فصل ۴

مشتق

ماهواره‌بر سیمرغ ـ پایگاه فضایی امام‌خمینی(قُدِّسَ‌سِرُّهُ)

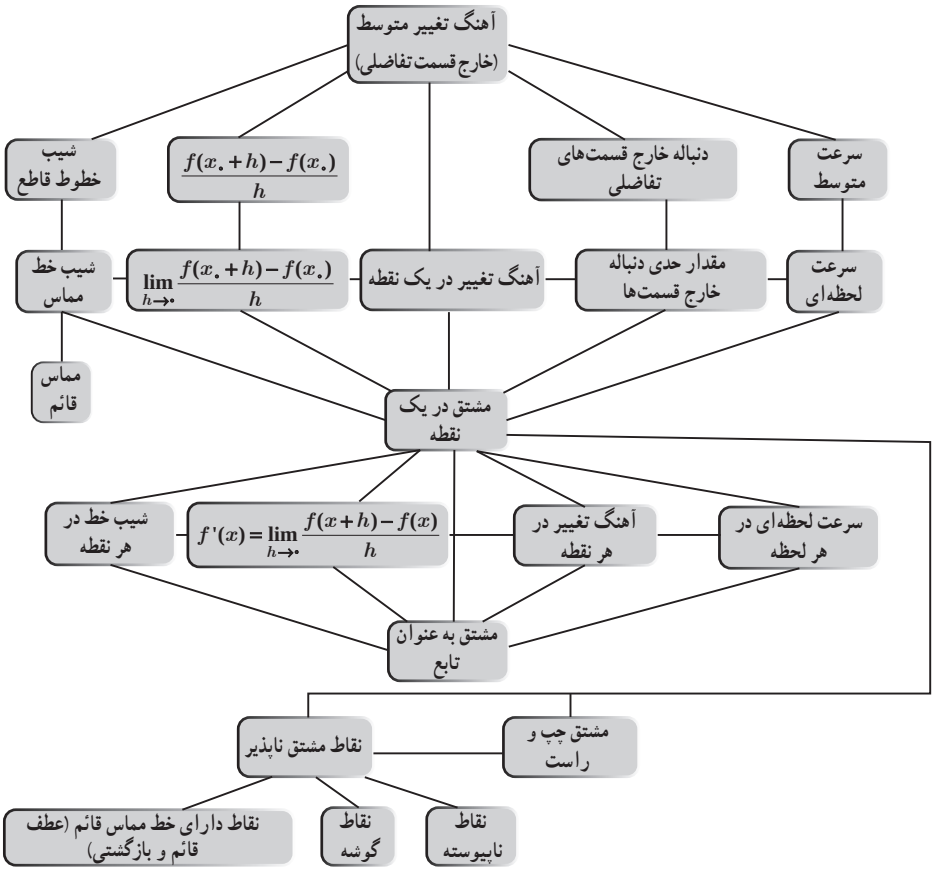
اهداف کلی فصل

- آشنایی با مفهوم مشتق در یک نقطه
- درک رابطه بین شیب خط مماس و مشتق
- بررسی نقاط مشتق ناپذیر
- درک مشتق به عنوان یک تابع
- درک آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر و رابطه آن با مشتق

نگاه کلی به فصل

مفهوم مشتق شامل سه درس است که درس اول شامل مفهوم شهودی خط مماس، مشتق در یک نقطه و معرفی بازنمایی‌های مختلف مشتق می‌باشد و درس دوم به بیان مشتق‌پذیری و معرفی مشتق به عنوان تابع می‌پردازد و در درس سوم آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و کاربردهای آن اشاره می‌شود. اتصال بین این مفاهیم نیز حائز اهمیت است. برای ارائه هر مفهومی در کتاب علاوه بر برنامه درسی، به پشتوانه نظری و پژوهشی نیاز است. در این قسمت ابتدا نقشه مفهومی فصل (مشتق) و سپس مختصری راجع به چارچوب‌های نظری مورد استفاده در این بخش ارائه شده است.

نقشه مفهومی فصل چهارم



دانستنی‌هایی برای معلم[1]

حساب دیفرانسیل یکی از بزرگ‌ترین دستاوردهای انسان است (NCTM، ۲۰۰۰؛ هاگس ــ هالت و دیگران، ۲۰۱۷) که نقش مهمی در تمدن بشری ایفا کرده است. یکی از مباحث حساب دیفرانسیل که

۱ــ مطالب این قسمت برگرفته از مقاله‌های شماره ۱ تا ۳ مراجع است.

بسیار حائز اهمیت می‌باشد، مشتق[۱] است. این مفهوم در کتاب‌های جدید ریاضی در پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ارائه می‌گردد. تحقیقات نشان می‌دهند که مفهوم مشتق یکی از مفاهیم مشکل برای دانش‌آموزان و دانشجویان می‌باشد و علت این امر، پیچیدگی تعریف و بازنمایی‌های آن است (تامپسون، ۱۹۹۴؛ زندیه، ۲۰۰۰). مطالعات زیادی در مورد بررسی تفکر دانش‌آموزان در ارتباط با مفاهیم حساب دیفرانسیل، شامل مشتق انجام شده است (به‌طور مثال، اوهرتمن و دیگران، ۲۰۰۸؛ بری و نیمن، ۲۰۰۳؛ سلدن. جی، سلدن. ای، هاک، و میسن، ۲۰۰۰). مشتق، ابتدا به کار برده شده، سپس کشف و توسعه یافته و در نهایت تعریف شده است (گرابینر، ۱۹۸۳). سیر تاریخی استفاده از مشتق تا تعریف آن بیش از ۲۰۰ سال طول کشیده است. فرما[۲] در ابتدا از آن استفاده می‌کرد، نیوتن[۳] و لایب نیتز[۴] آن را کشف نمودند، تیلور، اولر و مک لورن آن را توسعه داده، لاگرانژ آن را نام‌گذاری و تعیین نمود و در پایان کوشی[۵] و وایراشتراس[۶] آن را تعریف کردند (گرابینر، ۱۹۸۳). از طرفی مشتق یکی از مفاهیم حساب دیفرانسیل است که در علوم مختلف مهندسی، فیزیک، شیمی، علوم انسانی و اقتصاد و غیره کاربرد و اهمیت دارد (رودرا و گودهرت، ۲۰۱۰).

از جمله اهداف این فصل آن است که مفاهیم ریاضی جدید به کمک مفاهیم قبلی در کتاب‌های درسی ساخته شوند. در این راستا، چگونگی ارائه مبحث مشتق درکتاب‌های درسی حائز اهمیت است؛ زیرا یکی از شاخصه‌های اصلی تدریس معلمان کتاب‌های درسی هستند، بنابراین نحوهٔ بیان مفهوم‌سازی مشتق در کتاب‌ها مهم است. همچنین سعی شده است که از شهود نهایت بهره را ببریم. از مفاهیم پایه در این بررسی مفهوم فرایند ــ شیء[۷] است، که در ادامه، از منظر اسفارد[۸] (۲۰۰۸) به آن می‌پردازیم.

فرایند و شیء از دیدگاه اسفارد (۲۰۰۸)

نظریه فرایند و شیء توسط افراد مختلفی به‌صورت‌های گوناگون تعریف شده است. یکی از این نظریه‌ها، نظریه کاربردی **شیء انگاری**[۹] اسفارد(۲۰۰۸) می‌باشد. بر اساس این نظریه یک دوگانگی فرایند ــ شیء ذاتی در بیشتر مفاهیم ریاضی وجود دارد. اساس نظریه این است که در ابتدا مفهوم عملیاتی (فرایند محور) ایجاد می‌شود و پس از آن از طریق شیء انگاری فرایندها، اشیای ریاضی(مفاهیم ساختاری) ایجاد می‌گردند. فرایندهای پویا، عملیاتی هستند که روی اشیای ثابت و ایستای گذشته عمل می‌کنند. هر فرایندی

۱ــ Derivative

۲ــ Fermat

۳ــ Newton

۴ــ Leibniz

۵ــ Cauchy

۶ــ Weierstrass

۷ــ Process ــ object

۸ــ Sfard

۹ــ Reification

که روی یک شیء، عمل می‌کند؛ خود از عمل، توسط فرایند دیگر به‌وجود آمده است. این فرایند زنجیر مانند، زوج‌های فرایند ــ شیء نامیده می‌شوند. اسفارد از سه مرحله فرایند برای رشد مفهوم صحبت می‌کند : (شکل ۱).

مرحله درونی‌کردن[1] : فرایند یا عملیاتی که یک شخص روی یک شیء ذهنی آشنا و در دسترس انجام می‌دهد و قادر به تکرار آن باشد، گوییم آن را درونی کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص بین فرایندهای مرتبط گام بردارد).

مرحله فشرده‌سازی یا جمع‌بندی[2] : اگر یادگیرنده قادر باشد فرایند را در نظر بگیرد بدون آنکه در واقعیت اتفاق افتاده باشد گوییم آن را فشرده‌سازی و خلاصه کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص فرایند را به عنوان کل در نظر بگیرد و بتواند به عنوان یک زیرفرایند در فرایند دیگر به کار برد).

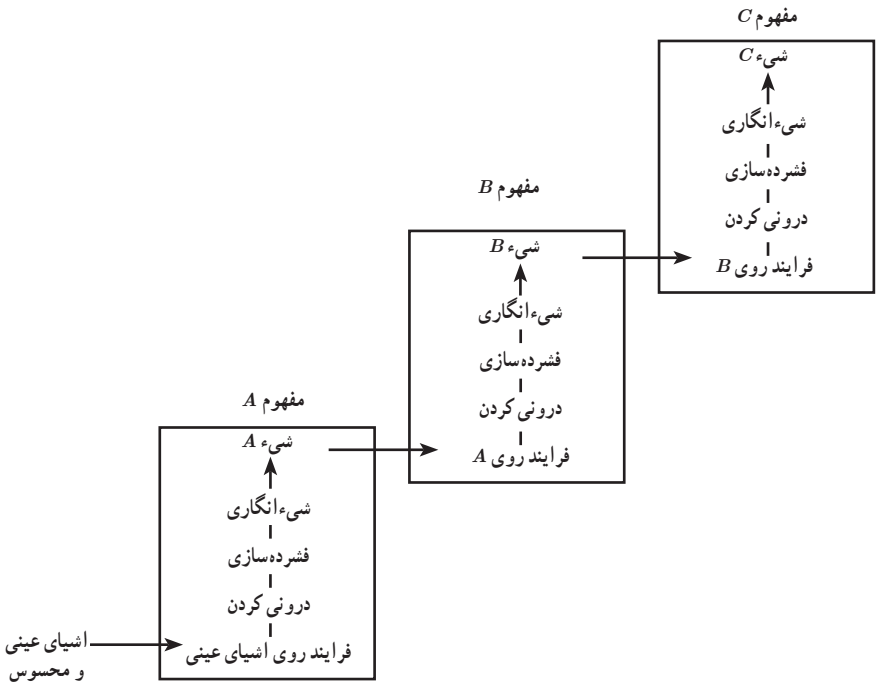
مرحله شیء انگاری : زمانی که یادگیرنده از اشیای آشنا به یک نگاه کلی و جدید برسد به طوری که بتواند با آن دست‌ورزی کند، به مرحله شیء انگاری رسیده است. در این حالت فرایند، تبدیل به یک شیء ساختاری ایستا می‌شود و خود پایه‌ای برای فرایند پیشرفته‌تر بعدی می‌گردد (زمانی اتفاق می‌افتد که فرایندها به‌طور ساختاری به عنوان یک شیء در نظر گرفته شوند).

