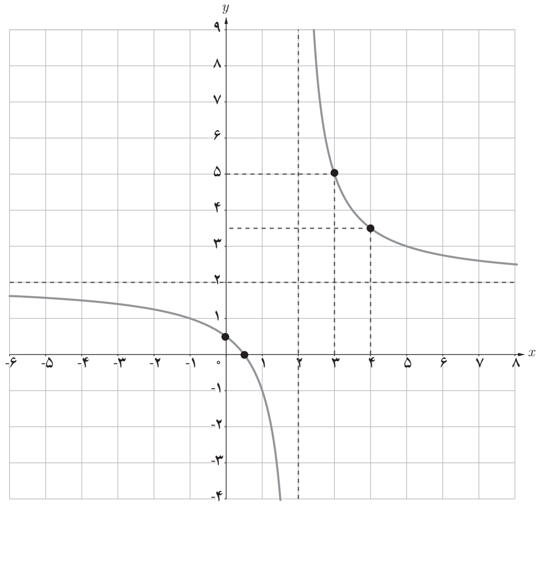
پس تابع در نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۰)$ محور xها را قطع می‌کند.

$$f'(x)=\frac{-۳}{(x-۲)^۲}$$
$$f''(x)=\frac{۶}{(x-۲)^۳}$$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y''	$-$		$+$
y	۲ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ ۲

نقاط کمکی

x	۳	۴
y	۵	۳/۵



ث)

$$f(x)=\frac{-x}{x+۳}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}$$

$f(۰)=۰\rightarrow$ تابع در $(۰\,,\,۰)$ محور yها را قطع می‌کند.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x+۳}=-۱$$

بنابراین خط $y=-۱$ مجانب افقی تابع f می‌باشد.

$$\lim_{x\to -۳^+} f(x)=+\infty$$

$\Rightarrow$ خط $x=-۳$ مجانب قائم تابع f می‌باشد.

$$\lim_{x\to -۳^-} f(x)=-\infty$$

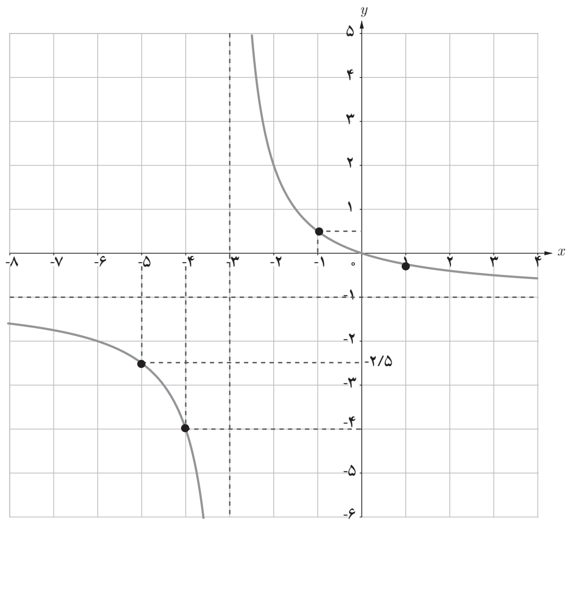
$$f'(x)=\frac{-۳}{(x+۳)^۲}$$

$$f''(x)=\frac{۶}{(x+۳)^۳}$$

x	$-\infty$	-۳	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y''	$-$		$+$
y	$-۱ \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -۱$

نقاط کمکی

x	-۴	-۵	-۱	۱
y	-۴	$-۲/۵$	$۰/۵$	$-\frac{۱}{۴}$



ج)

$f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۱$

$D_f = \mathbb{R}$

$f(۰) = ۱$

بنابراین تابع f در نقطهٔ (۰ , ۱) محور yها را قطع می‌کند.

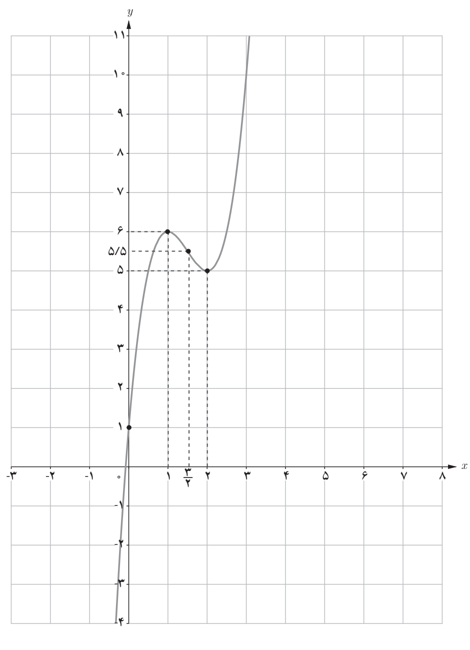
$$f'(x) = ۶x^۲ - ۱۸x + ۱۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