شکل ۱، مراحل ساخت یک مفهوم از دیدگاه اسفارد شامل درونی کردن، فشرده سازی و شیء انگاری را نشان می‌دهد و ساختار زنجیر مانند فرایند ــ شیء را در هر مرحله نمایان ساخته است. به عنوان مثال، می‌توان روند توسعه ساخت مفهوم تابع را نام برد. در ابتدا شخص با تناظر کردن دو شیء، آشنا می‌شود. به عنوان نمونه هر شخص یک کد ملی دارد یا در هر لحظه دماسنج یک دما را نشان می‌دهد. سپس این تناظر را به عنوان زوج مرتب (شیء) در نظر می‌گیرد، (شخص، کد ملی)؛ کار با زوج‌های مرتب به عنوان اشیا و ادامه مراحل درونی کردن و فشرده‌سازی با برقراری رابطه بین آنها دنبال می‌شود، سپس مفهوم رابطه درک می‌شود. فرایند نگاشتن عضوی از دامنه به درون عضوی از برد با این شرط که یک عضو از دامنه به دو عضو از برد نگاشته نشود را تابع به عنوان فرایند نامیم. اعمال روی تابع و دست ورزی با آن به شیء تبدیل می‌شود. مجموعه توابع را می‌توان به عنوان یک خانواده توابع در نظر گرفت که منجر به جبر توابع می‌شوند. به عنوان مثالی دیگر، خارج قسمت تفاضلی را به عنوان اندازهٔ آهنگ متوسط متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل درنظر می‌گیریم. محاسبهٔ نسبت تفاضلات، به عنوان فرایند A می‌باشد. با انجام چندین محاسبه برای مقادیر مختلف و جمع‌بندی آن، به عنوان یک شیء (شیء A همان نسبت تفاضلات به عنوان عدد است) خلاصه می‌شود. این شیء در فرایند دوم یعنی فرایند حدگیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرایند حدگیری در این مرحله، شامل تجزیه و تحلیل یک دنباله از آهنگ‌های متوسط تغییرات وقتی که تفاضل مخرج به

۱ــ Interiorization

۲ــ Condensation

سمت صفر میل کند، می‌باشد. نماد لایب نیتسی آن نیز به صورت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ است. فرایند حدگیری به عنوان آهنگ آنی تغییرات، خلاصه شده و با $\frac{dy}{dx}(x_0)$ نشان می‌دهیم (شیء B). فرایند خلاصه شده آهنگ آنی تغییرات در هر مقدار ورودی به عنوان یک شیء در ساخت تابع مشتق مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع فرایند در این مرحله، تغییرات هم‌زمان مقادیر ورودی و خروجی یا مقادیر آهنگ آنی تغییر خواهد بود و با نماد $\frac{dy}{dx}(x)$ نشان می‌دهیم (شیء C).



شکل ۱ــ مدل عمومی ساخت مفهوم اسفارد (۱۹۹۱)

زندیه (۱۹۹۷،۲۰۰۰) چارچوبی برای درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه نموده است که در قسمت بعد به آن می‌پردازیم.

چارچوب زندیه برای درک مفهوم مشتق

زندیه (۱۹۹۷) نشان داد که درک اساسی که منجر به مفهوم مشتق می‌شود در طی بازنمایی‌های مختلف و تکالیف متنوع در زمینه‌های حساب دیفرانسیل محقق می‌شود. زندیه (۲۰۰۰) چارچوبی برای تجزیه و

تحلیل درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه داده است. دو مؤلفه اصلی چارچوب، یکی بازنمایی‌های چندگانه[۱] (زمینه‌ها[۲]) و دیگری لایه‌هایی از زوج‌های فرایند ــ شیء[۳] می‌باشد که در ادامه هرکدام به اختصار توضیح داده می‌شوند. بازنمایی‌های چندگانه مفهوم مشتق عبارت‌اند از :

الف) نموداری[۴] : به عنوان شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه؛

ب) کلامی[۵] : به عنوان آهنگ تغییر لحظه‌ای؛

ج) فیزیکی[۶] : به عنوان سرعت (شتاب و در حالت کلی حرکت)؛

د) نمادین[۷] : به عنوان حد خارج قسمت تفاضلی.

لایه‌های مشتق که هر کدام می‌توانند در نقش فرایند و شیء باشند به صورت زیر است :

ــ نسبت :
- فرایند، فرایند تقسیم صورت کسر به مخرج کسر.
- شیء، یک جفت عدد صحیح و یا خروجی فرایند تقسیم.

ــ حد :
- فرایند، فرایند نزدیک شدن به یک مقدار.
- شیء، مقدار حد.

ــ تابع :
- فرایند، تناظر بین دو مجموعه ناتهی.
- شیء، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب.

جدول ۱، چارچوب درک دانش‌آموزان از مفهوم مشتق را که زندیه (۲۰۰۰) ارائه داد، به همراه بازنمایی‌ها و لایه‌های آن نشان می‌دهد.

۱ــ Multiple representations

۲ــ Contexts

۳ــ Layers of process–object pairs

۴ــ Graphically

۵ــ Verbally

۶ــ Physically

۷ــ Symbolically

جدول ۱ــ چارچوب درک مفهوم مشتق زندیه (۱۹۹۷، ۲۰۰۰)

زمینه‌ها / لایه‌ها	نموداری	کلامی	فیزیکی	نمادین	غیره
(فرایند ـ شیء)	شیب	آهنگ	سرعت	خارج قسمت تفاضلی	
نسبت					
حد					
تابع					

چارچوب نظری اسفارد

از چارچوب نظری مورد استفاده در ارائه مفهوم مشتق در این کتاب، چارچوب اسفارد، همان رویکرد گفتمان شناختی[۱] در متن‌های کتاب حساب دیفرانسیل است. رویکرد گفتمانی بر این پایه استوار است که تفکر نوع معینی از گفتمان با خود یا دیگران است. گفتمان شناختی از دو کلمه گفتمان[۲] و شناخت[۳] تشکیل شده‌اند که هر دو با هم یک پدیده را توصیف می‌کنند (اسفارد، ۲۰۰۸). نظریه گفتمان شناختی یک نظریه منسجم و دقیق برای تفکر دربارهٔ تفکر، مبتنی بر تجزیه و تحلیل گفتمان کلاسیک است (یاکل،۲۰۰۹). نظریه گفتمان شناختی کاربرد زیادی در تجزیه و تحلیل توصیفی و کمی محتوای کتاب‌ها دارد. این نظریه شامل ساختارهایی مانند کنایه[۴]، تفکر و گفتمان است و گفتمان شناختی به عنوان نتیجه‌ای از ارتباط بین فردی میان فرایند گفتمان و شناخت است. گفتمان شناختی دارای پنج خاصیت استدلال[۵]، انتزاع یا تجریدسازی[۶]، عینی‌سازی[۷]، ذهنی‌سازی[۸] و خودآگاهی[۹] می‌باشد. از طرفی ریاضی دارای سیستمی شامل اشیای گفت‌وگو به همراه خود گفت‌وگو است که وقتی اشیای جدید یکی پس از دیگری اضافه شوند از درون بی وقفه رشد می‌کند و گسترش می‌یابند (اسفارد، ۲۰۰۸) و به این ترتیب یک مفهوم، ساخت و گسترش می‌یابد.

۱ــ Commognitive approach

۲ــ Communication

۳ــ Cognition

۴ــ Metaphor

۵ــ reasoning

۶ــ abstracting

۷ــ objectifying

۸ــ subjectifying

۹ــ consciousness

رویکرد گفتمان شناختی مبانی اساسی را از بین چهار مشخصه گفتمان شرح می‌دهد :

استفاده از کلمات ــ واسطه‌های تصویری ــ روال‌ها یا روتین‌ها ــ روایت‌های تأییدی

۱ **استفاده از کلمات**[۱] : استفاده از کلمات، کلید مهمی در تدریس و یادگیری حساب دیفرانسیل می‌باشد. گفتمان ریاضی در حساب، گفتمانی است که در آن از جملات تکنیکی در متن‌ها استفاده می‌کنیم. برای نمونه روش استفاده آموزشگران از کلمات برای توضیح معنی حد و مشتق مهم است زیرا دانش‌آموزان نیاز به فرصت برای بیان خود و حس یکپارچه‌ای از مفاهیم دارند.

۲ **واسطه‌های تصویری**[۲] : واسطه‌های تصویری اشاره به ابزارهای غیرکلامی گفتمان دارند. در مباحث حساب دیفرانسیل، واسطه‌های تصویری اغلب با نمودارها، اشکال، جدول‌ها، علائم نمادین مشخص می‌گردند.

۳ **روال‌ها یا روتین‌ها**[۳] : روال‌ها همان الگوهای تکراری هستند که در سخنرانی‌های کلامی و واسطه‌های تصویری و روایت‌های تأییدی یافت می‌شوند.

۴ **روایت‌های تأییدی**[۴] : روایت‌های تأییدی یا تصدیقی اظهاراتی هستند که به عنوان صحبت‌های درست در نظر گرفته می‌شوند. در گفتمان ریاضی، روایت‌های تأییدی، جملاتی از مفاهیم ریاضی مانند تعاریف، قضایا یا توجیه‌ها می‌باشد (جدول ۲ و ۳ را مشاهده کنید). این رویکرد تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنابخشی[۵] می‌نامد. یک شخص، یک کلمه یا نماد ریاضی را با اشیای ملموس و قابل دسترس درک می‌کند. برای نمونه یک شخص، کلمه تابع را با نمودار یا جدول درک می‌کند (اسفارد، ۲۰۰۸، ص۱۵۴).

جدول ۲ــ اجزای گفتمان ریاضی در رویکرد گفتمان شناختی (اسفارد، ۲۰۰۸)

اجزا	توصیف‌ها
استفاده از کلمات (Word use)	استفاده از کلمات برای معنی کردن اشیای ریاضی
واسطه‌های تصویری (Visual Mediators)	روشهای غیر کلامی گفتمان
روال‌ها یا روتین‌ها (Routines)	الگوهای تکراری خوش تعریف
روایت‌های تأییدی یا تصدیقی (Endorsed Narratives)	اظهاراتی که سخنرانان به عنوان عبارات درست تأیید می‌کنند.

۱ــ Word_use

۲ــ Visual mediators

۳ــ Routines

۴ــ Endorsed narratives

۵ــ Realizations

علاوه بر مشخصه‌های چارچوب گفتمان شناختی، این چارچوب شامل اشیای مختلفی از گفتمان ریاضی مانند : نشانگرها یا دلالت‌گرها [۱]،درخت‌های معنابخشی[۲]، مفاهیم[۳]، اشیای اولیه[۴] و اشیای استدلالی[۵] است.

گفتمان ریاضی

گفتمان ریاضی دارای اجزایی است که عبارت‌اند از :

اشیای اولیه : هر موجود درک پذیر و قابل دسترسی که مستقل از گفتمان‌های انسانی وجود دارد و شامل چیزهایی است که ما می‌توانیم ببینیم و لمس کنیم (اشیای مادی و تصاویر).

اشیای استدلالی : در فرایند نام‌گذاری صحیح به‌وجود می‌آیند : دادن اسم یا عنصر نمادین مشابه به یک شیء خاص. در این فرایند یک زوج (اسم یا ضمیر، شیء اولیه معین) ایجاد می‌شود. اولین عنصر از زوج نشانگر است که در برقراری ارتباط با شیء دیگر زوج استفاده می‌شود به عنوان نشانگر معنابخشی شمرده می‌شود (اسفارد،۲۰۰۸).

درخت معنابخشی : مجموعهٔ سلسله مراتبی سازماندهی شده از تمامی مفاهیم نشانگرهای داده شده همراه با معنابخشی این مفاهیم که به خوبی نشانگرهای قبلی خود را معنابخشی کنند و مفاهیمی برای نشانگرهای بعدی باشند. درخت‌های معنابخشی و در نتیجه اشیای ریاضی دارای ساختار شخصی هستند و اطلاعات ارزشمندی در مورد گفتمان شخص می‌دهند. در این بررسی فرایندی که مشتق یک تابع به‌صورت شیء در نظر گرفته می‌شود را فرایند مشتق و شیئی که فرایند مشتق روی آن اعمال می‌شود شیء اولیه و نتیجه فرایند مشتق را شیء نهایی می‌نامیم.

رویکرد گفتمان شناختی تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنابخشی می‌نامد. معنابخشی به جای درک و فهم استفاده می‌شود و زمانی به کار می‌بریم که یک مفهوم مشکل ریاضی را با استفاده از کلمات و تصاویر به مفاهیم ساده‌تر و قابل درک به کمک اشیای ریاضی تبدیل کنیم.

۱ـ signifiers

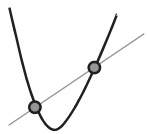
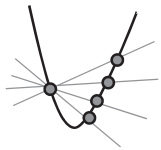
۲ـ realization trees

۳ـ realisations

۴ـ primary objects

۵ـ discursive objects

جدول ۳ــ کلمات و واسطه‌های تصویری به عنوان معنابخشی‌های مشتق

واسطه‌ها	اشیای اولیه	فرایند حد	اشیای نهایی
نمادین	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
عددی	$\frac{42-35}{3-1}$	دنباله‌ای از چند عدد	عدد
نموداری	(خط قاطع) 	(خطوط قاطع) 	(خط مماس)

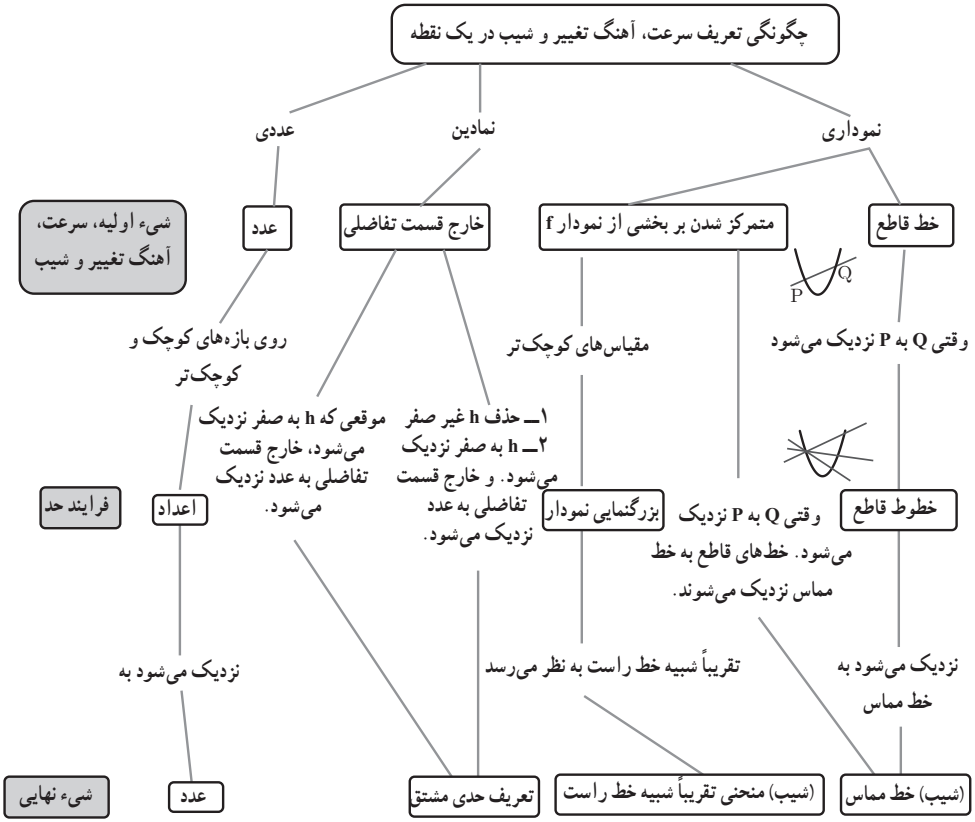
نماد $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ به صورت فرایند و شیء هر دو بازنمایی می‌شود، این دوگانگی اغلب منجر به مشکل شدن درک نماد به عنوان شیء برای دانش‌آموزان می‌شود (زندیه، ۲۰۰۰).

درخت معنابخشی مشتق در یک نقطه : کتاب ریاضی ۳، شامل ۱۵۰ صفحه است که ۷۳ صفحهٔ آن (معادل ۴۹٪ کتاب) به مشتق و کاربرد آن اختصاص یافته است. در این کتاب ۵۵ آیتم در مورد مشتق در یک نقطه، ۲۷ آیتم نموداری و ۱۷ آیتم نمادین و ۱۱ آیتم عددی می‌باشند که از آنها، ۳۴ آیتم به فرایند حد می‌پردازند، ۱۹ آیتم (نموداری) و ۱۵ آیتم (نمادین).

جدول ۴ــ موضوعات و تعداد صفحات و درصد اختصاص یافته به مشتق در کتاب

موضوع	تعداد صفحه	درصد از مبحث مشتق
شیب و خط مماس	۱۲	۱۶٪
مشتق‌پذیری و پیوستگی	۶	۸٪
تابع مشتق	۵	۷٪
مشتق تابع مثلثاتی و تابع مرکب ــ مشتق‌پذیری روی یک بازه	۷	۹٪
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر	۹	۱۲٪
کاربرد مشتق	۳۴	۴۶٪

درخت معنابخشی مشتق در یک نقطه کتاب در ادامه نمایش داده شده است.



برخی از بدفهمی‌های رایج در مورد مشتق

یکی از عوامل مؤثر در طراحی این فصل، مطالعات انجام شده در مورد آموزش مفهوم مشتق بوده است. در این مطالعات برخی بدفهمی‌های رایج در مورد مفهوم مشتق مشاهده گردیده است که برخی از آنها به شرح زیر است. اطلاعات بیشتر در مراجع آمده است.

۱ عدم توجه به فرایند حدی : دانش‌آموزان صرفاً به نوشتن خارج قسمت تفاضلی بسنده می‌کنند و توجهی به مفهوم حدگیری ندارند. به عنوان نمونه ممکن است بنویسند : $f'(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

۲ درک نادرست از تعریف نمادین : برخی دانش‌آموزان تعریف مشتق در یک نقطه را به این صورت معرفی می‌کنند : $f'(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. این شخص علاوه بر اینکه مفهوم حدی را نادیده گرفته است، تفاوتی بین مشتق در یک نقطه و مشتق به عنوان تابع نیز قائل نیست.

۳ درک ناقص یا اشتباه از مشتق : برخی دانش‌آموزان مشتق را به نوعی کم کردن توان معرفی می‌کنند یعنی $f(x)=x^{۳} \rightarrow f'(x)=۳x^{۲}$.

۴ مشتق‌گیری از عبارات در توابع چند ضابطه‌ای بدون فراهم بودن شرایط.

۵ در توابعی که شامل چند متغیر هستند و برخی متغیرها ثابت فرض می‌شوند، به نادرستی مشتق گرفته می‌شود.

۶ در محاسبه تعبیر مشتق در یک نقطه در زندگی واقعی برداشت‌های متناقضی دارند.

۷ در مقایسه شیب‌های با مقادیر منفی اشتباهات چشمگیری دیده می‌شود.

۸ درک درستی از تقریب در محاسبات مربوط به شیب ندارند.

درس اول

آشنایی با مفهوم مشتق

اهداف درس

هدف کلی : درک مفهوم مشتق

اهداف جزئی

- یادآوری مفهوم شیب خط
- آشنایی با مفهوم خط مماس به صورت شهودی
- محاسبه شیب خط مماس با جدول مقادیر خارج قسمت تفاضلی و نمودار
- آشنایی با پیدا کردن معادله خط مماس
- محاسبه مشتق به روشی دیگر

پیش نیازها

- آشنایی با روش‌های حدگیری
- آشنایی با محاسبه شیب

روش تدریس

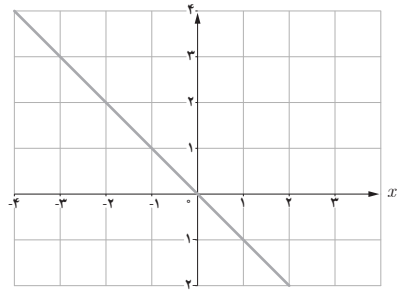
با تکیه بر مفهومی آشنا به نام شیب یک خط، تدریس آغاز می‌شود. مقایسه شیب‌های مختلف، به ویژه تغییرات شیب‌ها وقتی که مثبت یا منفی هستند و مقادیر آنها مفید و آموزنده است. سپس شیب خط مماس بر منحنی به طور شهودی ارائه می‌گردد و در ادامه به صورت دقیق‌تر و در یک فرایند حدی، شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه تعریف می‌گردد و مفهوم مشتق تابع در یک نقطه از آن استخراج می‌گردد.