پس نقاط (۱ , ۶) و (۲ , ۵) نقاط اکسترمم نسبی f می‌باشند.

$$f''(x) = ۱۲x - ۱۸ = ۰ \rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

نقطهٔ $(\frac{۳}{۲},\frac{۱۱}{۲})$ نقطهٔ عطف تابع f می‌باشد.

x	$-\infty$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	۰	+	
y''		$\frown$ −		$\frown$ −	۰	$\smile$ +		$\smile$ +	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۶	$\searrow$	$\frac{۱۱}{۲}$	$\searrow$	۵	$\nearrow$	$+\infty$



۲ خط ۲ = x مجانب قائم و خط ۱ = y مجانب افقی تابع f می‌باشد بنابراین :

$$-\frac{d}{c}=۲ \to c=-\frac{۱}{۲}d$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}=۱ \to a=c$$

$$f(-۱)=۰ \Rightarrow \frac{a(-۱)+b}{c(-۱)+d}=۰ \to a=b$$

با انتخاب دلخواه ۲ = d داریم : ۱− = $a=b=c$ پس

$$f(x)=\frac{-x-۱}{-x+۲}$$

۳ داریم ۲− = $f(۰)$ پس نمودار تابع از نقطهٔ (۲− , ۰) می‌گذرد.

$$f'(x)=۳x^۲+۱$$

معادله ۰ = $f'(x)$ فاقد جواب می‌باشد پس تابع دارای اکسترمم‌های نسبی نمی‌باشد یعنی گزینه‌های پ و ت رد می‌شوند.

$$f''(x)=۶x=۰ \to x=۰$$

نقطهٔ ۰ = x نقطهٔ عطف تابع می‌باشد بنابراین گزینه الف رد می‌شود (نقطهٔ عطف گزینه الف نقطه ۱ = x است)

بنابراین گزینه ب صحیح می‌باشد.

منابع

۱ استوارت، جیمز، (۲۰۰۲)، حسابگان عام، دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ محمدحسین علامت ساز و علی‌اکبر محمدی‌حسن‌آبادی، چاپ اول، تهران، انتشارات آبیژ، ۱۳۸۹.

۲ استوارت، جیمز، (۲۰۱۲)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ ارشک حمیدی، جلد اول، تهران، انتشارات فاطمی، ۱۳۹۵.

۳ اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید، حسابان (کد کتاب ۲۵۸/۱). تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش،۱۳۹۵.

۴ ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید، ریاضیات ۲ (کد کتاب ۲۳۴/۲). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش،۱۳۹۴.

۵ ایوز، هاوارد و، (۱۹۸۳). آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، تهران : مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

۶ تورنس، نلسون. (۲۰۰۳)، ریاضیات در عمل، ترجمهٔ فاطمه معصومه راعی، تهران : کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.

۷ سافیر، فرد، (۲۰۰۲). ریاضیات سری شومز جلد۱. ترجمهٔ محمد مازوچی، تهران : کانون فرهنگی آموزش،۱۳۸۴.

۸ سیلورمن، ریچارد، (۱۹۶۹)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، جلد اول، تهران انتشارات علمی و فنی، ۱۳۹۰.

۹ Adams, R.A. Essex, C.(2010) Calculus: A Complete Course. Toronto. Onario: Pearson Education, Inc.

۱۰ Barnett, R. Ziegler, M. Byleen, K. and Sobecki, D. (2008). College Algebra with Trigonometry (gth Eduition). Mc Graw – Hill Education.

۱۱ Beecher, J.A. Penna, J.A.& Bittinger, M.L. (2012). Precalculus. A Right Triangle Approach (4th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۲ Crauder, B. Evans, B. & Noell, A. (2008). Functions and change, a modeling approach to college algebra and trigonometry. Boston. AM. Houghton Mifflin.

۱۳ Hungerford, T. W. Shaw, D. J. (2008). Contemporary Precalculus: A Graphing approach.(5th Edition). Belmont, CA. Thomson Brooks/Cole.

۱۴ Larson, R. Hostetler, R.P. Edwards, B.H. (2004). College algebra. a graphing approach. New Jersey. Brooks Cole.

۱۵ Rockswold, K. (2011) Essentials of College Algebra with Modeling and Visualization (4th Edition) Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۶ Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. New Jersey. Pearson Education. Inc.

۱۷ Sullivan, M. (2012). Precalculus (9th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۸ Sullivan, M. Sullivan III, M. (2015). Precalculus Concepts Through Functions, A Unit Circle Approach to Trigonometry (3th Edition). Upper Saddle River, New Jersey. Pearson Education, Inc

۱۹ Swokowski, E.W. Cole, J. A. (2009). Cole–algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition. New Jersey. Brooks Cole.

۲۰ Swokowski, E.W.Cole, J.A. (2012).Precalculus, functions and graphs. Belmont, CA.Cengage Learning.