فعالیت صفحهٔ ۶۶

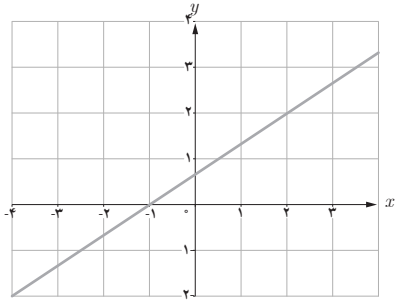
هدف این فعالیت، یادآوری مفهوم شیب خط، محاسبه و مقایسه شیب خطوط با یکدیگر است. به دانش‌آموزان اجازه دهید تا فعالیت را انجام دهند و در انتها مفاهیم را دوره نمایید.

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

$m = -۱$

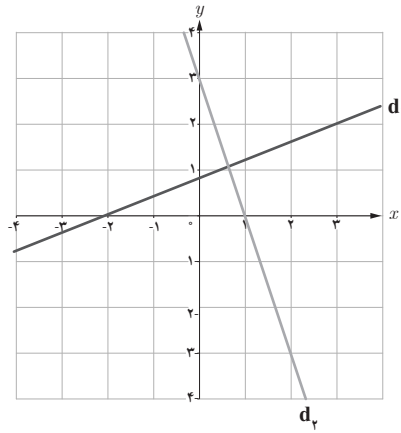


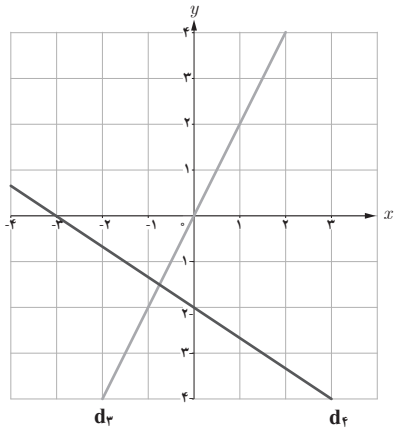
$m = \frac{۲}{۳}$



۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط به خط‌های $d_۱$, $d_۲$, $d_۳$ و $d_۴$ را روی شکل مشخص کنید.

خط	$d_۱$	$d_۲$	$d_۳$	$d_۴$
شیب	$\frac{۲}{۵}$	-۳	۲	$-\frac{۲}{۳}$





توصیه آموزشی

در صورت لزوم شیب‌های دیگر مطرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید که آنها را به دست آورند. به ویژه مقایسه شیب‌های منفی مختلف ضروری و آموزنده است.

تصاویر صفحه ۶۷ صرفاً برای آشنایی اولیه با خط مماس می‌باشد. مثال‌هایی برای اینکه چه خطوطی را به عنوان مماس می‌شناسیم و چه خطوطی را خط مماس در نظر نمی‌گیریم. همچنین خط مماس لزوماً نبایستی نمودار را در یک نقطه قطع کند و یا هرخطی که در یک نقطه نمودار را قطع کند، لزوماً خط مماس نیست.

فعالیت صفحهٔ ۶۸

هدف از این فعالیت، گذر از درک شهودی خط مماس و انجام محاسبات عددی و رسیدن به دقت می‌باشد. همان‌طور که در مبانی نظری نیز بیان شد، مشتق بازنمایی‌های مختلفی دارد و یکی از آنها عددی و نموداری است. در این فعالیت از دانش‌آموزان می‌خواهیم حدس بزنند، محاسبات انجام دهند، فرایند حدی را مشاهده کنند و در نهایت استدلال نمایند. چالش دیگری که در اینجا مطرح است بحث ورود متغیر می‌باشد که با انجام محاسبات و توجه به تغییرات متغیر طول‌ها، تأثیرات آن بر تغییرات عرض‌ها را متوجه شوند.

بازه [a,b]	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
[۲,۲/۴]	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{-(۲/۴)^{۲}+۱۰(۲/۴)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۲/۲۴}{۰/۴}=۵/۶$
[۲,۲/۳]	$\frac{f(۲/۳)-f(۲)}{۲/۳-۲}=\frac{-(۲/۳)^{۲}+۱۰(۲/۳)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۳-۲}=\frac{۱/۷۱}{۰/۳}=۵/۷$
[۲,۲/۲]	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{-(۲/۲)^{۲}+۱۰(۲/۲)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
[۲,۲/۱]	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{-(۲/۱)^{۲}+۱۰(۲/۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
[۲,۲/۰۱]	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{-(۲/۰۱)^{۲}+۱۰(۲/۰۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$

[۲,۲/۰۰۱]	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{-(۲/۰۰۱)^{۲}+۱۰(۲/۰۰۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۰۰۱-۲}$ $=\frac{۰/۰۰۵۹۹۹}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$
⋮	⋮
[۲,۲+h] (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{(۲+h)-۲}=\frac{-(۲+h)^{۲}+۱۰(۲+h)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{h}$ $=\frac{-h^{۲}+۶h}{h}=-h+۶$

توصیه آموزشی : اجازه دهید دانش‌آموزان محاسبات را انجام دهند و در نتیجه‌گیری به آنها کمک کنید تا خط مماس را به خوبی درک کنند. در صورت لزوم می‌توانند بازه‌های دیگری را نیز انتخاب کنند و محاسبات را انجام دهند. معلمان عزیز می‌توانند در این فعالیت این دو سؤال را از دانش‌آموزان بپرسند و یا به بحث بگذارند.

الف) به نظر شما مقادیر خارج قسمت تفاضلی به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

ب) آیا هر قدر که بخواهیم می‌توانیم خارج قسمت تفاضلی را به آن عدد (۶) نزدیک کنیم؟ اگر پاسخ مثبت است، به چه شرطی؟

کار در کلاس صفحهٔ ۷۲

حل : نقطه تماس A(−۲ , ۷) می‌باشد و برای پیدا کردن شیب خط مماس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم :

$$m=f'(-۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(-۲+h)^{۲}+۳-(-۲)^{۲}-۳}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h^{۲}-۴h}{h}=\lim_{h\to ۰}(h-۴)=-۴$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $y-۷=-۴(x+۲) \rightarrow y=-۴x-۱$ است.

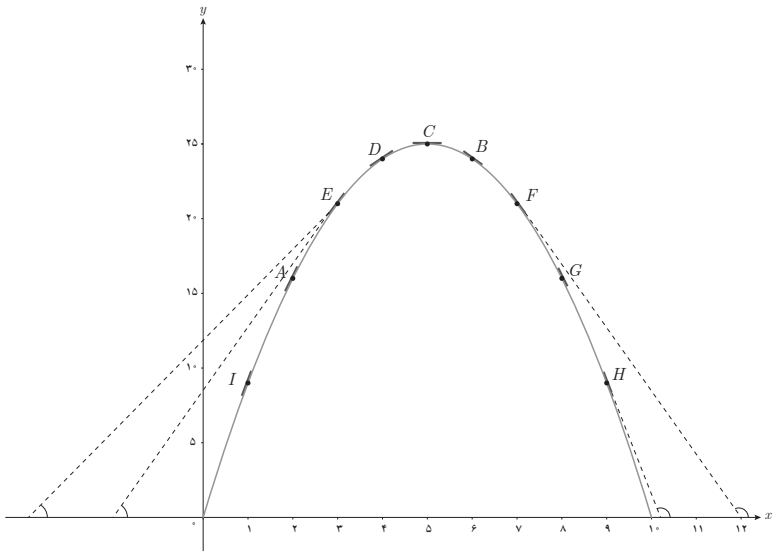
کار در کلاس صفحهٔ ۷۴

الف) برای تابع $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$، $f'(۸)$ و $f'(۵)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشخص تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی دارای مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.



ث) با محاسبه $f'(۳)$ و $f'(۴)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

حل

الف)

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۵}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{-(x-۵)^{۲}}{x-۵}$$
$$=\lim_{x\to ۵}-(x-۵)=۰$$

$$f'(۸)=\lim_{x\to ۸}\frac{f(x)-f(۸)}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۱۶}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\frac{-(x-۸)(x-۲)}{x-۸}$$
$$=\lim_{x\to ۸}-(x-۲)=-۶$$

ب) نقاط (D , B) یا (E , F) یا (A , G) یا (I , H)

پ) در نقاط (I , A , E , D) مشتق مثبت و در نقاط (B , F , G , H) مشتق منفی است.

ت) با توجه به شکل و مقایسه زاویه‌ها، مشتق در نقطه ۳ بزرگ‌تر از مشتق در نقطه ۴ است.

ث)

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۱}{x-۳}=\lim_{x\to ۸}\frac{-(x-۳)(x-۷)}{x-۳}$$
$$=\lim_{x\to ۳}-(x-۷)=۴$$

$$f'(۴)=\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۴}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{-(x-۴)(x-۶)}{x-۴}$$
$$=\lim_{x\to ۴}-(x-۶)=۲$$

واضح است که $f'(۳)>f'(۴)$.

توصیه آموزشی

توجه به این نکته در این فعالیت ضروری است که برای زاویه‌های منفرجه که شیب منفی به دست می‌آید، ممکن است در مقایسه شیب‌ها ایجاد بدفهمی شود. همکاران محترم با انجام یک مثال این قسمت را برجسته کنید. به عنوان نمونه شیب در نقطه ۷ بزرگ‌تر از شیب در نقطه ۹ می‌باشد.

شیب	نقطه
۸	۱
۶	۲
۴	۳
۲	۴
۰	۵
-۲	۶
-۴	۷
-۶	۸
-۸	۹

رسم جدول فوق برای دانش‌آموزان آموزنده است.

جمع‌بندی کلی : مثلاً بررسی رفتار کلی از $x=۰$ تا $x=۵$ شیب‌ها با مقادیر مثبت کاهش می‌یابد تا به صفر برسد و از $x=۵$ تا $x=۱۰$ شیب‌ها با مقادیر منفی کاهش می‌یابند.

حل برخی تمرین‌های صفحه ۷۵ کتاب درسی

۱ با جایگذاری $x = ۲$ عرض نقطه تماس برابر ۹ به دست می‌آید و داریم :

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{۳x^۲ - ۲x + ۱ - ۹}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{۳x^۲ - ۲x - ۸}{x-۲}$$
$$= \lim_{x\to ۲} \frac{(۳x+۴)(x-۲)}{x-۲} = ۱۰$$

$$y - ۹ = ۱۰(x-۲) \to y = ۱۰x - ۱۱$$

۳ $m_۵ < m_۳ < m_۲ < m_۴ < m_۶ < m_۱$

۶
$$f'(-۱) = \lim_{x\to -۱} \frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x\to -۱} \frac{x^۳ - ۲ + ۳}{x+۱} = \lim_{x\to -۱} \frac{x^۳ + ۱}{x+۱}$$
$$= \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(x^۲ - x + ۱)}{x+۱} = ۳$$

۷ الف) نادرست است زیرا در نقاط C , D , F منفی می‌باشد.

ب) نادرست است زیرا زاویه‌ای که خط مماس در نقطه A با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد از زاویه‌ای که خط مماس در نقطه B با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد بیشتر است یعنی $m_A > m_B$.

پ) درست است.

ت) درست است.

ث) نادرست است زیرا $m_C < m_D < m_F$.

ج) درست است.

۸

روش اول : مختصات نقطه $A(۴,۲۵)$ و $B(۴ + ۱,۲۵ + f'(۴)) = B(۵,۲۶/۵)$ و

$C(۴ - ۱,۲۵ - f'(۴)) = C(۳,۲۳/۵)$

روش دوم : مختصات نقطه $A(۴,۲۵)$ و

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$
$$y - ۲۵ = ۱/۵(x - ۴)$$
$$y = ۱/۵\, x + ۱۹$$
$$y_B = ۲۶/۵ \;,\; y_C = ۲۳/۵$$

درس دوم

مشتق‌پذیری و پیوستگی

اهداف درس

هدف کلی : بررسی مشتق‌پذیری و معرفی مفهوم مشتق به عنوان تابع

اهداف جزئی

- ❑ شناسایی نقاط مشتق‌ناپذیر
- ❑ محاسبه مشتق چپ و راست
- ❑ بررسی رابطه بین مشتق‌پذیری و پیوستگی
- ❑ معرفی مماس قائم
- ❑ آشنایی و درک تابع مشتق
- ❑ محاسبه تابع مشتق برخی توابع
- ❑ مشتق تابع مرکب
- ❑ مشتق‌پذیری روی یک بازه
- ❑ معرفی مشتق مرتبه دوم

پیش نیازها

- ❑ آشنایی با مشتق در یک نقطه
- ❑ آشنایی با خط مماس
- ❑ آشنایی با حدهای نامتناهی

روش تدریس

در این درس در شروع با توجه به مفهوم شیب خط مماس بر منحنی به بررسی عدم وجود خط مماس

در نقاطی که تابع ناپیوسته است، پرداخته می‌شود و ارتباط بین پیوستگی و مشتق‌پذیری بررسی می‌شود. با استفاده از نیم مماس‌های راست و چپ مفهوم مشتق راست و چپ ارائه می‌شود سپس مشتق به عنوان یک تابع ارائه می‌شود و در نهایت دستورهایی برای محاسبه مشتق برخی توابع داده می‌شود.

فعالیت صفحهٔ ۷۷

هدف از این فعالیت آن است که مشخص کنیم تا چه حد ناپیوستگی روی مشتق‌پذیری مؤثر است. در این فعالیت تابع ناپیوستگی رفع شدنی دارد (حد وجود دارد).

با توجه به تعریف مشتق، به دلیل اینکه مخرج کسر صفر است و صورت کسر یک عدد، پس حد وجود ندارد.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۱}{x-۲}=\infty$$

به کمک نمودار هم به دلیل اینکه شیب خطوط قاطع رسم شده به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند، مشتق وجود ندارد (زاویه خطوط قاطع نسبت به جهت مثبت محور طول‌ها به ۹۰ درجه نزدیک می‌شوند).

کار در کلاس صفحهٔ ۷۸

هدف از این کاردرکلاس، معرفی نوع دیگر ناپیوستگی (که رفع نشدنی است) و تأثیر آن بر مشتق‌پذیری می‌باشد. تابع در این نقطه پیوستگی چپ دارد.

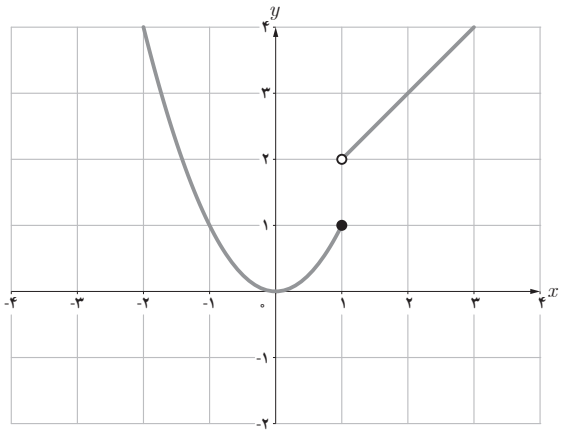
کار در کلاس

تابع g (شکل روبه‌رو) را به‌صورت

$$g(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\le ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$$

درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(۱)$ موجود نیست؟



حل : مشتق چپ و راست در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم :

$$g'+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{g(x)-g(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+۱-۱}{x-۱}=+\infty$$

$$g'-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{g(x)-g(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}(x+۱)=۲$$

با توجه به اینکه مشتق چپ و راست برابر نیست پس تابع مشتق پذیر نمی‌باشد. امّا تابع در نقطه ۲ مشتق چپ دارد.

کار در کلاس صفحهٔ ۷۹

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-۱$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-۱$ را بنویسید.

حل :

$$f'_+(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=۲$$

$$f'_-(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=-۲$$

نیم مماس راست: $y-۰=۲(x+۱)\to y=۲x+۲$

نیم مماس چپ: $y-۰=-۲(x+۱)\to y=-۲x-۲$

کار در کلاس صفحهٔ ۸۲

شکل الف، تابع در $x_۲$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.

شکل ب، تابع در $x_۲$ و $x_۳$ مشتق‌پذیر نیست زیرا در این نقاط تابع ناپیوسته است.

شکل پ، تابع در $x_۱$ و $x_۲$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.

شکل ت، تابع در $x_۲$ مشتق‌پذیر نیست زیرا تابع ناپیوسته است.

شکل ث، تابع در $x_۲$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.

شکل ج، تابع در $x_۲$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.

فعالیت صفحهٔ ۸۲

هدف از این فعالیت عبور از مشتق در یک نقطه، به مشتق به عنوان تابع، به کمک چند مثال و تعمیم می‌باشد. همان‌طور که در بخش‌های نظری نیز بیان گردید مناسب است دانش‌آموزان را با چند مثال ساده وارد بحث مشتق به عنوان تابع نماییم.

$$f'(-۳)=\lim_{x\to(-۳)}\frac{f(x)-f(-۳)}{x+۳}=\lim_{x\to(-۳)}\frac{x^۲-۹}{x+۳}=-۶$$

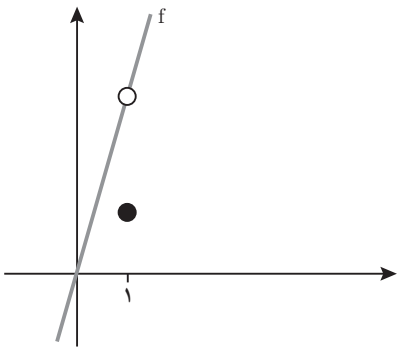
$$f'(-۱)=\lim_{x\to(-۱)}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=-۲$$

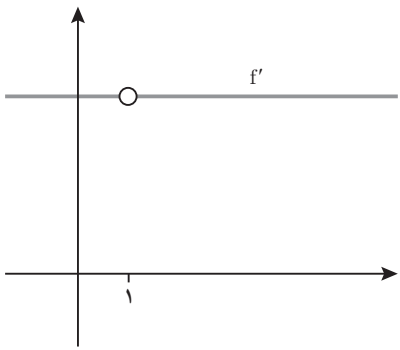
$$f'(\frac{۱}{۲})=\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})}\frac{f(x)-f(\frac{۱}{۲})}{x-\frac{۱}{۲}}=\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})}\frac{x^۲-\frac{۱}{۴}}{x-\frac{۱}{۲}}=۱$$

در تمام نقاط مشتق وجود دارد.

کار در کلاس صفحهٔ ۸۴

دامنه تابع تمام اعداد حقیقی است ولی دامنه تابع مشتق آن تمام اعداد حقیقی به غیر از ۱ می‌باشد.





$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۵(x+h)-۵x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۵h}{h}=۵\ x\neq ۱$$

تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست زیرا پیوسته نمی‌باشد.

توصیه آموزشی

بررسی رابطه بین نمودار تابع و مشتق آن بسیار حائز اهمیت است. با تأمل در این قسمت به دانش‌آموزان کمک شود تا بهتر آن را درک کنند. از آوردن مثال‌های پیچیده برای دانش‌آموزان خودداری شود. توجه شود که تاکنون قاعده‌ای برای محاسبه مشتق مطرح نگردیده است و دانش‌آموز بایستی از طریق تعریف محاسبات را انجام دهد.

کار در کلاس صفحهٔ ۸۷

۱ الف) $f'(x) = -\frac{۱}{(x-۴)^۲} \quad x \neq ۴$

ب) $g'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^۲ + ۵) + (۶x)\sqrt{x}$

پ) $h'(x) = \frac{۱(۲x^۲ + x - ۱) - (۴x + ۱)(x)}{(۲x^۲ + x - ۱)^۲}$

۲ $(fg)'(۲) = f'(۲)g(۲) + g'(۲)f(۲) = ۵(۸) + (-۶)۳ = ۲۲$

$$(\frac{f}{g})'(۲) = \frac{f'(۲)g(۲) - g'(۲)f(۲)}{g^۲(۲)} = \frac{۵(۸) - (-۶)۳}{۸^۲} = \frac{۵۸}{۶۴} = \frac{۲۹}{۳۲}$$

کار در کلاس صفحهٔ ۸۸

الف) $f'(x) = ۳(۲x)(x^۲ + ۱)^۲(۵x - ۱) + ۵(x^۲ + ۱)^۳$

ب) $g'(x) = ۸(\frac{-۳(x^۲ + ۵) - ۲x(-۳ - ۱)}{(x^۲ + ۵)^۲})(\frac{-۳x - ۱}{x^۲ + ۵})^۷$

کار در کلاس صفحهٔ ۸۹

تابع f در بازهٔ $[-۱,۱]$ مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف $۲x$ است. تابع در بازه $(۲,۵)$ مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف ۱- می‌باشد. ولی تابع در بازه $[-۲,۰]$ مشتق‌پذیر نیست زیرا در $x = -۱$ دارای مشتق چپ ۲ و مشتق راست ۲- است (با استفاده از تعریف).

$$x<-۱: f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(x+h)+۴-۲x-۴}{h}=۲$$

$$-۱<x<۲: f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{۲}-۱-x^{۲}+۱}{h}=۲x$$

$$۲<x<۵: f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(x+h)+۵+x-۵}{h}=-۱$$

تابع در $x=-۱$ پیوسته نیست و مشتق ندارد و در $x=۲$ پیوسته است و مشتق چپ و راست برابری ندارد (دو نیم مماس داریم).

توصیه آموزشی

مفهوم مشتق‌پذیری روی یک بازه را هم از روی نمودار و هم با استفاده از تعریف مشتق برای دانش‌آموزان مشخص نمایید. توجه شود که در توابع چند ضابطه‌ای امکان بروز بدفهمی هنگام مشتق‌گیری وجود دارد. مثلاً $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۱\\ ۲x+۱ & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته نیست و مشتق ندارد در حالی که اگر از هر یک از ضابطه‌ها به تنهایی مشتق گرفته شود به نتیجه اشتباه منجر می‌شود و مشتق تابع ظاهراً ۲ می‌شود. در حقیقت در این مثال شرایط مشتق‌گیری از هر دو ضابطه وجود ندارد.

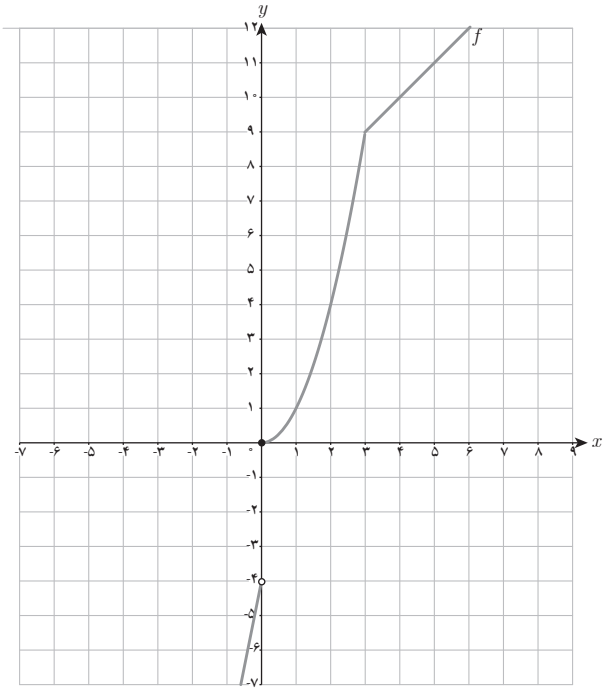
حل برخی از تمرین‌های صفحه ۹۰ کتاب درسی

۱ یکی از پاسخ‌ها می‌تواند $g(x)=\begin{cases}x+۱ & x\leq ۲\\ -۲x+۷ & x>۲\end{cases}$ و $f(x)=|x-۲|$ باشند.

۲ الف) با استفاده از تعریف مشتق، $f'_{+}(۰)=۰\ ,\ f'_{-}(۰)=-۱$ ب) $f'_{+}(۱)=-۱\ ,\ f'_{-}(۱)=۰$

پ) با استفاده از تعریف، $f'_{+}(۴)=\frac{۱}{۲}\ ,\ f'_{-}(۴)=\frac{۱}{۴}$.

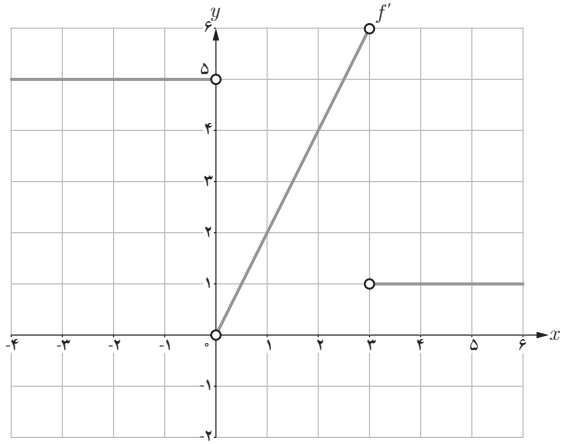
۳ الف)



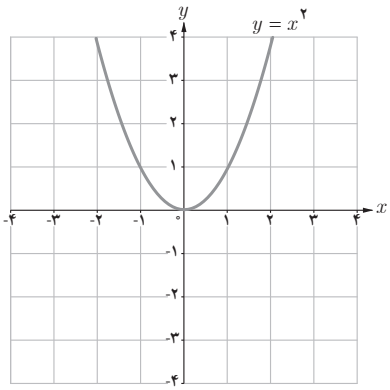
ب) با استفاده از تعریف مشتق، $f'_-(۰) = ۵$ ، $f'_+(۰) = ۰$ و $f'_-(۳) = ۶$ ، $f'_+(۳) = ۱$

پ) $f'(x) = \begin{cases} ۵ & x < ۰ \\ ۲x & ۰ < x < ۳ \\ ۱ & x \geq ۳ \end{cases}$

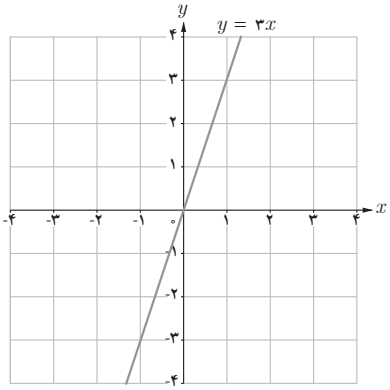
ت)



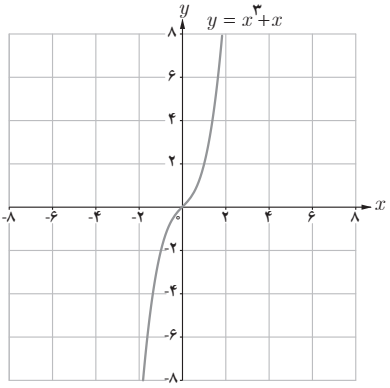
۴ الف) $f'(۰) = ۰$



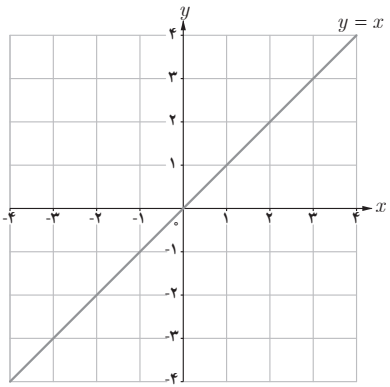
ب) $f'(۲) = ۳$



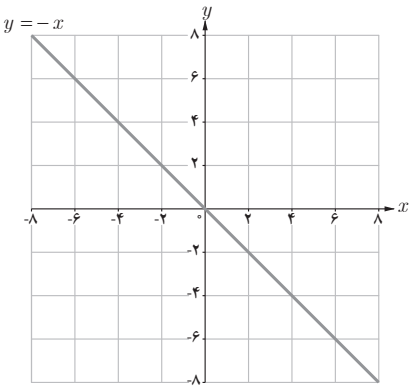
پ) $f'(x) = ۳x^۲ + ۱$



ت) $f'(x) = ۱$



ث) $f'(x) = -۱$

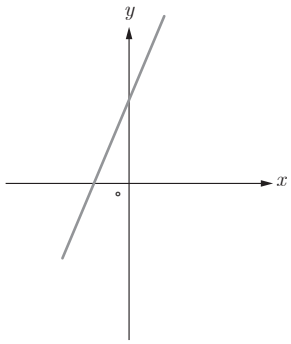


تذکر : توجه شود که این تمرین بازپاسخ است و مقایسه بین پاسخ‌ها چه درست یا نادرست آموزنده است.

۵ الف) با استفاده از شیب خط مماس $f'(-۱) < f'(۰) < f'(۲) < f'(۳)$

ب) $f'(x) = ۲x + ۲ : f'(-۱) = ۰ \ , \ f'(۰) = ۲ \ , \ f'(۲) = ۶ \ , \ f'(۳) = ۸$

پ)



۶ تابع در $x=۱$ پیوسته نیست پس مشتق‌پذیر نمی‌باشد. ($f'_{+}(۱)=۲$, $f'_{-}(۱)=+\infty$)

۷ این مسئله بازپاسخ است، یکی از جواب‌ها می‌تواند $h(x)=x+۲$, $g(x)=x+۱$, $f(x)=x$ باشد.

۸ تابع در نقاط ۲ و ۲− مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

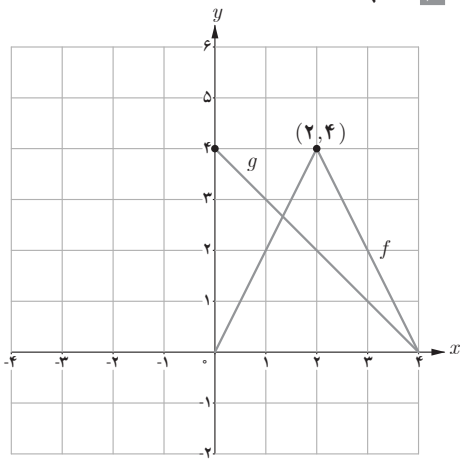
$$f'_{+}(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x-۲}=۴$$

$$f'_{-}(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x-۲}=-۴$$

$$f'_{+}(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^{+}}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^{+}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x+۲}=-۴$$

$$f'_{-}(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^{-}}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^{-}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x+۲}=۴$$

۱۰ الف)



$h'(x)=f'(x)\,g(x)+g'(x)\,f(x)$

$h'(۱)=۲(۳)+(-۱)\,۲=۴$

$h'(۲)=$ وجود ندارد

$h'(۳)=(-۲)۱+(-۱)۲=-۴$

ب)

$$k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

$$k'(۱)=\frac{۲(۳)-(-۱)(۲)}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

$k'(۲)=$ وجود ندارد

$$k'(۳)=\frac{(-۲)۱-(-۱)۲}{۱}=۰$$

۱۱

$$(f+g)'(۱) = f'(۱) + g'(۱) = ۳ + ۵ = ۸$$
$$(۳f + ۲g)'(۱) = ۳f'(۱) + ۲g'(۱) = ۳(۳) + ۲(۵) = ۱۹$$

۱۲ تابع f در $x = ۰$ پیوسته است و $f'_+(۰) = ۱$, $f'_-(۰) = ۰$.

$$f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{x^۲ - ۰}{x - ۰} = ۰$$
$$f'_+(۰) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x - ۰}{x - ۰} = ۱$$

۱۳ الف)

$$f'(x) = ۶x(۲x - ۵)^۳ + ۳(۲)(۲x - ۵)^۲(۳x^۲ - ۴)$$

ب)

$$f'(x) = \frac{(۲x - ۳)(-۳x + ۲) - (-۳)(x^۲ - ۳x + ۱)}{(-۳x + ۲)^۲}$$

پ)

$$f'(x) = \frac{۳}{۲\sqrt{۳x + ۲}}(x^۳ + ۱) + ۳x^۲(\sqrt{۳x + ۲})$$

ت)

$$f'(x) = \frac{۹(\sqrt{x}) - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x - ۲)}{x}$$

درس سوم

آهنگ تغییر

اهداف درس

هدف کلی : بررسی آهنگ تغییر و رابطه آن با مشتق

اهداف جزئی

- ❑ تعبیر هندسی و فیزیکی آهنگ تغییر
- ❑ محاسبه آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و تفاوت آنها
- ❑ کاربردهای آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر
- ❑ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای
- ❑ اتصال بین آهنگ لحظه‌ای تغییر و مشتق

پیش‌نیازها

- ❑ آشنایی با خارج قسمت تفاضلی
- ❑ آشنایی با مشتق
- ❑ آشنایی با مفاهیم اولیه سرعت

روش تدریس

در این درس آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای و کاربردهای آن معرفی شده است. مثال‌های متنوع برای دانش‌آموزان ارائه شده است. **توجه شود که آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.**

با توجه به آنکه دانش‌آموزان در درس فیزیک۳ پایه دوازدهم با مفهوم سرعت لحظه‌ای به طور شهودی آشنا می‌شوند، فرصتی مناسب فراهم می‌شود تا به مفهوم سرعت لحظه‌ای از منظر ریاضی با دقت بیشتری پرداخته شود. بهتر است این یادآوری و ارتباط با درس فیزیک به دانش‌آموزان یادآوری شود.

کار در کلاس صفحهٔ ۹۵

$$F < B < E < D < A < C$$

کار در کلاس صفحهٔ ۹۶

الف) $\frac{f(۲۵)-f(۰)}{۲۵}=\frac{۷\sqrt{۲۵}+۵۰-۵۰}{۲۵}=\frac{۳۵}{۲۵}=\frac{۷}{۵}=۱/۴cm/M$

ب) $f'(x)=\frac{۷}{۲\sqrt{x}}\ ;\ f'(۲۵)=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷\ ,\ f'(۴۹)=\frac{۷}{۱۴}=۰/۵\rightarrow f'(۴۹)<f'(۲۵)$

پ) $\frac{f(۳۶)-f(۱۶)}{۳۶\quad ۱۶}=\frac{۹۵-۸۰}{۲۰}=\frac{۱۵}{۲۰}=۰/۷۵\ cm/M$

کار در کلاس صفحهٔ ۹۹

الف) $h'(t)=-۱۰t+۴۰$

$h'(۰)=۴۰\ m/s\ ,\ h'(۸)=-۴۰\ m/s$

ب) $\frac{h(۸)-h(۵)}{۸-۵}=\frac{((-۵)(۸)^{۲}+۴۰(۸))-((-۵)(۵)^{۲}+۴۰(۵))}{۳}=\frac{-۷۵}{۳}=-۲۵m/s$

پ) $h'(t)=-۱۰t+۴۰=۳۵\rightarrow t=۰/۵s$

$h'(t)=-۱۰t+۴۰=-۳۵\rightarrow t=۷/۵s$

حل تمرین‌های صفحه ۹۹ کتاب درسی

۱

الف) $\frac{T(۱۲)-T(۸)}{۱۲-۸}=\frac{۱۹-۱۱}{۴}=۲C/h$

ب) $\frac{T(۱۸)-T(۱۲)}{۱۸-۱۲}=\frac{۹-۱۹}{۶}=-۱/۶۷C/h$

پ) از صبح ساعت ۸ تا ۱۲ درجه حرارت با سرعت متوسط ۲ سانتی‌گراد بر ساعت در حال افزایش است و از ساعت ۱۲ تا ۱۸ درجه حرارت با سرعت متوسط ۱/۶۷- سانتی‌گراد بر ساعت در حال کاهش می‌باشد.

۲ الف) شیب خط l سرعت آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در پایان هفته ششم (سرعت لحظه‌ای در $t=۶$) و شیب خط d سرعت متوسط آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در بین هفته‌های چهارم تا ششم (آهنگ تغییر متوسط در بین لحظات ۴ تا ۶ هفته) را نشان می‌دهد.

ب) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های $t=۱$ تا $t=۳$ در حال افزایش است.

پ) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های $t=۴$ تا $t=۶$ در حال کاهش می‌باشد.

۳ الف)

$$\frac{N(۱)-N(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۰۰-۰}{۱}=۳۰۰$$

$$\frac{N(۴)-N(۳)}{۴-۳}=\frac{۷۰۰-۶۰۰}{۱}=۱۰۰ \qquad \frac{N(۲)-N(۱)}{۲-۱}=\frac{۴۸۰-۳۰۰}{۱}=۱۸۰$$

ب) با توجه به شیب خطوط قاطع که در حال کم شدن است بنابراین آهنگ تغییر درحال کاهش می‌باشد. هزینه‌های تبلیغات تا یک اندازه مشخص در فروش کالا اثرگذار است. افزایش بیش ازحد هزینه تأثیر بسزایی در میزان فروش ندارد.

۴

$$f'(t)=۲t-۱ \rightarrow ۲t-۱=\frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}$$

$$\rightarrow ۲t-۱=\frac{۳۰-۱۰}{۵}=۴ \rightarrow t=۲/۵s$$

۵ گزینه ج صحیح است. چند پاسخ و استدلال دانش‌آموزان در زیر ارائه شده است.

روش اول : گزینه ج درست است زیرا سرعت تقریبی برابر است با جابه‌جایی به روی زمان

$$v\simeq\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۷/۴-۱۶/۳}{۰/۱}=\frac{۱/۱}{۰/۱}=۱۱$$

روش دوم : گزینه ج صحیح است زیرا سرعت باید بین سرعت متوسط در بازهٔ [۰/۴، ۰/۳] و [۰/۵، ۰/۴] باشد.

$$\frac{۱/۱}{۰/۱}<v<\frac{۱/۲}{۰/۱}\Rightarrow ۱۱<v<۱۲$$

t ثانیه (s)	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

روش سوم : گزینه ج درست است زیرا با محاسبه سرعت‌های متوسط به جواب مسئله می‌رسیم.

۱۳ ، ۱۲/۵ ، ۱۲ ، $\boxed{۱۱/۵}$ ، ۱۱ ، ۱۰/۵

t	ثانیه (s)	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

روش چهارم : گزینه ج صحیح است زیرا

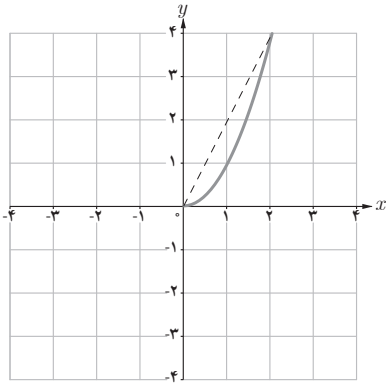
$$v_۱ = \frac{\Delta x_۱}{\Delta t_۱} = \frac{۱۷/۴ - ۱۵/۱}{۰/۵ - ۰/۴} = ۱۱/۵$$

$$v_۲ = \frac{\Delta x_۲}{\Delta t_۲} = \frac{۱۸/۴ - ۱۳/۸}{۰/۶ - ۰/۲} = ۱۱/۵$$

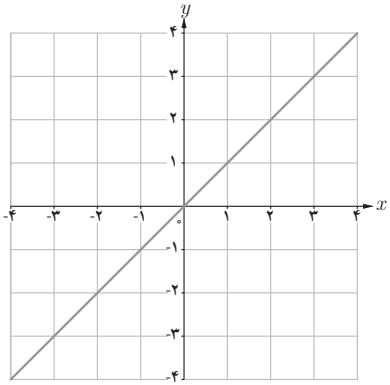
t	ثانیه (s)	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

تذکر : برای تقریب مشتق در یک نقطه مثلاً ۵ می‌توان از آهنگ متوسط تغییر بازه [۵، ۰] یا [۱۰، ۵] یا [۱۰، ۰] استفاده کرد.

۶ الف) نادرست است. مثال نقض : $f(x) = x^{۲}$ در $x = ۰$ شیبی کمتر از آهنگ تغییر متوسط در بازه [۰،۱] دارد.



ب) نادرست است. مثال نقض : $f(x) = x$ تابعی صعودی است ولی آهنگ تغییرات متوسط آن ثابت می‌باشد.



پ) نادرست است. مثال نقض : $f(x) = x^{۲}$ در $x = ۰$ دارای این ویژگی است که $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۰$.

۷

الف) $m(۴) - m(۳) = ۱۳۰ - (۵۴ + \sqrt{۳}) = ۷۶ - \sqrt{۳}$

ب) $m'(t) = \frac{۱}{۲\sqrt{t}} + ۶t^{۲} \; : \; m'(۳) = ۵۴ + \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$

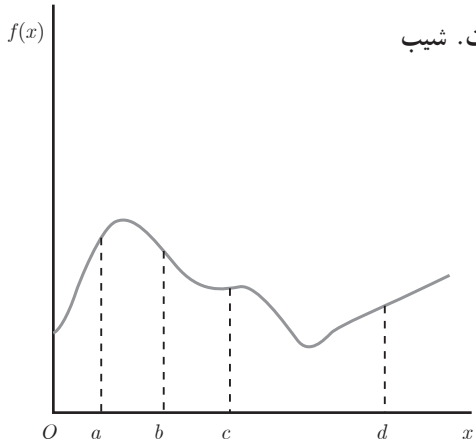
۸

الف) $\frac{V(۱) - V(۰)}{۱ - ۰} = \frac{۳۹/۲ - ۴۰}{۱} = -۰/۸ lit/s$

ب) $\frac{V(۱۰۰) - V(۰)}{۱۰۰ - ۰} \simeq V'(t) \to \frac{۰ - ۴۰}{۱۰۰} = ۸۰(-\frac{۱}{۱۰۰})(۱ - \frac{t}{۱۰۰})$

$\to (۱ - \frac{t}{۱۰۰}) = \frac{۱}{۲} \to \frac{t}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \to t = ۵۰s$

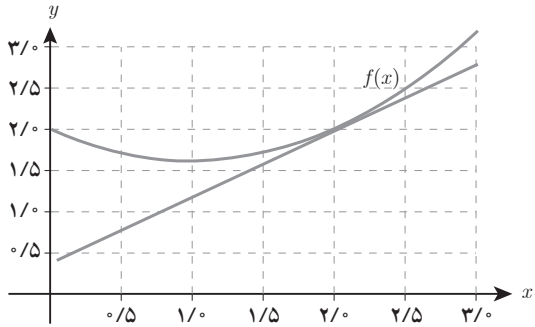
نمونه سؤالات ارزشیابی



۱ فرض کنید نمودار تابع f به صورت زیر است. شیب نمودار در نقاط d، c، b و a را با هم مقایسه کنید.

۲ الف) $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ به ازای $h=-۰/۵$ تقریب بزنید. آیا این مقدار بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از $f'(۲)$ است؟ توضیح دهید.

ب) مقادیری از h را بیابید که $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۰$.

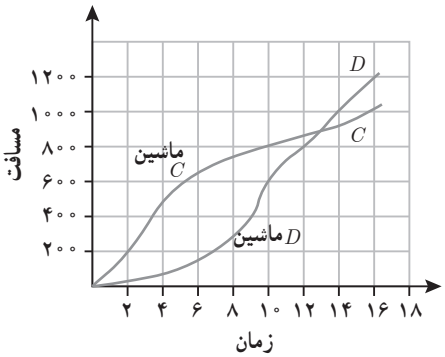


۳ دو ماشین مسابقه‌ای D و C در یک پیست مسیری به‌طور مستقیم در ۱۶ ثانیه مطابق شکل صفحه بعد طی می‌کنند.

الف) سرعت متوسط هر دو ماشین را در ۱۶ ثانیه اول بنویسید.

ب) بازه‌ای با شروع $t=۴$ برای ماشین D بیابید به طوری که سرعت متوسط ماشین D تقریباً مشابه سرعت متوسط ماشین C در بازه $t=۲$ تا $t=۱۰$ باشد.

پ) با استفاده از خطوط قاطع و شیب‌ها نشان دهید ماشین D در بازه $t=۴$ تا $t=۱۰$ دارای سرعت متوسط بالاتری نسبت به ماشین C است.



۴ فرض کنید $f(۰)=۰$، درستی یا نادرستی تعیین کنید.

الف) اگر برای هر x ، $f(x)\leq x$، آنگاه $f'(x)\leq ۱$.

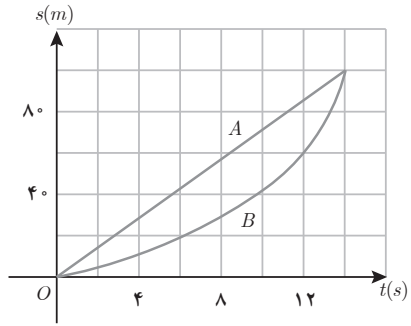
ب) اگر برای هر x ، $f'(x)\leq ۱$ ، آنگاه $f(x)\leq x$.

۵ نمودار زیر تابع موقعیت دو دوندهٔ B و A در یک مسابقه دو ۱۰۰ متر را نشان می‌دهد.

الف) چگونگی حرکت دونده‌ها را مقایسه و تشریح کنید.

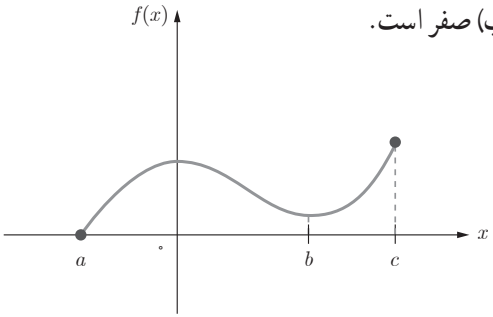
ب) در چه زمانی تقریباً فاصله بین دو دونده بیشترین است؟

پ) در چه زمانی تقریباً سرعت هر دو دونده یکسان است؟

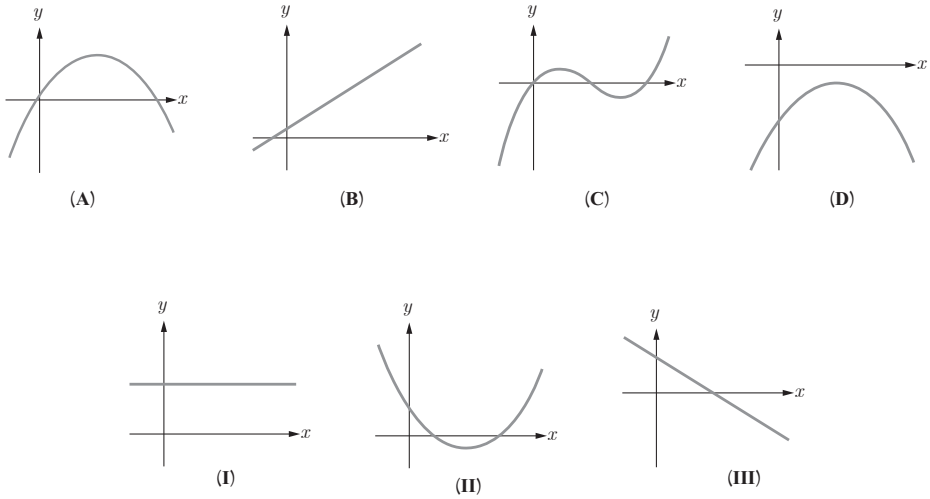


۶ برای تابع رسم شده در شکل زیر بازه یا نقاطی روی محور طول‌ها بیابید که آهنگ تغییر $f(x)$ نسبت به x :

الف) مثبت ب) منفی پ) صفر است.

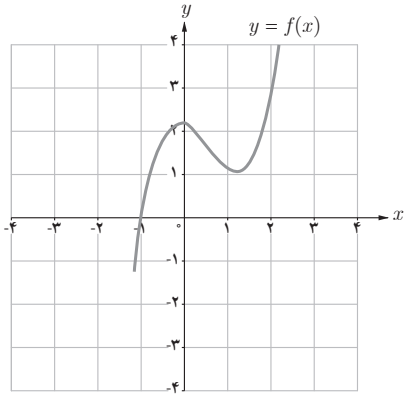


۷ توابع D، C، B و A را به مشتقات آنها III، II و I نظیر کنید.



۸ بشکه‌ای حاوی یک مایع است که در پایین آن سوراخی وجود دارد و مایع درحال خروج از آن می‌باشد. حجم مایع درون بشکه درحال کاهش است و از رابطه $V(t)=۱۰(۲-\frac{۱}{۶۰}t)^۲$ پیروی می‌کند. سرعت خروج مایع در $t=۴۰$ را محاسبه کنید.

۹ از روی شکل خارج قسمت تفاضلی $\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ را تفسیر کنید.



الف) $f(۱)$ به چه معنی است؟

ب) $f(۱+h)$ به چه معنی است؟ مثلاً برای $h=۰/۲$؟

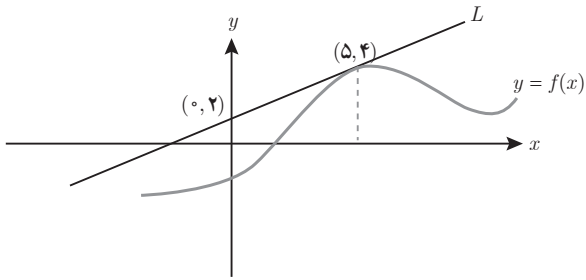
پ) $۱+h$ به چه معنی است؟

ت) $۱+h$ ، $f(۱)$ و $f(۱+h)$ را روی نمودار مشخص کنید.

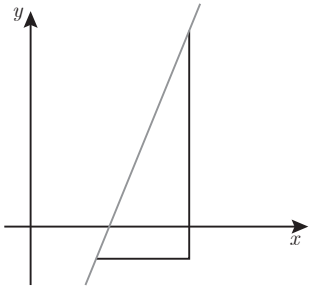
ث) از روی شکل حد $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ را تفسیر کنید.

ج) مقدار حد $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ را برآورد کنید.

۱۰ فرض کنید خط L مماس بر نمودار تابع f در نقطه (۵,۴) است. $f(۵)$ و $f'(۵)$ را به دست آورید.



۱۱ فرض کنید P و Q دو نقطه دلخواه روی نمودار باشند و تغییرات طول‌های آنها ۸ و تغییرات عرض‌های آنها y باشد. اگر بین x و y رابطهٔ $y=mx+b$ برقرار باشد، مقدار m را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.



۱۲ مشتق بگیرید.

۱) $y = x^{۴} - ۳x + ۵$

۲) $y = (x+۱)(۴x - x^{۲}) + x$

۳) $y = (x^{۲} - ۳x)^{۳}(x+۲)$

۴) $y = (۸x^{۳} - x + ۵)^{۲}$

۵) $y = \dfrac{۲x - ۵}{x^{۲}}$

۶) $y = \dfrac{۴x^{۳} - ۲x^{۲} + ۱}{x + ۳}$

۱۳ آیا تابع‌های زیر در نقطهٔ مشخص شده خط مماس دارند؟ اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف) $f(x) = x^{۳}$ در $x = ۰$

ب) $f(x) = |x|$ در $x = ۱$

۱۴ در تابع $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر روی بازهٔ [۲/۵۶، ۲/۲۵] از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱۵ معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود به‌صورت $s(t)=-۵t^۲+۲۰t$ است. سرعت لحظه‌ای این گلوله در زمان برخورد با زمین چند متر بر ثانیه است؟

۱۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $۲+h$ تغییر می‌کند برابر $\frac{۸}{۹}$ است. h کدام است؟

۱۷ حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه ، برحسب لیتر برابر است با :

$$V(t)=۲۵۰\,(۱۶-t)^۲$$

آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است و آن را توصیف کنید.

۱۸ در تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۱ & x\geq ۱\\ x^۲+۱ & x<۱\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h^۲)-f(۱)}{h^۲}$ چقدر است؟

۱۹ مشتق تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x=۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱)=۰$، $f'(۱)=-۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۲۰ مقدار مشتق عبارت $y=\frac{x}{۱+x^۲}$ به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ چقدر است؟

۲۱ مقادیر a و b را به‌قسمی تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}(x+۱)^۳ & x\leq ۰\\ ax+a+b & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد.

۲۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax-a & x<۱\\ x^۲-x & x\geq ۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟

۲۳ فرض کنید تابع f در $x=۱$ مشتق پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)}{h}=۳$ ، مقدار $f(۱)$ و $f'(۱)$ را به‌دست آورید.